



**Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral,**

**Objetivo específico No. 2: Desarrollo de un modelo de alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad**

Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania y Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth

Departamento de Ciencias de la Tierra y de la Construcción

Carrera en Tecnologías Geoespaciales

Trabajo de integración curricular, previo a la obtención del título de Ingeniera en

Tecnologías Geoespaciales

PhD. Luna Ludeña, Marco Patricio

8 de marzo del 2022



GUAMAN\_DUENAS\_MIC Profesionalizante.pdf

Scanned on: 17:54 March 11, 2022 UTC



Overall Similarity Score



Results Found



Total Words in Text

Identical Words	332
Words with Minor Changes	48
Paraphrased Words	93
Omitted Words	0



Firmado electrónicamente por:

**MARCO  
PATRICIO LUNA  
LUDEÑA**

.....  
**Ing. Luna Ludeña, Marco Patricio, PhD.**

**DIRECTOR**



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN  
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES**

**CERTIFICACIÓN**

Certifico que el trabajo de integración curricular, **“Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral”**, Objetivo específico No. 2: **“Desarrollo de un modelo de alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad”** fue realizado por las señoritas **Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania y Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth**, el cual ha sido revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí, 08 de marzo del 2022



Firmado electrónicamente por:  
**MARCO  
PATRICIO LUNA  
LUDENA**

.....  
**Ing. Luna Ludeña, Marco Patricio, PhD.**

C. C.: 1102596044



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN  
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES**

**RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA**

Nosotras, **Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania y Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth**, con cédulas de ciudadanía n° 1750557975, 1725163081 declaramos que el contenido, ideas y criterios del trabajo de integración curricular: **“Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral”**, **Objetivo específico No. 2: “Desarrollo de un modelo de alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad”** es de nuestra autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos, y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 08 de marzo del 2022

Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania

C.C.: 1750557975

Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth

C.C.: 1725163081



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN  
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Nosotras, **Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania** y **Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth**, con cédulas de ciudadanía n° 1750557975, 1725163081 autorizamos a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de integración curricular: **“Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral”**, Objetivo específico No. 2: **“Desarrollo de un modelo de alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad”** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de nuestra responsabilidad.

Sangolquí, 08 de marzo del 2022

Dueñas Chicaiza, Jessica Stephania

C.C.: 1750557975

Guamán De la Torre, Tamia Elizabeth

C.C.: 1725163081

## DEDICATORIA

“Con la bendición de Dios he podido evidenciar como poco a poco con el pasar del tiempo, uno de mis sueños más grandes se ha hecho realidad, quiero dedicar este logro a mi mami Fabiola quien con esfuerzo y dedicación siempre me supo proveer de todo lo necesario para poder alcanzar esta meta muy importante, además de siempre tener las palabras correctas para motivarme a tomar muchos retos en mi vida. A mi abuelita Magdalena por siempre darme palabras de aliento en los momentos más difíciles, por confiar plenamente en mis capacidades y sobre todo por cuidar de mí, desde mi niñez. A mi pareja Fernando por compartir conmigo sus conocimientos y motivarme siempre que lo necesitaba. A mi familia en general compuesta por mi hermana, abuelito, primas y tíos por haber formado parte de este sueño que ahora puedo decir ha sido cumplido”.

-Jessica Dueñas-

“A Dios, por ser mi guía en todos los años de mi vida y por tantas bendiciones. A mis padres Germán y Virginia quienes me han criado con amor y han sido mi apoyo incondicional, un ejemplo para mí en todo momento, y me han hecho sentir orgullosa de ser kichwa Otavalo Kitu Kara. A mis hermanos Sisa y Sayri que me han acompañado y ayudado cada quien a su manera para convertirme en la persona que soy. A todos mis familiares de Imbabura y Llano Grande que me han dado cariño y han formado parte de mi vida. A mis amigos que han compartido conmigo en la universidad, las risas, preocupaciones y momentos de alegría”.

-Tamia Guamán-

## AGRADECIMIENTO

“Agradezco a Dios por bendecirme con la compañía de todos y cada uno de los miembros de mi familia, agradezco efusivamente a mi madre que me brindó su apoyo económico y moral durante la elaboración de este proyecto. A mi abuelita que desde niña me enseñó a actuar con perseverancia y humildad en cada etapa de mi vida. A mi padre que a pesar de la distancia me brindó palabras de aliento y depositó toda su confianza en mí. A mis profesores que con ahínco me compartieron sus conocimientos para enriquecer mi vida profesional. A mis amigos de la universidad que hicieron que este camino sea más agradable de recorrer”.

-Jessica Dueñas-

“A mi papi Germán por su alegría y siempre confiar en mí, enseñarme a cultivar mi mente y darme paz cuando más lo necesitaba. A mi mami Virginia, por su amor y sacrificio para que yo crezca como una persona feliz. A mi ñaña Sisa por ser un ejemplo y ayudarme en los momentos difíciles, a mi ñaño Sayri por sus reflexiones sobre la vida y preocuparte por mí. A mi bisabuelita, abuelitos, tíos y primos, en especial a Luchito por toda su ayuda desde que estaba en la escuela. A Dani, Vane, Anaís, Erick, Eunice, Julio, Chelo, Edi, Dillan, Majo y Emilio por haber compartido conmigo en la universidad experiencias de todo tipo que siempre llevaré en mi corazón. A Jessy, por haberme animado y querer hacer este trabajo juntas. A todos mis maestros de la Carrera por despertar en mí el interés de seguir aprendiendo y ser una mejor profesional.”

-Tamia Guamán-

“Agradecemos al Dr. Marco Luna por sus enseñanzas, sus consejos de vida, sus palabras de motivación durante el proyecto que nos permitieron arrancar con la mejor actitud, por solventar

nuestras dudas que en el camino se presentaron, por el seguimiento que le dio a nuestro trabajo y de esta manera poder alcanzar los mejores resultados posibles".

Al Ing. César Leiva por su ayuda con los equipos de nivelación que fueron fundamentales para realizar este trabajo, sus enseñanzas como profesor y despejar nuestras dudas en clase, sus recomendaciones y toda su ayuda. Al Ing. Alberto Leiva por sus palabras de aliento en nuestro viaje a Cuenca".



## Índice de contenido

CERTIFICACIÓN .....	3
RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA.....	4
AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN .....	5
DEDICATORIA .....	6
AGRADECIMIENTO .....	7
Índice de contenido.....	9
Índice de tablas.....	13
Índice de figuras.....	15
Resumen .....	18
Abstract.....	19
Capítulo I. Problema .....	20
Antecedentes .....	20
Planteamiento del problema .....	23
Justificación e importancia.....	24
Descripción del área de estudio .....	25
Objetivo General.....	27
Objetivos Específicos.....	27
Hipótesis .....	27
Metas .....	27
Capítulo II. Marco Teórico .....	28

	10
Sistema de alturas.....	28
Altura ortométrica.....	28
Altura elipsoidal .....	29
Altura nivelada .....	29
Altura geoidal u ondulación geoidal .....	29
Nivelación geométrica .....	31
Nivelación geométrica compuesta desde el medio.....	31
Precisiones para altimetría en Ecuador.....	32
Posicionamiento GNSS .....	33
Posicionamiento Diferencial.....	33
Método Estático .....	33
Método Estático Rápido .....	34
Principio de mínimos cuadrados.....	35
Descomposición general de una observable .....	35
Modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación.....	36
Modelo funcional.....	38
Ajuste por mínimos cuadrados colocación .....	38
Modelo estocástico .....	39
Predicción de la señal completa.....	41
Intervalo de confianza para el 95% .....	42
Cokriging .....	43

Semivariograma .....	44
Modelos Geoidales.....	45
Modelos Gravimétricos Mundiales EGM96 y EGM08.....	45
Modelo geoidal geométrico de Ecuador Continental .....	46
Validación Cruzada .....	46
Capítulo III. Metodología .....	48
Obtención de datos .....	48
Datos de posicionamiento GNSS.....	49
Datos de altura nivelada .....	50
Método de Mínimos Cuadrados Colocación .....	51
Análisis Exploratorio de Datos .....	51
Depuración de datos.....	54
Selección del modelo matemático.....	57
Cálculo de la función covarianza empírica de la señal .....	61
Cálculo de la función covarianza del ruido .....	68
Filtrado de las observaciones .....	69
Ajuste del modelo matemático por Mínimos Cuadrados Colocación .....	69
Predicción de valores de ondulación geoidal .....	70
Representación gráfica del modelo de ondulación geoidal .....	70
Cokriging Ordinario.....	72
Obtención de datos de ondulación geoidal .....	72

Selección de la variable auxiliar .....	75
Obtención de los modelos teóricos de semivarianza.....	76
Predicción de valores de ondulación geoidal .....	81
Trabajo de campo .....	81
Nivelación geométrica.....	81
Posicionamiento GNSS.....	83
Descarga y procesamiento de líneas base .....	84
Capítulo IV. Análisis De Resultados y Discusión.....	88
Análisis de resultados.....	88
Discusión.....	98
Capítulo V. Conclusiones y Recomendaciones .....	101
Conclusiones.....	101
Recomendaciones.....	102
Referencias .....	104
Anexos.....	111

## Índice de tablas

<b>Tabla 1</b> Tiempo de posicionamiento GNSS en función de la distancia en km .....	34
<b>Tabla 2</b> Resumen estadístico de ondulación geoidal en el área de estudio .....	51
<b>Tabla 3</b> Estadísticos de cada modelo matemático con 60 datos .....	56
<b>Tabla 4</b> Parámetros estadísticos de cada modelo matemático con 51 datos .....	60
<b>Tabla 5</b> Parámetros del modelo matemático 2.....	60
<b>Tabla 6</b> Número de pares de cada intervalo formado con $h$ óptimo = 0.0288288 .....	62
<b>Tabla 7</b> Covarianzas empíricas de ondulación geoidal calculadas en 51 puntos del área de estudio .....	62
<b>Tabla 8</b> Estadísticos de cada modelo matemático que se ajusta a la covarianza empírica .....	68
<b>Tabla 9</b> Parámetros del modelo 4.....	68
<b>Tabla 10</b> Parámetros del modelo matemático 2 por Mínimos Cuadrados Colocación.....	70
<b>Tabla 11</b> Coeficiente de correlación de la ondulación geoidal calculada con respecto a otros modelos .....	76
<b>Tabla 12</b> Parámetros de modelos de semivarianza teórico de la variable principal.....	78
<b>Tabla 13</b> Parámetros de modelos de semivarianza teórico de la variable cruzada .....	79
<b>Tabla 14</b> Modelos de semivarianza teóricos probados para la variable auxiliar .....	81
<b>Tabla 15</b> Alturas niveladas obtenidas .....	83
<b>Tabla 16</b> Puntos de validación para los modelos de predicción de la ondulación geoidal mediante MCC y Cokriging .....	88
<b>Tabla 17</b> Estadísticos en los puntos de validación con un $h$ óptimo de 0.0288288 grados y diferentes variables mediante el método de MCC .....	89
<b>Tabla 18</b> Ondulación geoidal estimada mediante MCC con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación .....	90
<b>Tabla 19</b> Validación cruzada de MCC con distintos modelos matemáticos.....	90

<b>Tabla 20</b> Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo EGM08 con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación .....	92
<b>Tabla 21</b> Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo EGM96 con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación .....	93
<b>Tabla 22</b> Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo del IGM con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación .....	94
<b>Tabla 23</b> Resultados de la validación cruzada entre modelos de alturas geoidales con MCC y Cokriging Ordinario .....	96
<b>Tabla 24</b> Estimaciones de ondulación geoidal con distintos modelos y sus errores en cada punto de validación .....	97

## Índice de figuras

<b>Figura 1</b> Ubicación del área de estudio .....	26
<b>Figura 2</b> Sistemas de alturas .....	28
<b>Figura 3</b> Altura nivelada .....	29
<b>Figura 4</b> Ángulos de la Tierra .....	30
<b>Figura 5</b> Nivelación geométrica compuesta desde el medio .....	32
<b>Figura 6</b> Posicionamiento Diferencial .....	33
<b>Figura 7</b> Función obtenida a través del modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación ...	37
<b>Figura 8</b> Semivariograma Experimental (SEMEXP) y Teórico (MODELO) .....	45
<b>Figura 9</b> Diagrama de caja de la ondulación geoidal en la zona de estudio.....	52
<b>Figura 10</b> Histograma de la ondulación geoidal muestreada en la zona de estudio.....	53
<b>Figura 11</b> Gráfico de dispersión Longitud-Ondulación geoidal.....	54
<b>Figura 12</b> Gráfico de dispersión Latitud-Ondulación geoidal.....	54
<b>Figura 13</b> Ajuste de curva a los 60 datos según el modelo 3 con la aplicación Curve Fitting ....	56
<b>Figura 14</b> Identificación de los puntos más cercanos en el conjunto de datos.....	57
<b>Figura 15</b> Modelo matemático 1 con 51 datos .....	58
<b>Figura 16</b> Modelo matemático 2 con 51 datos .....	58
<b>Figura 17</b> Modelo matemático 3 con 51 datos .....	59
<b>Figura 18</b> Modelo matemático 4 con 51 datos .....	59
<b>Figura 19</b> Obtención del h óptimo.....	61
<b>Figura 20</b> Función covarianza polinomial de orden 1.....	64
<b>Figura 21</b> Función covarianza polinomial de orden 2.....	64
<b>Figura 22</b> Función covarianza polinomial de orden 3.....	65
<b>Figura 23</b> Función covarianza polinomial de orden 4.....	65
<b>Figura 24</b> Función covarianza polinomial de orden 5.....	66

<b>Figura 25</b> Función covarianza polinomial de orden 6.....	66
<b>Figura 26</b> Función covarianza polinomial de orden 7.....	67
<b>Figura 27</b> Función covarianza polinomial de orden 8.....	67
<b>Figura 28</b> Modelo matemático por Mínimos Cuadrados Colocación .....	69
<b>Figura 29</b> Proceso de descarga de datos de ondulación geoidal del modelo global EGM96 ....	72
<b>Figura 30</b> Descarga de resultados.....	73
<b>Figura 31</b> Archivo descargado.....	73
<b>Figura 32</b> Aplicación de escritorio para cálculo de altura geoidal del Ecuador Continental .....	74
<b>Figura 33</b> Archivo generado por la aplicación de escritorio .....	75
<b>Figura 34</b> Modelos teóricos de semivarianza probados para la variable principal.....	77
<b>Figura 35</b> Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarizanza elegido para la variable principal .....	77
<b>Figura 36</b> Modelos teóricos de semivarianza probados para la variable cruzada .....	78
<b>Figura 37</b> Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarizanza elegido para la variable cruzada.....	79
<b>Figura 38</b> Modelos de semivarianza teóricos probados para la variable auxiliar.....	80
<b>Figura 39</b> Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarizanza elegido para la variable auxiliar .....	80
<b>Figura 40</b> Planificación realizada para la salida de campo .....	82
<b>Figura 41</b> Descarga de datos de nivelación del tramo BM3-PP1 .....	82
<b>Figura 42</b> Nivelación en campo .....	83
<b>Figura 43</b> Posicionamiento GNSS en el punto PP2.....	84
<b>Figura 44</b> Ingreso de coordenadas a TBC.....	85
<b>Figura 45</b> Ingreso de los datos correspondientes a los móviles.....	86
<b>Figura 46</b> Procesamiento de líneas base .....	86
<b>Figura 47</b> Informe de lista de puntos .....	87



<b>Figura 48</b> Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 1 .....	91
<b>Figura 49</b> Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 2 .....	91
<b>Figura 50</b> Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 3 .....	92
<b>Figura 51</b> Modelo de predicción de ondulación geoidal obtenido por Mínimos Cuadrados	
Colocación .....	95

## Resumen

Obtener las alturas referidas al nivel medio del mar utilizando métodos convencionales como nivelación geométrica conlleva largas horas en campo y una gran cantidad de recursos como son la contratación de personal técnico y adquisición o alquiler de varios instrumentos de nivelación, por lo tanto, el objetivo de este proyecto es desarrollar un modelo de alturas geoidales aplicando técnicas geoestadísticas como Mínimos Cuadrados Colocación y Cokriging en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral que será de utilidad para la obtención de alturas niveladas que son necesarias para cualquier obra de ingeniería. Para la generación de los modelos se emplearon 51 datos de posicionamiento GNSS y altura nivelada, los mismos que fueron validados con 9 puntos de los cuales 4 formaron parte del conjunto de datos inicial y fueron excluidos tras el análisis exploratorio y 5 datos fueron obtenidos mediante trabajo en campo. Finalmente, el modelo obtenido mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación fue el que dio mejores resultados, con un RMSE de 15.34 cm y un RSR de 0.3731, mientras que con Cokriging ordinario, sin dejar de ser un modelo adecuado para la zona de estudio, se obtuvo un RMSE de 18.38 cm y un RSR de 0.4469.

### **PALABRAS CLAVE:**

- **ONDULACIÓN GEOIDAL**
- **MÍNIMOS CUADRADOS COLOCACIÓN**
- **COKRIGING ORDINARIO**
- **NIVEL MEDIO DEL MAR**
- **ALTURA NIVELADA**

### **Abstract**

Obtaining the heights referred to the mean sea level using conventional methods such as geometric leveling entails long hours in the field and a large amount of resources such as the hiring of technical personnel and the acquisition or rental of various leveling instruments, therefore, the objective of this project is to develop a model of geoid heights applying geostatistical techniques such as Least Squares Collocation and Cokriging in the area of influence of the Paute-Integral Hydroelectric Complex that will be useful for obtaining level heights that are necessary for any engineering work. For the generation of the models, 51 GNSS positioning and leveled height data were used, the same ones that were validated with 9 points of which 4 were part of the initial data set and were excluded after the exploratory analysis and 5 data were obtained through fieldwork. Finally, the model obtained using the Least Squares Collocation method was the one that gave the best results, with an RMSE of 15.34 cm and an RSR of 0.3731, while with ordinary Cokriging, while still being an adequate model, an RMSE of 18.38 cm and an RSR of 0.4469 were obtained. of 0.3731, while with ordinary Cokriging, while still being a suitable model for the study area, an RMSE of 18.38 cm and an RSR of 0.4469 were obtained.

### **KEYWORDS:**

- **GEOID HEIGHT**
- **LEAST SQUARES COLLOCATION**
- **ORDINARY COKRIGING**
- **MEAN SEA LEVEL**
- **LEVEL HEIGHT**

## Capítulo I. Problema

### Antecedentes

La aplicación de la tecnología GNSS (*Global Navigation Satellite System*) en el campo de la ingeniería ha ido creciendo considerablemente, ya que mediante posicionamiento satelital es posible determinar las coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura elipsoidal) de cualquier punto ubicado sobre la superficie terrestre; sin embargo, la componente vertical que se obtiene mediante esta metodología no es útil para distintas aplicaciones de ingeniería por su carácter geométrico, por lo que existe la necesidad de determinar una altura de carácter físico, como es la altura ortométrica y para lograr esta conversión es fundamental que se considere la variable ondulación geoidal en el punto de interés, la cual se obtiene mediante la diferencia entre las alturas elipsoidales y ortométricas (Tierra, 2009).

Para la determinación de las alturas ortométricas se requiere del conocimiento del valor medio de la gravedad; sin embargo, para fines prácticos y en este estudio se considerará al geoide como una superficie aproximada al nivel medio del mar. Se han desarrollado diferentes métodos para calcular la ondulación geoidal, uno de ellos y que es común en Ecuador, es el empleo de los modelos geopotenciales EGM96 o EGM08, pero la precisión que se alcanza con esta metodología no es la más óptima, de manera que se crea la necesidad de generar modelos locales para la estimación de la ondulación geoidal por medio de la geoestadística como una de las mejores alternativas para su obtención (Palacios, 2019). En los últimos años se han llevado cabo varios estudios en los que se evidencia la utilidad del empleo de técnicas geoestadísticas como Mínimos Cuadrados Colocación (MCC), Cokriging y otras metodologías de vanguardia para modelar la ondulación geoidal, entre los cuales se pueden citar los siguientes:

Erol & Çelik (2004), en su artículo describen la aplicación de técnicas de interpolación como Ponderación Inversa de la Distancia (IDW) y Kriging geoestadístico para la obtención de un modelo de alturas geoidales en un área local de Turquía a partir de datos GPS/nivelación

adecuadamente distribuidos, el cual sería destinado para servir a aplicaciones geodésicas prácticas como la producción de mapas a gran escala, entre otras labores de ingeniería. El modelo geoidal nacional TG99A, presentaba precisiones débiles en algunos sitios, razón por la cual se planteó la necesidad de crear modelos geoidales locales, siendo el obtenido mediante Kriging el que arrojó mejores resultados.

Kavzoglu & Saka (2005) plantearon el uso de las Redes Neuronales Artificiales (NNA) para el modelamiento de las ondulaciones geoidales en lugar del empleo de métodos geoestadísticos como Mínimos Cuadrados Colocación para Estambul, Turquía, ya que han demostrado ser más acertadas cuando existen datos ruidosos o faltantes; finalmente la ondulación geoidal obtenida presentó buenas precisiones comparables con MCC.

Ligas & Szombara (2017) pretendieron determinar la variante de predicción con mejor rendimiento entre Kriging (univariado) y Cokriging (bivariado), para generar un modelo geoidal local, mediante la combinación de datos GPS/nivelación que cubrían el territorio de Carolina del Sur con datos del modelo geopotencial EGM 2008, presentando una mejora no tan significativa en Cokriging frente a Kriging.

Estrella (2020) en su tesis de maestría tuvo como objetivo generar mediante técnicas geoestadísticas dos modelos locales de predicción espacial de la variable ondulación geoidal en software libre y comercial para el municipio de Madrid, para este estudio se llevó a cabo un análisis exploratorio de datos, análisis estructural de un variograma experimental y finalmente el uso del método de interpolación Kriging; para determinar la calidad de los modelos obtenidos fueron comparados entre sí mediante validación cruzada y con el modelo español EGM08-REDNAP que es el modelo gravimétrico oficial para el territorio español, obteniéndose como resultado precisiones menores a 1.2 cm.

Veronez, Thum, & Correa (2006) plantearon un método para obtener ondulaciones geoidales a través de Redes Neuronales Artificiales, como solución a algunos problemas que surgen en la aplicación de métodos como Mínimos Cuadrados; el autor mencionó que los polinomios generados por esta técnica geoestadística son ineficientes al extrapolar los datos fuera del área de estudio. Para el entrenamiento de la red neuronal se utilizaron datos proporcionados por el Instituto Brasileño de Geografía y Estadística que presentaban un error de 0.5 m demostrando además que esta metodología planteada es tolerante a errores y ruidos.

Acero & Serruto (2018) desarrollaron una metodología para obtener un modelo de ondulación geoidal local en la ciudad universitaria UNA-PUNO, mediante Mínimos Cuadrados se determinaron los parámetros de la Ecuación de Regresión Múltiple, siendo la de quinto grado la más óptima para predecir la ondulación geoidal, posteriormente se realizó una comparación de los resultados obtenidos con el modelo global EGM 2008, demostrándose adicionalmente que la aplicación de un modelo local es más óptimo por las altas precisiones alcanzadas.

Llano & Gonzáles (2018), en su proyecto de tesis generaron un modelo digital de elevaciones (MDE) de ondulaciones geoidales con datos GPS/nivelación de una zona de la ciudad de Puno, para el modelamiento se emplearon redes neuronales artificiales de tipo supervisado aplicando el algoritmo backpropagation. Una vez culminada la etapa de entrenamiento, la red neuronal demostró tener la capacidad de predecir las respectivas ondulaciones geoidales en los puntos de interés con altas precisiones.

Echeverría & Tierra (2010), en su artículo explicaron la manera de generar un modelo de ondulaciones geoidales mediante Mínimos Cuadrados Colocación (MCC), a partir de datos GNSS/nivelación dispersos en el Ecuador continental y a través de la aplicación del método geométrico para el cálculo de la ondulación geoidal, le permiten al usuario obtener el valor de esta variable que es fundamental para la posterior conversión de alturas elipsoidales a niveladas, ya sea en un punto o en una grilla de puntos dentro del Ecuador continental.

Carrión, Cogliano, & Tierra (2011) establecieron una metodología para obtener la ondulación geoidal mediante un método de interpolación por medio del entrenamiento supervisado de una Red Neuronal Artificial Multicapa (RNAM) aplicada a datos GPS/nivelación distribuidos en algunas provincias de la región Sierra y Costa del Ecuador.

Araujo, Leiva, & Buenaño (2017) en su artículo determinaron un modelo local para la predicción de la ondulación geoidal para la zona urbana de Quito mediante la aplicación del estadístico Kriging Ordinario, posteriormente el modelo obtenido se compara con los modelos globales EGM96, EGM08 y el modelo local “Neuronal para la predicción de la altura geoidal local en el Ecuador” publicado por el Instituto Geográfico Militar (IGM), finalmente el modelo mostró tener una buena precisión, inferior a 12 cm.

Ballesteros (2021) en su proyecto de titulación generó modelos predictivos de la ondulación geoidal mediante Mínimos Cuadrados Colocación (MCC) y Redes Neuronales para la zona rural del cantón Guayaquil para su posterior comparación, los datos fueron recopilados del “Proyecto Guayaquil” realizado por el IGM. La autora partió de 332 puntos, de los cuales 298 fueron utilizados para la generación de los modelos predictivos, mientras que los 34 restantes fueron empleados en la validación de los modelos obtenidos; finalmente se demostró que los dos modelos son adecuados para la predicción de la ondulación geoidal, ya que las precisiones obtenidas fueron 8.6 y 7.3 cm respectivamente.

### **Planteamiento del problema**

El Complejo Hidroeléctrico Paute es un área donde se llevan a cabo importantes proyectos de ingeniería para los cuales es fundamental conocer puntos con coordenadas tridimensionales. En Ecuador para fines prácticos se utiliza la altura referida al nivel medio del mar cuyo datum vertical se encuentra en “La Libertad” en la provincia de Santa Elena. Para obtener estas alturas, se pueden utilizar modelos geoidales mundiales como el EGM96 o EGM08;

sin embargo, estos modelos pueden tener errores en la ondulación geoidal de hasta 3 m (IGM, 2017).

Generalmente para la obtención de alturas referidas al nivel medio del mar se emplean métodos convencionales como nivelación geométrica que es una de las tareas más costosas en tiempo y dinero, además de su poca eficiencia en el manejo de grandes cantidades de datos por la compleja logística que la caracteriza. En primer lugar, el tiempo de trabajo de campo depende de la distancia a un punto que forme parte de la Red de Control Básico Vertical del IGM, además se requiere un mínimo de cuatro personas considerando el operador del nivel, el encargado de anotar las observaciones y dos personas que se encarguen de las miras, también se deben tomar en cuenta factores climáticos que podrían afectar la visibilidad del operador. Asimismo, se deben considerar factores topográficos, particularmente en la zona de estudio existen lugares donde el acceso es limitado o riesgoso, de manera que este tipo de nivelación no podría realizarse.

### **Justificación e importancia**

Actualmente, se realizan diversos proyectos de ingeniería y construcción para lo cual se necesitan conocer puntos georreferenciados. Uno de los métodos más comunes para obtener estos puntos es el posicionamiento GNSS que es relativamente rápido, pero posee algunas limitaciones como la obtención de alturas geométricas referidas al elipsoide que no son útiles para las aplicaciones de ingeniería, de manera que termina siendo útil solo para el posicionamiento bidimensional.

Para obtener alturas con referencia al nivel medio del mar con alta precisión usualmente se emplean métodos como la nivelación geométrica (diferencial) o la nivelación trigonométrica que son más costosas, conllevan más tiempo y requieren una organización de personal técnico más compleja que el posicionamiento GNSS. Es así como para hallar las coordenadas horizontales y verticales de los puntos se requiere combinar procesos geodésicos y topográficos.



Para lograr la transformación entre las alturas del elipsoide y las alturas ortométricas, se debe conocer la ondulación geoidal (N) del elipsoide. El nivel medio del mar se considera una aproximación cercana al geoide (Rapp, 1991), por lo que este estudio se pretende determinar las alturas niveladas a través de la obtención de un modelo de ondulación geoidal empleando técnicas geoestadísticas de manera que se pueda hallar las coordenadas verticales con respecto al nivel medio del mar en la zona de estudio sin la necesidad de recurrir a técnicas como la nivelación trigonométrica o nivelación geométrica.

Un modelo geoidal local es de gran importancia ya que permitirá determinar en el caso de este estudio las alturas niveladas del área de interés a partir de las alturas elipsoidales obtenidas mediante GNSS evitando de esta manera la ejecución de onerosas técnicas tradicionales de nivelación (geométrica y trigonométrica) en las que generalmente se presentan problemas de acceso a la zona de estudio y además requieren gran demanda de tiempo, equipos y personal calificado.

### **Descripción del área de estudio**

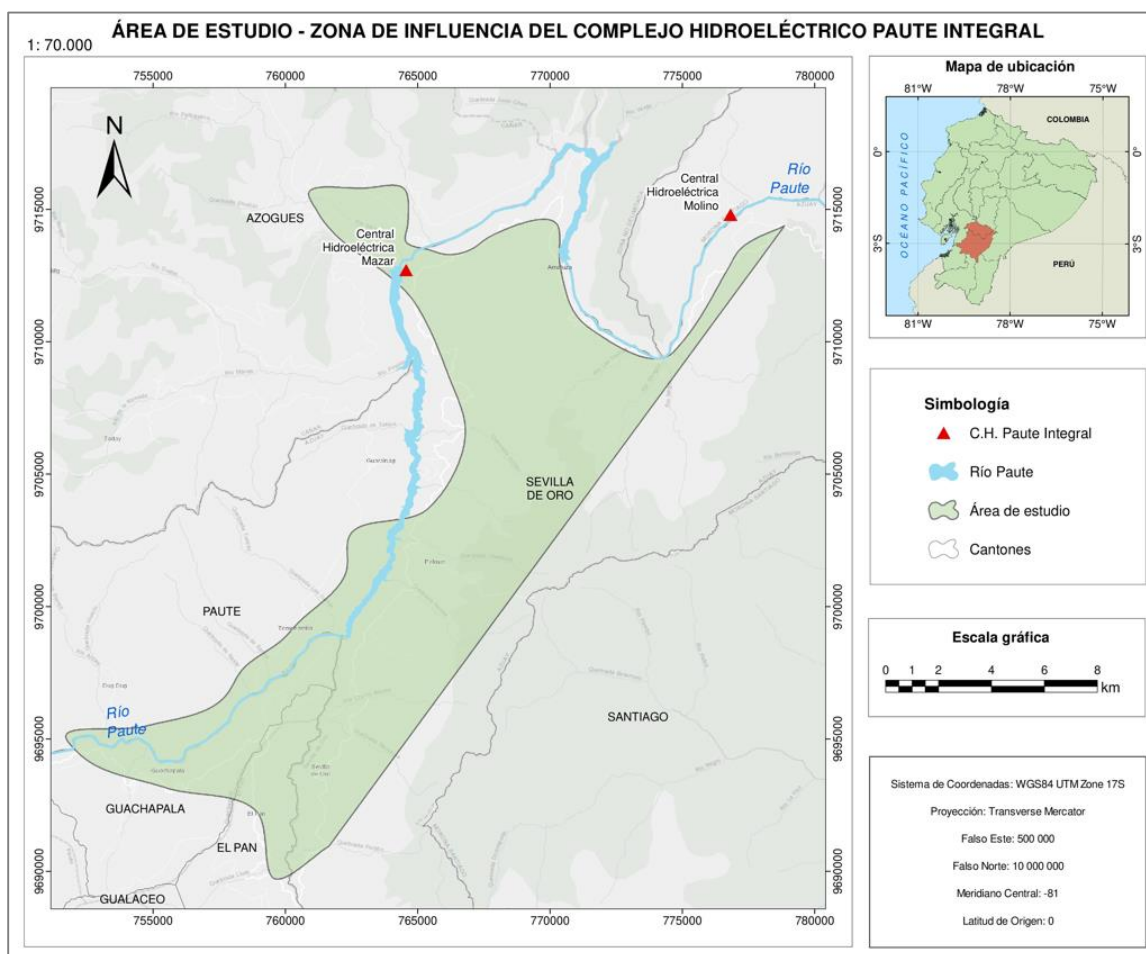
El Complejo Hidroeléctrico Paute Integral se encuentra ubicado en la zona sur del Ecuador en las provincias del Azuay, Cañar y Morona Santiago, está formado, por las centrales Mazar (176 MW), Molino (1076 MW) y Sopladora (487 MW), el cual aprovecha el caudal de la zona media y baja de la cuenca del río Paute con la finalidad de contribuir a la matriz energética del Ecuador (CELEC EP, 2015). Tiene una extensión de 75 kilómetros que va desde la cola del embalse de Mazar hasta la descarga de la Central Sopladora, desde la cota 2200msnm, hasta 600msnm. La topografía de la zona presenta laderas con pendientes pronunciadas, mientras que geológicamente está compuesta por rocas metamórficas con la presencia de depósitos coluviales.

La zona de estudio (Figura 1) se localiza dentro del área de influencia del complejo Hidroeléctrico Paute Integral con un área de 150.32 kilómetros cuadrados donde se encuentran

distribuidos los puntos utilizados para modelar las alturas geoidales con el método de Mínimos Cuadrados Colocación y Cokriging Ordinario. La zona de estudio está dentro de los cantones Paute, Guachapala, El Pan y Sevilla de Oro pertenecientes a la provincia del Azuay y del cantón Azogues perteneciente a la provincia de Cañar.

**Figura 1**

*Ubicación del área de estudio*



## **Objetivos Generales y Específicos**

### ***Objetivo General***

Desarrollar un modelo de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral para la determinación de alturas niveladas.

### ***Objetivos Específicos***

- Modelar las alturas geoidales locales mediante el método geoestadístico de Cokriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad.
- Modelar las alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad.

### **Hipótesis**

Mediante métodos geoestadísticos como Mínimos Cuadrados Colocación y Cokriging es posible obtener modelos de ondulación geoidal de alta precisión.

### **Metas**

- Script elaborado en el software Matlab para la determinación del modelo de alturas geoidales locales mediante el método geoestadístico Mínimos Cuadrados Colocación (MCC).
- Mapa de alturas geoidales locales utilizando el modelo obtenido mediante el método geoestadístico Mínimos Cuadrados Colocación (MCC).

## Capítulo II. Marco Teórico

### Sistema de alturas

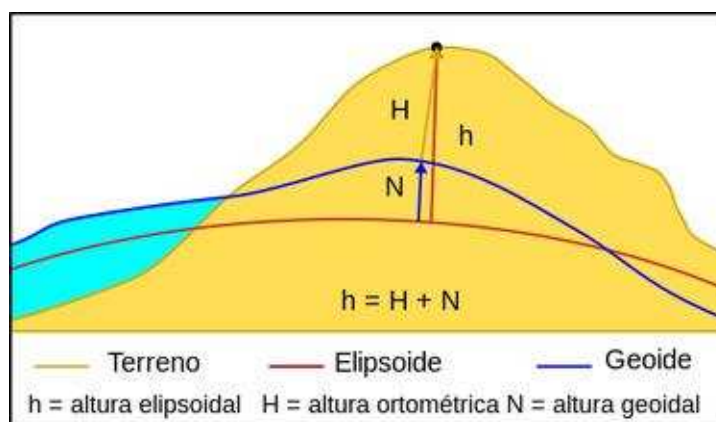
Un sistema de altura es un sistema de coordenadas unidimensional que se emplea con el fin de definir la distancia métrica de algún punto desde una superficie de referencia a lo largo de una trayectoria bien definida, denominada simplemente la altura de ese punto. Si bien parece simple, la altura de un punto se puede definir de muchas maneras sutilmente diferentes, cada una de las cuales proporciona una coordenada de altura diferente para el mismo punto (Featherstone & Kuhn, 2006).

### Altura ortométrica

Es la altura medida a partir del geoide hasta la superficie de la Tierra. El geoide es la superficie equipotencial que sigue el campo gravitatorio terrestre. La altura ortométrica se mide a lo largo de la línea que va en dirección de la gravedad en cualquier punto (Pérez, 2011).

### Figura 2

#### Sistemas de alturas



*Nota.* Tomado de (Efemérides astronómicas, s.f.)

### ***Altura elipsoidal***

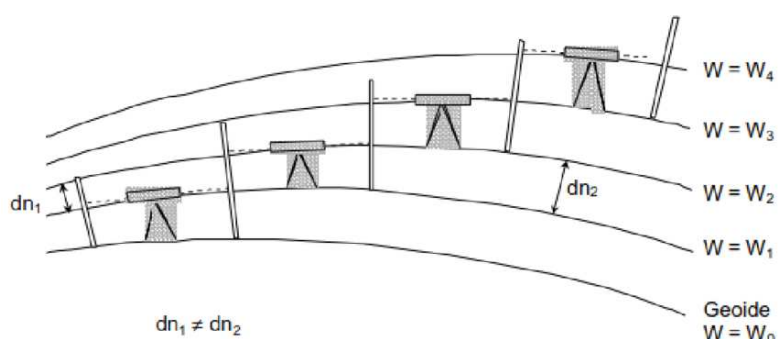
Es la distancia entre la superficie del elipsoide y la superficie terrestre. Esta altura tiene diferencias notables con las alturas ortométricas debido a la variación de la distancia entre el geoide y elipsoide (Pérez, 2011). Es el sistema de altura geodésica más común que no está relacionado de manera directa con la gravedad (Leal & Pérez, 2017).

### ***Altura nivelada***

Es la altura obtenida a través del proceso de nivelación geométrica por medio de métodos ópticos de medición, obteniendo desniveles a partir de un punto con altura nivelada conocida.

### **Figura 3**

#### *Altura nivelada*



*Nota.* Tomado de (Drewes, Sánchez, Blitzkow, & Freitas, 2001)

Las diferencias de nivel observadas cambian de acuerdo con el campo de gravedad del sitio donde se realiza la medición, es por ello que se debe considerar las reducciones del campo de gravedad en caso de que las extensiones de nivelación sean mayores a 10km, pues se empieza a tomar en cuenta la figura elipsoidal de la tierra y las variaciones en el campo de gravedad (Hofmann & Moritz, 2005).

### **Altura geoidal u ondulación geoidal**

Es la distancia entre la superficie del geoide y la del elipsoide.

$$H \cong h - N \quad (1)$$

Donde:

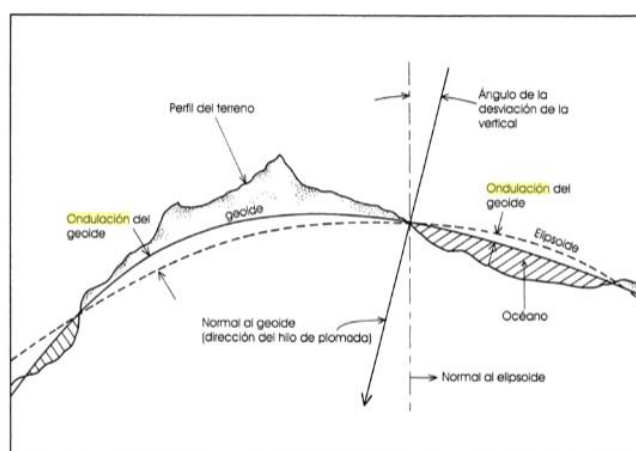
$H$ : Altura ortométrica, que para fines prácticos se la considera similar a la altura referida al nivel medio del mar.

$h$ : Altura elipsoidal, obtenida mediante posicionamiento satelital.

$N$ : Ondulación geoidal.

#### Figura 4

##### Ángulos de la Tierra



*Nota.* Tomado de (Caire, 2002)

Los valores numéricos de las ondulaciones dependen evidentemente del elipsoide particular utilizado. Para un elipsoide de referencia global, las alturas geoidales pueden alcanzar hasta 100 m. La ondulación del geoide  $N$  se conoce al emplear en un ajuste combinado las observaciones de la geodesia satelital (que encamina a alturas elipsoidales) y las de la geodesia terrestre (que conduce a alturas definidas en el campo de gravedad). De manera que, la ondulación geoidal proviene de modelos gravimétricos que demandan conocer de manera precisa al geoide y sus campos de gravedad; sin embargo, la información actual del geoide y sus

campos no son suficientes para modelar toda la superficie, es así que se opta por modelar localmente el geoide (Seeber, 2003).

### **Nivelación geométrica**

La nivelación diferencial o geométrica es un procedimiento topográfico que consiste en establecer un plano de comparación con ayuda de un nivel y tomar las lecturas sobre dos miras aplomadas sobre los puntos que se desea nivelar para determinar la diferencia de nivel que existe entre ambos puntos (López & López-Colina, 2006). Una lectura aditiva, también llamada lectura hacia atrás, es la que se toma sobre una mira colocada sobre un punto de elevación conocida o supuesta, posteriormente al girar el nivel quedando en su campo visual la mira colocada sobre un punto cualquiera, se tiene una lectura sustractiva, llamada también lectura hacia el frente o hacia adelante (Wolf & Ghilani, 2016).

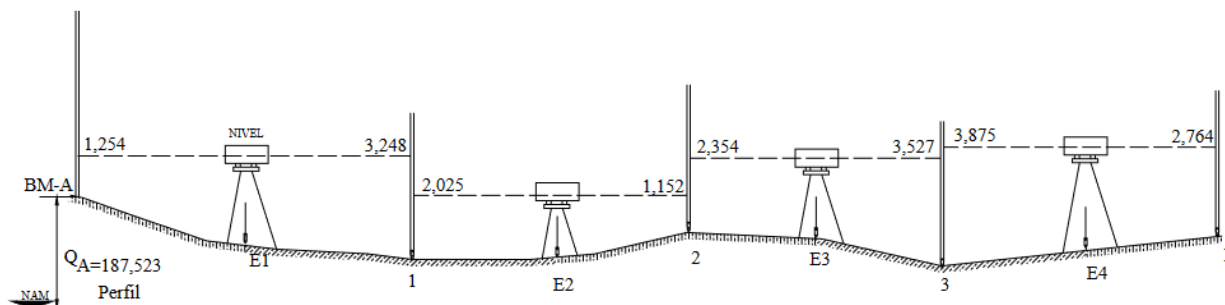
Cuando los puntos cuyo desnivel se pretende hallar están próximos de manera que se estima con una sola estación, la nivelación se denomina simple; en cambio, si los puntos están alejados, es indispensable utilizar estaciones intermedias y la nivelación se denomina compuesta (Casanova, 2002).

### ***Nivelación geométrica compuesta desde el medio***

La nivelación geométrica desde el medio consiste en estacionar el nivel en medio de dos puntos para calcular su desnivel, de manera que la distancia sea equidistante. La nivelación geométrica compuesta desde el medio para calcular el desnivel entre dos puntos A y B implica la aplicación sucesiva de la nivelación geométrica simple desde el medio (Casanova, 2002) tal y como se muestra en la Figura 5, donde el punto A es una Base de Medición (BM) ya que tiene cota conocida; E1, E 2 y E 3 son puntos de estación ubicados en puntos equidistantes a las miras.

**Figura 5**

*Nivelación geométrica compuesta desde el medio*



*Nota.* Tomado de (Casanova, 2002)

El desnivel entre A y B es igual a la suma de las lecturas atrás menos la suma de las lecturas adelante, debe ser igual a la suma de los desniveles parciales:

$$\Delta_{AB} = \sum l_{AT} - \sum l_{AD} \quad (2)$$

Donde:

$\Delta_{AB}$ : es el desnivel entre A y B.

$\sum l_{AT}$ : es la suma de lecturas hacia adelante.

$\sum l_{AD}$ : es la suma de lecturas hacia atrás.

### **Precisiones para altimetría en Ecuador**

Para primer orden: para la red básica de control vertical:  $4mm\sqrt{k}$  Donde; k = Distancia en kilómetros, y  $6mm\sqrt{k}$  cuando se repite una sección o recorrido (ida o regreso).

Para segundo orden: para proyectos especiales  $8.4mm\sqrt{k}$  y para planos de ciudades  $9mm\sqrt{k}$  cuando se repite una sección o recorrido (ida o regreso) (IGM, 2006).



## Posicionamiento GNSS

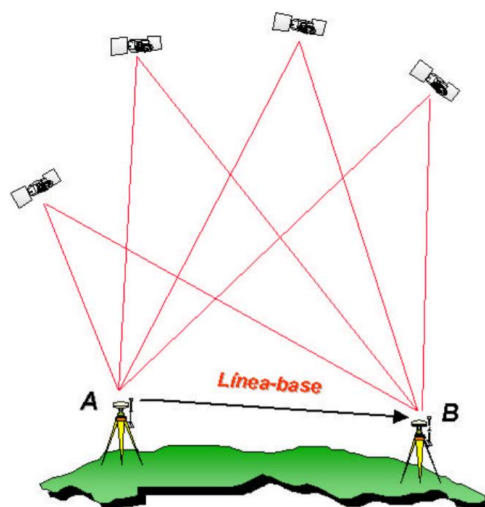
En el posicionamiento de puntos mediante tecnología GNSS es importante seleccionar el método de observación adecuado, por lo que se debe tomar en cuenta el grado de precisión que se desea alcanzar y el equipo disponible (Pachas, 2010).

### ***Posicionamiento Diferencial***

En este tipo de posicionamiento están involucrados dos o más equipos GNSS, de los cuales uno actúa como referencia al estar ubicado en un punto de coordenadas conocidas, con el fin de compensar o eliminar los errores propios del sistema GNSS (retardo ionosférico, error del reloj del satélite y el receptor, etc.), calculando los incrementos de coordenadas desde el equipo de referencia al móvil (Peñañiel, 2001).

### **Figura 6**

#### *Posicionamiento Diferencial*



*Nota.* Tomado de (Peñañiel, 2001)

### ***Método Estático***

El modo estático implica colocar el equipo receptor en el punto a ser posicionado sin desplazarlo o moverlo durante la etapa de observación. Es la medición clásica de líneas base, el

cual consiste en estacionar dos o más receptores en los puntos de los que se requiere conocer sus coordenadas, siendo necesario que uno de ellos se ubique en un punto cuyas coordenadas sean conocidas. El tiempo de observación debe ser común en todos los receptores, el cual depende de la longitud de la línea base, del número de satélites (mínimo cuatro) y su geometría; con este posicionamiento se obtienen soluciones tan redundantes como se deseen, para lo cual solo se tiene que prolongar la observación. Este método se utiliza cuando se tienen largas distancias y se busca obtener la más alta precisión posible, siendo más eficiente y económico que los métodos topográficos tradicionales (López E. , 2010).

### ***Método Estático Rápido***

Es una variante del método estático clásico, en el que el tiempo de observación disminuye al emplear receptores doble frecuencia que se encuentran equipados con algoritmos que dan solución en poco tiempo de observación; sin embargo, se debe tomar en cuenta que las distancias máximas entre el equipo de referencia y el móvil no exceda los 20 Km, la máscara de elevación que generalmente se emplea es de 15° y el receptor móvil se estaciona en el punto que se pretende levantar. Es recomendable no utilizarlo cerca de edificios, debido al efecto multitrayectoria y en general en zonas que impidan la recepción de mínimo cuatro satélites (Peñafiel, 2001).

**Tabla 1**

*Tiempo de posicionamiento GNSS en función de la distancia en km*

<b>Tiempo de posicionamiento GNSS</b>	
<b>Distancia (km)</b>	<b>Minutos</b>
10	25
20	40
30	55
40	70
50	85
60	100
70	115
80	130
90	145

Tiempo de posicionamiento GNSS	
Distancia (km)	Minutos
100	160

*Nota.* Tomado de (IGM, 2016)

### Principio de mínimos cuadrados

Este principio establece que la suma de los cuadrados de los errores residuales debe ser mínima. Entonces, la solución óptima de un problema de ajuste o compensación cumple dos condiciones: satisface exactamente las ecuaciones del modelo en su forma lineal y cumple con el principio de mínimos cuadrados (Sevilla, 1987).

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \text{mínimo} \quad (3)$$

Donde:

$m$ : es el número de observaciones.

$v_i$ : es cada error residual.

### Descomposición general de una observable

El observable es una magnitud que se puede determinar de manera directa o indirecta a través de la observación. Como se muestra en la ecuación ( 4 ), el observable está compuesto por una parte determinista y una parte aleatoria.

$$L = l + s + r \quad (4)$$

Donde:

$L$ : es el valor ajustado del observable.

$l$ : es el valor de observaciones reales.

$s$ : es la señal que es la parte aleatoria propia del campo en el que se ejecuta el experimento.

$r$ : es el ruido que el error aleatorio de medida.

La parte aleatoria del observable (residual), está constituida por el ruido y la señal (ecuación ( 5 )). El ruido puede definirse como la parte de un error de medición que carece de sesgo o efectos sistemáticos, son cantidades aleatorias independientes de esperanza matemática igual a cero, depende del método y el equipo con el que se realizan las observaciones. En cambio, la señal corresponde a cantidades aleatorias dependientes de media cero que no se relacionan con el método y el equipo. Los componentes de la señal están asociados con factores externos, mientras que el ruido es interno al instrumento de medición. (Sevilla, 1987).

$$v = r + s \quad ( 5 )$$

Donde:

$v$ : es el residual.

$r$ : es el ruido.

$s$ : es la señal.

### **Modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación**

La colocación de mínimos cuadrados es una herramienta matemática que fue desarrollada por T. Krarup y H. Moritz. Esta técnica utiliza información estadística de los propios datos para segregar la señal y el ruido y para estimar los parámetros. El propósito principal de la colocación es predecir cantidades de señales donde no se han realizado mediciones, el objetivo secundario es filtrar el ruido de las observaciones y el tercer objetivo es estimar parámetros desconocidos que definen el modelo matemático (Ruffhead, 1987).

El modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación es un caso general de mínimos cuadrados y al ser un modelo matemático está constituido por un modelo funcional y un modelo

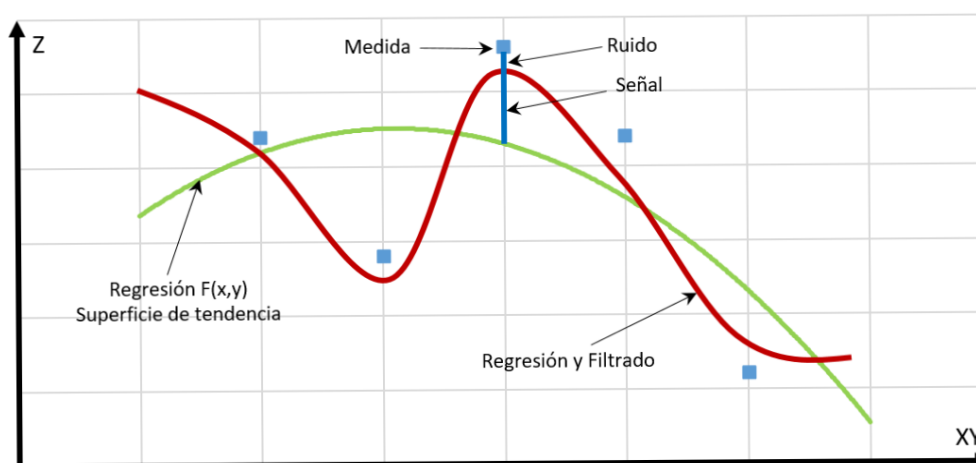
estocástico (Sevilla, 1987), además permite modelar las distancias residuales de una superficie de tendencia empleando las distancias entre un nuevo punto y los puntos utilizados en la formación de la superficie de tendencia (Kavzoglu & Saka, 2005). La característica de la colocación que la diferencia del método de estimación por mínimos cuadrados es la adición de señales al modelo funcional.

La teoría de la colocación supone una media cero y utiliza la función de covarianza, que describe la similitud, como estadística principal. El procedimiento de colocación supone que el ruido no tiene correlación, de modo que la covarianza del ruido entre las mediciones es cero. (Olusegun, 2018).

En la Figura 7, los puntos azules corresponden a las observaciones que están compuestas por señal y ruido. La línea verde es el modelo funcional que fue obtenido por regresión lineal y la línea roja es la función determinada por regresión después de haber realizado el filtrado (eliminación del ruido) de las observaciones.

### Figura 7

*Función obtenida a través del modelo general de Mínimos Cuadrados Colocación*



### **Modelo funcional**

El modelo funcional relaciona los parámetros con los observables incluyendo constantes de ser necesario por medio de las relaciones matemáticas entre las variables involucradas.

$$AX + L = V \quad (6)$$

Donde:

$L$ : son las observaciones.

$A$ : son los coeficientes del modelo.

$X$ : son los parámetros.

$V$ : son los residuos.

Reemplazando la ecuación (4) en la ecuación (6) se obtiene:

$$AX + L = s + r \quad (7)$$

Entonces, la determinación de los parámetros  $x$  es un problema de ajuste, la determinación de la señal  $z$  en puntos distintos a los de observación es una predicción y la eliminación del ruido es un problema de filtrado (Sevilla, 1987).

### **Ajuste por mínimos cuadrados colocación**

El modelo matemático puede escribirse como:

$$L_a = F(X_a) \quad (8)$$

Donde:

$L_a$ : son las observaciones ajustadas.

$F$ : es un conjunto de funciones.

Los valores observados no coinciden con  $L_a$ , esta diferencia es el residual (Luna, 2017), por lo tanto:

$$L_a = L_b + V \quad (9)$$

Donde:

$L_b$ : son los valores observados.

Para el ajuste con mínimos cuadrados:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (10)$$

Donde:

$X$ : coeficientes obtenidos del ajuste (regresión lineal).

$A$ : es la matriz de diseño o de coeficientes del modelo.

$L$ : observaciones.

### **Modelo estocástico**

El modelo establece las características estocásticas de las variables aleatorias involucradas en el modelo funcional (Sevilla, 1987). La matriz varianza-covarianza está dada por:

$$\hat{C} = v^T \quad (11)$$

La matriz de covarianza  $C_{vv}$  de las observaciones se descompone en matrices de covarianza de señal  $C_{SS}$ ,  $C_{ZZ}$  y de ruido  $C_{rr}$  y cruzadas  $C_{SZ}$ ,  $C_{Sr}$  y  $C_{zr}$  de la siguiente forma:

$$C_{vv} = \begin{bmatrix} C_{SS} & C_{SZ} & C_{Sr} \\ C_{ZS} & C_{ZZ} & C_{zr} \\ C_{rS} & C_{rz} & C_{rr} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Debido a que la señal y el ruido son variables sin correlación, los términos con covarianzas cruzadas son igual a cero.

$$C_{vv} = \begin{bmatrix} C_{SS} & C_{SZ} & 0 \\ C_{ZS} & C_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & C_{rr} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Luego, si se considera las observaciones  $l$ , como  $C_{Sr} = 0$ , resulta:

$$C_{ll} = C_{ss} + C_{rr} = \hat{C} \quad (14)$$

Donde:

$\hat{C}$ : es la matriz de covarianza de las observaciones.

$C_{ss}$ : es la matriz de covarianza de la señal en los puntos de observación.

$C_{rr}$ : es la matriz de covarianza del ruido en los puntos de observación.

**Matriz de covarianza empírica.** Para obtener una estimación empírica puntual de la función covarianza se considera un intervalo de distancia  $\Delta d$  y se determinan grupos de amplitud creciente donde se clasifican los datos (Sevilla, 1987). Los valores puntuales para cada distancia se calculan mediante la fórmula:

$$d_k = (2k + 1)\Delta d \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Donde

$\Delta d$ : es el intervalo de distancia entre los puntos de observación.

Se considera el siguiente intervalo para calcular los valores de covarianza:

$$d_k - \Delta d < Dist_{ij} < d_k + \Delta d \quad \text{con } i < j \quad (16)$$

El valor de la covarianza es el promedio de las covarianzas dentro del intervalo.

$$C(d_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{ij} V_i V_j \quad (17)$$

Para calcular la covarianza en el mismo punto (varianza), se utiliza:

$$C(0) = \frac{1}{n} \sum_i^n (V_i)^2 \quad (18)$$

Una vez obtenidas los valores de covarianza, se representan gráficamente cada intervalo de distancia del área de muestreo con sus valores de covarianza y mediante regresión lineal se busca la función de covarianza que mejor se ajuste a los puntos. La función de covarianza obtenida servirá para obtener los elementos de las matrices covarianza  $C_{ss}$  y  $C_{zs}$ . Dado que las señales en los puntos de predicción y las señales en los puntos de observación tienen



propiedades estadísticas idénticas, sus covarianzas están determinadas por la misma función de covarianza. La colocación de mínimos cuadrados depende fundamentalmente del tipo de función de covarianza utilizada (Olusegun, 2018).

La precisión de las medidas es utilizada para obtener la matriz de covarianza del ruido:

$$C_{rr} = \sigma_0^2 I \quad (19)$$

Donde:

$\sigma_0^2$ : es la varianza de la unidad de peso de las observaciones.

$I$ : es la matriz identidad.

Entonces, la matriz de covarianza de las observaciones se puede expresar como:

$$\hat{C} = C_{ss} + C_{rr} = C(d) + \sigma_0^2 I \quad (20)$$

Y en su forma matricial

$$\hat{C}(d_{ij}) = \begin{bmatrix} C(0) & C(d_{12}) \dots & C(d_{1m}) \\ C(d_{21}) & C(0) \dots & C(d_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ C(d_{m1}) & C(d_{2m}) \dots & C(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Según la ecuación ( 21 ) las covarianzas entre puntos distintos  $i \neq j$  consideran solo la señal, mientras que las varianzas en el mismo punto miden señal y ruido.

### **Predicción de la señal completa**

La solución de los parámetros se resuelve con la ecuación de mínimos cuadrados solo que se reemplaza la matriz de peso por la matriz de covarianza empírica.

$$X_{MCC} = (A^T \hat{C} A)^{-1} (A^T \hat{C}^{-1} L_{MCC}) \quad (22)$$

Donde:

$X_{MCC}$ : es la matriz de parámetros ajustados mediante colocación mínimo cuadrática.

$\hat{C}$ : es la matriz de covarianza empírica de las observaciones.

$L_{MCC}$ : es el vector de observaciones de colocación mínimo cuadrática.

Las señales de las observaciones se calculan con:

$$s = C_{ss}\hat{C}^{-1}v \quad (23)$$

Las señales para cualquier otro punto que no se ha observado es:

$$z = C_{zs}\hat{C}^{-1}v_{MCC} \quad (24)$$

Con la matriz de la señal de los puntos observados, se obtienen observaciones a las que se les ha realizado el filtrado, expresadas en el vector  $L_{MCC}$ .

$$L_{MCC} = L_a + s \quad (25)$$

Finalmente, para la predicción en puntos no muestreados se emplean los valores de la señal  $z$  y los valores de las observaciones del modelo matemático.

$$L_z = L_a + z \quad (26)$$

Donde:

$L_z$ : predicción en los puntos no muestreados

### **Intervalo de confianza para el 95%**

Una variable aleatoria con una distribución normal estándar se encuentra en el intervalo  $[-1.96, 1.96]$  con una probabilidad de 0.95 (Díaz, 2002).

$$m_z - \frac{1.96 \sigma_z}{\sqrt{N}} < m_z < m_z + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{N}} \quad (27)$$

Donde:

$m_z$ : es el valor esperado de la predicción.

$\sigma_z$ : es la desviación estándar.

La varianza está dada por:

$$\sigma_z^2 = C(0) - c^T * C^{-1} * c \quad (28)$$

Donde:

$C(0)$ : es la matriz de covarianza cuando la distancia  $d=0$  (varianza), es decir en el mismo punto.

$C$ : es la matriz de covarianza entre los valores observados, es decir  $C_{SS}$  que es la matriz de covarianza de la señal.

$c$ : es la matriz de covarianza entre los valores observados y no observados, es decir  $C_{zS}$ .

### **Cokriging**

El análisis multivariado Cokriging es un estimador lineal insesgado útil para realizar la predicción espacial del valor de una variable regionalizada considerando los datos de esta variable y de otras variables secundarias correlacionadas entre sí, la estimación será una combinación lineal ponderada de los datos con una esperanza nula (insesgo) y una varianza mínima (Emery, 2013). En esta técnica la información de una o más variables secundarias se utilizan para reducir la varianza de predicción de la variable principal. Una variable regionalizada es aquella medida en el espacio de forma que presente una estructura de correlación (Giraldo R. , 2020).

Cokriging presenta ciertas ventajas sobre Kriging que trata solo una variable regionalizada, tales como, reducción de costos y adquisición de predicciones con alta precisión debido a la correlación existente entre las variables, la misma que se mide mediante el empleo de variogramas cruzados entre las distintas variables (Giraldo R. , 2020). Para obtener predicciones exitosas con Cokriging, se debe procurar la existencia y unicidad de la solución, para lo que es necesario evitar la presencia de datos duplicados y que las variables sean linealmente independientes en los sitios con datos, es decir, que no estén ligadas por una relación lineal (Emery, 2013).

La aplicación más común de Cokriging es cuando una covariable es más barata de medir y, de manera que se ha muestreado de forma más densa que la variable objetivo. El Cokriging Ordinario examina las relaciones espaciales entre dos o más variables determinando su correogionalización que en caso de que exista se puede utilizar la información espacial de las variables auxiliares para mejorar las predicciones de la variable principal empleando cokriging (Wang, Zhang, & Weidong, 2013).

### **Semivariograma**

El semivariograma es una herramienta geoestadística que permite visualizar, modelar y explorar la autocorrelación espacial de una variable regionalizada, es una medida de la semivarianza entre los pares de datos que se encuentran separados a una ópti, la cual puede ser analizada de forma global o en una dirección particular (Armstrong & Carignan, 1997).

La forma del semivariograma está determinada por tres parámetros:

**Efecto Pepita:** Representa una discontinuidad puntual del semivariograma en el origen.

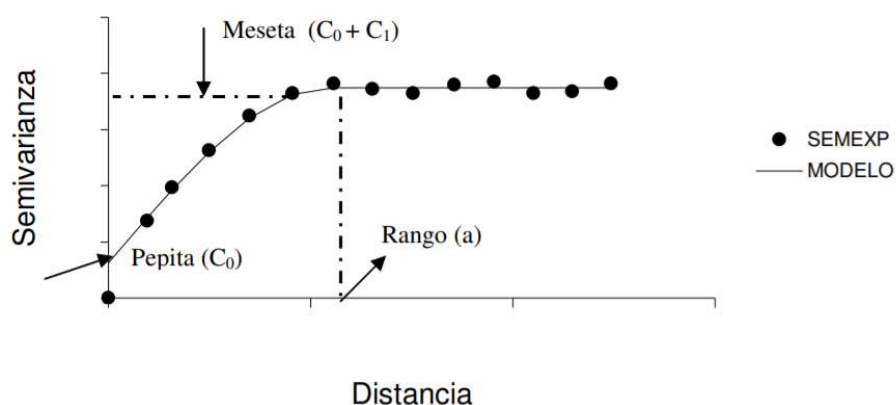
**Meseta:** Es la cota superior del semivariograma, se denota  $(C_0 + C_1)$  cuando la pepita es diferente de cero.

**Rango:** Corresponde a la distancia a partir de la cual dos observaciones son independientes, también se interpreta como la zona de influencia.

Se conoce como semivariograma experimental al obtenido tomando en cuenta las distancias promedio entre parejas de sitios dentro de cada intervalo y no a una distancia  $h$  específica, al ser calculado sólo para algunas distancias promedio particulares, es necesario la aplicación de modelos que generalicen lo observado en el semivariograma experimental a cualquier distancia, para esto existen diversos modelos teóricos de semivarianza que pueden ajustarse al semivariograma experimental, los más comunes son: Esférico, Exponencial, Gaussiano y Estable (Giraldo R. H., 2007).

**Figura 8**

*Semivariograma Experimental (SEMEXP) y Teórico (MODELO)*



*Nota.* Tomado de (Giraldo R. H., 2007)

## Modelos Geoidales

### **Modelos Gravimétricos Mundiales EGM96 y EGM08**

EGM96 es un modelo geoidal que posee una grilla de 15'x15', es decir 25km x 25km aproximadamente, que ofrece valores de ondulación geoidal para cualquier punto sobre la superficie terrestre que tenga coordenadas en el sistema WGS84. Si se combina la altura elipsoidal entregada por WGS84 con la ondulación geoidal de EGM96 se puede determinar la cota ortométrica para los puntos de interés, que puede relacionarse con la cota referida al nivel medio del mar, comúnmente utilizada en distintos proyectos de ingeniería. EGM96 nació para satisfacer las necesidades que surgen frente el uso de GPS en cuanto a diferencias de elevación se trata (Yáñez, 2000).

En el año 2008 se pone a disposición un nuevo modelo denominado EGM2008 con una resolución de 2.5'x2.5', siendo este más preciso, pero con una mayor demanda de recursos computacionales. Uno de los principales objetivos del EGM2008 fue mejorar la precisión en la determinación de alturas ortométricas. Sin embargo, por tratarse de modelos globales, no

representan fielmente superficies más pequeñas siendo necesaria la generación de modelos geoidales locales (Gacitúa, 2015).

### ***Modelo geoidal geométrico de Ecuador Continental***

Se trata de un modelo de predicción de ondulación geoidal local desarrollado por el Instituto Geográfico Militar para Ecuador Continental que se realizó empleando puntos en los que se tenía datos de la altura elipsoidal y la altura nivelada. La interpolación se efectuó por medio de una red neuronal artificial con funciones de base radial. La capa inicial constaba de 2 vectores, uno para la latitud y otro para la longitud de los puntos empleados en el entrenamiento, la capa oculta tenía 211 neuronas para el aprendizaje y la capa de salida poseía una neurona cuya salida fue la altura geoidal. Se utilizó el método supervisado para el aprendizaje y el algoritmo de retropropagación que está basado en la corrección del error.

Se emplearon las coordenadas geodésicas de 833 puntos: 678 para la fase de entrenamiento, 90 para evaluar el aprendizaje y 65 para determinar la capacidad de generalización. Estos 65 puntos fueron considerados como puntos de control para evaluar las predicciones obtenidas con la red neuronal debido a que en estos puntos además de conocer las coordenadas obtenidas con GPS, también se conocían los valores de altura nivelada y aplicando la ecuación ( 1) se conocía la altura geoidal en cada punto. El error medio de la predicción de las alturas geoidales fue de 0.02 m, con una desviación típica de 0.13 m y un valor máximo de 0.33 m. De esta manera, se concluyó que en la zona de estudio se puede llegar a tener errores menores de 40 cm (Acurio & Tierra, 2016).

### **Validación Cruzada**

Según Giraldo R. H., (2007), es el método más utilizado para evaluar la bondad de ajuste del modelo de semivariograma elegido con respecto a los datos muestrales y por ende de las predicciones obtenidas, el cual consiste en eliminar uno de los n puntos muestrales, para luego con los n-1 restantes y el modelo de semivariograma escogido, predecir el valor de la variable en

estudio del punto removido, mientras la diferencia entre el valor observado y el valor predicho sea pequeña, existe un aumento en la efectividad de la predicción.

El proceso se repite en forma secuencial con cada uno de los puntos muestrales para finalmente obtener un conjunto de  $n$  "errores de predicción", a este conjunto de residuales se le aplica diversos indicadores estadísticos que miden la calidad de la estimación, como el error cuadrático medio (RMSE) para facilitar la comprensión de los valores obtenidos y tomar una decisión adecuada (Palacios, 2019).

Una forma descriptiva de hacer la validación cruzada es mediante un gráfico de dispersión de los valores observados contra los valores predichos. Si la nube de puntos se ajusta más a una línea recta que pasa por el origen, mejor será el modelo de semivariograma utilizado (Giraldo R. H., 2007).

### Capítulo III. Metodología

#### Obtención de datos

La información utilizada en este estudio se recopiló del proyecto “Levantamiento topográfico Lidar e implementación de red geodésica en la zona de Influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute Integral” realizado por el Consorcio CINARQ-KAWSUS-GEOCAM, mediante un contrato con la Corporación Eléctrica del Ecuador CELEC-EP y la Unidad de Negocio Hidropaute, en el 2019; el cual fue realizado con el objetivo de monitorear las zonas inestables identificadas en el área de estudio, donde se ha determinado la existencia de un alto riesgo de deslizamientos que podrían afectar directamente a la infraestructura y operación de las centrales hidroeléctricas.

Los datos proporcionados constan de un elenco de coordenadas geodésicas, cartesianas globales (XYZ), UTM y PTL-LTM con su respectiva altura elipsoidal, correspondientes a los 22 puntos que conforman la red de control principal y los 191 puntos seleccionados para monitoreo ubicados dentro de los 21 polígonos determinados por CELEC-EP como zonas de inestabilidad, todos obtenidos a través de posicionamiento satelital GPS (GNSS). Además, se contó con los valores de altura de los vértices de la red geodésica y bancos de nivel, obtenidas mediante nivelación geométrica.

Para la elaboración de este proyecto se tomaron inicialmente el total de 60 datos conformados por los 22 vértices de la red geodésica principal y los 38 bancos de nivel, sin embargo, tras realizar el análisis exploratorio de los datos, se realizó el filtrado de los mismos para eliminar aquellos considerados atípicos y determinar los puntos para validación tomando los que se encuentran más próximos entre sí, como resultado se obtuvo una nueva base de datos con 51 puntos para la generación del modelo y 4 para la validación.



### **Datos de posicionamiento GNSS**

Se obtuvieron 60 datos de posicionamiento GNSS que poseían altura nivelada: 22 puntos correspondientes a los vértices de la red geodésica de control principal denominados con las siglas PRCP (Punto de Red de Control Principal), desde el PRCP-01 hasta el PRCP-22 junto con sus monografías; 34 puntos correspondientes a los bancos de nivelación denominados BN y 4 puntos de liga denominados PL, todos los puntos pertenecen al proyecto realizado para la Corporación Eléctrica del Ecuador CELEC-EP. Se determinaron las coordenadas geodésicas de los vértices de la red geodésica del proyecto a través de posicionamiento satelital GNSS con el método estático diferencial post-proceso. Se utilizaron receptores geodésicos GNSS doble frecuencia con los siguientes parámetros: ángulo de enmascaramiento mayor o igual a  $15^\circ$ , número de satélites mínimos enganchados mayor o igual a 8, PDOP menor o igual a 3 e intervalo de grabación de 5 segundos (CINARQ-KAWSUS-GEOCAM, 2019).

En la primera etapa de observación de la red geodésica del proyecto se dieron coordenadas a tres puntos extremos de la red geodésica del proyecto a través de dos estaciones de enlace a la red nacional más cercanas al proyecto con un tiempo de rastreo de 5 horas. Las estaciones fueron CUEC y ALEC que están ubicadas en las ciudades de Cuenca y Alausí respectivamente y que pertenecen a la red GNSS de monitoreo continuo del Ecuador – REGME. En la segunda etapa de observación de la red geodésica se determinaron las coordenadas de los demás vértices de la red local a partir de las coordenadas de los puntos obtenidas en la primera etapa. Se utilizaron 6 equipos GNSS y el tiempo de rastreo por sesión fue de aproximadamente 2 horas y 30 minutos.

Se consideraron 2 criterios estadísticos de aceptación de calidad  $0.005\text{ m} + 1\text{ ppm}$  para precisión horizontal y  $0.010\text{ m} + 2\text{ ppm}$  para precisión vertical en el procesamiento de las líneas base. Para el ajuste de la red, se utilizó la técnica de procesamiento multiestación – multisesión.

Las coordenadas cartesianas geocéntricas de los vértices de la Red, están referenciadas al marco ITRF014 y a la época  $t_i = 2019.638$ .

La georreferenciación de los bancos de nivelación se realizó con la misma metodología y parámetros que se siguieron para la georreferenciación de los vértices de la red geodésica de control principal, solo que adicionalmente se utilizaron trípodes para la instalación de los receptores GNSS, y el tiempo de rastreo fue de una hora.

### ***Datos de altura nivelada***

La nivelación geométrica de primer orden fue indispensable en este proyecto para poder determinar de manera precisa la cota de los hitos de la red principal, llevándose a cabo la denominada nivelación geométrica compuesta que consiste en obtener el desnivel entre dos puntos colocando más de una estación entre ellos. Adicionalmente, se empleó el método de línea de nivelación doble que consiste en recorrer el camino dos veces, obteniéndose una línea de nivelación de ida y otra de vuelta.

El tipo de línea de nivelación utilizada fue cerrada, tomando como dato de partida la cota de la placa XVII-L7-36A del IGM, ubicada en el parque central de Palmas y tuvo una extensión de 160 km en la que se establecieron 38 bancos de nivel, esta línea de nivelación se dividió en 4 sublíneas para facilitar la ejecución y control de la misma. Los Puntos de Liga (PL's) tuvieron +/- 1.00 a 2.00 kilómetros de longitud y los Bancos de Nivel (BN's) se ubicaron cada cinco kilómetros.

Como se trata de una nivelación de alta precisión, las tolerancias exigidas son  $\pm 4mm(\sqrt{k})$ , siendo  $k$  la distancia en kilómetros. Las líneas de nivelación se encuentran referidas al datum vertical oficial del país, que tiene origen en el nivel medio del mar y está materializado a través del mareógrafo de la Libertad, ubicado en la provincia de Santa Elena (Cañizares, Tierra, & Leiva, 2015).

### **Método de Mínimos Cuadrados Colocación**

El método de Mínimos Cuadrados Colocación generalmente se realiza en tres fases: determinación de la tendencia, cálculo de las covarianzas experimentales y predicción de las señales en los puntos de estimación (Doganalp & Zahit, 2015). Los procesos fueron automatizados en Matlab.

### ***Análisis Exploratorio de Datos***

El objetivo del Análisis Exploratorio de Datos (EDA) es descubrir patrones en los datos que permitan a los investigadores construir modelos mentales enriquecidos del fenómeno que se está examinando (Behrens, 1997). También se caracteriza por el uso de herramientas o técnicas que poseen carga visual o gráfica (Parra, 2002).

Al extraer algunos estadísticos de los 60 datos de ondulación geoidal se obtiene información como que el rango de las observaciones es de 2.3594 metros. La media y la mediana tienen valores cercanos 23.0580 metros y 23.0395 metros respectivamente. El coeficiente de variación es de 2.1%, existiendo baja variabilidad en los datos. El coeficiente de asimetría es negativo que indica que la distribución que se extiende hacia valores inferiores a la media.

### **Tabla 2**

*Resumen estadístico de ondulación geoidal en el área de estudio*

<b>Parámetro</b>	<b>Medida</b>
Media (m)	23.0580
Rango (m)	2.3594
Desviación estándar (m)	0.4896
Coeficiente de variación (%)	2.1234
Asimetría	-0.2168
Mínimo (m)	21.6314
Primer cuartil (m)	22.8102
Mediana (m)	23.0395

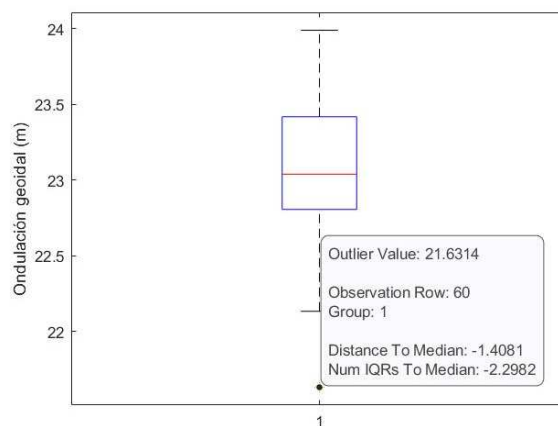
Parámetro	Medida
Tercer cuartil (m)	23.3825
Máximo (m)	23.9908
Número de datos	60
Rango intercuartil (m)	0.5723
Valores atípicos (m)	21.6314

En el diagrama de caja en la Figura 9 se observa un valor atípico que aparece como un signo + rojo y su valor es más de 1.5 veces el rango intercuartil desde la parte inferior del cuadro. Se observa que la distribución presenta sesgo a la derecha porque el área del rectángulo superior es mayor que el área del rectángulo inferior, de manera que los datos con valores inferiores a la mediana se encuentran menos dispersos que los valores superiores a ella.

Al menos el 75% de los datos de ondulación geoidal tienen valores superiores a 22.8102 metros. El bigote superior es más corto que el inferior; por ello el 25% de los datos más altos de ondulación geoidal están más concentrados que el 25% de valores más bajos de ondulación geoidal.

### Figura 9

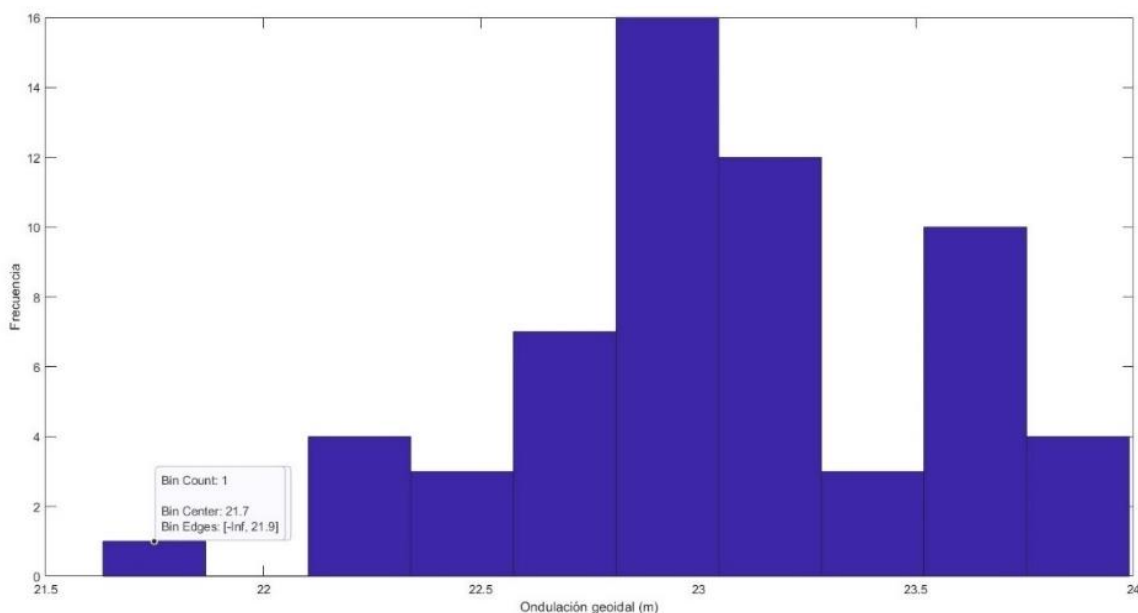
*Diagrama de caja de la ondulación geoidal en la zona de estudio*



El histograma representado en la Figura 10 muestra que la distribución está cargada de valores inferiores a la media y se evidencia la presencia del valor atípico en la distribución que ya se había presentado en el diagrama de caja.

### Figura 10

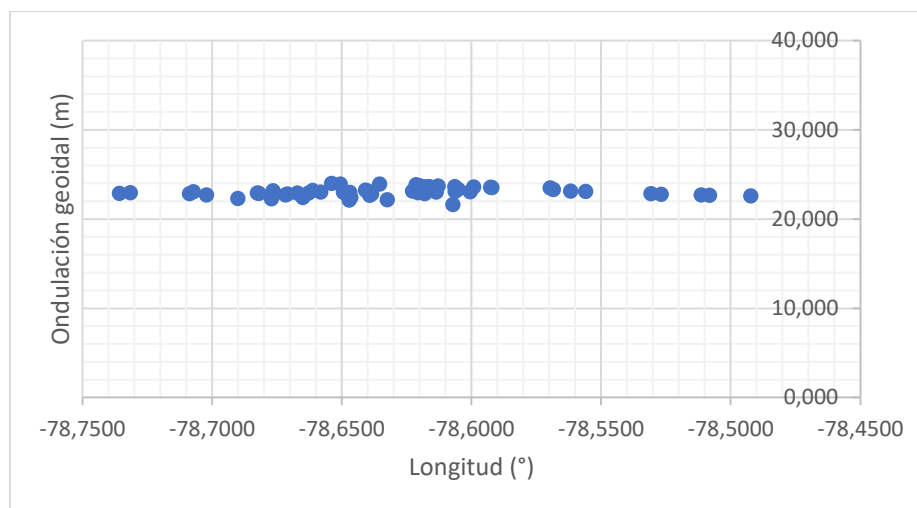
*Histograma de la ondulación geoidal muestreada en la zona de estudio*



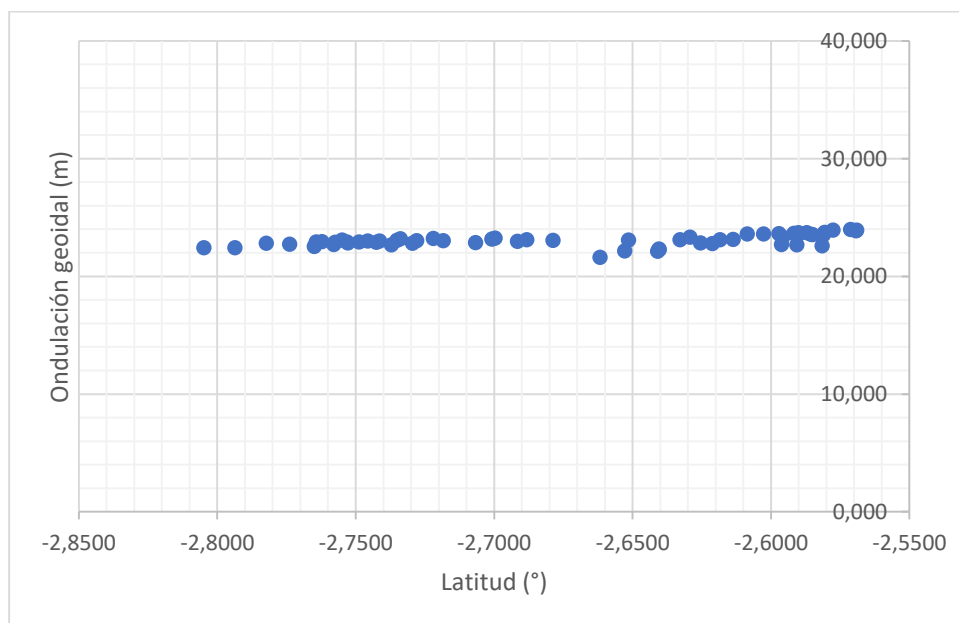
Se observa un comportamiento estacionario de los datos de acuerdo al análisis de los gráficos de dispersión (Figura 11) porque la media permanece constante en la zona de estudio.

**Figura 11**

*Gráfico de dispersión Longitud-Ondulación geoidal*

**Figura 12**

*Gráfico de dispersión Latitud-Ondulación geoidal*



### ***Depuración de datos***

Uno de los métodos más eficientes para interpolar la ondulación geoidal es la técnica de interpolación de superficies basada en una aproximación polinomial, de manera que la

ondulación geoidal en un punto desconocido se puede evaluar sustituyendo sus coordenadas (Zhong, 1997).

Modelo 1: x grado 1, y grado 1

$$f(x,y) = p00 + p10 * x + p01 * y \quad (29)$$

Modelo 2: x grado 1, y grado 2

$$f(x,y) = p00 + p10 * x + p01 * y + p11 * x * y + p02 * y^2 \quad (30)$$

Modelo 3: x grado 1, y grado 3

$$f(x,y) = p00 + p10 * x + p01 * y + p11 * x * y + p02 * y^2 + p12 * x * y^2 + p03 * y^3 \quad (31)$$

Modelo 4: x grado 1, y grado 4

$$f(x,y) = p00 + p10 * x + p01 * y + p11 * x * y + p02 * y^2 + p12 * x * y^2 + p03 * y^3 + p13 * x * y^3 + p04 * y^4 \quad (32)$$

Donde:

$f(x,y)$ : es la ondulación geoidal en un punto de interés.

$x$ : es la longitud.

$y$ : es la latitud.

$p00, p10, p01, p11, p02, p12, p03, p13, p04$ : son coeficientes del modelo matemático.

Se empleó la herramienta cftool de Matlab R2020 para visualizar el mejor modelo polinomial que se ajustaba a los 60 datos, que fue el modelo 3, x grado 1, y grado 3 (ver Tabla 3). No obstante, se visualizó que cinco puntos se alejaban mucho de la superficie modelada (Figura 13) por lo que se procedió a descartar los cinco puntos de menor valor de ondulación geoidal: BN-C, BN-B, PRCP-01, BN-A y PRCP-11.

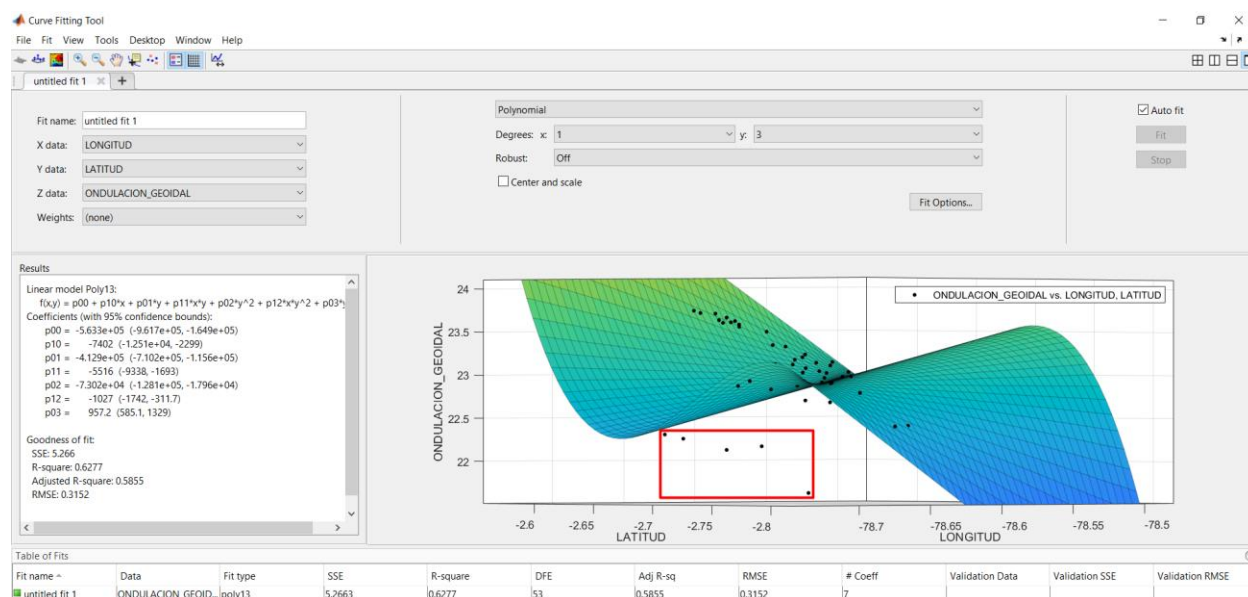
Tabla 3

Estadísticos de cada modelo matemático con 60 datos

Modelo	RMSE	R <sup>2</sup>	Observación
Modelo 1	0.3989	0.3588	
Modelo 2	0.3808	0.4362	
Modelo 3	0.3152	0.6277	
Modelo 4	0.3137	0.6451	La ecuación está mal condicionada.

Figura 13

Ajuste de curva a los 60 datos según el modelo 3 con la aplicación Curve Fitting



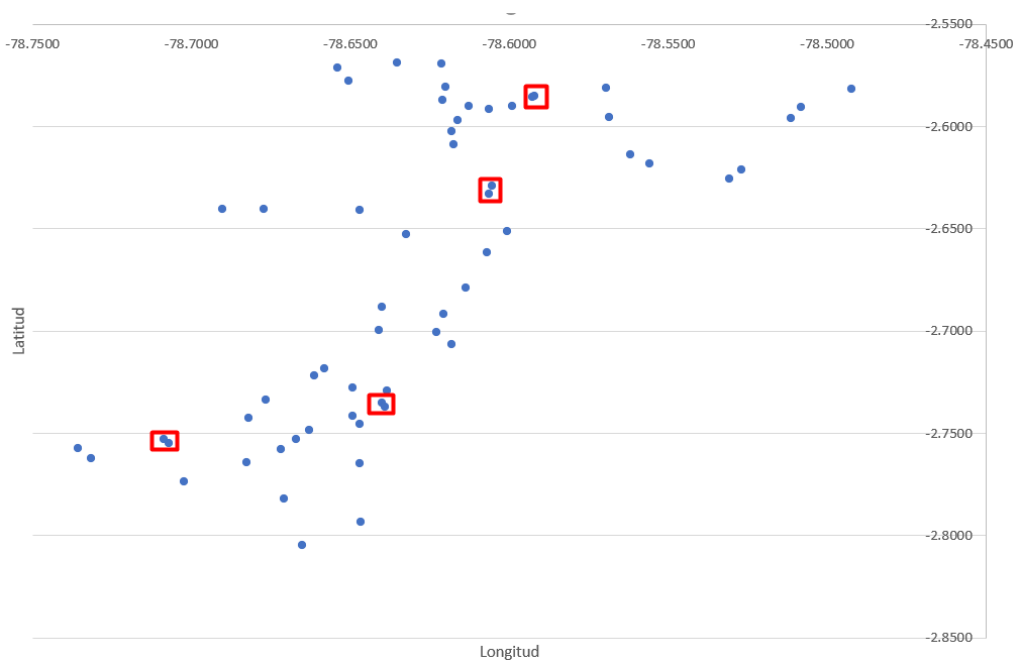
Posteriormente, se graficó la posición de los puntos y se observó que existían cuatro pares de puntos muy próximos entre sí, por lo cual se procedió a descartar uno de los dos puntos, escogiendo aquel que está más al sur. Esto se realizó con el objetivo de que, a futuro, al buscar la función covarianza, el promedio de los valores de distancia de separación  $h$  entre las ubicaciones de las observaciones no sea afectado por distancias de separación  $h$  muy cortas.



Los cuatro puntos escogidos para no participar en el modelo fueron: PRCP-05, PRCP-12, PRCP-17 y BN-16 y se los emplearon para validar el modelo.

## Figura 14

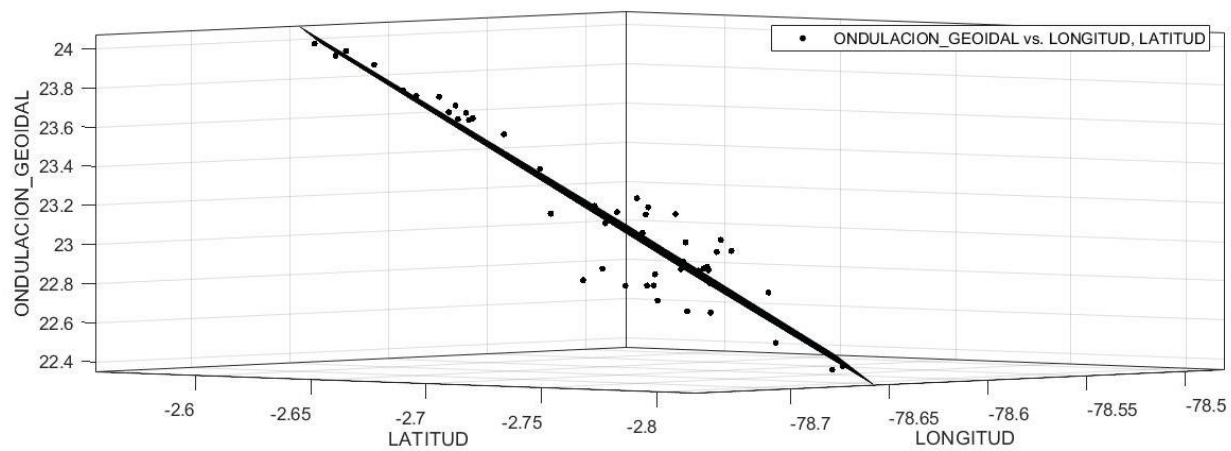
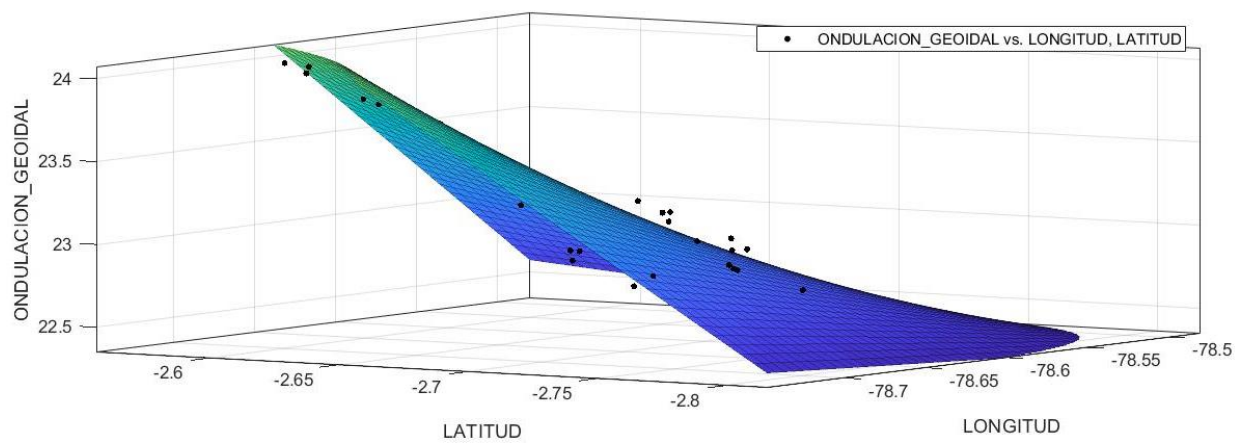
*Identificación de los puntos más cercanos en el conjunto de datos*

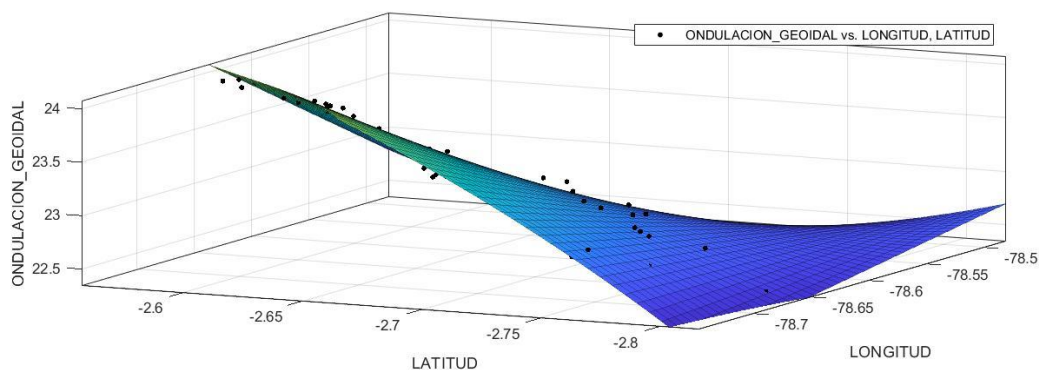
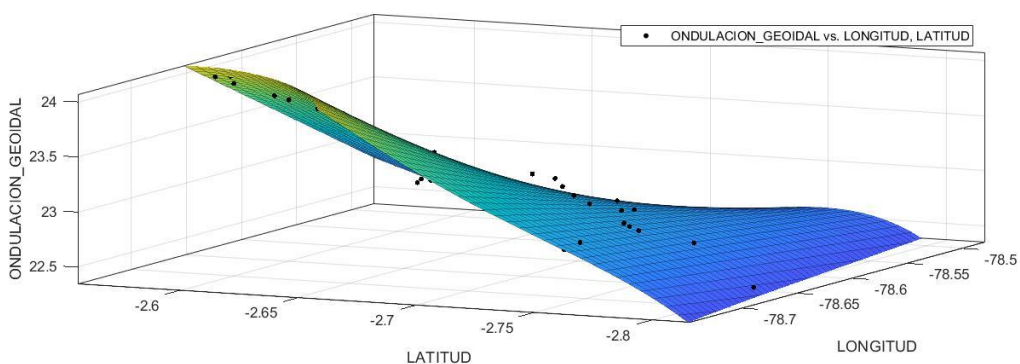


En total en la depuración de los datos se descartaron 9 puntos de las 60 iniciales: BN-C, BN-B, PRCP-01, BN-A, PRCP-11, PRCP-05, PRCP-12, PRCP-17 y BN-16.

### **Selección del modelo matemático**

Nuevamente se utilizó la herramienta cftool para obtener los gráficos de los modelos polinomiales que se ajustan a los 51 puntos, es decir después de haber eliminado 9 puntos de los 60 puntos iniciales.

**Figura 15***Modelo matemático 1 con 51 datos***Figura 16***Modelo matemático 2 con 51 datos*

**Figura 17***Modelo matemático 3 con 51 datos***Figura 18***Modelo matemático 4 con 51 datos*

Para elegir el mejor modelo matemático para los 51 datos se consideraron los estadísticos de: el error cuadrático medio (RMSE) y el R cuadrado ( $R^2$ ), además del acondicionamiento del modelo. Como se evidencia en la Tabla 4, el modelo 4 presentó el mejor RMSE y  $R^2$ ; no obstante, se descartó porque la ecuación estaba mal condicionada, es decir que pequeñas alteraciones en los coeficientes pueden ocasionar grandes cambios en las soluciones (Stephenson, 1982). El modelo 1 presentó un valor de  $R^2$  más bajo y un valor más alto de RMSE. Por otro lado, los dos modelos 2 y 3 tuvieron iguales valores de RMSE y similares de  $R^2$ . Es así que se escogió el modelo 2: x grado 1, y grado 2, debido a que comparándolo con el modelo 3, tiene un menor

número de parámetros y según Zhong (1997) cuantos menos parámetros existan en el modelo, menores son las varianzas de las estimaciones de los parámetros. Por otra parte, al comparar los valores de la Tabla 3 y la Tabla 4 se puede observar que existe mejor RMSE y  $R^2$  en todos los modelos con 51 datos que en los modelos con 60 datos.

**Tabla 4**

*Parámetros estadísticos de cada modelo matemático con 51 datos*

<b>Modelo</b>	<b>RMSE</b>	<b><math>R^2</math></b>	<b>Observación</b>
Modelo 1	0.1438	0.8825	
Modelo 2	0.1058	0.9391	
Modelo 3	0.1053	0.9423	
Modelo 4	0.1050	0.9452	La ecuación está mal condicionada.

Posteriormente, se obtuvieron los valores de los parámetros del modelo matemático empleando la herramienta Regresión del grupo de herramientas de análisis de datos en Excel. El análisis de regresión lineal emplea el método de mínimos cuadrados para ajustar una línea al conjunto de observaciones.

**Tabla 5**

*Parámetros del modelo matemático 2*

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
p00	-7535.1200
p10	-96.4204
p01	-2663.5182
p11	-34.0144
p02	0.8869

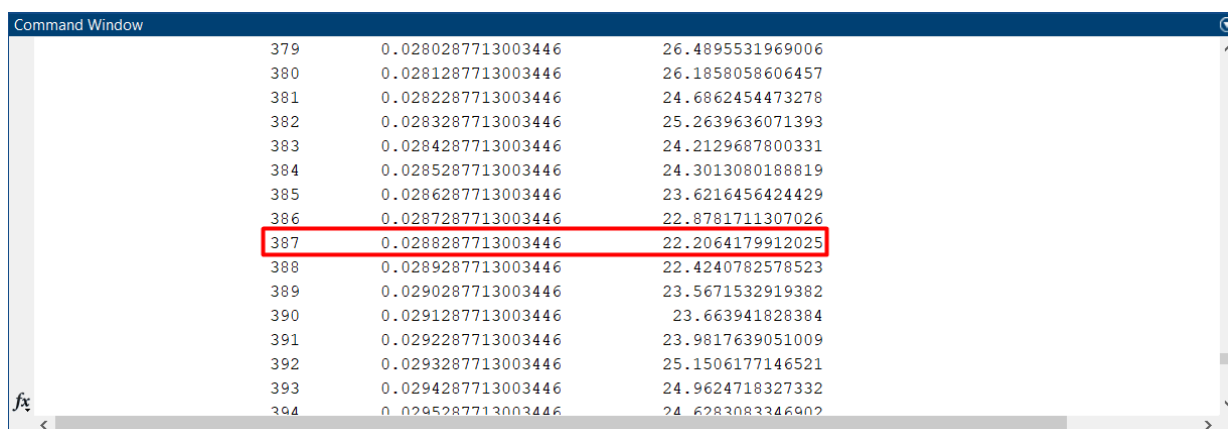
### ***Cálculo de la función covarianza empírica de la señal***

El siguiente paso fue determinar una función de covarianza local adecuada, que represente las características estocásticas del campo de gravedad en esta región de estudio, para lo cual primero se determinó vector de separación  $h$  que describe la medida de proximidad de los datos (Mejía, y otros, 1999).

Se emplearon 8 intervalos considerando la cantidad de 51 datos de ondulación geoidal. Es así que se obtuvo una distancia promedio  $h=0.0102288$  grados sexagesimales, después se realizaron 200 incrementos y 200 decrementos de 0.0001 grados en torno al valor de amplitud creciente  $h$  para obtener un  $h$  óptimo que produzca la menor dispersión del número de pares en cada intervalo formado tomando como indicador la desviación estándar del número de pares en cada intervalo. En la se aprecia que el  $h$  óptimo se obtuvo en el ciclo 387, obteniendo una desviación estándar de 22.2064 grados sexagesimales que es el mínimo valor de este indicador antes de que en el siguiente ciclo la desviación estándar comience a aumentar. En cambio, en la Figura 19 se presenta el número de pares que se obtuvo en cada intervalo construido a partir del  $h$  óptimo= 0.0288288.

### **Figura 19**

#### *Obtención del $h$ óptimo*



Ciclo	h	Desviación estándar
379	0.0280287713003446	26.4895531969006
380	0.0281287713003446	26.1858058606457
381	0.0282287713003446	24.6862454473278
382	0.0283287713003446	25.2639636071393
383	0.0284287713003446	24.2129687800331
384	0.0285287713003446	24.3013080188819
385	0.0286287713003446	23.6216456424429
386	0.0287287713003446	22.8781711307026
387	0.0288287713003446	22.2064179912025
388	0.0289287713003446	22.4240782578523
389	0.0290287713003446	23.5671532919382
390	0.0291287713003446	23.663941828384
391	0.0292287713003446	23.9817639051009
392	0.0293287713003446	25.1506177146521
393	0.0294287713003446	24.9624718327332
394	0.0295287713003446	24.6283083346902

**Tabla 6**

Número de pares de cada intervalo formado con  $h$  óptimo = 0.0288288

Intervalo	Número de pares
(0,h]	138
(h,2h]	208
(2h,3h]	165
(3h,4h]	163
(4h,5h]	144
(5h,6h]	160
(6h,7h]	141
(7h,8h]	156

El valor de  $h$  óptimo se reemplaza en  $\Delta d$  y aplicando la ecuación ( 15 ) se obtiene  $d_k$  que es el valor puntual para cada distancia. Luego, se obtuvo la covarianza empírica  $C$  según la ecuación ( 17 ) para cada intervalo y para  $d = 0$  según la ecuación ( 18 ) como se muestra en la Tabla 7.

**Tabla 7**

Covarianzas empíricas de ondulación geoidal calculadas en 51 puntos del área de estudio

$k$	Intervalo	$d$	$C$
		0.0000	0.0101
0	( 0.0288 - 0.0144 ]	0.0144	0.0013
1	( 0.0577 - 0.0432 ]	0.0432	-0.0004
2	( 0.0865 - 0.0721 ]	0.0721	-0.0025
3	( 0.1153 - 0.1009 ]	0.1009	-0.0012
4	( 0.1441 - 0.1297 ]	0.1297	0.0009
5	( 0.1730 - 0.1586 ]	0.1586	0.0015
6	( 0.2018 - 0.1874 ]	0.1874	0.0001
7	( 0.3004 - 0.2162 ]	0.2162	-0.0009

Luego, con los valores de  $y$  y de covarianza empírica se buscó una función que se ajuste a los datos, para lo cual se utilizó la herramienta `cftool` de Matlab probando 8 modelos polinomiales:

Modelo 1: x grado 1

$$f(x) = p1 * x + p2 \quad (33)$$

Modelo 2: x grado 2

$$f(x) = p1 * x^2 + p2 * x + p3 \quad (34)$$

Modelo 3: x grado 3

$$f(x) = p1 * x^3 + p2 * x^2 + p3 * x + p4 \quad (35)$$

Modelo 4: x grado 4

$$f(x) = p1 * x^4 + p2 * x^3 + p3 * x^2 + p4 * x + p5 \quad (36)$$

Modelo 5: x grado 5

$$f(x) = p1 * x^5 + p2 * x^4 + p3 * x^3 + p4 * x^2 + p5 * x + p6 \quad (37)$$

Modelo 6: x grado 6

$$f(x) = p1 * x^6 + p2 * x^5 + p3 * x^4 + p4 * x^3 + p5 * x^2 + p6 * x + p7 \quad (38)$$

Modelo 7: x grado 7

$$f(x) = p1 * x^7 + p2 * x^6 + p3 * x^5 + p4 * x^4 + p5 * x^3 + p6 * x^2 + p7 * x + p8 \quad (39)$$

Modelo 8: x grado 8

$$f(x) = p1 * x^8 + p2 * x^7 + p3 * x^6 + p4 * x^5 + p5 * x^4 + p6 * x^3 + p7 * x^2 + p8 * x + p9 \quad (40)$$

Donde:

$f(x)$ : es la covarianza

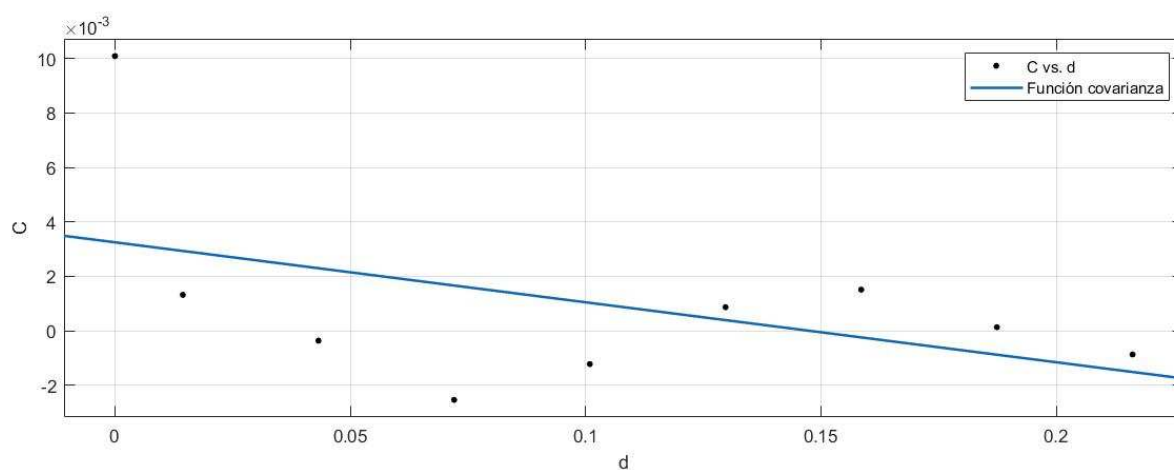
$x$ : es  $h$  que es distancia promedio de separación entre las observaciones del intervalo

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$ : son coeficientes del modelo matemático

Los puntos negros corresponden al promedio de los valores de covarianza en cada intervalo, mientras que la línea azul es el modelo funcional de la covarianza empírica.

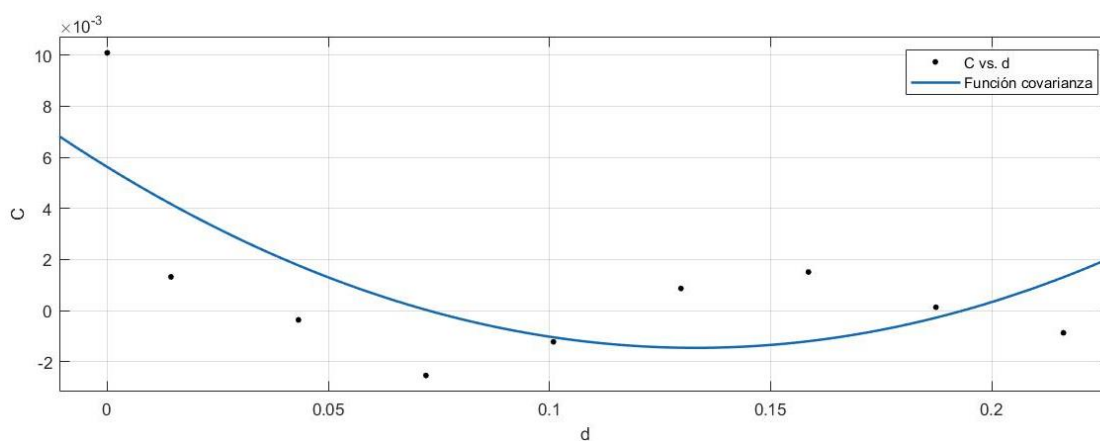
**Figura 20**

*Función covarianza polinomial de orden 1*



**Figura 21**

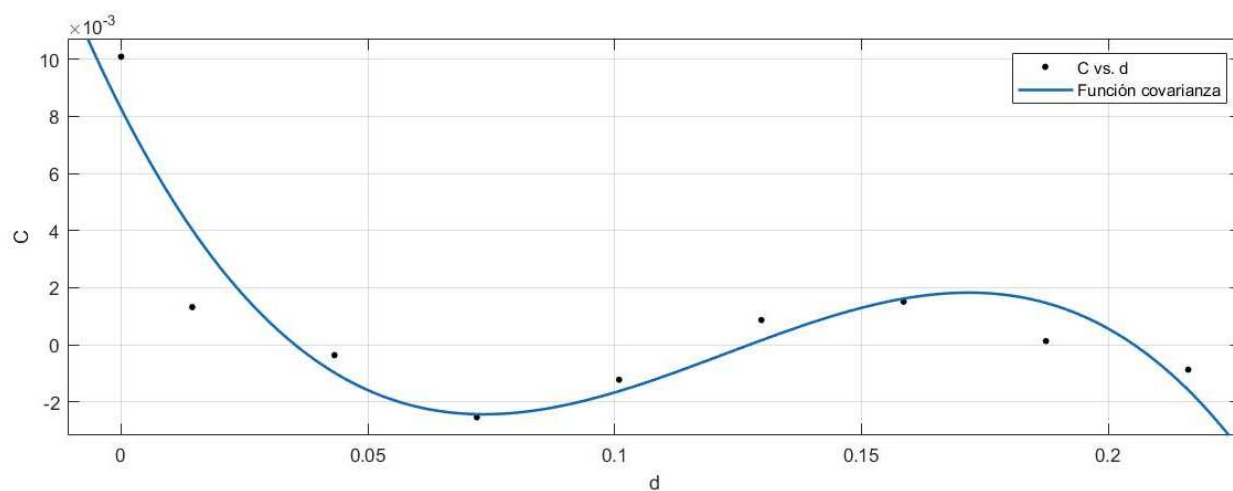
*Función covarianza polinomial de orden 2*



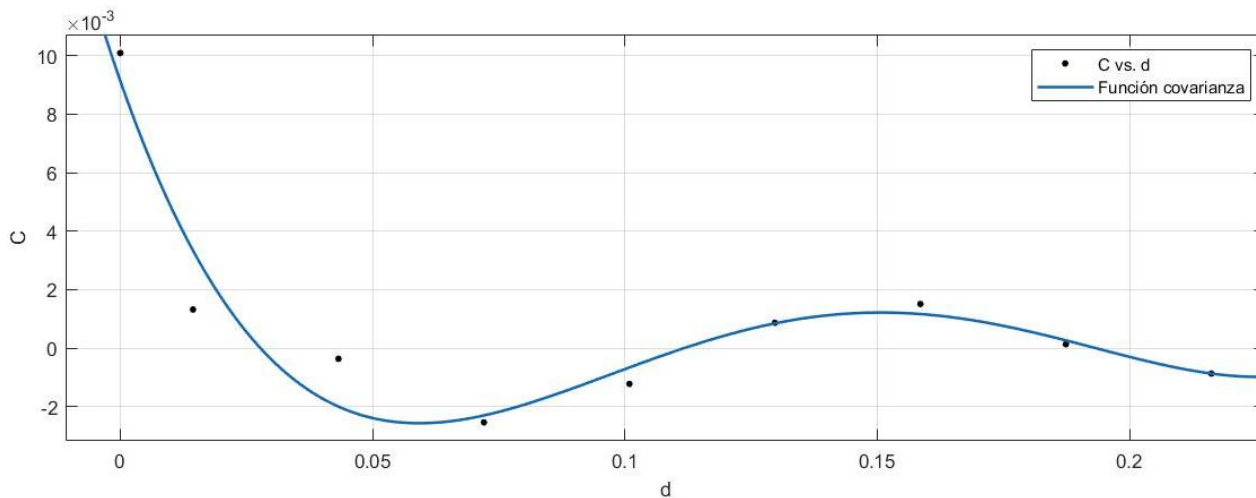


**Figura 22**

*Función covarianza polinomial de orden 3*

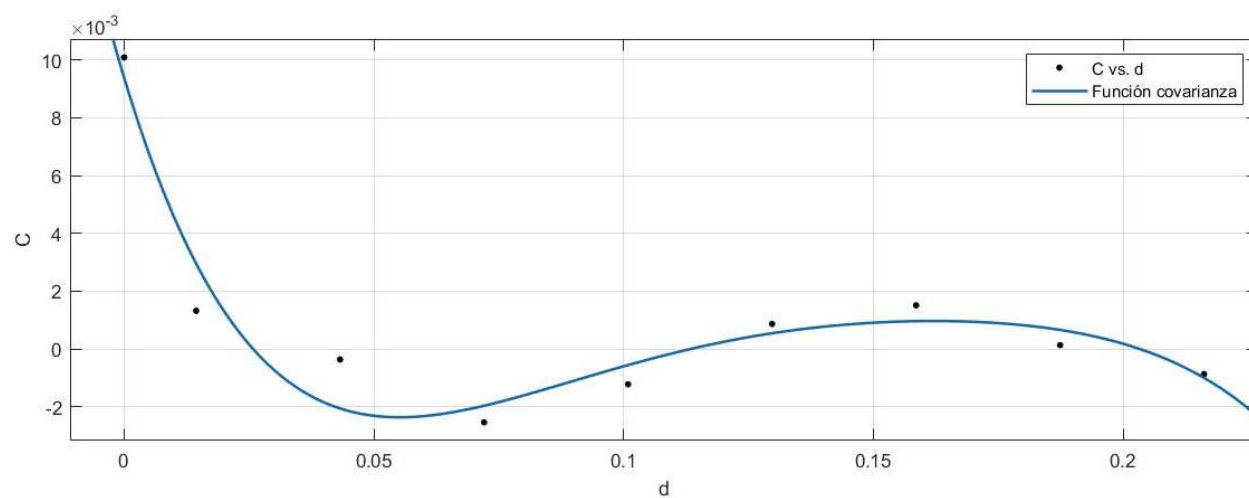
**Figura 23**

*Función covarianza polinomial de orden 4*

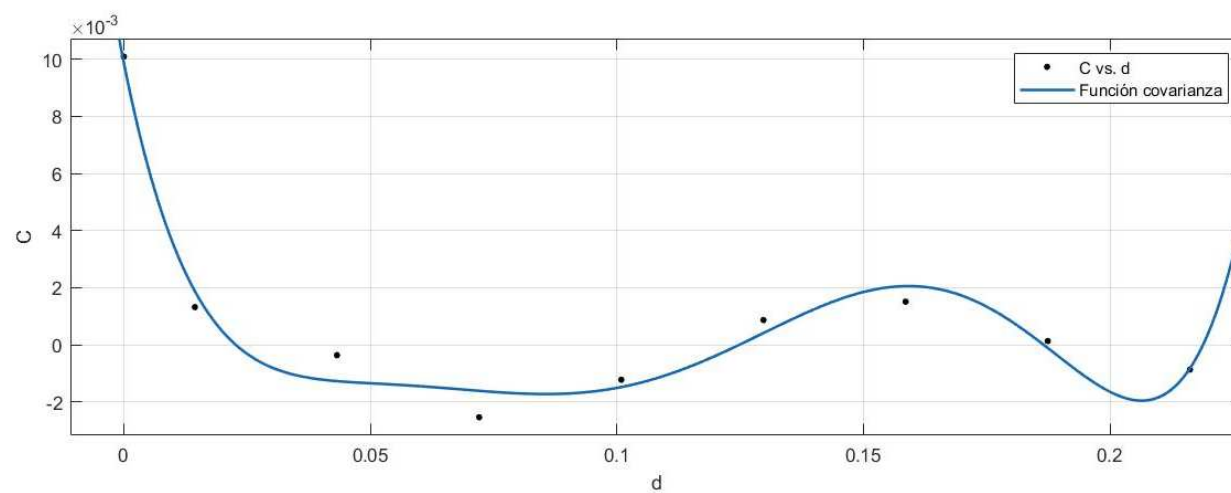


**Figura 24**

*Función covarianza polinomial de orden 5*

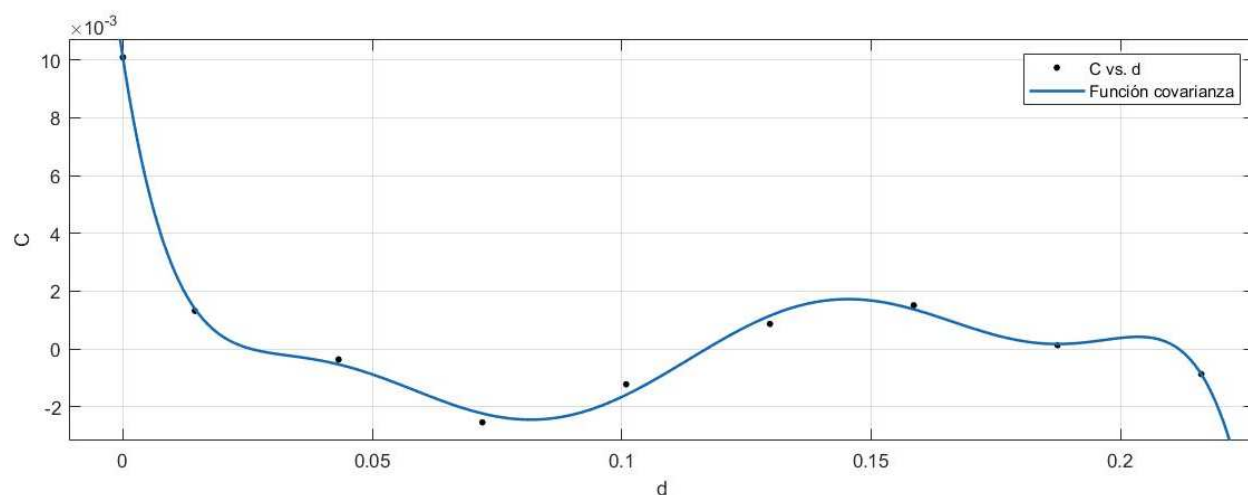
**Figura 25**

*Función covarianza polinomial de orden 6*

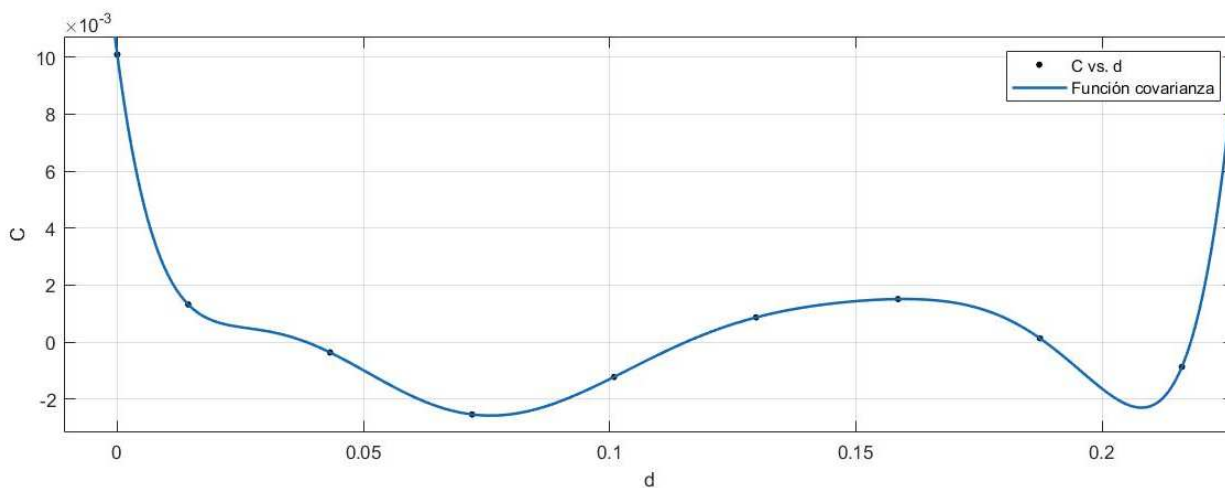


**Figura 26**

*Función covarianza polinomial de orden 7*

**Figura 27**

*Función covarianza polinomial de orden 8*



Después de la comparación de los 8 modelos matemáticos se determinó que el modelo de ajuste polinomial de orden 8 no es válido debido a que la ecuación está mal condicionada. Por otro lado, el modelo que se escogió para modelar la covarianza empírica fue el modelo de ajuste polinomial de grado 4 ya que es el que posee menos parámetros en comparación con los modelos que superan el 0.90 de  $R^2$ , además de un valor bajo RMSE.

**Tabla 8**

*Estadísticos de cada modelo matemático que se ajusta a la covarianza empírica*

<b>Modelo</b>	<b>RMSE</b>	<b>R<sup>2</sup></b>	<b>Observación</b>
Modelo 1	0.003461	0.2127	
Modelo 2	0.003078	0.4663	
Modelo 3	0.001674	0.8685	
Modelo 4	0.001427	0.9235	
Modelo 5	0.001582	0.9295	
Modelo 6	0.001155	0.9750	
Modelo 7	0.0006026	0.9966	
Modelo 8	0.0000000	1	La ecuación está mal condicionada.

**Tabla 9**

*Parámetros del modelo 4*

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
p1	61.534964
p2	-35.710368
p3	6.919328
p4	-0.494899
p5	0.009140

La matriz de covarianza de la señal se obtuvo aplicando los parámetros del modelo 4 a los valores de la matriz de distancias.

### ***Cálculo de la función covarianza del ruido***

La matriz de covarianza del ruido se forma conociendo la precisión de las medidas de ondulación geoidal aplicando la ecuación ( 19 ). En este caso, se aplicó el método de prueba-error y se llegó a determinar que el valor de 0.1 para varianza del ruido es el que genera menor RMSE en las predicciones de los puntos de validación.

### **Filtrado de las observaciones**

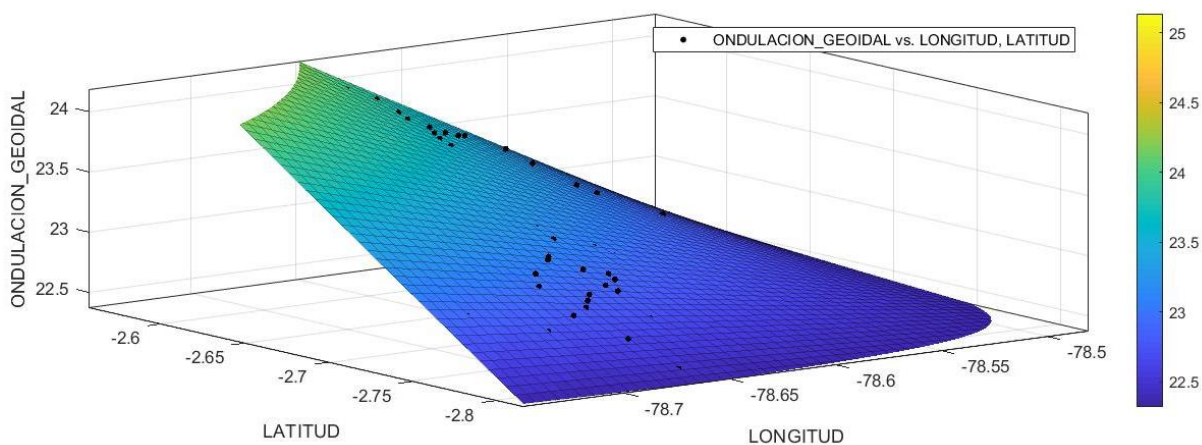
A continuación, se aplicó la fórmula para calcular los valores estimados de las señales correspondientes a las observaciones, para después llevar a cabo el filtrado en los puntos de observación, mediante la ecuación ( 25 ) con el objetivo de eliminar el ruido, lo que es de utilidad en la obtención del vector  $L_{MCC}$  de señales completas.

### **Ajuste del modelo matemático por Mínimos Cuadrados Colocación**

Una vez calculado el vector de observaciones filtradas, se suma con el vector de pronóstico extraído del análisis de residuales obtenido mediante la herramienta Regresión del grupo de herramientas de Análisis de datos en Excel, para calcular el vector  $L_{MCC}$  de señales completas que conjuntamente con el arreglo de mínimos cuadrados, correspondiente al modelo polinomial del modelo 2, x grado 1, y grado 2, permiten obtener los coeficientes utilizados para realizar la predicción.

### **Figura 28**

*Modelo matemático por Mínimos Cuadrados Colocación*



**Tabla 10**

*Parámetros del modelo matemático 2 por Mínimos Cuadrados Colocación*

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
p00	-7944.812785
p10	-101.604924
p01	-2818.250701
p11	-35.962684
p02	0.596016

### ***Predicción de valores de ondulación geoidal***

Para predecir los valores de ondulación geoidal de los 9 puntos de validación, 5 puntos tomados en campo y los 4 puntos que no fueron tomados en cuenta como datos en el modelo, se calculó la matriz de distancias entre los 51 puntos de observación y cada punto que se desea predecir, luego se calculó la matriz de covarianza de la señal en los puntos a predecir empleando el modelo de ajuste polinomial de orden 4.

Finalmente, para la predicción de la ondulación geoidal en los puntos de validación, se emplearon los valores del vector de señales y los valores de los parámetros ajustados mediante colocación de mínimos cuadrados aplicando la ecuación ( 33 ).

### **Representación gráfica del modelo de ondulación geoidal**

Para la obtención de un mapa de alturas geoidales de la zona de estudio se generó un archivo ráster, por lo que el primer paso fue definir la resolución espacial del modelo, con el fin de que no se sobrestime o subestime la funcionalidad del modelo de predicción.

Cuanto más densos sean los puntos de observación, mayor será la escala del mapeo. Una regla cartográfica en el mapeo de suelos, es que debe haber al menos una (idealmente cuatro) observación por  $1 \text{ cm}^2$  del mapa (Avery, 1987, como se citó en Hengel, 2005). Otro criterio es que la resolución de la cuadrícula también se puede relacionar la distancia entre los puntos

muestreados, es así que la resolución de la cuadrícula debe ser como máximo la mitad del espacio promedio entre los pares de puntos más cercanos (Boots & Getis, 1988, como se citó en Hengl, 2005). Para este caso, se ha usado la metodología de Hengl (2005) para lo cual se toma el número intermedio de 2.5 observaciones por 1 *cm* y se combina con la regla general de 0,5 mm por la escala del mapa, se obtiene la fórmula:

$$Resolución = 0.0791 * \sqrt{\frac{A}{N}} \quad (41)$$

Donde:

*A*: es el área de la zona de estudio en  $m^2$ .

*N*: es el número total de puntos.

Con un área de estudio de  $150322667.342m^2$  y con 51 puntos de muestreo aplicando la ecuación ( 41 ) se obtuvo un tamaño de píxel de 136 m equivalente a 0.0012252 grados sexagesimales, dado que cada grado es equivalente a 111 km en el ecuador (Pilar, 2008). Después, se generó una grilla ingresando a la página web del ICGEM y en la sección de Servicio de Cálculo se escogió la opción Rejillas Regulares. Se realizó la selección de cuadrícula tomando en cuenta los límites de la zona de estudio y un paso de cuadrícula de 0.0012252 grados. Se descargó el archivo con los puntos de la cuadrícula que pasaron a ser los puntos de predicción para ingresarlos en el programa de Matlab. Una vez que se obtuvieron las predicciones de alturas geoidales por el método de Mínimos Cuadrados Colocación se generó un archivo en formato .csv con información de longitud, latitud y ondulación geoidal de los puntos que se predijeron. Se cargó el archivo .csv en ArcMap 10.5 y se lo exportó como un archivo vectorial tipo punto finalmente fue transformado a un archivo ráster con el tamaño de píxel antes calculado, finalmente se recortó de acuerdo a la forma de la zona de estudio.

## Cokriging Ordinario

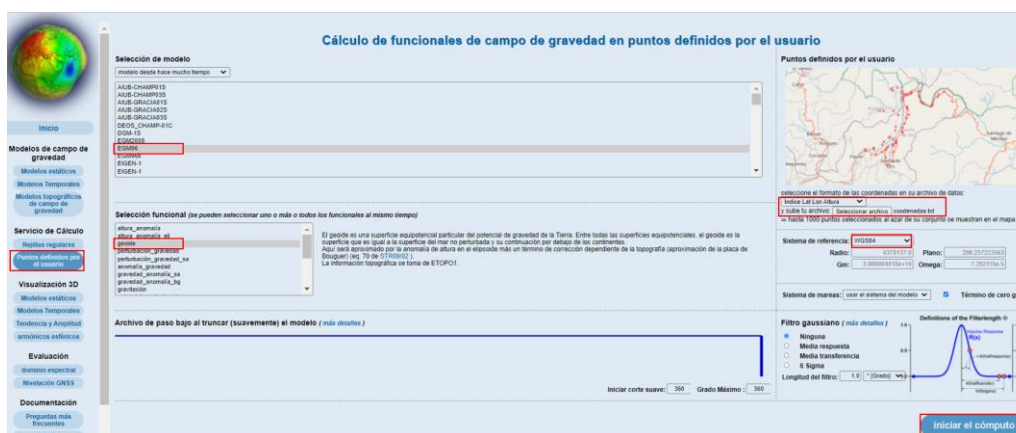
Para este método geoestadístico se tomó como variable principal la ondulación geoidal calculada a partir de los datos de altura elipsoidal obtenidos mediante posicionamiento GNSS y las alturas niveladas obtenidas mediante nivelación geométrica. Para la elección de la variable secundaria, primero se obtuvieron los datos de ondulación geoidal de los modelos gravimétricos EGM08 y EGM96 y del modelo geoidal geométrico del Ecuador. Los datos utilizados en el método geoestadístico Cokriging fueron los mismos 51 puntos empleados para modelar la ondulación geoidal con el método de Mínimos Cuadrados Colocación, los cuales fueron definidos a partir del análisis exploratorio de los datos.

### Obtención de datos de ondulación geoidal

Los datos de ondulación geoidal de los modelos globales EGM08 y EGM96 fueron descargados de la página web del Centro Internacional de Modelos Globales de la Tierra (ICGEM) (Figura 29). Para ello, se seleccionó la opción Puntos definidos por el usuario en la sección Servicio de Cálculo. Se ingresó un archivo (.txt) con las coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura elipsoidal) de los puntos seleccionados para este estudio.

**Figura 29**

*Proceso de descarga de datos de ondulación geoidal del modelo global EGM96*



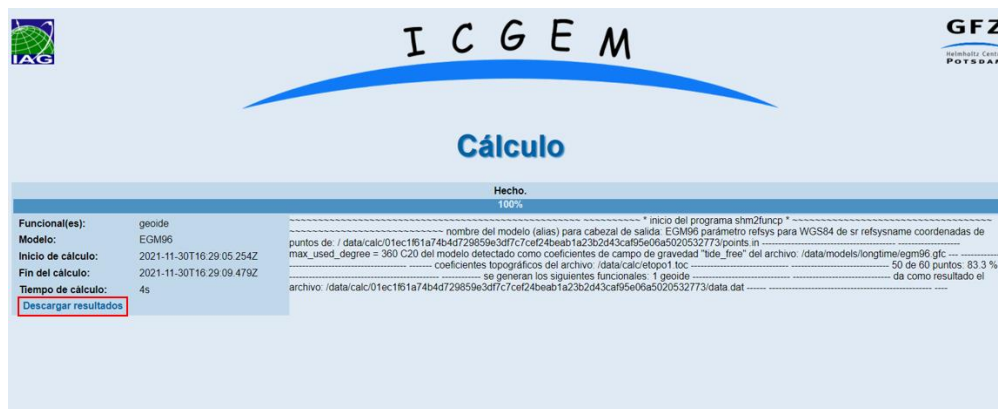
*Nota.* Tomado de (Ince, y otros, 2019)



A continuación, se descargaron los resultados en un archivo (.dat) (Figura 30) para ser importados a una hoja de cálculo. Se realizó el mismo proceso para obtener la ondulación geoidal en los puntos de observación con el modelo global EGM2008.

**Figura 30**

*Descarga de resultados*



*Nota.* Tomado de (Ince, y otros, 2019)

**Figura 31**

*Archivo descargado*

The screenshot shows a text file with calculation parameters and a table of geoid anomalies. The parameters section includes:

- modelname: EGM96
- max\_used\_degree: 360
- tide\_system: tide\_free
- zero\_degree\_term: included
- refsysname: WGS84
- max\_degree\_refpot: 8
- radius\_refpot: 6378137.000 m
- flat\_refpot: 3.352810664747480E-03 (1/298.25722356300)
- omegar\_refpot: 7.29211500000E-05 1/s
- topo\_shm: etopoi ==> for Bouguer anomaly and geoid
- crust\_density: 2670.0 [kg/m\*\*3] ==> for Bouguer anomaly and geoid
- water\_density: 1025.0 [kg/m\*\*3] ==> for Bouguer anomaly
- number\_of\_points: 60
- latlimit\_north: -2.5690035830000
- latlimit\_south: -2.8047618610000
- longlimit\_west: -78.735730030000
- longlimit\_east: -78.492284710000

The table section shows the following columns:

- 1 identifier (from input)
- 2 longitude (from input) [degree]
- 3 latitude (from input) [degree]
- 4 h\_over\_ell (from input) [meter]
- 5 geoid [meter] h\_anomaly\_ell + Topo-Term

The data rows are as follows:

1	2	3	4	5
1	-78.63248990	-2.65280439	2.672014E+03	2.555634073882E+01
2	-78.64087016	-2.69961941	2.570933E+03	2.507666083466E+01
3	-78.66128847	-2.72192022	2.445961E+03	2.482397586292E+01
4	-78.67649429	-2.73385931	2.438422E+03	2.468546592327E+01
5	-78.70721238	-2.75485935	2.379445E+03	2.444367215296E+01
6	-78.68261645	-2.76422057	2.539425E+03	2.448914857793E+01
7	-78.66284136	-2.74868334	2.625351E+03	2.457536155667E+01
8	-78.64933294	-2.72790574	2.449779E+03	2.478958093726E+01
9	-78.64603508	-2.74566903	3.106537E+03	2.463430825330E+01

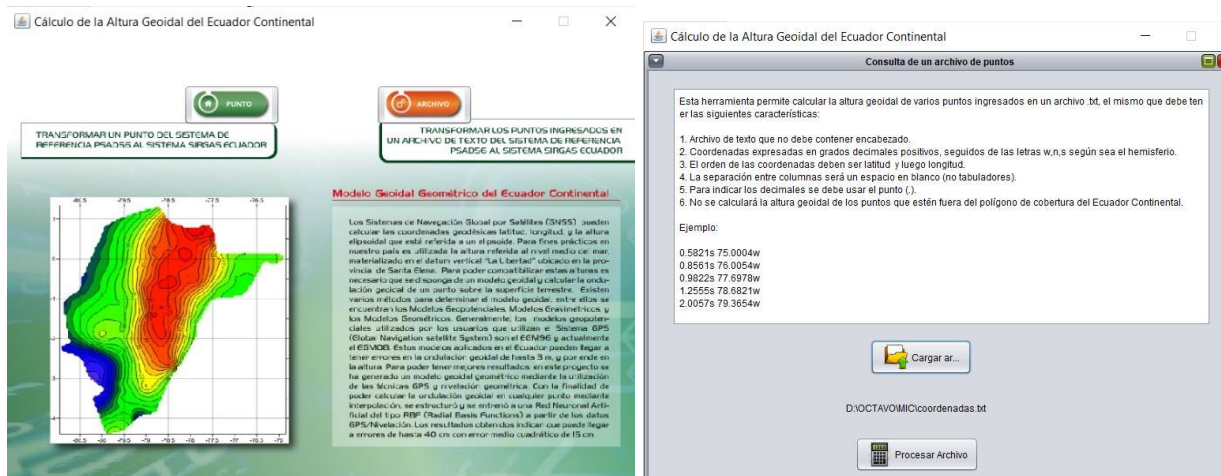
Annotations in the image include a red box around the 'Descargar resultados' button in Figure 30, and red boxes around the input data in Figure 31, with labels 'Datos ingresados (longitud, latitud y altura elipsoidal)' and 'Ondulación geoidal'.

*Nota.* Tomado de (Ince, y otros, 2019)

Por último, se obtuvieron las ondulaciones geoidales con el modelo geoidal local de Ecuador continental desarrollado por el IGM. Se preparó un archivo con las coordenadas geodésicas en formato .txt tal como se indicaba en la página del geoportal del IGM; sin embargo, al ejecutar el proceso en línea no se obtuvieron resultados. Así que, en su lugar, se descargó la aplicación de escritorio (Figura 32) que requiere tener instalado java en el equipo y puede ejecutarse sin necesidad de estar conectado a internet, se escogió la opción Archivo, se cargó el archivo preparado y se hizo clic sobre Procesar archivo. Como resultado la aplicación solicitó un nombre y una ubicación para que se guarde un nuevo archivo en el equipo. El nuevo archivo contenía las coordenadas del archivo ingresado y una nueva columna con los valores de altura geoidal calculados (Figura 33).

**Figura 32**

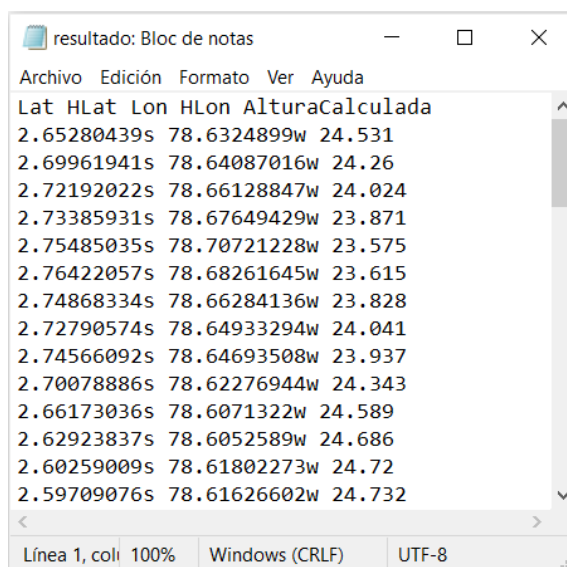
*Aplicación de escritorio para cálculo de altura geoidal del Ecuador Continental*



*Nota.* Tomado de (IGM, 2013)

### Figura 33

Archivo generado por la aplicación de escritorio



resultado: Bloc de notas

Lat	HLat	Lon	HLon	AlturaCalculada
2.65280439s		78.6324899w		24.531
2.69961941s		78.64087016w		24.26
2.72192022s		78.66128847w		24.024
2.73385931s		78.67649429w		23.871
2.75485035s		78.70721228w		23.575
2.76422057s		78.68261645w		23.615
2.74868334s		78.66284136w		23.828
2.72790574s		78.64933294w		24.041
2.74566092s		78.64693508w		23.937
2.70078886s		78.62276944w		24.343
2.66173036s		78.6071322w		24.589
2.62923837s		78.6052589w		24.686
2.60259009s		78.61802273w		24.72
2.59709076s		78.61626602w		24.732

Línea 1, col: 100% Windows (CRLF) UTF-8

### Selección de la variable auxiliar

Las variables auxiliares que se consideraron en este estudio fueron las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo EGM96, el modelo EGM08 y el modelo local desarrollado por el IGM. Se analizó la correlación entre la variable principal y cada variable auxiliar a través de la obtención del coeficiente de correlación en Excel (Tabla 11) de los 51 puntos que se utilizaron en el método de Mínimos Cuadrados Colocación ya que, al emplear los 60 puntos, el coeficiente de correlación era muy bajo en todos los casos, confirmando que la depuración de datos fue adecuada. Es así que se observó que la ondulación geoidal obtenida con el modelo EGM08 está más relacionada con la ondulación geoidal calculada en los puntos de la zona de estudio, por tal motivo se la seleccionó para ser la variable auxiliar. El coeficiente de correlación positivo 0.7008 indica que, si los valores de una variable aumentan, los valores de la otra también aumentarán y si disminuyen la otra también lo hará. Además, el valor del coeficiente de correlación sugiere una relación lineal fuerte.

**Tabla 11**

*Coefficiente de correlación de la ondulación geoidal calculada con respecto a otros modelos*

<b>Modelo</b>	<b>Coefficiente de correlación</b>
EGM96	0.6320
EGM08	0.7008
IGM	0.4986

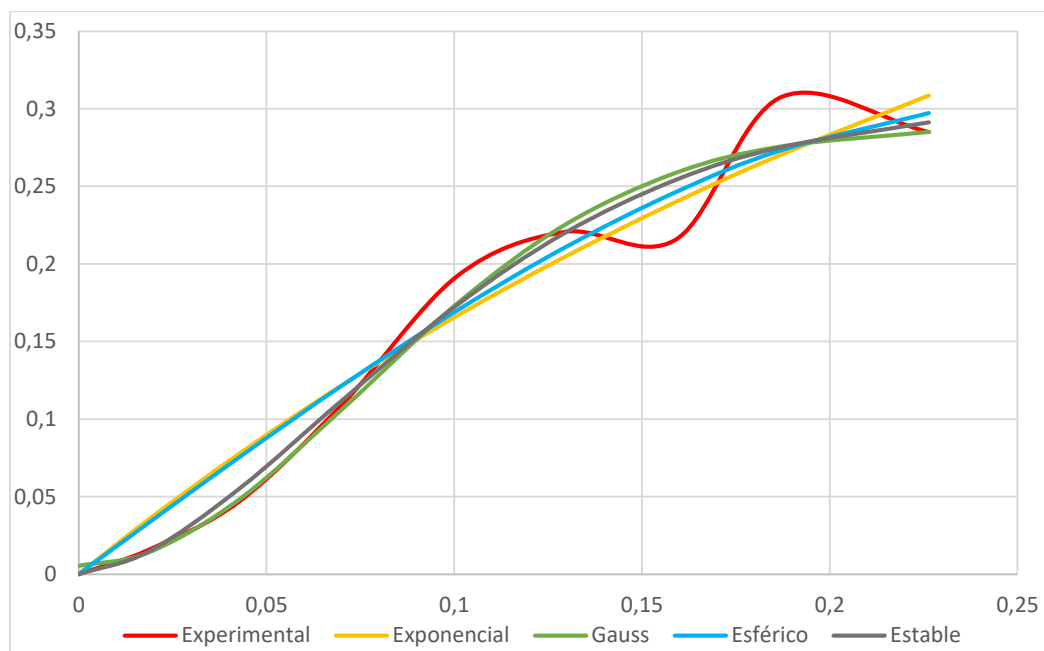
### ***Obtención de los modelos teóricos de semivarianza***

Debido a que se trabajó con una variable principal y una secundaria, se ajustaron tres modelos de semivariogramas simultáneamente, dos simples y un cruzado con el fin de encontrar el mejor modelo teórico de semivarianza que se ajuste a cada uno de los tres semivariogramas experimentales. Para este estudio se probaron los modelos teóricos: exponencial, gaussiano, esférico y estable que tienen tres parámetros en común: Efecto Pepita ( $C_0$ ), Meseta ( $C_1$ ) y Rango ( $a$ ), para los cuales se determinan valores iniciales a través de la observación del gráfico de semivariograma experimental.

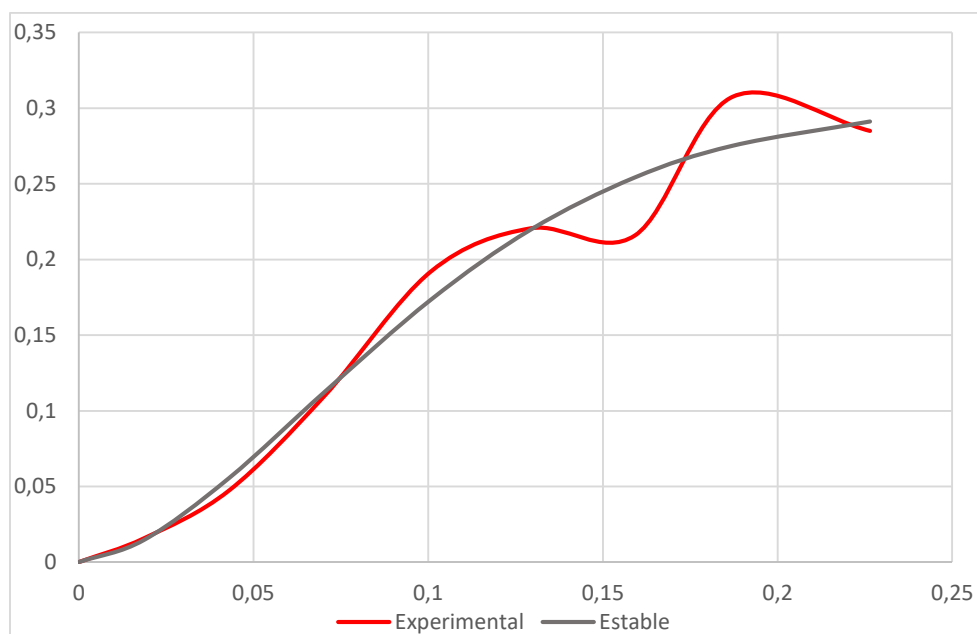
Posteriormente, se realizó un ajuste de los parámetros mediante la herramienta "Solver" de Excel que permite optimizar una variable, en este se pretendía minimizar el error cuadrático medio RMSE de cada modelo, cambiando los valores en las celdas correspondientes a los parámetros dependiendo del modelo de semivarianza teórico. Finalmente, se eligió como el mejor modelo teórico de semivarianza a aquel, cuyo valor de RMSE fuese menor. Por lo tanto, se escogió el modelo estable de semivarianza teórica para la variable principal, la variable cruzada y para la variable secundaria.

**Figura 34**

*Modelos teóricos de semivarianza probados para la variable principal*

**Figura 35**

*Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarianza elegido para la variable principal*



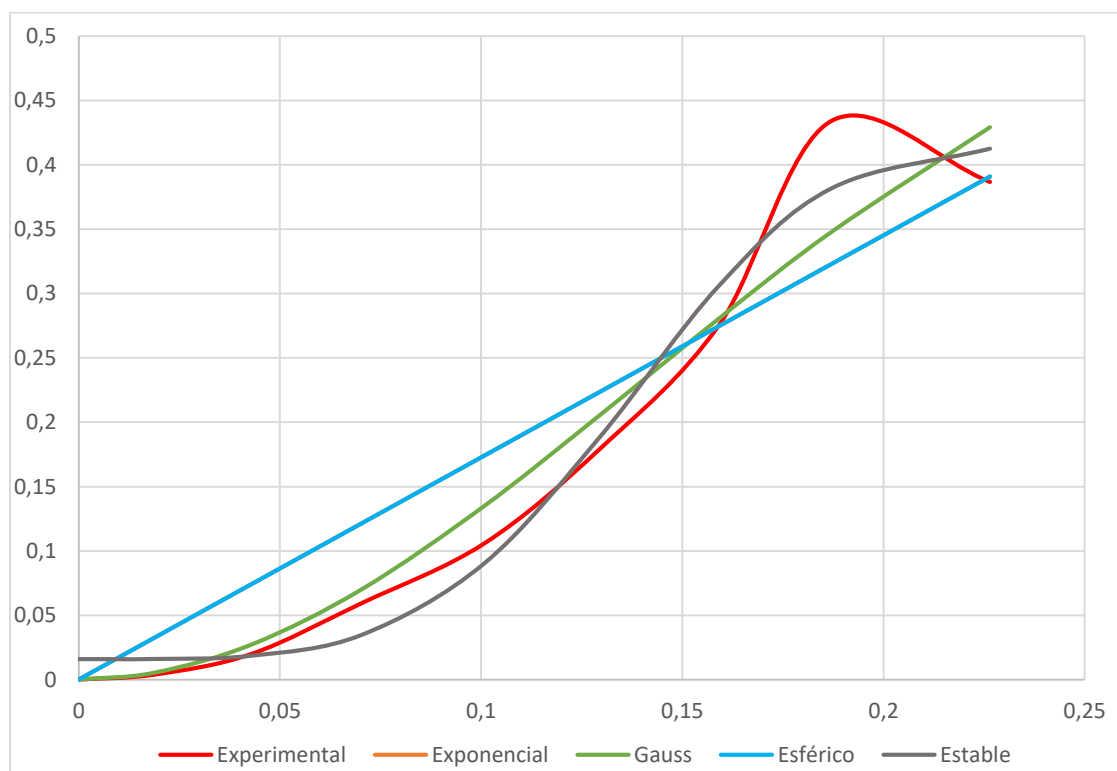
**Tabla 12**

*Parámetros de modelos de semivarianza teórico de la variable principal*

Parámetro	Exponencial	Gaussiano	Esférico	Estable
RMSE	0.0234	0.0190	0.0214	0.0182
Co	0.0000	0.0054	0.0000	0.0000
C1	0.5763	0.2824	0.3028	0.3018
Rango (a)	0.8865	0.1828	0.2554	0.2121
Teta				1.6874

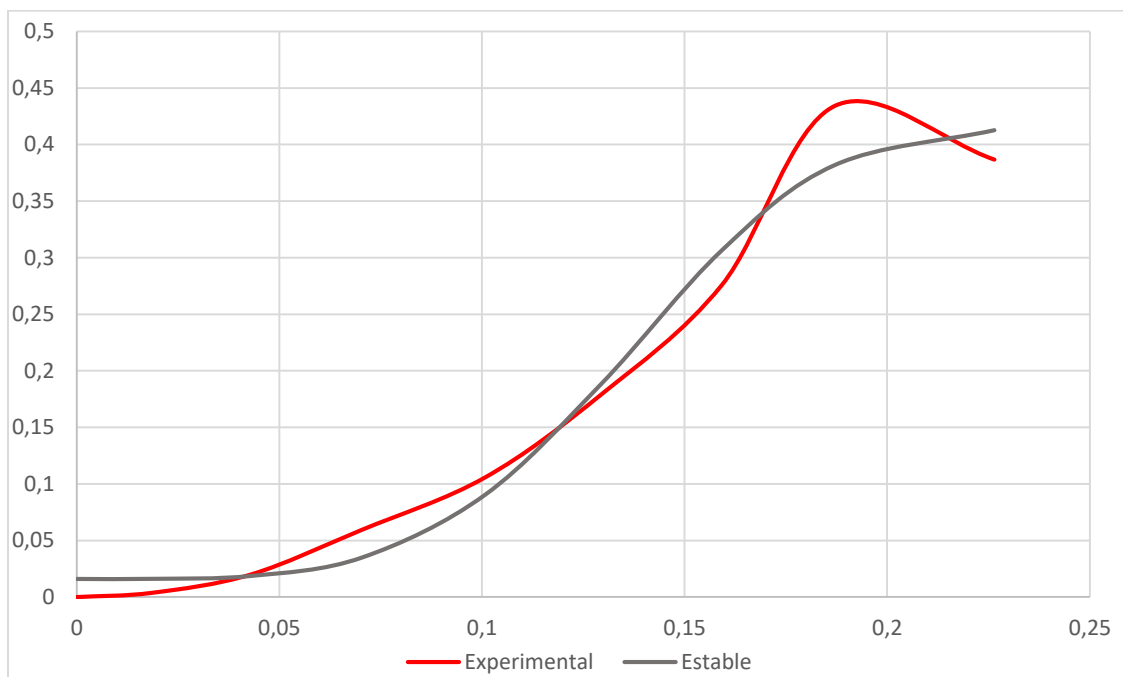
**Figura 36**

*Modelos teóricos de semivarianza probados para la variable cruzada*



**Figura 37**

*Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarianza elegido para la variable cruzada*

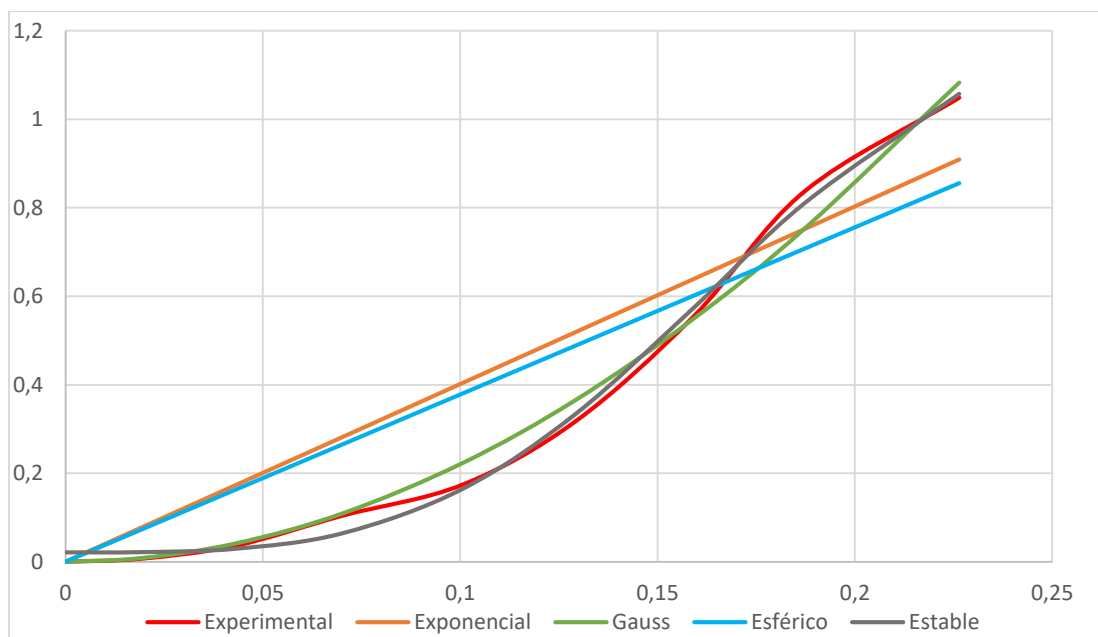
**Tabla 13**

*Parámetros de modelos de semivarianza teórico de la variable cruzada*

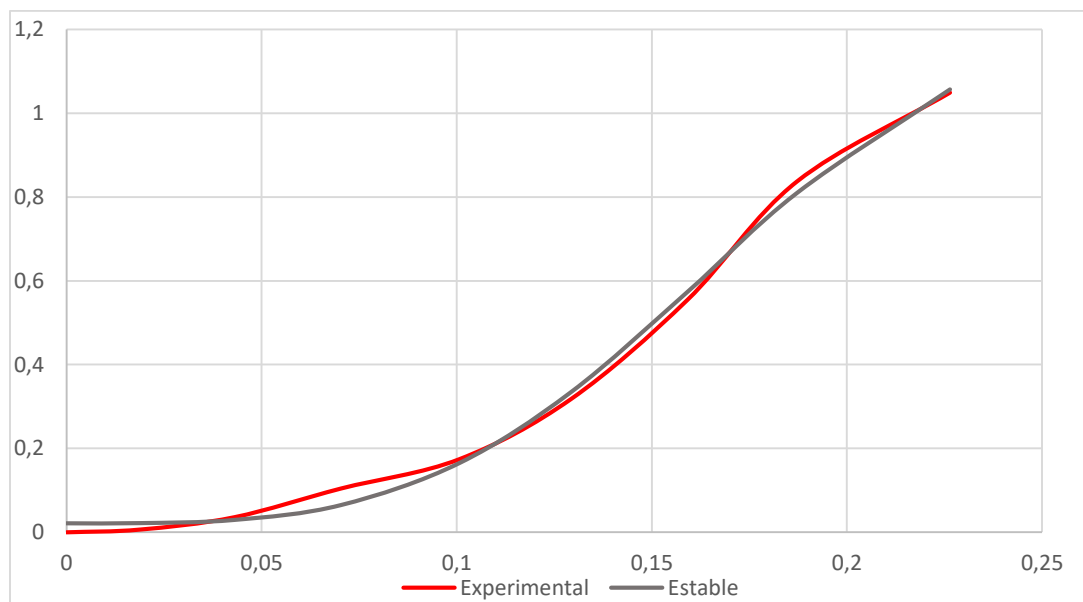
<b>Parámetros</b>	<b>Exponencial</b>	<b>Gaussiano</b>	<b>Esférico</b>	<b>Estable</b>
RMSE	0.0544	0.0349	0.0544	0.0251
Co	0.0000	0.0000	0.0000	0.0159
C1	7597.1033	0.5851	40.9739	0.3985
Rango	13204.1986	0.3410	35.5932	0.1957
Teta				4.0328

**Figura 38**

*Modelos de semivarianza teóricos probados para la variable auxiliar*

**Figura 39**

*Semivariograma Experimental y Modelo teórico de semivarianza elegido para la variable auxiliar*





**Tabla 14**

*Modelos de semivarianza teóricos probados para la variable auxiliar*

<b>Parámetros</b>	<b>Exponencial</b>	<b>Gaussiano</b>	<b>Esférico</b>	<b>Estable</b>
RMSE	0.1424	0.0381	0.1391	0.0206
Co	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
C1	1187199370.0767	10.7473	138.7873	1.1698
Rango	886902439.0488	1.2035	55.1157	0.2489
Teta				3.4596

### ***Predicción de valores de ondulación geoidal***

Una vez que se eligió el mejor modelo de semivarianza teórico conjuntamente con los valores de Efecto Pepita ( $C_0$ ), Meseta ( $C_1$ ) y Rango ( $a$ ) se realizó la predicción de la ondulación geoidal mediante la multiplicación de la inversa de la matriz que contiene los valores de las funciones de semivarianza y de semivarianza cruzada calculadas para todas las distancias entre las parejas de puntos consideradas, con el vector que contiene los valores de las funciones de semivarianza y semivarianza cruzada evaluados, en cambio para las distancias entre los 51 puntos utilizados para el modelo y los puntos para predicción (Giraldo R. H., 2007).

Posteriormente, se obtuvo la matriz de pesos cuyos elementos se multiplicaron con los valores de ondulación geoidal de las observaciones de las variables principal y auxiliar correspondientes a los 51 datos del modelo, para luego sumar los resultados y de esta manera hallar la predicción de la ondulación geoidal para las dos variables utilizadas en este estudio.

### **Trabajo de campo**

#### ***Nivelación geométrica***

Se llevó a cabo la nivelación geométrica partiendo desde la placa del punto BN-08 con el fin de hallar la altura nivelada de los puntos de interés seleccionados en la zona de estudio en la planificación realizada previa a la salida de campo (Figura 40), empleando la nivelación geométrica compuesta desde el medio. El equipo utilizado fue el nivel digital Leica DNA10 que

realiza mediciones electrónicas de alta precisión con miras invar y para la descarga de los datos se empleó el software Leica Geo office versión 8.4 (Figura 41). Los puntos fueron materializados a través de clavos de acero colocados en la vereda de la vía.

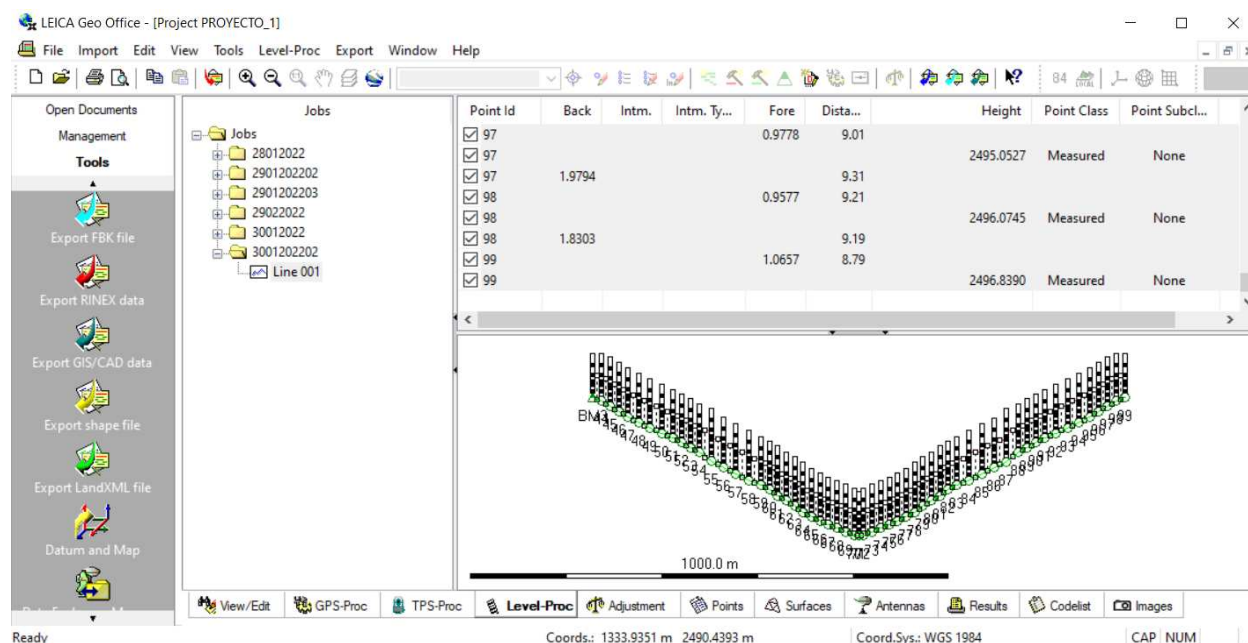
**Figura 40**

*Planificación realizada para la salida de campo*



**Figura 41**

*Descarga de datos de nivelación del tramo BM3-PP1*



## Figura 42

### *Nivelación en campo*



**Tabla 15**

### *Alturas niveladas obtenidas*

<b>Puntos</b>	<b>Altura nivelada (m)</b>
PP1	2470.964
PP2	2424.4177
BM1	2368.7049
BM2	2517.8649
BM3	2496.8382

### **Posicionamiento GNSS**

Se utilizaron 4 receptores GNSS doble frecuencia Trimble R8s. Primero, se colocaron dos receptores en los puntos PRCP-06 y PRCP-07 respectivamente que estuvieron procesando señales de los satélites continuamente durante aproximadamente 3 horas y 30 minutos. Los otros dos receptores fueron empleados para rastrear los puntos PP1, PP2, BM1, BM2 y BM3. Se

configuró el estilo de levantamiento como estático rápido para todos los equipos GNSS con los siguientes parámetros: intervalo de registro de 5 segundos, máscara de elevación de 10 grados, tiempo de ocupación de 30 minutos, simple y doble frecuencia, PDOP máximo de 6. Se realizó el correcto nivelado y centrado de la antena sobre el punto.

### **Figura 43**

*Posicionamiento GNSS en el punto PP2*



### **Descarga y procesamiento de líneas base**

Los datos fueron importados de los equipos GNSS a las respectivas colectoras de datos para luego ser exportados vía Bluetooth a un dispositivo móvil. Por otro lado, el procesamiento de líneas base fue realizado en el software Trimble Business Center que permite efectuar el procesamiento de observaciones GNSS. Se cargaron los datos de los equipos base PRCP-06 y PRCP-07 para añadir sus respectivas coordenadas, las cuales fueron extraídas de las monografías de los puntos de Control Geodésico generadas en el proyecto “Levantamiento

topográfico Lidar e implementación de red geodésica en la zona de Influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute Integral” y se establecieron como puntos de control.

**Figura 44**

*Ingreso de coordenadas a TBC*

**MONOGRAFÍA DE PUNTO DE CONTROL GEODÉSICO**  
 LEVANTAMIENTO TOPOGRÁFICO LIDAR E IMPLEMENTACIÓN DE RED GEODÉSICA LOCAL EN LA ZONA DE INFLUENCIA DEL COMPLEJO HIDROELÉCTRICO PAUTE INTEGRAL

Proyecto	Nominación del Punto	Monumentación	Ubicación
LIDAR HIDROPAUTE	PRCP - 07	HITO - PLACA	Rural

Sistema de Referencia Geodésico	Marco de Referencia	Época de referencia	Elipsoide
SIRGAS	ITRF 2014	2019.638	WGS84

País	Provincia	Cantón	Parroquia
Ecuador	Azuay	Guachapala	Guachapala

Coordenadas Geodésicas		Coordenadas UTM		Coordenadas LTM		Fecha de Determinación:	
Latitud (" ° ' ")	2° 44' 55.25997" S	Zona:	17S	Norte (m):	9695952.1518	Orden:	GP
Longitud (" ° ' ")	78° 39' 46.22892" O	Norte (m):	9695931.3139	Este (m):	509385.9447	Equipo Utilizado:	
Altura Elipsoidal (m):	2625.3538	Este (m):	759842.2510	Altura(m):	2625.3538	Modo:	

Parámetros Proyección Local LTM	Falso Norte: 10 000.000 m	Falso Este: 500.000 m	Meridiano Central:
---------------------------------	---------------------------	-----------------------	--------------------

**Croquis del Punto** **Fotografía del Punto**

**Explorador de pro...** Vista en planta (Mi Filtro) x

**Añadir coordenada**

ID punto: PRCP07

Tipo coordenadas: Global

Latitud: S2°44'55.259988"

Longitud: A78°39'46.228932"

Calidad del control:  Calidad del control

Calidad topográfica

Calidad cartográfica

Calidad desconocida

Altura: 2625.354

Estado:  Habilitado

Cuadrícula: Este: 759842.2507 m, Norte: 9695931.3136 m, Elevación: 2601.226 m

Local: Latitud: S2°44'55.259988", Longitud: A78°39'46.228932", Altura: 2625.354 m

Panel indicadores: Mensaje

Aceptar Cancelar

Selección: Metro Cuadrícula 17 South 1 E 2360.8550 m, 4856.7502 m

A continuación, fueron subidos los datos correspondientes a los equipos móviles (Figura 44) y se seleccionaron las líneas base que se deseaban procesar desde la opción *Vista basada en tiempo* (Figura 45).

Figura 45

Ingreso de los datos correspondientes a los móviles

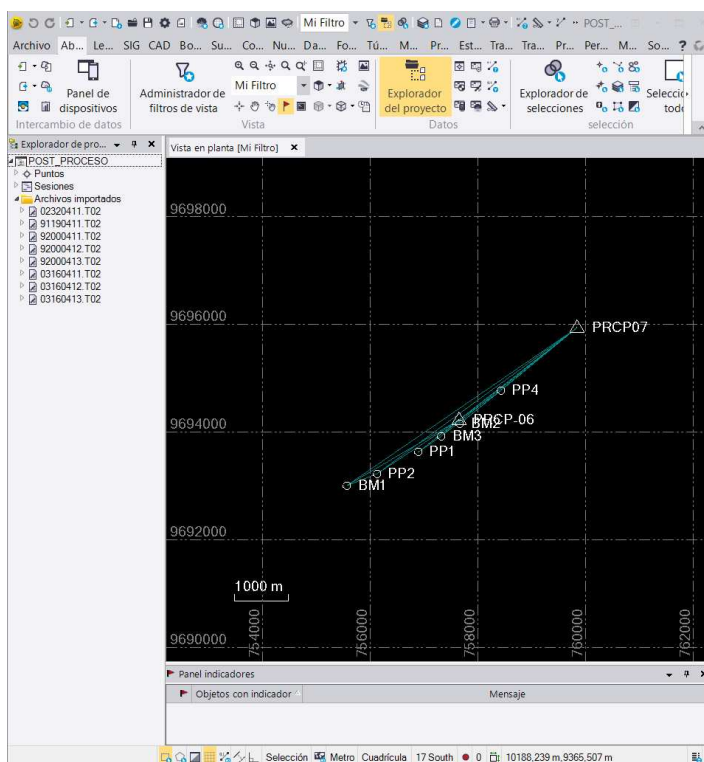
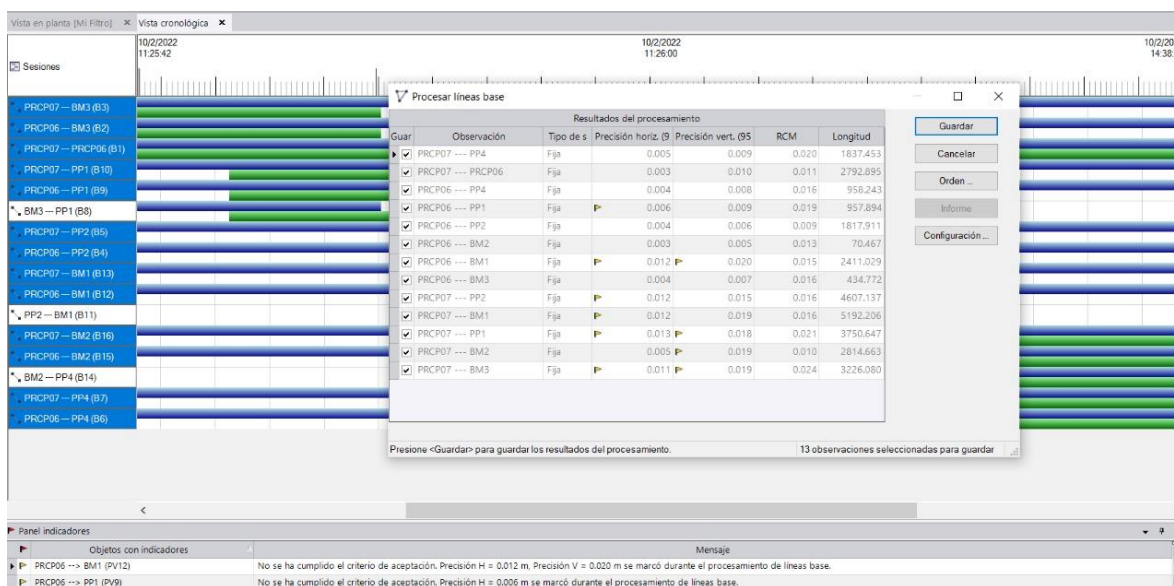


Figura 46

Procesamiento de líneas base



Finalmente, se obtuvo el informe de procesamiento de líneas base y el listado de puntos en coordenadas geodésicas que serán utilizados como datos de validación para el modelo generado.

## Figura 47

### Informe de lista de puntos

Datos del archivo del proyecto		Sistema de coordenadas	
Nombre:	C:\Users\Vanes\Desktop\OCTAVO_ESPE\MIC\CAMPO\procesamiento.vce	Nombre:	World wide/UTM
Tamaño:	68 KB	Datum:	WGS 1984
Modificado/a:	11/2/2022 19:57:15 (UTC:-5)	Zona:	17 South
Zona horaria:	Hora est. Pacifico, Sudamérica	Geoide:	
Número de referencia:		Datum vertical:	
Descripción:		Obra calibrada:	
Comentario 1:			
Comentario 2:			
Comentario 3:			

### Lista de puntos

ID	Latitud (Global)	Longitud (Global)	Altura (Global) (Metro)	Código de característica
BM1	S2°46'30.9207"	A78°42'04.5431"	2391.661	
BM2	S2°45'53.3389"	A78°40'56.6175"	2540.797	
BM3	S2°46'00.8767"	A78°41'07.6623"	2519.796	
PP1	S2°46'10.6580"	A78°41'21.5927"	2493.916	
PP2	S2°46'23.7701"	A78°41'46.4443"	2447.367	
PP4	S2°45'33.3836"	A78°40'32.0330"	2596.527	
PRCP07	S2°44'55.2600"	A78°39'46.2289"	2625.354	
PRCP-06	S2°45'51.1940"	A78°40'57.4192"	2539.428	

15/2/2022 12:50:49	C:\Users\Vanes\Desktop\OCTAVO_ESPE\MIC\CAMPO\procesamiento.vce	Trimble Business Center
--------------------	--	-------------------------

## Capítulo IV. Análisis De Resultados y Discusión

### Análisis de resultados

Se emplearon 9 puntos situados en la zona de estudio: 4 puntos excluidos del conjunto de datos iniciales tras el análisis exploratorio de datos y 5 puntos obtenidos en campo para validar los modelos de alturas geoidales locales mediante el método de Mínimos Cuadrados Colocación y Cokriging. En la Tabla 16 se presentan los 9 puntos de validación con sus correspondientes coordenadas de latitud, longitud y la ondulación geoidal observada que se obtuvo aplicando la diferencia entre altura elipsoidal y la altura nivelada del punto, así como los valores de ondulación obtenidos de los modelos geoidales: EGM08, EGM96 e IGM, utilizados en el método de Cokriging como variables auxiliares.

**Tabla 16**

*Puntos de validación para los modelos de predicción de la ondulación geoidal mediante MCC y Cokriging*

Punto	Coordenadas (°)		Ondulación Geoidal (m)			
	Latitud	Longitud	Observada	EGM08	EGM 96	IGM
PRCP-05	-2.754850	-78.707212	23.0797	22.9835	24.4437	23.5750
PRCP-12	-2.629238	-78.605259	23.346	24.2880	25.8742	24.6860
PRCP-17	-2.584953	-78.592056	23.5514	24.4830	26.3791	24.7720
BN-16	-2.737087	-78.639228	22.6783	23.4507	24.7159	24.0380
BM1	-2.775256	-78.701262	22.9561	22.8731	24.2866	23.4420
BM2	-2.764816	-78.682394	22.9321	23.0289	24.4033	23.6120
BM3	-2.766910	-78.685462	22.9578	23.0008	24.3807	23.5810
PP1	-2.769627	-78.689331	22.9520	22.9651	24.3518	23.5420
PP2	-2.773269	-78.696235	22.9493	22.9096	24.3107	23.4810

Para la determinación de las alturas geoidales por el método de Mínimos Cuadrados Colocación, se empleó el modelo funcional de grado 1 para “x” y grado 2 para “y” y un h óptimo



de 0.0288288 grados. Además, se evaluaron los valores de RMSE de las predicciones obtenidas con los parámetros descritos anteriormente, empleando diferentes combinaciones de: modelos de función de covarianza empírica, números de intervalos y valores de varianza del ruido. Se observa que la mayoría de modelos generados con MCC que tienen un RSR menor a 0.5 son muy buenos y menores a 0.6 muy buenos, en cambio hay un modelo insatisfactorio pues supera el 0.7 (Moriassi et al., 2007).

**Tabla 17**

*Estadísticos en los puntos de validación con un  $h$  óptimo de 0.0288288 grados y diferentes variables mediante el método de MCC*

Función de covarianza	Número de intervalos	Varianza del ruido	Error (m)				RMSE (m)	RSR
			Absoluto máximo	Absoluto mínimo	Media	Desviación estándar		
Modelo polinomial 4: x grado 4	8	0.0001	0.3285	0.0151	0.0787	0.1782	0.1855	0.4511
	8	0.001	0.2854	0.0210	0.0921	0.1646	0.1805	0.4388
	8	0.01	0.2987	0.1087	0.1310	0.1712	0.2079	0.5055
	8	0.1	0.2091	0.0073	0.0912	0.1309	0.1534	0.3731
	10	0.0001	0.3267	0.0153	0.0793	0.1777	0.1854	0.4508
	10	0.001	0.2829	0.0195	0.0939	0.1643	0.1812	0.4405
	10	0.01	0.3866	0.0861	0.1372	0.2167	0.2461	0.5985
	10	0.1	0.2087	0.0074	0.0917	0.1310	0.1538	0.3740
Modelo polinomial 3: x grado 3	8	0.0001	0.3176	0.0205	0.1245	0.1541	0.1913	0.4652
	8	0.001	0.2982	0.0296	0.0642	0.1545	0.1592	0.3871
	8	0.01	0.2579	0.0189	0.0812	0.1416	0.1562	0.3799
	8	0.1	97.5131	2.8757	50.2066	34.7509	59.9512	145.7811
	10	0.0001	0.3974	0.0120	0.0483	0.1886	0.1842	0.4480
	10	0.001	0.3028	0.0305	0.0687	0.1585	0.1645	0.4000
	10	0.01	0.2731	0.0462	0.0763	0.1421	0.1542	0.3750
	10	0.1	0.2267	0.0069	0.1075	0.1389	0.1694	0.4120

**Tabla 18**

*Ondulación geoidal estimada mediante MCC con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación*

<b>Punto</b>	<b>Ondulación geoidal estimada (m)</b>	<b>Intervalo de confianza (m)</b>
PRCP-05	22.9465	±0.0566
PRCP-12	23.3534	±0.0645
PRCP-17	23.4977	±0.0417
BN-16	22.8874	±0.0527
BM1	22.7560	±0.0508
BM2	22.8044	±0.0395
BM3	22.7941	±0.0636
PP1	22.7799	±0.0771
PP2	22.7633	±0.0718
RMSE	0.1534	

Luego, se realizó la validación cruzada con los 51 datos, variando el modelo funcional y manteniendo constante el grado de la función de covarianza y los valores resaltados en la Tabla 17, es así que en la Tabla 19 se aprecia que el menor RMSE se obtiene con el modelo 2 y la función de covarianza de grado 4.

**Tabla 19**

*Validación cruzada de MCC con distintos modelos matemáticos*

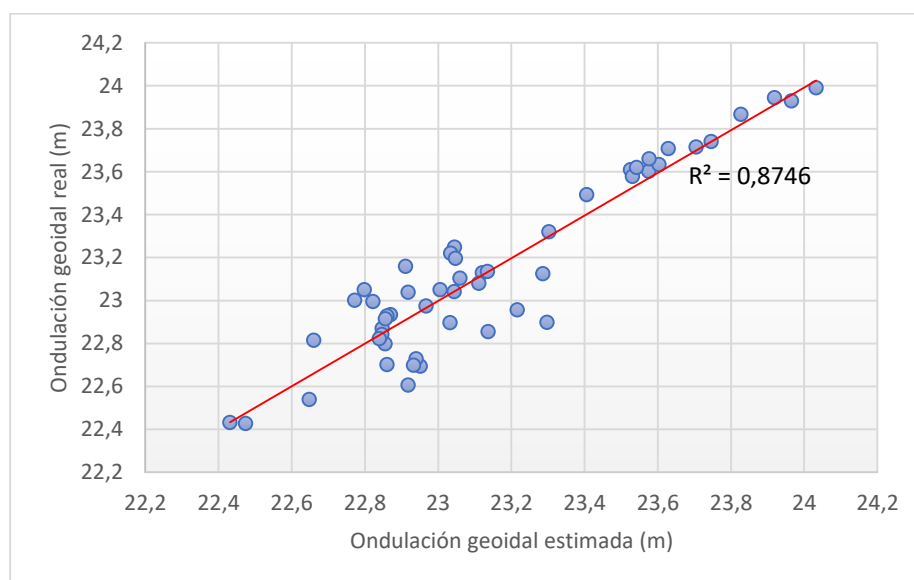
<b>Modelo matemático</b>	<b>Grado de la función de covarianza</b>	<b>RMSE validación cruzada (m)</b>
Modelo 1: X1 Y1	4	0.1443
Modelo 2: X1 Y2	4	0.0993
Modelo 3: X1 Y3	4	0.6003

En la Figura 48, la Figura 49 y la Figura 50 se aprecian la bondad de los modelos de mínimos cuadrados colocación con distintos modelos matemáticos. Se aprecia una mayor

dispersión en las en los modelos generados mediante MCC en los que se aplicó el modelo matemático 1 y el modelo matemático 3.

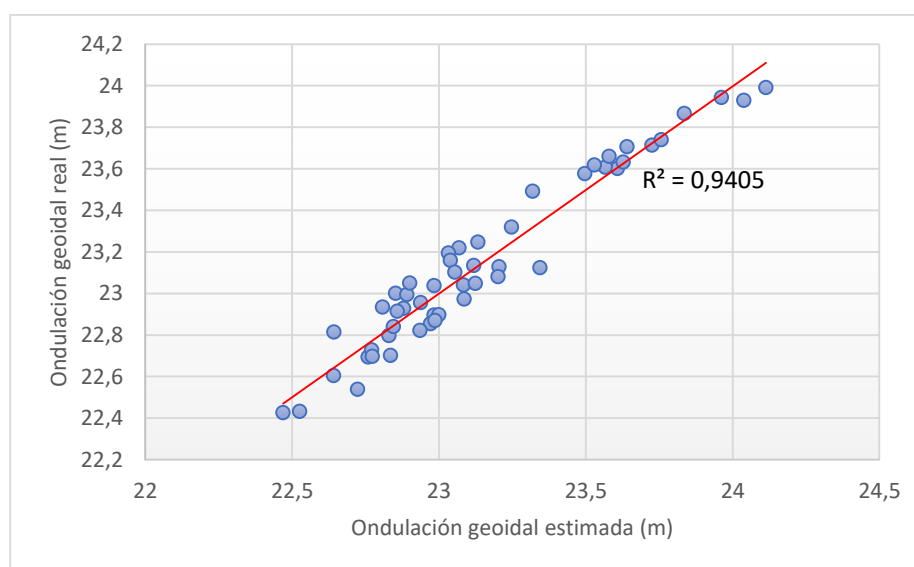
### Figura 48

*Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 1*



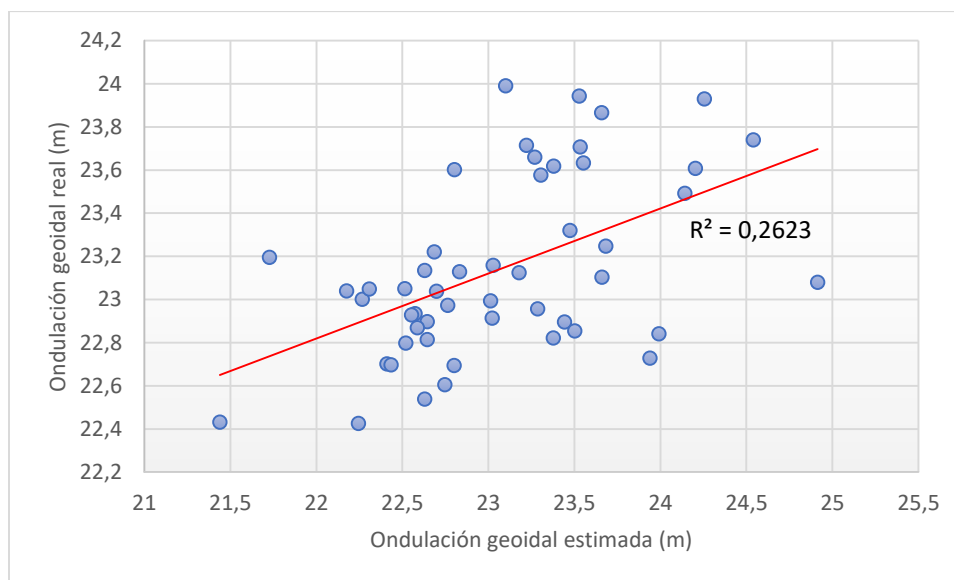
### Figura 49

*Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 2*



**Figura 50**

Comparación entre valores reales y estimados usando el modelo matemático 3



Por otra parte, los parámetros empleados para la predicción de alturas geoidales mediante el método geoestadístico Cokriging Ordinario fueron: 8 intervalos para el cálculo del semivariograma experimental,  $h$  óptimo=0.0288288 y el modelo estable para la construcción de los tres semivariogramas teóricos.

**Tabla 20**

Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo EGM08 con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación

Punto	Ondulación geoidal (m)		Intervalo de Confianza (m)	
	Estimada	EGM08	Estimada	EGM08
PRCP-05	22.8467	19.4732	±0.0543	±0.0783
PRCP-12	23.1720	32.9018	±0.0013	±0.0614
PRCP-17	23.5776	33.7363	±0.0004	±0.0886
BN-16	23.0492	20.9463	±0.0008	±0.0623
BM1	22.7275	19.5593	±0.0007	±0.0797
BM2	22.9337	20.1985	±0.0003	±0.0809

Punto	Ondulación geoidal (m)		Intervalo de Confianza (m)	
	BM3	22.9324	20.1099	±0.0012
PP1	22.8907	19.9839	±0.0018	±0.0808
PP2	22.7884	19.7430	±0.0016	±0.0803
RMSE	0.1842	4.9964		

**Tabla 21**

*Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo EGM96 con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación*

Punto	Ondulación geoidal (m)		Intervalo de Confianza (m)	
	Estimada	EGM96	Estimada	EGM96
PRCP-05	22.8441	10.0533	±0.001	±0.1601
PRCP-12	23.1738	35.2316	±0.0013	±0.1303
PRCP-17	23.5780	40.8424	±0.0004	±0.1675
BN-16	23.0477	14.4677	±0.0008	±0.134
BM1	22.7291	9.3299	±0.0007	±0.1647
BM2	22.9338	10.3765	±0.0003	±0.1616
BM3	22.9321	10.1525	±0.0012	±0.1624
PP1	22.8902	9.8862	±0.0018	±0.1633
PP2	22.7888	9.5257	±0.0016	±0.1643
RMSE	0.1838	13.5794		

**Tabla 22**

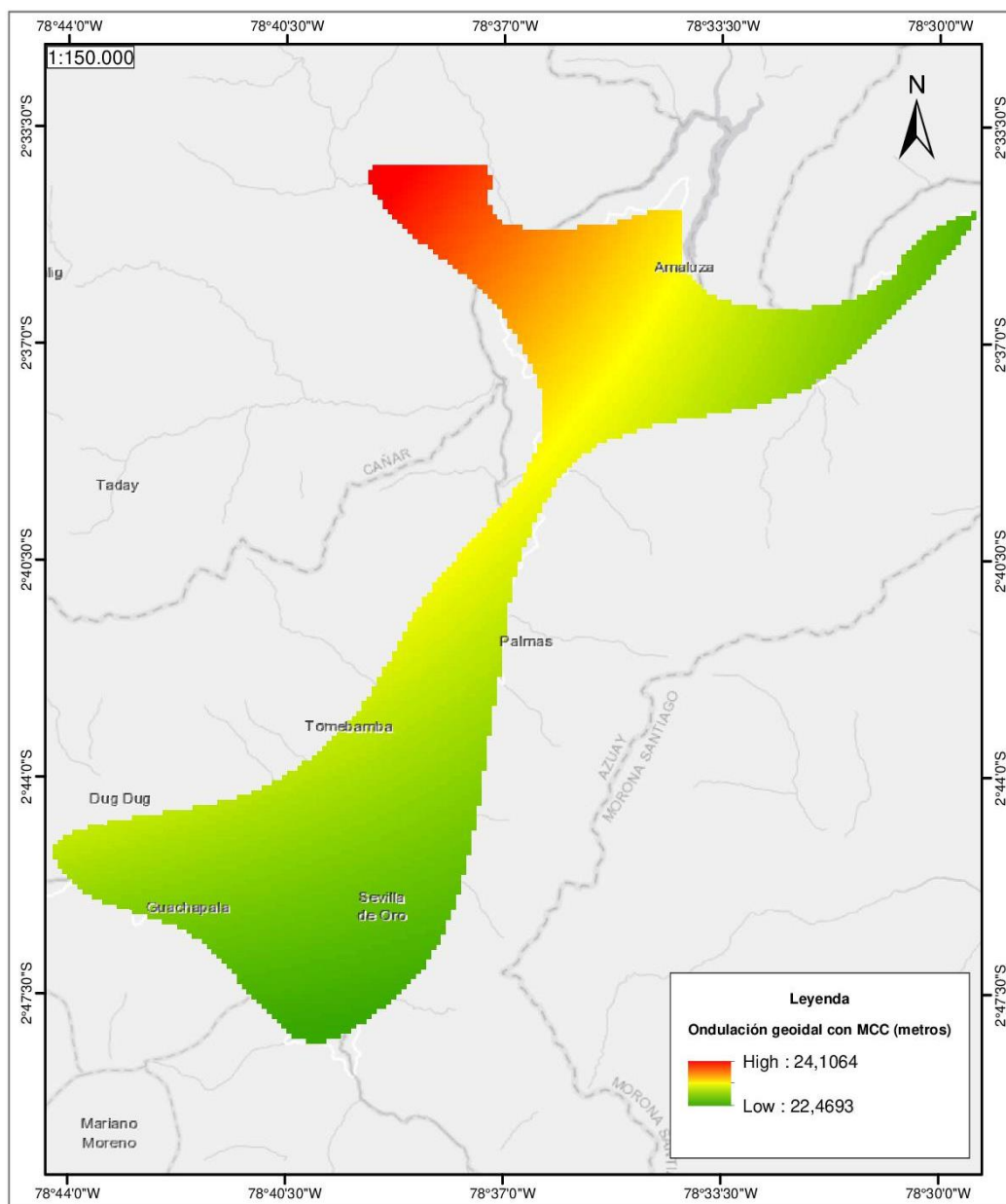
*Ondulación geoidal estimada mediante Cokriging para la ondulación geoidal observada y para el modelo del IGM con sus correspondientes intervalos de confianza en los puntos de validación*

Punto	Ondulación geoidal (m)		Intervalo de Confianza (m)	
	Estimada	IGM	Estimada	IGM
PRCP-05	22.6747	25.4089	±0.001	±0.0639
PRCP-12	23.3417	26.5474	±0.0016	±0.0125
PRCP-17	23.5733	28.1516	±0.0004	±0.0409
BN-16	23.1572	25.6674	±0.0008	±0.0224
BM1	22.8533	25.9740	±0.0008	±0.0731
BM2	22.8925	26.3086	±0.0003	±0.0562
BM3	22.7674	26.2424	±0.0012	±0.0591
PP1	22.6458	26.1606	±0.0018	±0.0629
PP2	22.7019	26.0403	±0.0016	±0.069
RMSE	0.2576	2.4738		

Para 8119 puntos de la malla generada equidistantes cada 0.0012252 grados se estimaron los valores de ondulación geoidal aplicando el método de Mínimos Cuadrados Colocación con los parámetros indicados anteriormente, con la finalidad de obtener el modelo predictivo de ondulación geoidal en la zona de estudio que se muestra en la Figura 51.

Figura 51

Modelo de predicción de ondulación geoidal obtenido por Mínimos Cuadrados Colocación



En la Tabla 23 se observa que la validación cruzada del modelo de alturas geoidales obtenidos por Mínimos Cuadrados Colocación es mejor ya que las predicciones en los puntos de validación poseen un valor más bajo de RMSE que Cokriging Ordinario, siendo 9.93 centímetros y 13.60 centímetros respectivamente. El error absoluto máximo (29.91centímetros) de las

predicciones fue mayor empleando el modelo de Cokriging Ordinario, mientras que el error absoluto mínimo (4.3 milímetros) de las predicciones fue menor usando el modelo de Mínimos Cuadrados Colocación.

**Tabla 23**

*Resultados de la validación cruzada entre modelos de alturas geoidales con MCC y Cokriging Ordinario*

<b>Parámetro (m)</b>	<b>MCC</b>	<b>Cokriging Ordinario</b>
RMSE	0.0993	0.1360
Error absoluto máximo	0.2194	0.2991
Error absoluto mínimo	0.0043	0.0003
Error medio	-0.0007	0.1687

Según la Tabla 24, el modelo de alturas geoidales determinado por Mínimos Cuadrados Colocación es el que mejor se ajusta a la realidad de la zona de estudio con un RMSE de 15.34 centímetros, seguido del modelo de Cokriging con un RMSE de 18.38 centímetros. El modelo de alturas geoidales que menos se ajusta a la realidad es el EGM96 con un RMSE de 1.831 metros y que adicionalmente posee el valor más alto de desviación estándar con 57.37 centímetros. El RSR de las predicciones con MCC y Cokriging al ser menores a 0.5 indican que son modelos muy buenos. En cambio, el RSR de los modelos EGM08, EGM96 e IGM son modelos no satisfactorios pues superan el 0.7 (Moriassi et al., 2007).



Tabla 24

*Estimaciones de ondulación geoidal con distintos modelos y sus errores en cada punto de validación*

Punto	Ondulación Geoidal (m)					Errores (m)					
	Observada	MCC	Cokriging	EGM08	EGM96	IGM	MCC	Cokriging	EGM08	EGM96	IGM
PRCP-05	23.0797	22.9465	22.8441	22.9835	24.4437	23.5750	0.1332	0.2356	0.0962	-1.3640	-0.4953
PRCP-12	23.3460	23.3534	23.1738	24.2880	25.8742	24.6860	-0.0074	0.1722	-0.9420	-2.5282	-1.3400
PRCP-17	23.5514	23.4977	23.5780	24.4830	26.3791	24.7720	0.0537	-0.0266	-0.9316	-2.8277	-1.2206
BN-16	22.6783	22.8874	23.0477	23.4507	24.7159	24.0380	-0.2091	-0.3694	-0.7724	-2.0376	-1.3597
BM1	22.9561	22.7560	22.7291	22.8731	24.2866	23.4420	0.2001	0.2270	0.0830	-1.3305	-0.4859
BM2	22.9321	22.8044	22.9338	23.0289	24.4033	23.6120	0.1277	-0.0017	-0.0968	-1.4712	-0.6799
BM3	22.9578	22.7941	22.9321	23.0008	24.3807	23.5810	0.1637	0.0257	-0.0430	-1.4229	-0.6232
PP1	22.9520	22.7799	22.8902	22.9651	24.3518	23.5420	0.1721	0.0618	-0.0131	-1.3998	-0.5900
PP2	22.9493	22.7633	22.7888	22.9096	24.3107	23.4810	0.1860	0.1605	0.0397	-1.3614	-0.5317
						<b>Absoluto máximo</b>	0.2091	0.3694	0.9420	2.8277	1.3597
						<b>Absoluto mínimo</b>	0.0074	0.0017	0.0131	1.3305	0.4859
						<b>Media</b>	0.0911	0.0539	-0.2867	-1.7493	-0.8140
						<b>Desviación estándar</b>	0.1309	0.1864	0.4530	0.5737	0.3764
						<b>RMSE</b>	0.1534	0.1838	0.5143	1.8310	0.8880
						<b>RSR</b>	0.3730	0.4469	1.2506	4.4524	2.1593

## Discusión

Journel & Huijbregts, (1978, como se citó en Webster & Oliver, 1993) aconsejan utilizar al menos de 30 a 50 puntos muestreados para el cálculo del variograma. En cambio, otros autores manifiestan que se necesitan al menos 100 datos de muestra para estimar adecuadamente el variograma regional (Webster & Oliver, 1993). En este caso, se emplearon 51 puntos de observación de ondulación geoidal para modelar las alturas geoidales con cada método, tomando en cuenta el primer criterio y dado que los datos de altura nivelada son caros de obtener se considera una cantidad adecuada que supera por poco el número mínimo de datos muestreados sugeridos.

En otro estudio, se manifiesta que existe correlación entre la calidad de la determinación de la covarianza y la densidad y homogeneidad de las observaciones. También se expresan algunos problemas cuando se modela un geoide local y es el hecho de que la distribución de las observaciones no siempre es uniforme en todas las regiones de y que no siempre hay suficientes puntos GNSS/nivelación para evaluar con precisión el modelo de geoide estimado. Estos problemas afectan los resultados de la determinación y evaluación del geoide. (Ramouz et al., 2018). En la zona de estudio, se pudieron obtener 60 datos de altura nivelada y de altura elipsoidal gracias a que anteriormente se había realizado un trabajo de implementación de una red geodésica, sin esta información disponible, se hubiese necesitado de una mayor cantidad de recursos y tiempo para realizar este estudio, no obstante la distribución de las observaciones está limitada a lugares donde existe vías y existe fácil acceso, pero hay lugares donde es extremadamente difícil obtener observables debido a la topografía.

Al modelar las alturas geoidales con el método de Mínimos Cuadrados Colocación, se esperaba que mientras mayor fuese el número de intervalos se lograría modelar la función de covarianza empírica de mejor manera ya que se generaban más puntos de covarianza. Por lo tanto, se realizaron las predicciones usando 8 y 10 intervalos. Se apreciaron mejores resultados

con 8 intervalos, esto puede ser debido a que en la predicción influyen otras variables como la varianza del ruido.

Por otra parte, el modelo que presentó mejores resultados con Cokriging Ordinario fue el desarrollado utilizando como variable auxiliar la altura geoidal del modelo global EGM96. A pesar, de que el modelo EGM08 obtuvo el mejor coeficiente de correlación con un valor de 0.7008, que indica que la ondulación geoidal calculada está más relacionada con este modelo, siguiéndole con un valor de 0.6320 el modelo EGM 96, esto pudo suceder debido a que este coeficiente calculado corresponde al de Pearson que según (Lin, 1989) no es el más apropiado cuando se evalúa concordancia entre los valores de una misma variable obtenidas mediante distintas metodologías, una alternativa que podría ser aplicada en investigaciones futuras para verificar lo mencionado sería la aplicación del coeficiente de Lin empleado por (Palacios, 2019) en su proyecto de titulación.

El error cuadrático medio (RMSE) funciona como un indicador de la precisión que compara un valor predicho con otro observado o conocido, obteniéndose por lo tanto un error de predicción que permite determinar la bondad de ajuste del modelo. Mientras más bajos los valores de RMSE, más cercanos son los valores predichos y observados, existiendo por ende un buen ajuste del modelo. En cambio, el RSR es la razón de la desviación estándar del RMSE (RSR) que se calcula como el índice del RMSE y la desviación estándar de los datos medidos. El valor óptimo del RSR es 0 hasta un gran valor positivo. Cuanto menor sea el RSR, menor será el RMSE y mejor será el rendimiento de la simulación del modelo (Golmohammadi et al., 2014). En este estudio, se emplearon los estadísticos RMSE y RSR para seleccionar el mejor modelo de predicción ya que se pudieron evaluar los modelos en unidades métricas aplicando el RMSE y como un índice aplicando RSR.

Finalmente, algo que se debe resaltar, es que los datos de alturas niveladas presentan gran precisión con errores de cierre inferiores al milímetro debido a los instrumentos utilizados, lo cual no se hubiese podido lograr empleando un nivel óptico.

## Capítulo V. Conclusiones y Recomendaciones

### Conclusiones

Se obtuvieron dos modelos de predicción de la altura geoidal para el área de estudio situada en la zona de influencia de la Central Hidroeléctrica Paute-Integral con 51 puntos de observación empleando las técnicas geoestadísticas Mínimos Cuadrados Colocación y Cokriging Ordinario, tomando como referencia el error cuadrático medio (RMSE) obtenido de las predicciones en los puntos de validación, concluyendo que el mejor modelo es MCC con un valor de RMSE de 15.34 cm, mientras que para Cokriging el valor obtenido fue de 18.38 cm.

Se determinó que para Mínimos Cuadrados Colocación el RMSE y el RSR más bajo es de 15.34 centímetros y 0.3731 respectivamente y la desviación estándar más baja es de 13.09 centímetros en el que se utilizó el modelo polinomial 4:  $x$  grado 4 de función de covarianza, 8 intervalos y un valor de 0.1 para la covarianza del ruido (Tabla 17). En cambio, los errores más altos de predicción se obtuvieron al utilizar el modelo polinomial 3:  $x$  grado 3 para la función covarianza, 8 intervalos y un valor de 0.1 para el ruido que generaron un RMSE de 59.9512 metros, RSR de 145.7811, desviación estándar de 34.7509 metros, error medio de 50.2066 metros, error absoluto mínimo de 2.8757 metros y un error absoluto máximo de 97.5731 metros. Es así que como se evidencia que escoger el modelo más adecuado para la función de covarianza repercute de manera significativa en la calidad de las predicciones.

Las predicciones con el modelo de Mínimos Cuadrados Colocación no superan los 20.91 centímetros de error. El menor error absoluto fue de 7.4 milímetros. El error medio del modelo es de 9.11 centímetros. La desviación estándar es de 13.09 centímetros.

Las predicciones con el modelo de Cokriging Ordinario no superan los 36.94 centímetros de error y tienen los siguientes estadísticos: error absoluto mínimo de 1.7 milímetros, error medio de 5.39 centímetros y desviación estándar de 18.64 centímetros.

Los dos modelos de predicción desarrollados en este estudio, presentan mejores precisiones en comparación con los modelos geoidales globales que llegan a presentar errores al orden de los metros, lo que evidencia la ventaja de emplear modelos geoidales locales obtenidos mediante técnicas geoestadísticas pues son de gran utilidad para la obtención de alturas niveladas potenciando el uso de técnicas de posicionamiento GNSS, reduciendo el presupuesto que se necesita para llevar a cabo la tradicional nivelación geométrica.

La variable auxiliar seleccionada inicialmente fue la ondulación geoidal obtenida del modelo EGM08; sin embargo, también se realizaron las predicciones empleando las otras dos posibles variables auxiliares analizadas, es decir la ondulación geoidal obtenida con el modelo EGM96 y con el modelo IGM, y se determinó que para la zona de estudio la covariable más adecuada para predecir la variable principal es la ondulación geoidal obtenida con el modelo EGM96.

Se comparó la ondulación observada con la ondulación calculada mediante los modelos predictivos generados con Mínimos Cuadrados Colocación y con Cokriging Ordinario en 9 puntos y se evidenció que ambos modelos son adecuados para predecir la ondulación geoidal en la zona de estudio con errores centimétricos.

### **Recomendaciones**

Los modelos de predicción que se obtuvieron en este estudio son aplicables para puntos que se hallen dentro del área de estudio, tomando en cuenta el margen de error que presenta cada método.

En el proceso de modelar alturas geoidales con Mínimos Cuadrados Colocación, se recomienda escoger cuidadosamente un valor de amplitud creciente  $h$  ya que influye directamente en la determinación de la función covarianza empírica que es fundamental en este método. También se deberían probar distintos números de intervalo, valores de covarianza de

ruido y modelos de función de covarianza empírica hasta conseguir el modelo que realice las mejores predicciones.

Para la selección de la variable auxiliar utilizada en Cokriging Ordinario se sugiere realizar pruebas con todas las covariables que sean candidatas, en este caso las alturas geoidales obtenidas con los modelos EGM08, EGM96 e IGM, para elegir la variable auxiliar, ya que como se evidenció en este estudio, el valor más alto del coeficiente de correlación entre la variable auxiliar y la variable principal no es un indicador para escoger la variable auxiliar que garantice las mejores predicciones. Además, se recomienda probar diferentes semivariogramas teóricos, no solo el que mejor se ajuste al semivariograma experimental.

Para la obtención de mejores resultados de predicción de la variable ondulación geoidal de puntos tomados en campo se recomienda emplear equipos y metodologías de alta precisión para obtener las medidas de altura elipsoidal y de altura nivelada con el fin de obtener la ondulación geoidal.

## Referencias

- Acero, L., & Serruto, J. (2018). *Modelo Geoidal con receptores GNSS en método cinemático y nivelación geométrica para la estimación de alturas ortométricas en la ciudad Universitaria UNA - Puno*. Puno.
- Acurio, V., & Tierra, A. (2016). Modelo neuronal para la predicción de la ondulación geoidal local en el Ecuador. *Revista Geoespacial*.
- Araujo, N., Leiva, C., & Buenaño, X. (2017). *MODELO DE PREDICCIÓN ESPACIAL DE ONDULACIÓN GEOIDAL, PARA EL ÁREA URBANA DE QUITO, UTILIZANDO TÉCNICAS GEOESTADÍSTICAS*. Sangolquí.
- Armstrong, M., & Carignan, J. (1997). *Géostatistique linéaire: application au domaine minier*.
- Ballesteros, K. (2021). *Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón Guayaquil*. Sangolquí.
- Behrens, J. (1997). Principles and Procedures of Exploratory Data Analysis. *Psychological Methods*.
- Caire, J. (2002). *Cartografía básica*. México: UNAM.
- Cañizares, E., Tierra, A., & Leiva, C. (2015). Sistema de Alturas para el Ecuador. Sangolquí.
- Carrión, J., Cogliano, D. d., & Tierra, A. (2011). *INTERPOLACIÓN DE LA ONDULACIÓN GEOIDAL GEOMÉTRICA MEDIANTE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL MULTICAPA*. Sangolquí.
- Casanova, L. (2002). *Topografía plana*. Obtenido de [http://www.serbi.ula.ve/serbiula/libros-electronicos/Libros/topografia\\_plana/pdf/topografia.pdf](http://www.serbi.ula.ve/serbiula/libros-electronicos/Libros/topografia_plana/pdf/topografia.pdf)



CELEC EP. (2015). *Introducción*. Obtenido de

[https://www.celec.gob.ec/hidropaute/images/stories/INFORMES\\_DE\\_GESTION/2015/archivos/site/Intro.html](https://www.celec.gob.ec/hidropaute/images/stories/INFORMES_DE_GESTION/2015/archivos/site/Intro.html)

CINARQ-KAWSUS-GEOCAM. (2019). *Informe de red geodésica y ruta de nivelación*.

Díaz, M. (2002). *Geoestadística*. Obtenido de [http://www.esmg-](http://www.esmg-mx.org/media/courses/geoestadistica/GeoEstadistica.pdf)

[mx.org/media/courses/geoestadistica/GeoEstadistica.pdf](http://www.esmg-mx.org/media/courses/geoestadistica/GeoEstadistica.pdf)

Doganalp, S., & Zahit, H. (2015). *Local geoid determination in strip area projects by using polynomials, least-squares collocation and radial basis functions*.

Drewes, H., Sánchez, L., Blitzkow, D., & Freitas, S. (2001). *Vertical Reference Systems, International Association of Geodesy Symposia*. Scientific Foundations of the SIRGAS Vertical Reference System.

Echeverría, A., & Tierra, A. (2010). *GENERACIÓN DE UN MODELO DE ONDULACIONES GEOIDALES DEL ECUADOR CONTINENTAL A PARTIR DE DATOS DISPERSOS MEDIANTE MÍNIMOS CUADRADOS, COLOCACIÓN (LSC)*. Sangolquí: Revista Geoespacial (7).

*Efemérides astronómicas*. (s.f.). Obtenido de

<https://efemeridesastronomicas.dyndns.org/wgs84.htm>

Emery, X. (2013). *Geoestadística*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile.

Erol, B., & Çelik, R. (2004). *MODELLING LOCAL GPS/LEVELLING GEOID WITH THE ASSESSTMENT OF INVERSE DISTANCE WEIGHTING AND GEOSTATISTICAL KRIGING METHODS*. Estambul, Turquía.

- Estrella, J. (2020). *MODELOS DE ONDULACIÓN GEOIDAL PARA LA RED TOPOGRÁFICA DE MADRID A TRAVÉS DE TÉCNICAS GEOESTADÍSTICAS DISEÑADAS A PARTIR DE SOFTWARE LIBRE Y COMERCIAL*. Madrid.
- Featherstone, W., & Kuhn, M. (2006). Height systems and vertical datums: A review in the Australian context. *Journal of Spatial Science*.
- Gacitúa, P. (2015). ESTIMACIÓN DE ERRORES EN MEDICIONES DE COTAS CON GPS EN LA CIUDAD DE CONCEPCIÓN Y COMPARATIVA GEOIDE EGM96 Y EGM2008 .
- Giraldo, R. (2020). *Cokriging Prediction Using as Secondary Variable a Functional Random Field with Application in Environmental Pollution*. Bogotá: Department of Statistics Universidad Nacional de Colombia.
- Giraldo, R. H. (2007). *Introducción a la Geoestadística*. Bogotá: Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia.
- Golmohammadi, G., Prasher, S., Madani, A., & Rudra, R. (2014). *Evaluating Three Hydrological Distributed Watershed Models: MIKE-SHE, APEX, SWAT* . Obtenido de <https://www.mdpi.com/2306-5338/1/1/20/htm>
- Hengl, T. (2005). Finding the right pixel size.
- Hofmann, B., & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy Second, corrected edition*. Austria: SpringerWienNewYork.
- IGM. (2006). *Especificaciones técnicas generales para la realización de cartografía topográfica a cualquier escala*. Obtenido de <http://www.igm.gob.ec/work/files/downloads/especcarto3.html>
- IGM. (2013). *Cálculo de la altura geoidal del Ecuador continental*. Obtenido de <http://www.geoportaligm.gob.ec/portal/index.php/calculo-de-altura-geoidal/>

- IGM. (2016). Manual de Especificaciones Técnicas Levantamientos Geodésicos-Control Horizontal.
- IGM. (2017). Obtenido de <http://www.geoportaligm.gob.ec/portal/index.php/calculo-de-altura-geoidal/>
- Ince, S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., & Schuh, H. (2019). *ICGEM: 15 años de recopilación y distribución exitosas de modelos gravitacionales globales ,servicios asociados y planes futuros. - Earth System Science Data, 11, págs. 647-674.* Obtenido de <http://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>
- Kavzoglu, T., & Saka, M. (2005). *Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks.* Estambul, Turquía.
- Leal, A., & Pérez, S. (2017). *Modelo geoidal para la zona de Colombia: Propuesta Metodológica.*
- Ligas, M., & Szombara, S. (2017). *Geostatistical prediction of a local geometric geoid -kriging and cokriging with the use of EGM2008 geopotential model.* Cracovia, Polonia.
- Lin, L. (1989). *A Concordance Correlation Coefficient to Evaluate Reproducibility.* Biometrics, Vol. 45, pp. 255-268.
- Llano, H., & Gonzáles, J. (2018). *Generación de modelo digital de elevaciones (MDE) de ondulaciones geoidales usando el metodo GNSS/nivelación y redes neuronales artificiales a partir de datos dispersos.* Puno, Perú.
- López, E. (2010). Test de análisis de la precisión en determinación de trayectorias con GPS . Escuela Politécnica Superior de Edificación de Barcelona.
- López, F., & López-Colina, C. (2006). *Elementos de Topografía y Construcción.* Universidad de Oviedo.

- Luna, M. (2017). *Contribución a la definición de un modelo de velocidades de la corteza terrestre para Ecuador a partir de datos GNSS*. Obtenido de [https://oa.upm.es/48790/1/MARCO\\_LUNA\\_LUDENA\\_01.pdf](https://oa.upm.es/48790/1/MARCO_LUNA_LUDENA_01.pdf)
- Mejía, F., Mesa, O., Poveda, G., Vélez, J., Hoyos, C., Mantilla, R., . . . Botero, B. (1999). Distribución espacial y ciclos anual y semianual de la precipitación en Colombia. *Dyna*.
- Moriasi, D., Arnold, J., Van Liew, M., Bingner, R., Harmel, R., & Veith. (2007). *Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations*.
- Olusegun, J. (2018). *Introduction to Least Squares Collocation and the Kriging Methods*.
- Pachas, R. (2010). Posicionamiento estático diferencial: errores y postproceso. Venezuela: Universidad de Los Andes (ULA).
- Palacios, I. (2019). *Generación de un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, para la zona rural del Cantón Guayaquil, mediante el uso del método Cokriging*. Sangolquí.
- Parra, J. (2002). *Análisis exploratorio y análisis confirmatorio de datos*. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/122/12211106.pdf>
- Peñafiel, J. (2001). FUNDAMENTOS DEL SISTEMA GPS Y APLICACIONES EN LA TOPOGRAFÍA.
- Pérez, A. (2011). *Introducción a los sistemas de información geográfica y geotelemática*. UOC.
- Pilar, A. (2008). *Introducción a la Cartografía*. Obtenido de [http://www.creaf.uab.es/propies/pilar/libroriesgos/15\\_Cap%C3%ADtulo14.pdf](http://www.creaf.uab.es/propies/pilar/libroriesgos/15_Cap%C3%ADtulo14.pdf)
- Ramouz, S., Afrasteh, Y., Reguzzoni, M., Safari, A., & Saadat, A. (2018). IRG2018: A regional geoid model in Iran using Least Squares Collocation.

Rapp, R. (1991). *Geodesia Geométrica*.

Ruffhead, A. (1987). AN INTRODUCTION TO LEAST-SQUARES COLLOCATION. *Survey Review*, 85-94.

Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy*. New York.

Sevilla, M. (1987). *Colocación Mínimos Cuadrados*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Stephenson, G. (1982). *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. España: Reverté S.A.

Tierra, A. (2009). *EVALUACIÓN DEL EGM08 Y EGM96 EN EL ECUADOR A PARTIR DE DATOS DE GPS Y NIVELACIÓN GEOMÉTRICA*. Sangolquí: Centro de Investigaciones Científicas.

Veronez, M., Thum, A., & Correa, G. (2006). *A new method for obtaining geoidal undulations through Artificial Neural Networks*. Rio Grande do Sul , Brasil.

Wang, K., Zhang, C., & Weidong, L. (2013). Predictive mapping of soil total nitrogen at a regional scale: A comparison between geographically weighted regression and cokriging.

Webster, R., & Oliver, M. (1993). How large a sample is needed to estimate the regional variogram adequately?

Wolf, P., & Ghilani, C. (2016). *Topografía*. México: Alfaomega.

Yáñez, A. (2000). El modelo gravimétrico mundial EGM96 en la determinación de cotas ortométricas y su relación con las cotas geométricas de los pilares de nivelación de la Red Geodésica Nacional.

Zhong, D. (1997). Robust estimation and optimal selection of polynomial parameters for the interpolation of GPS geoid heights. *Journal of Geodesy*, 552–561.

**Anexos**