



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



**Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral,
Objetivo específico No. 1: Modelar las alturas geoidales locales mediante el método de Cokriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad**

Chiguano Ibaza, Daniel y Vaca Llerena, Lourdes Vanesa

Departamento de Ciencias de la Tierra y de la Construcción

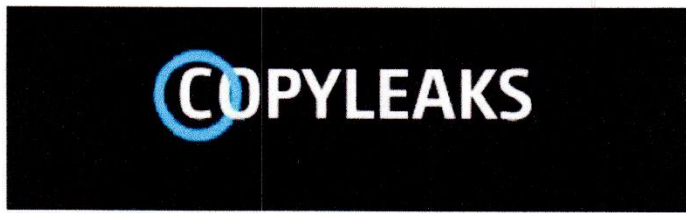
Carrera en Tecnologías Geoespaciales

Trabajo de integración curricular, previo a la obtención del título de Ingeniero en Tecnologías

Geoespaciales

Dr. Luna Ludeña Marco Patricio

08 de marzo de 2022



CHIGUANO_VACA_MIC_PROFESIONALIZANTE.pdf

Scanned on: 17:23 March 11, 2022 UTC



Identical Words	326
Words with Minor Changes	52
Paraphrased Words	105
Omitted Words	0



Alcance: Alcance de alcance por:
**MARCO
PATRICIO LUNA
LUDEÑA**

.....
Dr. Luna Ludeña, Marco Patricio



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES

CERTIFICACIÓN

Certifico que el trabajo de integración curricular, **“Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral, Objetivo específico No. 1: Modelar las alturas geoidales locales mediante el método de Cokriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad ”** fue realizado por el señor Chiguano Ibaza Daniel y la señorita Vaca Llerena Lourdes Vanesa, el cual ha sido revisado y analizado en su totalidad por la herramienta de verificación de similitud de contenido; por lo tanto cumple con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, razón por la cual me permito acreditar y autorizar para que lo sustente públicamente.

Sangolquí 08 de marzo de 2022



Firmado electrónicamente por:
**MARCO
PATRICIO LUNA
LUDEÑA**
.....

Dr. Luna Ludeña, Marco Patricio

C. C 1102596044

DIRECTOR



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES

RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Nosotros, **Chigano Ibaza, Daniel y Vaca Llerena, Lourdes Vanesa**, con cédulas de ciudadanía N° 1727481010 y N° 1717778789, declaramos que el contenido, ideas y criterios del trabajo de integración curricular: **“Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral, Objetivo específico No. 1: Modelar las alturas geoidales locales mediante el método de Cokriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad”** es de nuestra autoría y responsabilidad, cumpliendo con los requisitos legales, teóricos, científicos, técnicos, y metodológicos establecidos por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, respetando los derechos intelectuales de terceros y referenciando las citas bibliográficas.

Sangolquí, 08 de marzo de 2022

Chigano Ibaza, Daniel

C.C.: 1 727481010

Vaca Llerena, Lourdes Vanesa

C.C.: 1717778789



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y DE LA CONSTRUCCIÓN
CARRERA EN TECNOLOGÍAS GEOESPACIALES**

AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Nosotros **Chiguano Ibaza Daniel y Vaca Llerena Lourdes Vanesa**, con cédulas de ciudadanía n° 1727481010 y n° 1717778789 autorizamos a la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE publicar el trabajo de integración curricular: **"Desarrollo de modelos de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral, Objetivo específico No. 1: Modelar las alturas geoidales locales mediante el método de Cokriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad"** en el Repositorio Institucional, cuyo contenido, ideas y criterios son de nuestra responsabilidad.

Sangolquí 08 de marzo de 2022

Chiguano Ibaza, Daniel

C.C.: 1727481010

Vaca Llerena, Lourdes Vanesa

C.C.: 1717778789

Dedicatoria

A mis padres Amparo Llerena y Pablo Vaca quienes fueron son y serán mis principales guías en todo camino que decida tomar, quienes me enseñaron con amor y paciencia todo los valores para ser una persona de bien.

A mis hermanos Pablo y Gonzalo quienes con sus locuras hicieron que todos los malos ratos sean más llevaderos y al mismo tiempo ser un motor de impulso para mí.

Finalmente, a Alex quién desde el inicio de mi carrera estuvo apoyándome con su conocimiento y amor para que esto sea posible.

Vaca Llerena, Lourdes Vanesa

Dedico este trabajo con mucho esfuerzo y entusiasmo a mis padres Delia Ibaza y Marco Chiguano, quienes me acompañaron durante toda mi formación profesional y estuvieron siempre dispuestos en apoyarme tanto emocionalmente como económicamente ante cualquier dificultad.

A mis hermanas Mónica y Paulina y a mis cuñados Víctor y Pedro por siempre creer en mí.

Chiguano Ibaza, Daniel

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por darnos la oportunidad de crecer en todo aspecto y aprender tanto a lo largo de nuestra carrera universitaria.

Agradecemos a nuestros docentes de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE porque además de enseñarnos en el aspecto académico nos aconsejaron y guiaron en tantos aspectos más, demostrándonos así que la vida universitaria no es solo el estudio y un buen profesional no se mide solo por sus conocimientos sino también por sus valores y humildad. Un especial agradecimiento a nuestro tutor el Dr. Marco Luna por prepararnos y ayudarnos a lo largo de la resolución de nuestro proyecto y brindarnos su apoyo.

También nos gustaría agradecer al Ing. César Leiva y al Ing. Alberto Leiva quienes nos dieron su total apoyo para que podamos resolver los problemas que se presentaban a lo largo de la elaboración de nuestro proyecto.

Finalmente nos gustaría agradecer a nuestros compañeros y amigos quienes formaron una parte importante a lo largo de nuestra carrera.

Índice de contenido

Capítulo I Introducción	18
Antecedentes	18
Planteamiento del Problema	21
Justificación e Importancia	22
Descripción del área de estudio	22
Objetivos	23
<i>Objetivo General</i>	23
<i>Objetivos específicos</i>	24
Hipótesis	24
Metas	24
Capítulo II Marco teórico	25
Sistemas de Alturas	25
<i>Alturas Geométricas</i>	25
Altura Nivelada.	25
Altura Elipsoidal.	25
<i>Alturas Físicas</i>	26
Altura Ortométrica.	26
Ondulación Geoidal	27
Modelos Geopotenciales, Gravimétricos y Geométricos	28
<i>EGM 96</i>	28
<i>EGM 08</i>	28
<i>WGM12</i>	28
<i>Modelo IGM</i>	29

Anomalías de la gravedad	29
<i>Aire libre</i>	29
<i>Bouguer</i>	29
<i>Isostática</i>	29
Métodos de nivelación	30
<i>Nivelación Geométrica</i>	30
Métodos de Nivelación Geométrica	30
Líneas de nivelación	33
<i>Sencilla</i>	33
<i>Doble</i>	33
Tolerancia del error de cierre	34
<i>Nivelación GPS</i>	35
Semivariograma experimental y modelos teóricos de semivariograma	36
Métodos de predicción	39
<i>Método Cokriging</i>	39
Pesos Cokriging	41
Variograma cruzado	41
Modelo de correionalización lineal (MCL)	43
Cokriging ordinario para dos variables (principal y auxiliar)	43
<i>Método de Mínimos Cuadrados Colocación</i>	44
Capítulo III Metodología	46
Recopilación de la información	46
<i>Metodología para la obtención de coordenadas geodésicas</i>	46
<i>Metodología para la obtención de alturas niveladas</i>	48

<i>Obtención de ondulaciones geoidales para MCC</i>	49
Selección de posibles variables auxiliares para Cokriging	52
Análisis Exploratorio de Datos Espaciales (AED)	57
<i>Justificación</i>	57
<i>Análisis gráfico mediante diagrama de caja</i>	58
<i>Análisis gráfico por medio de un modelo de tendencia y de dispersión</i>	60
Depuración de los datos y Estacionariedad	62
Parámetros usados en la técnica Cokriging ordinario	63
Parámetros usados en la técnica Mínimos Cuadrados Colocación	70
Métodos de validación.....	76
<i>Validación cruzada</i>	76
<i>Metodología para validación de campo</i>	77
Capítulo IV Análisis y discusión de resultados	81
Resultados de cokriging ordinario	81
<i>Validación cruzada para cokriging ordinario</i>	81
<i>Validación de campo para cokriging ordinario</i>	85
Resultados de mínimos cuadrados colocación.....	87
<i>Validación cruzada para MCC</i>	87
<i>Validación de campo para MCC</i>	91
Selección del mejor modelo de predicción	93
Discusión de resultados	95
Capítulo V Conclusiones y recomendaciones	97
Conclusiones.....	97
Recomendaciones	97

Referencias bibliográficas	99
-----------------------------------------	-----------

Índice de tablas

Tabla 1 Ondulación geoidal para MCC.....	49
Tabla 2 Ondulación geoidal usando los modelos EGM96, EGM08 e IGM.....	55
Tabla 3 Resumen de los estadístico descriptivos de la ondulación geoidal	59
Tabla 4 Análisis de correlación de posibles variables auxiliares	64
Tabla 5 Posibles valores de h óptimo para el modelo	65
Tabla 6 Coeficientes de Semivariograma teórico de la variable principal	67
Tabla 7 Coeficientes de Semivariograma teórico de la variable cruzada.....	68
Tabla 8 Coeficientes de Semivariograma teórico de la variable auxiliar	69
Tabla 9 Estadísticos de regresión de las diferentes funciones polinomiales	72
Tabla 10 Coeficientes de la función polinomial de grado $X1 Y1$	72
Tabla 11 Coeficientes de la función polinomial de grado $X1 Y2$	73
Tabla 12 Coeficientes de la función polinomial de grado $X1 Y3$	73
Tabla 13 Alturas niveladas	79
Tabla 14 Resumen de precisiones de procesamiento de líneas base	80
Tabla 15 Coordenadas geodésicas obtenidas del postproceso	80
Tabla 16 RMSE entre los valores de h y $r(h)$ de los modelos de semivariograma teóricos y experimentales	82
Tabla 17 RMSE entre la ondulación real vs la ondulación predicha usando validación cruzada	82
Tabla 18 RMSE entre la ondulación real vs la ondulación predicha usando validación de campo con 9 datos	86
Tabla 19 Variación de h óptimo para el modelo de semivariograma estable	86
Tabla 20 RMSE de validación cruzada para mínimos cuadrados.....	87
Tabla 21 Parámetros estadísticos para la selección del mejor modelo de predicción MCC	92

Tabla 22 <i>Resumen de los resultados obtenidos con validación de campo para Cokriging</i>	93
Tabla 23 <i>Resumen de los resultados obtenidos con validación de campo para MCC.....</i>	94
Tabla 24 <i>Comparación de los estadísticos obtenidos de la validación de los mejores modelos generados</i>	94

Índice de figuras

Figura 1 <i>Mapa de ubicación de la zona de estudio</i>	23
Figura 2 <i>Tipos de altura</i>	26
Figura 3 <i>Tipos de modelos</i>	27
Figura 4 <i>Nivelación geométrica simple</i>	31
Figura 5 <i>Nivelación geométrica compuesta</i>	32
Figura 6 <i>Parámetros de semivariograma</i>	37
Figura 7 <i>Tipos de modelos de semivariograma teórico</i>	39
Figura 8 <i>Obtención de la Ondulación Geoidal usando los modelos EGM 08 y EGM96</i>	53
Figura 9 <i>Ingreso por punto para la obtención de la ondulación geoidal</i>	54
Figura 10 <i>Ingreso de un archivo .txt para la obtención de la ondulación geoidal</i>	54
Figura 11 <i>Diagrama de caja para datos iniciales</i>	60
Figura 12 <i>Modelo polinomial de grado 1</i>	61
Figura 13 <i>Gráfico de dispersión de las posiciones de los puntos de muestreo</i>	61
Figura 14 <i>Gráfico de dispersión de la coordenada Longitud vs Ondulación geoidal real</i>	62
Figura 15 <i>Gráfico de dispersión de la coordenada Latitud vs Ondulación geoidal real</i>	63
Figura 16 <i>Semivariograma experimental para la variable principal</i>	65
Figura 17 <i>Semivariograma experimental para la variable cruzada</i>	66
Figura 18 <i>Semivariograma experimental para la variable auxiliar</i>	66
Figura 19 <i>Semivariogramas teóricos ajustados para la variable principal</i>	67
Figura 20 <i>Semivariogramas teóricos ajustados para la variable cruzada</i>	68
Figura 21 <i>Semivariogramas teóricos ajustados para la variable auxiliar</i>	69
Figura 22 <i>Modelo matemático x, y</i>	71
Figura 23 <i>Modelo matemático x, y²</i>	71

Figura 24 Modelo matemático x, y^3	71
Figura 25 Función para la covarianza de grado 2 de la superficie de tendencia de grado $X1 Y1$	74
Figura 26 Función para la covarianza de grado 3 de la superficie de tendencia de grado $X1 Y1$	74
Figura 27 Función para la covarianza de grado 3 de la superficie de tendencia de grado $X1 Y2$	75
Figura 28 Función para la covarianza de grado 4 de la superficie de tendencia de grado $X1 Y2$	75
Figura 29 Función para la covarianza de grado 4 de la superficie de tendencia de grado $X1 Y3$	76
Figura 30 Circuitos de nivelación.....	78
Figura 31 Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo exponencial.....	83
Figura 32 Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo gaussiano.....	84
Figura 33 Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo esférico	84
Figura 34 Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo estable	85
Figura 35 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y1$ y modelo de covarianza grado 2.....	88
Figura 36 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y1$ y modelo de covarianza grado 3.....	89
Figura 37 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y2$ y modelo de covarianza grado 3.....	89
Figura 38 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y2$ y modelo de covarianza grado 4.....	90
Figura 39 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y3$ y modelo de covarianza grado 4.....	90
Figura 40 Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y3$ y modelo de covarianza grado 5.....	91

RESUMEN

La altura ortométrica que para fines prácticos se la considera como altura referida al nivel medio del mar, es importante para diversos trabajos con fines de ingeniería. Teóricamente hablando, esta altura resulta de la diferencia entre la altura elipsoidal y la ondulación geoidal. Existen diversos métodos para obtener esta medida sin embargo algunos requieren de inversiones considerables de recursos como tiempo y dinero, por lo que se observa la necesidad de implementar otras técnicas que ayuden a optimizar esos recursos. Una de las maneras de obtener ondulación geoidal para el cálculo de la altura referida a nivel medio del mar es usando métodos estadísticos como los son Cokriging y Mínimos Cuadrados Colocación los cuales, permiten realizar predicciones de la variable a modelar. El objetivo de este proyecto fue generar dos modelos predictivos de ondulación geoidal mediante la técnica de Cokriging y Mínimos Cuadrados Colocación para el complejo hidroeléctrico Paute Integral. Se partió con un total de 61 puntos para modelar la variable de ondulación geoidal tanto en Cokriging como en MCC. Para el caso de Cokriging se usó los datos obtenidos del modelo EGM08 como variable auxiliar. Los modelos generados se validaron con validación cruzada y validación de campo. Para ello se calcularon dos estadísticos (RMSE y RSR) con el fin de facilitar la selección del mejor modelo. Comparando ambas técnicas, Cokriging presentó mejores resultados que el modelo generado con MCC. Para el caso de Cokriging dio como resultado un RMSE de 0.15 m y un RSR de 0.36 m, para MCC los resultados fueron 0.16 m de RMSE y 0.40 m de RSR. A través de ambas técnicas es posible alcanzar buenas precisiones y ambas son recomendables para el modelamiento de la ondulación geoidal en la zona de estudio aplicada.

Palabras Clave:

- **ONDULACIÓN GEOIDAL.**
- **MÍNIMOS CUADRADOS COLOCACIÓN.**
- **COKRIGING.**

ABSTRACT

The orthometric height, which for practical purposes is considered as height referred to mean sea level, is important for various engineering works. Theoretically speaking, this height is the difference between the ellipsoidal height and the geoidal undulation. There are several methods to obtain this variable, however some of them require considerable investments of resources such as time and money. One of the ways to obtain geoidal waviness for the calculation of the leveled height is using statistical methods such as Cokriging and Least-Squares Collocation which allow predictions of the variable to be modeled. The objective of this project was to generate two predictive models of geoidal undulation using the Cokriging and Least-Squares Collocation techniques for the Paute Integral hydroelectric complex. A total of 61 points were used to model the geoidal undulation variable in both Cokriging and LSC. In the case of Cokriging, the data obtained from the EGM08 model was used as an auxiliary variable. The generated models were validated with cross-validation and field validation. Two statistics (RMSE and RSR) were calculated to facilitate the selection of the best model. Comparing both techniques, Cokriging presented better results than the model generated with LSC. In the case of Cokriging, it resulted in an RMSE of 0.15 m and an RSR of 0.36 m, for LSC the results were 0.16 m RMSE and 0.40 m RSR. Through both techniques, it is possible to reach good accuracies and both are recommended for the modeling of the geoidal undulation in the applied study area.

Key words:

- **GEOIDAL UNDULATION.**
- **LEAST-SQUARES COLLOCATION.**
- **COKRIGING.**

Capítulo I Introducción

Antecedentes

En el Ecuador se considera la altura referida al nivel medio del mar como una altura ortométrica, materializada en el datum vertical del mareógrafo “La Libertad” situado en la provincia de Santa Elena, y su obtención requiere de un modelo geoidal para así poder calcular la ondulación geoidal de un punto sobre la superficie terrestre. Existen modelos geopotenciales, modelos gravimétricos y modelos geométricos, que permiten determinar el modelo geoidal. Los modelos geopotenciales globales más utilizados en el país son el EGM96 y el EGM08, sin embargo, pueden generar un error en la ondulación geoidal de hasta 3 m, lo que repercute en el cálculo de la altura ortométrica. (Instituto Geográfico Militar, 2013).

Aunque el Instituto Geográfico Militar dispone de un modelo geoidal regional para la obtención de alturas ortométricas, no representa la exactitud requerida para trabajos de ingeniería de alta precisión debido a que sus errores pueden llegar hasta los 40 cm. En vista de la necesidad del cálculo de la altura ortométrica existen varios estudios y proyectos que proponen la obtención de los modelos geoidales por medio de métodos estadísticos. A continuación, se citan algunos de estos proyectos.

Dentro de las investigaciones a nivel global concernientes al modelamiento de ondulación geoidal, se menciona el trabajo realizado en la Universidad del Estado de Ohio (E.E.U.U) por parte de (Rapp, 1997) quien utilizó modelos de coeficientes potenciales para la determinación de ondulación geoidal mediante una representación armónica esférica de anomalía de altura y un término de corrección, este último se compone de dos partes. La primera es un gradiente de anomalía de altura que calcula la diferencia entre una anomalía de altura en el elipsoide y la anomalía de altura en la estación, el segundo término representa la diferencia entre la ondulación geoidal y la anomalía de altura, este término depende de la anomalía de Bouguer y de la elevación de la estación. Obteniendo de esta forma resultados de 3m de

error para zonas montañosas como el Himalaya, esta diferencia de rms aumenta con la elevación, sin embargo, para disminuirla es necesario la aplicación de los términos de corrección.

Otras de las técnicas muy usadas para la determinación de alturas geoidales son la interpolación polinómica de mínimos cuadrados y la interpolación de mínimos cuadrados móviles, no obstante, estas presentan dos inconvenientes al momento de su aplicación: la selección de los parámetros polinómicos adecuados y la reducción de las influencias de algunos puntos de datos posiblemente anormales. (Zhong, 1997) plantea una solución más deductiva con la ayuda de una técnica de estimación robusta y criterios de optimización de la ecuación de regresión. Mediante dos ejemplos numéricos reales se demostró la eficacia de esta nueva formulación y su fácil implementación en ordenadores.

Recientemente se han aplicado las redes neuronales artificiales RNA como motivo de múltiples investigaciones, referente al tema (Kavzoglu & Saka, 2005) utilizaron una estructura de RNA de avance que memoriza las características de los datos de entrenamiento a través del algoritmo de retro-propagación para modelar la superficie local del geoide para Estambul (Turquía). Las ondulaciones geoidales se estimaron a partir de mediciones GPS y de nivelación precisa obtenidas en campo y posteriormente los resultados se compararon con otros métodos convencionales antes mencionados como el ajuste polinómico, en donde el RMSE osciló entre 3,97 cm y 5,73 cm dando a entender que son resultados semejantes, llegando a la conclusión de que este nuevo método presenta bajas desviaciones de la superficie de los datos de GPS/nivelación, lo cual es de mucha utilidad para redes de nivelación distorsionadas.

Otro estudio relacionado con redes neuronales artificiales fue realizado por (Llano Cuz & Gonzalez Aceituno, 2018) el cual consistió en obtener alturas referida al nivel medio del mar (altura ortométricas), por medio de la generación de un modelo digital de elevaciones de las ondulaciones geoidales, aplicando el método de GNSS/nivelación a través del entrenamiento y aprendizaje de redes neuronales artificiales

utilizando la interfaz gráfica del software Matlab, el proyecto fue desarrollado en un sector de la ciudad de Puno. Las precisiones obtuvieron una desviación estándar de 0.03831 m la cual demostraron usando otro grupo de puntos para realizar una validación. En base a los resultados concluyeron que no existió alguna diferencia significativa respecto a las ondulaciones conocidas.

También (Hoyer, Wildermann, Suárez, & Hernández, 2004) determinaron un Modelo Geoidal Combinado para Venezuela a través de la técnica mínimos cuadrados colocación, usando la metodología Remove-Restore. Utilizaron ondulaciones geoidales derivadas de mediciones GPS, como referencia el modelo geopotencial EGM96, data gravimétrica, y por medio del modelo digital de elevaciones GTOPO30 y el ETOPO5 realizaron las correcciones topográficas. El modelo geoidal creado (MGCV04) se lo comparó con los modelos EGM96, GEOIDVEN, VGM03 y con los puntos de ondulación geoidal conocida, dando como resultado un error de 0.2 m.

Por otra parte (Leiva González, 2014) en su tesis de grado determinó modelos de predicción espacial de la variable ondulación geoidal para la zona urbana del cantón Quito y la zona rural del cantón Guayaquil usando técnicas geoestadísticas. Para obtener el valor de las predicciones usó el método de Kriging Ordinario y para comprobar los valores obtenidos comparó los resultados con los modelos globales EGM96 y EGM08.

(Ballester Salazar, 2021) realizó una comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, aplicados la zona rural del cantón Guayaquil. Para la generación del modelo mediante el método de mínimos cuadrados colocación y redes neuronales artificiales se usaron 298 puntos los cuales fueron validados con puntos excluidos del modelamiento. Con un RMSE de 7.3 cm correspondiente al modelo de redes neuronales artificiales se determinó que ese método se ajustó mejor a la zona de estudio que el método de mínimos cuadrados colocación el cual obtuvo un RMSE de 8.6 cm.

Por otro lado, en el proyecto de grado de (Lima Yacelga, 2005) propone la creación de dos modelos matemáticos, el primero que permita calcular la ondulación geoidal del lugar requerido y el segundo modelo se encarga de calcular la separación que existe entre el geoide local y el geoide del modelo geopotencial EGM96, todo esto con el fin de obtener las alturas sobre el nivel medio del mar de cualquier punto.

Como se puede observar, la obtención de ondulaciones geoidales ha sido motivo de varios estudios tanto a nivel global, regional y local, donde cada una de estas investigaciones han aplicado diferentes métodos tales como modelos geopotenciales, gravimétricos y geométricos y por ende sus resultados o precisiones tienden a variar. La problemática que se plantea aquí es similar ya que lo que se pretende es determinar cuál de los dos métodos (Cokriging y Mínimos cuadrados Colocación) se ajusta mejor a los valores reales esperados, que en este caso sería las ondulaciones geoidales obtenidas en campo.

Planteamiento del Problema

Los métodos de nivelación tales como: Nivelación Geométrica y Nivelación Trigonométrica permiten obtener la altura al nivel medio del mar que en el Ecuador para fines prácticos es considerada como altura ortométrica, la cual es importante para trabajos de ingeniería. Como una desventaja de estos métodos es que para sitios cuya morfología presenta laderas de altas pendientes, o terrenos sumamente irregulares, no es práctico la aplicación de estas técnicas, lo cual ocurre para la zona de estudio "Complejo Hidroeléctrico Paute integral", además estos métodos conllevan un gasto económico alto y también son procesos que requieren un tiempo considerable. Por otro lado, la Nivelación GPS proporciona al usuario la altura elipsoidal la cual no es útil para fines de ingeniería, por lo que posterior a obtener esa altura es necesario transformarla a una altura ortométrica por medio de un modelo geoidal.

En la actualidad existen modelos de ondulaciones geoidales que son aplicados en el Ecuador, tales como el EGM96 (Earth Gravitational Model 1996) y el EGM08 (Earth Gravitational Model 2008), estos modelos permiten el cálculo de la altura referida al nivel medio del mar ya que facilitan el valor de la ondulación geoidal. El problema con estos modelos es que presentan precisiones bajas, dando como resultado errores que llegan a más de un metro, por ende, para trabajos que requieran altas precisiones quedan descartados estos modelos.

Justificación e Importancia

Como se mencionó anteriormente la obtención de la altura referida al nivel medio del mar es indispensable para la realización de proyectos de ingeniería. La nivelación GNSS es un método que a comparación del resto de métodos es uno de los más rápidos y también conlleva menos gastos, pero proporciona la altura elipsoidal para posteriormente transformarla a una altura ortométrica, proceso que se lo realiza a través de un modelo geoidal. El proporcionar un modelo geoidal local aplicado al Complejo Hidroeléctrico Paute Integral ayudará a reducir gastos de dinero y de tiempo que ocurren al momento de realizar una nivelación geométrica o trigonométrica, además que brindará a la zona, alturas ortométricas con precisiones altas (útiles para trabajos como construcciones de vías, proyectos de ingeniería, entre otros) ya que no será necesario el uso de los modelos como el EGM96 o EGM08 cuyas precisiones superan el metro de error.

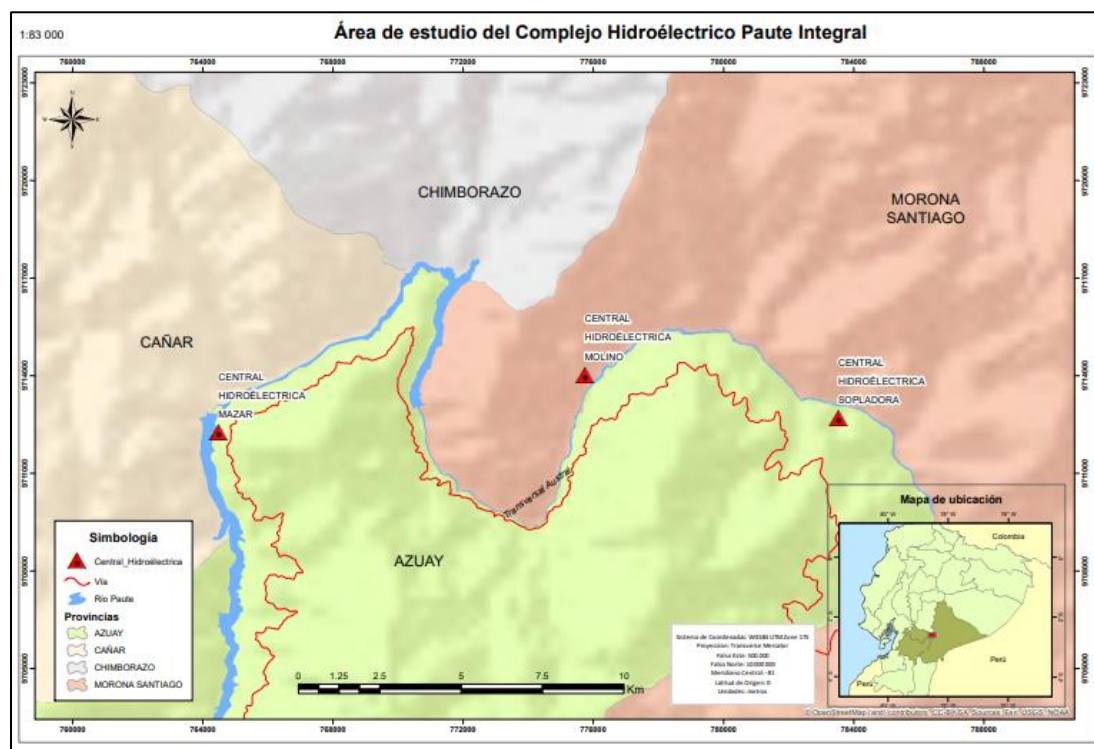
Descripción del área de estudio

El complejo hidroeléctrico Paute Integral se encuentra localizado entre las provincias de Azuay, Cañar y Morona Santiago en la zona media y baja de la cuenca del río Paute, conformado por tres centrales Mazar (176 MW), Molino (1076 MW) y Sopladora (487 MW). Se extiende desde una altura de 2200 msnm hasta los 600 msnm, con un recorrido de aproximadamente 75 kilómetros empezando a partir del embalse de Mazar hasta la descarga de la Central Sopladora. La morfología de la zona es caracterizada por sus laderas de alta pendiente, por otro lado, sus tipologías geológicas cuentan con rocas metamórficas con la

presencia de depósitos coluviales. Además, se trataron estudios de monitoreo y control integral frente a los riesgos de deslizamientos en las zonas inestables identificadas que a futuro podrían provocar daños en la infraestructura y operación de las centrales hidroeléctricas. A continuación, en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se puede observar un mapa que comprende a toda la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral.

Figura 1

Mapa de ubicación de la zona de estudio



Objetivos

Objetivo General

Desarrollar un modelo de alturas geoidales locales aplicando diferentes técnicas geoestadísticas en la zona de influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute-Integral para la determinación de alturas niveladas.

Objetivos específicos

Modelar las alturas geoidales locales mediante el método geoestadístico de Co-Kriging para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad.

Modelar las alturas geoidales locales mediante el método geoestadístico de Mínimos Cuadrados Colocación para determinar el error en las alturas niveladas referidas al datum vertical La Libertad.

Hipótesis

Es factible modelar las ondulaciones geoidales aplicando estos métodos de interpolación, de tal forma que se cumpla la precisión que necesita la central hidroeléctrica en cuanto a alturas ortométricas.

Metas

Los entregables de este trabajo constan de:

- Script para la determinación del modelo de alturas geoidales locales mediante Cokriging.
- Mapa del modelo de alturas geoidales locales utilizando el modelo de Cokriging.

Capítulo II Marco teórico

Sistemas de Alturas

Alturas Geométricas

Altura Nivelada.

Son alturas obtenidas por medio de la nivelación geométrica, prácticamente es la suma entre desniveles observados, partiendo de la altura establecida en la superficie fundamental del datum vertical, definida por el nivel medio del mar. Continuando con la ecuación 1 y asumiendo que la altura del punto A es conocida, la altura del punto B se lo calcula de la siguiente manera:

$$H_B = \frac{\Delta n_A^B - \Delta n_B^A}{2} + H_A \quad (1)$$

Δn_A^B : Desnivel observado desde el punto A hacia el punto B

Δn_B^A : Desnivel observado desde el punto B hacia el punto A

H_B : Altura nivelada en el punto A

H_A : Altura nivelada en el punto B

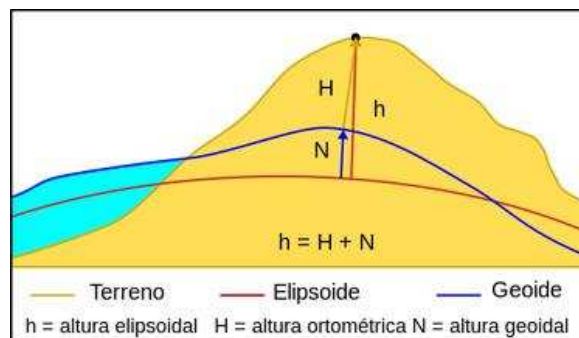
(Cañizares, 2015)

Altura Elipsoidal.

Es la distancia que existe entre el elipsoide (modelo matemático de la tierra) y la superficie topográfica.

Figura 2

Tipos de altura



Nota Tomado de (Sanchez Osorio, 2017)

Esta altura al no presentar valores que toman en cuenta el campo de gravedad terrestre se puede obtener valores iguales en puntos con niveles diferentes, por lo que este tipo de altura tiene una limitante en su aplicación.

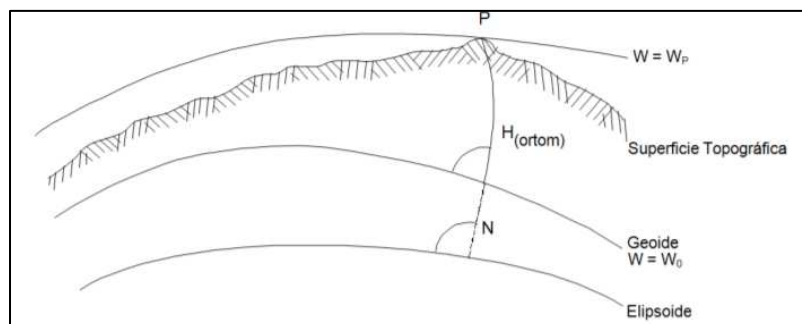
Alturas Físicas

Altura Ortométrica.

Distancia vertical entre el geoide (Superficie equipotencial, también es conocido como la forma física de la Tierra) y la superficie topográfica. A modo general esta distancia es medida a lo largo de la línea de la plomada la cual no es una línea recta, ya que presenta una leve curvatura y giro debido a que va en dirección de la gravedad la misma que varía dependiendo de las características de densidad local. (Vanícek.et.al, 2003).

Figura 3

Tipos de modelos



Nota: Tomado de (Drewes & Sánchez, 2002)

Ondulación Geoidal

(Mena , 2008) define la ondulación geoidal como la separación que existe entre el geoide y el elipsoide de referencia. Sirve para el cálculo de la altura ortométrica, la cual se obtiene como resultado de la diferencia entre la altura elipsoidal obtenida con un método de posicionamiento GNSS y la ondulación geoidal.

Se la puede obtener por medio de la siguiente fórmula

$$H \cong h - N \quad (2)$$

H : Altura Ortométrica o puede también ser considerada como la altura a nivel medio del mar.

h : Altura Elipsoidal, proporcionada por método de nivelación GNSS.

N : Ondulación Geoidal

Modelos Geopotenciales, Gravimétricos y Geométricos

EGM 96

Este modelo geopotencial fue desarrollado por la colaboración de la NASA, la Agencia Nacional de Imágenes y Cartografía (NIMA) y la Universidad Estatal de Ohio (OSU). Consiste en datos de la gravedad de superficie, anomalías derivadas de altímetros, datos de seguimiento de satélites, entre otros. Este modelo sirve para calcular ondulaciones del geoide con precisiones mayores al metro, estos datos son calculados por medio del elipsoide WGS84 con una resolución de 15' x 15' adicionalmente proporciona modelos de topografía oceánica dinámica y determinación de órbita mejorada para satélites en órbita terrestre. (NASA, 2006)

EGM 08

El modelo gravitacional 2008 está conformado por esféricos armónicos al grado y orden 2159, este modelo agrupa a las ondulaciones geoidales con el fin de obtener un solo conjunto de datos de diferentes puntos que se encuentran en una misma zona. Por otra parte, este modelo brinda información de anomalías de la gravedad como Bouguer y aire libre las cuales son calculadas cada 5'x5'. (Tierra, 2009)

WGM12

Este modelo gravimétrico fue desarrollado por el Bureau Gravimetric International en conjunto con colaboraciones de la Comisión para el Mapa Geológico del Mundo (CGMW), UNESCO, Asociación Internacional de Geodesia y otras instituciones científicas. Es la primera versión de grilla y mapa de alta resolución (1' x 1') derivadas del modelo ETOPO 1 además cuenta con las distintas anomalías de la gravedad de la tierra como Bouguer, isoestático y aire libre.

(Bonvalot, y otros, 2012)

Modelo IGM

Este modelo geométrico permite el cálculo de la ondulación geoidal en cualquier punto mediante interpolación, se generó a través de la técnica GPS y nivelación geométrica con el fin de no optar por modelos globales los cuales pueden generar un error de hasta 3 metros en el Ecuador continental. Con este modelo se espera precisiones de 40 cm con un error cuadrático medio de 15 cm. (IGM, 2013).

Anomalías de la gravedad

Aire libre

Consiste en la reducción del valor de la gravedad omitiendo las masas que se encuentran entre el Geoide y el punto sobre la superficie terrestre. De manera general, para obtener esta corrección se debe sumar la corrección de Aire libre (F) y el valor medido de la gravedad (g) en el punto (Hoffmann & Moritz, 2005).

Bouguer

Esta reducción surge como un siguiente paso a la reducción del aire libre, por lo que en bouguer primero se elimina las masas topográficas que se encuentran fuera del geoide. Bouguer considera que la superficie alrededor de la estación de gravedad en un punto es horizontal y plana, con una densidad constante de las masas existentes entre el geoide y la superficie topográfica. (Hoffmann & Moritz, 2005)

Isostática

La compensación isoestática deduce la existencia de una clase de deficiencia de masa y que se compensa de cierta forma, esto surge debido a que la anomalía de Bourguer calculada en zonas de montaña presenta valores negativos que aumentan 100 mgales conforme aumenta la altura. La compensación isostática cuenta con dos teorías las cuales son: 1) Teoría de Pratt-Hayford y 2) teoría de Airy-Heiskanen, en el presente estudio se tomó en cuenta la segunda teoría ya que esa es la teoría que usa el modelo WGM12 para calcular esta anomalía. (Palacios, 2019)

Métodos de nivelación

Nivelación Geométrica

También llamada nivelación diferencial, se refiere a procedimientos en los cuales se va a determinar elevaciones o diferencias. Este método consiste en la medición de diferencias de desniveles entre dos puntos, esa medida se obtiene a través del instrumento denominado nivel en conjunto con las miras verticales (Haro Ruiz, 2021).

Métodos de Nivelación Geométrica.

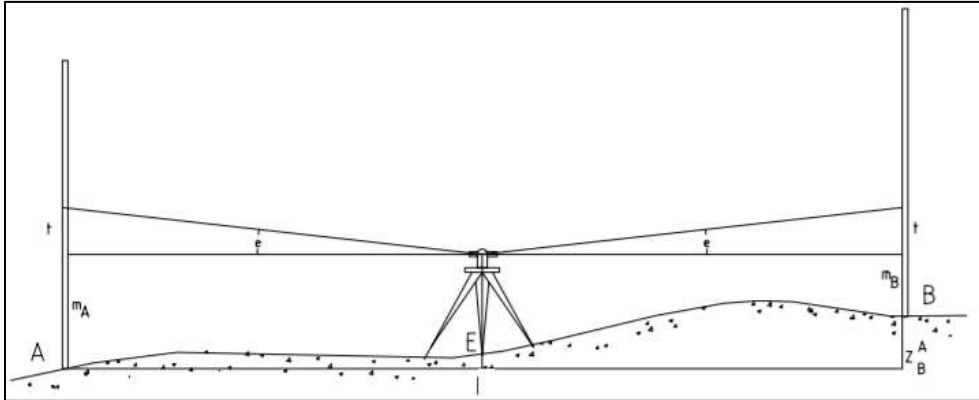
Existen distintas metodologías para obtener el desnivel entre dos puntos como método del punto extremo, método de estaciones recíprocas, método de estaciones exteriores, método del punto medio y método de nivelación compuesta. Los dos mencionados al final se detallan a continuación puesto que fueron ocupados en el presente proyecto.

- Método del punto medio

Este método consiste en colocar el nivel entre los puntos a los cuales se quiere obtener la cota, por ejemplo, A y B, es importante que la distancia entre el punto A y el nivel sea la misma que entre el punto B y el nivel.

Se coloca las miras en ambos puntos, sobre las que se efectúan las visuales horizontales con el nivel y se identifica la vista hacia atrás y vista hacia adelante la cuales se denomina espalda y frente respectivamente.

Cabe recalcar que el punto de estación no se materializa, pero para los puntos donde se colocan las miras principalmente el punto de partida (vista de espalda) y punto de llegada están señalizados.

Figura 4*Nivelación geométrica simple**Nota: Tomado de (Farjas, 2013)*

De la figura 4 se deduce que el desnivel del punto B en relación con el punto A será:

$$\Delta H_A^B = m_A - m_B \quad (3)$$

La diferencia corresponda a la vista de espalda (m_A) menos la vista de frente (m_B). Tanto en la vista de espalda como en al de frente se observan los hilos inferior medio y superior, se comprueba que la suma de los hilos inferior y superior den como resultado el hilo medio $\pm 1mm$, en caso de que la medida no se encuentre en ese intervalo se deberá remedir las lecturas.

(Farjas, 2013)

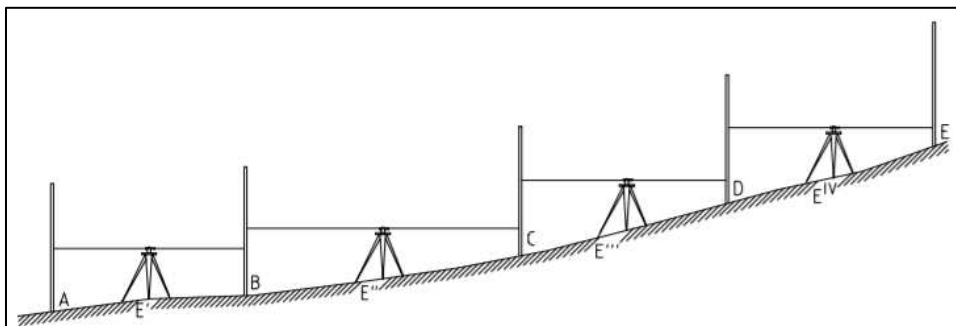
En este método es importante considerar la pendiente del terreno puesto que de esta depende la distancia en la que se colocarán las miras, la cual debe ser una distancia en la que se puedan observar las dos miras, es recomendable evitar lecturas en los extremos superior en inferior de la mira con el fin de mejorar los resultados.

- Método de nivelación compuesta

También conocido como línea de nivelación, consiste en obtener el desnivel entre dos puntos usando el método del punto medio varias veces, esto quiere decir que se realiza más de una estación hasta llegar al punto que se requiere la cota. Suponiendo que A y B son los puntos a los que se obtendrá el desnivel, se usará este método si se encuentra demasiado separados. En la figura 5 se requiere obtener el desnivel entre los puntos A y E

Figura 5

Nivelación geométrica compuesta



Nota: Tomado de (Farjas, 2013)

Al estar tan separados se aplica el método de nivelación compuesta, como se observa en la figura 5. Se coloca la mira en el punto A la cual será la primera vista de espalda y la vista de frente corresponde a la mira colocada en el punto B. Se realizan las lecturas y el desnivel del primer tramo se lo obtendrá aplicando la fórmula 3 mencionada en el método de punto medio. Luego se debe girar la mira que se encuentra en el punto B es importante que la mira solo gire no se debe desplazar a ningún lado y la mira que se encontraba en el punto A se moverá al punto C por lo que ahora se calculará el desnivel en el tramo B-C siendo la vista de espalda la mira situada en el punto B y la vista de frente estará situada en el punto

C. Se realiza el procedimiento hasta que la vista de frente llegue al punto E por lo que el desnivel entre A y E viene dado por la siguiente fórmula:

$$\Delta H_A^E = \Delta H_A^B + \Delta H_B^C + \Delta H_C^D + \Delta H_D^E \quad (4)$$

Considerando que cada desnivel viene dado por la diferencia de la vista de espalda menos la vista de frente de cada tramo el desnivel entre A y E resulta:

$$\Delta H_A^E = (m_e - m'_f) + (m''_e - m''_f) + \dots + (m_e^{vi} - m_f^{vi}) = \sum m_e - \sum m_f \quad (5)$$

(Farjas, 2013)

En otras palabras, el desnivel entre dos puntos se lo obtiene restando la sumatoria de todas las lecturas hacia atrás (espalda) de todas las lecturas hacia adelante (frente).

Líneas de nivelación.

Las líneas de nivelación se clasifican en:

Sencilla.

Una línea de nivelación sencilla es la que se recorre una sola vez, en otras palabras, el punto de partida es A y luego al punto E, usando el método de punto medio encadenado.

Doble.

Se denomina línea de nivelación doble cuando el recorrido del punto A al punto E se lo hace dos veces, quiere decir que se hace un recorrido de ida, y otro de regreso. Además, dentro de esta clasificación existe otra subclasificación la cual es: línea de nivelación doble abierta y línea de nivelación cerrada, ambos se explican a continuación.

Línea de nivelación doble abierta: Se define así, cuando se parte de un punto de coordenadas conocidas y se llega en otro punto de coordenadas conocidas, en otras palabras, se dispone de las altitudes del punto de partida y de llegada.

Línea de nivelación cerrada: Se denomina cerrada, cuando se parte de un punto de altitud conocida y se llega al mismo punto de partida. Este se usa generalmente para determinar las alturas del punto que no las tiene definidas (Farjas, 2013).

Tolerancia del error de cierre.

La nivelación geométrica es considerada de alta precisión, y se puede clasificar de primer, segundo y tercer orden.

Según (Casanova, 2002) el cálculo de la tolerancia del error de cierre viene dado por la siguiente fórmula:

$$T_n = m\sqrt{k} \quad (6)$$

En donde:

T_n = Tolerancia del error de cierre en mm.

m = Valor dependiendo de los instrumentos, métodos y tipo de nivelación requerida.

k = Distancia total de la nivelación expresada en km.

El Instituto Geográfico Militar es el ente encargado de proporcionar estándares para que proyectos relacionados con Cartografía, Geodesia, entre otros cumplan con las precisiones requeridas. Para el caso de nivelación se obtienen las siguientes tolerancias las cuales varían dependiendo del orden de la nivelación.

Según (IGM, 2006) para una nivelación de primer orden la tolerancia del error corresponde a:

$$4mm * \sqrt{k} \quad (7)$$

Donde k es la distancia total para nivelar expresada en kilómetros.

Nivelación GPS

Consiste en el cálculo de alturas cuya superficie de referencia es el nivel medio del mar a través de posicionamiento GNSS y la inclusión de la ondulación geoidal.

El modelo matemático se lo presenta a continuación:

Sean dos puntos P y Q, donde Q tiene altura nivelada conocida, se puede calcular la altura sobre el nivel medio del mar para cada punto, formando un sistema de ecuaciones.

$$H_P^n = h_p - \eta_p \quad (8)$$

$$H_Q^n = h_Q - \eta_Q \quad (9)$$

Donde:

H_P^n : Altura nivelada en el punto P

h_p : Altura elipsoidal en el punto P

η_p : Ondulación geoidal en el punto P

H_Q^n : Altura nivelada en el punto Q

h_Q : Altura elipsoidal en el punto Q

η_Q : Ondulación geoidal en el punto Q

Se obtiene las diferencias de las dos ecuaciones:

$$H_P^n - H_Q^n = h_p - h_Q - \eta_p + \eta_Q \quad (10)$$

Despejando la altura nivelada del punto P, se obtiene la ecuación base del método de nivelación GPS.

$$H_P^n = H_Q^n + (h_p - h_Q) - (\eta_p - \eta_Q) \quad (11)$$

Las alturas elipsoidales son obtenidas por el método de posicionamiento, la altura nivelada de Q se obtiene por los datos geodésicos del IGM y la ondulación geoidal es obtenida por medio del modelo geoidal EGM08.

(Enriquez & Cárdenas, 2019)

Este método es útil cuando las precisiones que se requieren son centimétricas.

Semivariograma experimental y modelos teóricos de semivariograma

Según los autores (Sotter.et.al., 2002) para el modelamiento de un semivariograma se requieren de dos etapas, la primera consiste en la construcción del semivariograma experimental y la segunda es aplicar un modelo teórico de semivariograma.

El semivariograma experimental se diseña gráficamente con el conjunto de puntos de las distancias entre los diferentes pares de puntos muestreados, por otro lado, el semivariograma teórico se efectúa mediante el uso de funciones teóricas o matemáticas que mejor se ajustan al semivariograma experimental. Entre las más usadas se mencionan: el Modelo Exponencial, Modelo Esférico, Modelo Gaussiano y Modelo Estable, cuyas diferencias radican en la forma de crecimiento de la función a lo largo del rango.

El semivariograma está descrito por tres parámetros, estos se definen como:

Nugget o Pepita (C_0): valor de intercepción entre el modelo del semivariograma y el eje de coordenadas 'y'.

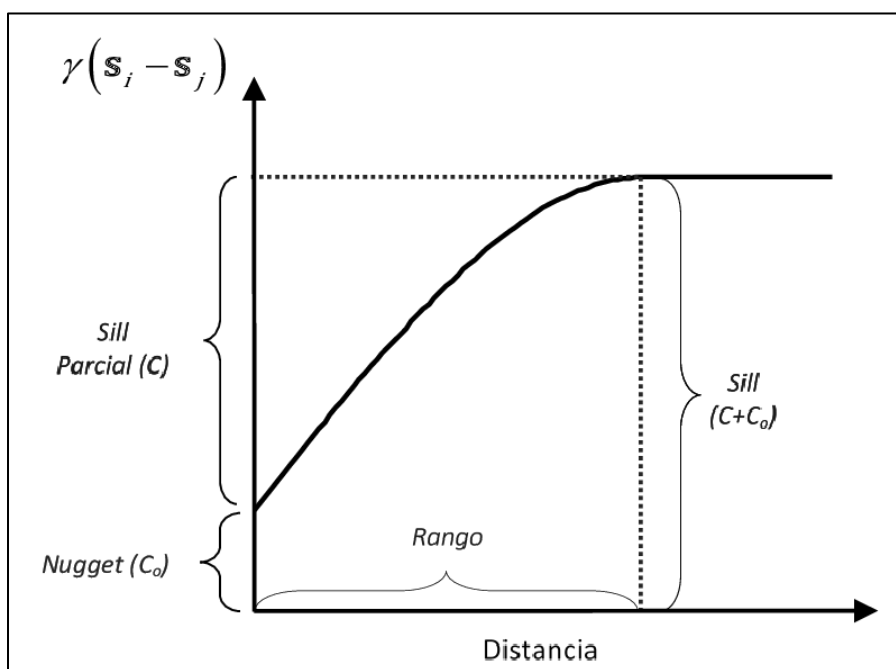
Sill o Meseta (C_1): punto de inflexión en donde la curva del modelo se aplana por primera vez. Valor donde se alcanza el rango.

Range o Rango (a): distancia en la que la función de semivarianza deja de crecer en otras palabras, distancia en la que el modelo se aplana por primera vez.

En la figura 6. se muestran los tres elementos que caracterizan a un semivariograma experimental.

Figura 6

Parámetros de semivariograma



Nota: Tomado de (Córdoba, 2015)

De acuerdo con los autores (Lambertucci & Rueda, 2017) los comportamientos de los modelos teóricos de semivariograma son de la siguiente forma:

Modelo Gaussiano: este semivariograma presenta un comportamiento cuadrático cerca del origen y forma correlaciones de rango corto que, por lo general, son más altas que las de otro modelo de media constante con el mismo rango. La diferencia entre el semivariograma gaussiano y el exponencial es el exponente cuadrado. El modelo gaussiano es el más continuo cerca del origen, y su función matemática se define de la siguiente forma:

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left[1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)^2} \right] \quad \text{para todo } h \quad (12)$$

Modelo Exponencial: se acerca a la meseta del semivariograma de forma asintótica. Para el mismo rango y meseta de un modelo esférico, el modelo exponencial alcanza el rango más rápidamente, es decir, a menor distancia que el modelo esférico, y su función matemática se define de la siguiente forma:

$$\gamma(h): \begin{cases} C_0 & h = 0 \\ C_0 + C_1 \left[1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)} \right] & h \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

Modelo Esférico: tiene un comportamiento lineal cerca del origen y el hecho que a la distancia el semivariograma encuentra la meseta, y su función matemática se define de la siguiente forma:

$$\gamma(h): \begin{cases} C_0 + C_1 \left(\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & h \leq a \\ C_0 + C_1 & h \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

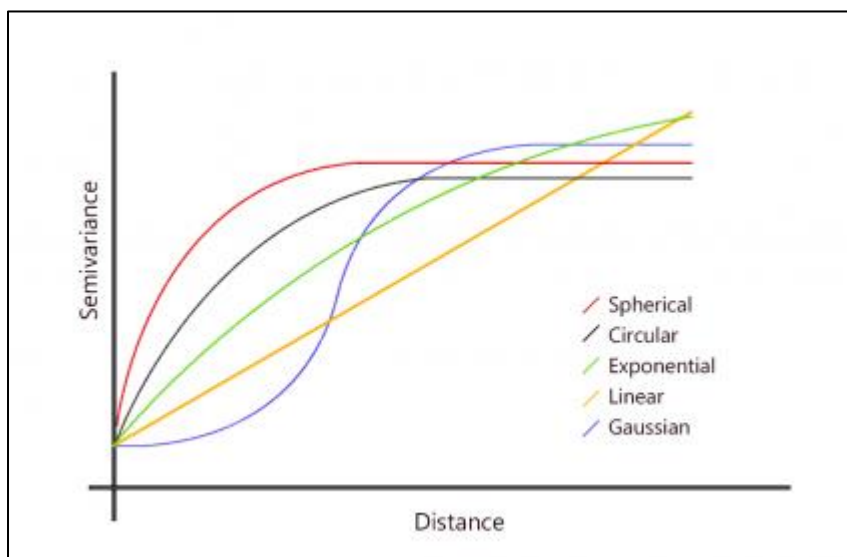
Modelo Estable: Su función matemática es similar al modelo gaussiano con la diferencia que interviene un nuevo parámetro llamado teta, y su función matemática se define de la siguiente forma:

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left[1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)^\theta} \right] \quad \text{para todo } h, \quad 0 < \theta \leq 2 \quad (15)$$

Existen otros modelos a más de los mencionados y sus comportamientos se los puede diferenciar en la figura 7:

Figura 7

Tipos de modelos de semivariograma teórico



Nota: Tomado de (GISGeography, 2018)

Métodos de predicción

Método Cokriging

Este método de inferencia espacial es una adaptación multivariable del Kriging ordinario, para predecir el valor de una variable en función de los datos de dicha variable y otras adicionales que tengan correlación espacial. Tomando como ejemplo, se puede hacer la predicción de concentración de cobalto en un lugar específico a partir de datos de concentración de cobalto y níquel. Es de gran importancia que antes de emplear esta técnica se deba contar con los modelos de semivariogramas de cada variable, y los variogramas cruzados entre las diferentes variables para calcular la correlación que hay entre las variables (Emery, 2007).

De acuerdo a (Journal, 1989) el método de Cokriging se usa principalmente para aprovechar la covarianza entre dos o más variables aleatorias regionalizadas que están correlacionadas y es de gran utilidad cuando la variable principal es muy costosa o cuenta con una presencia de errores de muestreo, mientras que la variable secundaria es abundante o de fácil obtención.

La aplicación de una variable auxiliar por lo general mejora la predicción de la variable primaria cuando se dispone de un muestreo más exhaustivo de la variable secundaria, si ambas variables fueron observadas en los mismos puntos de muestreo entonces cokriging no producirá ninguna mejora en el resultado de la estimación (Rebollo, 2021).

Según el autor (Gallardo, 2007) la información que posee una variable respecto a otra usualmente es menor que la que tiene una variable sobre sí misma. Por tal razón el método cokriging no siempre mejora la predicción del kriging a menos que una de las dos variables haya sido muestreada con menor intensidad que la otra. En este caso el Cokriging puede ser muy útil, puesto que las opciones que se tomarán como mejor variable auxiliar se derivarán de modelos geoidales globales y locales, estos datos se encuentran disponibles en plataformas web de forma gratuita.

De acuerdo con los autores (Alfaro et al, 2007) una de las propiedades que tienen en común el Cokriging con el Kriging es la exactitud de predicción al aplicarlo en puntos de muestreo en los cuales se conoce el valor real de la variable, esto debido a que Cokriging es un interpolador exacto. No obstante, para (Emery, 2007) y (Hengl, 2006) la varianza de predicción de Cokriging siempre es menor o igual que la de Kriging a causa del análisis de correlación existente entre variables, haciendo que sus resultados sean mucho más confiables.

Este método es una herramienta muy útil cuando los datos se presenten en condiciones de heterotopía es decir puntos de muestreo distribuidos en lugares diferentes, también se aplica en casos donde las variables poseen una alta correlación espacial, y la obtención de la variable secundaria es densamente muestreada y accesible (Rivoirard, 2003).

Pesos Cokriging.

Ocurre de forma similar a los pesos usados en Kriging, no obstante, se debe tener presente que los pesos establecidos para la variable estudiada son adimensionales, mientras que los pesos de la variable auxiliar siguen una relación (unidad variable principal/unidad variable secundaria). Además, es necesario tomar en cuenta la existencia de dos valores de ponderaciones, uno por cada variable (dos pesos), en Cokriging estos valores condicionarán el insesgamiento del predictor (Palacios, 2019).

Variograma cruzado.

Hace referencia al comportamiento espacial en conjunto de las variables estudiadas, es decir que la varianza está representada entre los puntos de una variable respecto a otra (Gallardo A. , 2006).

Entre las propiedades más importantes del cross-semivariograma o semivariograma cruzado se pueden destacar las siguientes (Díaz, 2002) , (Emery, 2007):

- Simetría: $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(h)$ y $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ij}(-h)$ (16)

- Es nulo en punto origen: $\gamma_{ij}(0) = 0$ (17)

- A diferencia del variograma simple, el variograma cruzado puede tener valores positivos y negativos.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \gamma_{ii}(h)\gamma_{jj}(h) \geq |\gamma_{ij}(h)|^2$ (18)

- Positividad: dado h, la matriz $\Gamma(h) = [\gamma_{ij}(h)]_{i,j=1\dots N}$ es positiva y simétrica,

cumpliendo lo siguiente:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_N \in R, \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) \geq 0, \quad (19)$$

- Relación entre varianza y covarianza cruzada:

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2}[C_{ij}(h) + C_{ij}(-h)] \quad (20)$$

De forma matricial

$$\Gamma(h) = C(0) - \frac{1}{2}[C(h) + C(-h)] \quad (21)$$

- Coeficiente de correlación entre dos variables Z_i y Z_j : $\rho_{ij} = \frac{C_{ij}(0)}{\sqrt{C_{ii}(0)C_{jj}(0)}} \quad (22)$

Un variograma cruzado entre dos funciones estacionarias o intrínsecas (Z_i y Z_j), se la puede interpretar de la siguiente forma (Nelson, 2002):

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2}E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)][Z_j(x+h) - Z_j(x)]\} \quad (23)$$

En cuanto a la estimación del variograma cruzado experimental, esta se define como (Palacios, 2019):

$$\hat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{\alpha=1}^N [Z_i(x_\alpha + h) - Z_i(x_\alpha)][Z_j(x_\alpha + h) - Z_j(x_\alpha)] \quad (24)$$

Donde $N(h)$ es el número de pares $Z_i(x_\alpha)$, $Z_i(x_\alpha + h)$ y $Z_j(x_\alpha)$, $Z_j(x_\alpha + h)$ a un vector de distancia $h = |h|$. Para encontrar el variograma cruzado experimental, es necesario disponer de los datos de las variables estudiadas en los mismos lugares; por ende, no se puede calcular si se trata de heterotopía (variables medidas en distintos lugares), si este es el caso el conjunto $N(h)$ es vacío para todo vector h (Emery, 2007).

Modelo de correogionalización lineal (MCL).

Si se va a trabajar con dos variables (una principal y una auxiliar), es necesario que estas se ajusten a tres modelos de variogramas a la vez, dos simples y un cruzado (Oliver, 2010). Sin embargo, el uso de modelos convencionales no asegura el cumplimiento de las propiedades de semivariograma cruzado, es por esto que se opta por emplear un modelo de correogionalización lineal, dicho de otra forma, un modelo anidado (Goovaerts, 1997).

Un ejemplo de MCL para dos variables expresado matricialmente sería:

$$\Gamma(h) = \begin{bmatrix} \gamma_i(h) & \gamma_{ij}(h) \\ \gamma_{ij}(h) & \gamma_j(h) \end{bmatrix} = \sum_{u=0}^S B_u \xi_u(h) \quad (25)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} \alpha_u & \delta_u \\ \delta_u & \beta_u \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\xi_u(h) = \begin{bmatrix} \xi_u(h) & 0 \\ 0 & \xi_u(h) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Donde $\Gamma(h) = [\gamma_{ij}(h)]_{i,j=1\dots N}$ es la matriz de variogramas cruzados y simples; $\xi_u(h)$ es el modelo de variograma básico; $B_u = [b_{ij}^u]_{i,j=1\dots N}$ es la matriz de correogionalización, para el caso de dos variables se debe verificar que todos los valores de B_u sean ≥ 0 a fin de cumplir con la condición de positividad (Emery, 2007).

Cokriging ordinario para dos variables (principal y auxiliar).

El valor de predicción en un punto desconocido (x_0) se lo puede calcular mediante el estimador de Cokriging ordinario, expresado como (Giraldo, 2001), (M. Ligas, 2018), (Oliver, 2010) (Rivoirard, 2003):

$$\hat{Z}_1^*(x_0) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i Z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{n_2} b_j Z_2(x_j) \quad (28)$$

Donde $a_i, i = 1, \dots, n_1$ y $b_j, j = 1, \dots, n_2$ son los pesos de los observables primarios y secundarios respectivamente, los mismos que se estiman de forma similar a Kriging ordinario y están sujetos al MCL

ajustado con los semivariogramas cruzados y simples. Cabe recalcar que la condición de inesgamiento está dada por los pesos, donde la sumatoria de los pesos de la variable principal suman uno, y la secundaria cero.

Expresada matricialmente en términos de semivarianza cruzada o cross-semivarianza, sería:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 1 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_i \\ b_j \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

El lado superior izquierdo de la primera matriz corresponde a las semivarianzas simples y cruzadas para los pares estimados. Las filas y columnas de ceros y unos corresponden a la condición de inesgamiento del predictor, mientras que el primer vector columna contiene a los pesos estimados en el modelo (a_i, b_j) y a los multiplicadores de Lagrange (ω_1, ω_2) . Por otro lado, el vector columna del lado derecho hace referencia a las semivarianzas cruzadas para los puntos de predicción con las dos variables.

La varianza de predicción de Cokriging ordinario expresado en términos de semivarianzas es (Wendroth, 2018):

$$\sigma_{CKO}^2(x_0) = \gamma[Z_1(x_0), Z_1(x_0)] - \sum_{i=1}^{n_1} a_i \gamma[Z_1(x_i), Z_1(x_0)] - \sum_{j=1}^{n_2} b_j \gamma[Z_2(x_j), Z_2(x_0)] + \omega_1 \quad (30)$$

Método de Mínimos Cuadrados Colocación

El método de Mínimos Cuadrados Colocación (MCC) se trata de una versión muy general de mínimos cuadrados, su principal característica es que más de estimar los parámetros y errores de observación permite estimar otras cantidades aleatorias de gran interés en muchos problemas en el ámbito geodésico (Sevilla, 1987) . Esta técnica de gran precisión maneja métodos estadísticos para su apoyo teórico, las observaciones son variables aleatorias y sus respectivas varianzas comprenden el modelo estocástico (Luna, 2017).

La solución que proporciona el método de mínimos cuadrados colocación es una de las mejores estimaciones lineales insesgadas tanto de los parámetros como de las señales que pueden obtenerse de datos dispersos (Sevilla, 1987).

La definición del modelo matemático de mínimos cuadrados es (Echeverría & Tierra, 2010):

$$AX + L = r + s \quad (31)$$

Donde:

A : es la matriz de coeficientes del modelo matemático o matriz de derivadas parciales del modelo.

X : es el vector corrección de los parámetros del modelo.

L : es el vector diferencia entre los valores aproximados de las observaciones (L_0) y el vector de las observaciones (L_b)

r : el ruido es un error aleatorio dependiente del método y del equipo

s : la señal es un error del experimento que no depende del método y del equipo.

La ecuación fundamental de MCC que desarrolló (Moritz, 1980) es la siguiente:

$$X_{MCC} = -(A^T \hat{C}^{-1} A)^{-1} (A^T \hat{C}^{-1} L_{MCC}) \quad (32)$$

Posteriormente (Sevilla, 1987) fue quien demostró y analizó la aplicación de esta ecuación de MCC en el campo de la Geodesia.

Capítulo III Metodología

Recopilación de la información

Los datos usados en la presente investigación fueron proporcionados por el Informe de Red Geodésica y Ruta de Nivelación correspondientes al proyecto “Levantamiento topográfico Lidar e implementación de red geodésica en la zona de Influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute Integral” elaborado por el CONSORCIO CINARQLH-KAAWSUS-GEOCAM por medio de un contrato entre CELEC EP y LA UNIDAD DE NEGOCIO HIDROPAUTW realizado el 14 de noviembre de 2019.

Los datos proporcionados por el proyecto indican puntos de la Red Principal, puntos de Monitoreo y Bancos de Nivel en coordenadas UTM, en coordenadas P.T.L-L.T.M, coordenadas Geodésicas (ϕ , λ , h) y coordenadas Cartesianas (X, Y, Z), también se contaron con tablas de alturas niveladas de los puntos de la Red Principal y de los Bancos de nivelación.

Del total de los datos se seleccionaron los que contaban con coordenadas UTM, altura elipsoidal y su respectiva altura nivelada dando como resultado 60 datos a los que se les aplicó un filtrado en el que se omitieron todos los valores atípicos encontrados, dejando así 51 datos aptos para generar el modelo.

Metodología para la obtención de coordenadas geodésicas

De acuerdo al informe de Red Geodésica y Ruta de Nivelación elaborado por CELEC-EP, previo a la implementación de la Red Geodésica de Control Principal se diseñó un anteproyecto de planeamiento e identificación de puntos para hallar de forma aproximada los vértices que conformarán la red, bajo los siguientes criterios: una buena accesibilidad a los puntos de interés, zonas libres de obstrucciones en el horizonte (viviendas, vegetación alta, etc.) para una mejor recepción satelital; interferencias (redes de alta tensión); superficies reflectoras a menos de 50 metros de la estación, etc.

La observación de los puntos que conforman la red geodésica fue realizada mediante dos etapas, la primera consistió en seleccionar tres puntos a los que se enlazarían con las estaciones CUEC y ALAUSI

pertenecientes a la Red de Monitoreo Continuo (REGME) del IGM localizadas en la ciudad de Cuenca y Alausí respectivamente, dichos puntos fueron rastreados un total de 5 horas. En la segunda etapa se localizaron el resto de los vértices que conforman la red local y se enlazaron con los vértices de la primera etapa, cada uno de los puntos de la red local fueron rastreados por 2 horas y 30 minutos.

La toma de las coordenadas geodésicas fue realizada mediante posicionamiento satelital GNSS con el método estático diferencial considerando los siguientes parámetros:

- Utilización de receptores geodésicos GNSS doble frecuencia.
- Ángulo de enmascaramiento mayor o igual a 15 grados.
- Intervalo de grabación de 5 segundos.
- PDOP menor o igual a 3.

Midiendo un total de 22 vértices, donde a cada uno se le asignó un código de serie denominado PRCP (Punto de Red de Control Principal) de tal forma que el orden de nombramiento va desde el PRCP-01 hasta el PRCP-22.

Finalmente, para el procesamiento de los datos en el software Trimble Business Center se dividió en dos etapas, la primera consistió en el procesamiento de las líneas bases bajo 2 criterios estadísticos de aceptación de calidad, de acuerdo a la precisión de los equipos:

- Precisión horizontal $< 0.005 \text{ m.} + 1 \text{ ppm.}$
- Precisión vertical $< 0.010 \text{ m.} + 2 \text{ ppm.}$

Las coordenadas de las bases fueron tomadas de las soluciones semanales de la página de www.sirgas.org, y las coordenadas de los satélites se obtuvieron de las efemérides finales (igs.) tomadas de la página <ftp://igs.ensg.ign.fr/pub/igs/products>.

Por otro lado, la segunda etapa se refiere al ajuste de la Red, la cual aplicó la técnica de procesamiento multiestación – multisesión, donde se seleccionaron únicamente las líneas base independientes.

Adicionalmente a esto, para la conversión a coordenadas geodésicas se usó el elipsoide WGS84 (World Geodetic System 1984), debido a que para este tipo de proyecto se considera que no hay una diferencia significativa en comparación al elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System 1980).

Metodología para la obtención de alturas niveladas

La altura nivelada tomada del proyecto: “Levantamiento topográfico Lidar e implementación de red geodésica en la zona de Influencia del Complejo Hidroeléctrico Paute Integral” se la obtuvo por medio del método de nivelación compuesta, el cual consiste en obtener el desnivel entre dos puntos encadenando el método de punto medio, por lo que se identifica varias estaciones en el tramo entre los puntos de salida y llegada. Generalmente se aplica este método cuando la distancia del punto de partida y el punto de llegada es excesiva. Como parte de este método, se materializó puntos intermedios, cada uno de los tramos materializados se denomina anillo, se colocó clavos al inicio y al final de cada uno de los anillos, dependiendo del terreno, la distancia y la pendiente, se situaron a 1 o 2 km y se usó el concepto de línea de nivelación doble cerrada, explicado en el segundo capítulo del presente documento. Además, se situaron Bancos de Nivel (BN's) cada cinco kilómetros.

En cuanto a las precisiones, dado que se requiere de una precisión alta la tolerancia aplicada fue de $\pm 4 \text{ mm}\sqrt{K}$, siendo k la distancia total recorrido en kilómetros, para cumplir con la tolerancia requerida, se usó equipos automáticos, con tornillos de calar el nivel esférico, una escala micrométrica y cuña de precisión de la visual, las miras usadas son de material invar y tienen 3 metros de largo.

Obtención de ondulaciones geoidales para MCC

Para poder realizar el método de Mínimos Cuadrados Colocación es necesario valores conocidos de la variable a predecir, además de sus coordenadas horizontales, para este caso la obtención de la ondulación geoidal se la calcula por medio de la formula $N \cong h - H$, h que representa a la altura elipsoidal que se obtuvo por medio de posicionamiento GNSS y H que es la altura obtenida por medio de nivelación geométrica.

A continuación, en la tabla 1 se presentan todos los puntos previo al análisis exploratorio de datos

Tabla 1

Ondulación geoidal para MCC

ID de punto	Latitud	Longitud	Altura Elipsoidal	Altura nivelada	Ondulación real
PRCP-01	2.65280439	78.6324899	2672.0142	2649.8391	22.1751
PRCP-02	2.69961941	78.6408702	2570.933	2547.6849	23.2481
PRCP-03	2.72192023	78.6612885	2445.9609	2422.7405	23.2204
PRCP-04	2.73385931	78.6764943	2438.422	2415.2264	23.1956
PRCP-05	2.75485035	78.7072123	2379.4445	2356.3648	23.0797
PRCP-06	2.76422057	78.6826165	2539.4249	2516.4904	22.9345
PRCP-07	2.74868334	78.6628414	2625.3506	2602.4222	22.9284
PRCP-08	2.72790574	78.6493329	2449.7788	2426.7406	23.0382
PRCP-09	2.74566092	78.6469351	2205.657	2182.6556	23.0014
PRCP-10	2.70078886	78.6227694	2293.356	2270.1965	23.1595
PRCP-11	2.66173036	78.6071322	2423.6918	2402.0604	21.6314
PRCP-12	2.62923837	78.6052589	2413.7481	2390.4021	23.346

PRCP-13	2.60259009	78.6180227	2500.5337	2476.9321	23.6016
PRCP-14	2.59709076	78.616266	2495.5405	2471.9072	23.6333
PRCP-15	2.59001288	78.612848	2140.4071	2116.7002	23.7069
PRCP-16	2.56923272	78.6214259	2443.4835	2419.6167	23.8668
PRCP-17	2.58495342	78.5920562	2470.4518	2446.9004	23.5514
PRCP-18	2.59568791	78.5684611	2140.812	2117.4915	23.3205
PRCP-19	2.61835805	78.5559234	1839.4183	1816.3148	23.1035
PRCP-20	2.62111431	78.5268605	1729.2849	1706.4866	22.7983
PRCP-21	2.59057248	78.5082256	2003.6296	1980.9356	22.694
PRCP-22	2.58148828	78.4922847	1826.6208	1804.0152	22.6056
BN-02	2.68815572	78.6400624	2607.4274	2584.2982	23.1292
BN-03	2.71833839	78.658086	2458.2085	2435.1677	23.0408
BN-04	2.74252297	78.6819431	2381.0809	2358.1847	22.8962
BN-05	2.75274517	78.7087909	2339.2819	2316.4275	22.8544
BN-06	2.75743372	78.73573	2242.5983	2219.7006	22.8977
BN-07	2.76218975	78.7315355	2265.1572	2242.2006	22.9566
BN-08	2.77376019	78.7021635	2387.037	2364.3081	22.7289
BN-09	2.75787544	78.6716928	2624.5359	2601.834	22.7019
BN-10	2.74133631	78.6492806	2356.9974	2334.003	22.9944
BN-11	2.73513053	78.6399362	2337.864	2314.814	23.05
BN-12	2.78221394	78.6709268	2599.5633	2576.7491	22.8142
BN-13	2.80476186	78.6649993	2384.9682	2362.5417	22.4265
BN-14	2.79356331	78.6465905	2451.3476	2428.9153	22.4323
BN-15	2.76493175	78.64702	2488.6889	2466.1496	22.5393
BN-16	2.7370865	78.6392283	2402.8098	2380.1315	22.6783

BN-17	2.70663786	78.6180346	2374.7459	2351.8759	22.87
BN-18	2.67863164	78.6135506	2353.4046	2330.3551	23.0495
BN-19	2.65141622	78.6005302	2433.1418	2410.0613	23.0805
BN-20	2.63280764	78.606358	2452.8156	2429.6907	23.1249
BN-21	2.60856467	78.6174533	2475.398	2451.7899	23.6081
BN-22	2.58557044	78.5925998	2474.1377	2450.5602	23.5775
BN-23	2.58110358	78.5696439	2264.7959	2241.304	23.4919
BN-24	2.61360686	78.5618074	1918.43	1895.2945	23.1355
BN-25	2.62542392	78.5307493	1656.9495	1634.1083	22.8412
BN-26	2.59611231	78.5114187	1923.7177	1901.0198	22.6979
BN-28	2.59163725	78.6064301	2326.5995	2302.9396	23.6599
BN-29	2.58703525	78.6209155	2281.9914	2258.277	23.7144
BN-31	2.56900358	78.6353764	2683.9949	2660.0515	23.9434
BN-32	2.57120336	78.6539383	2326.2042	2302.2134	23.9908
BN-33	2.57753894	78.6506351	2484.7974	2460.8676	23.9298
BN-A	2.64087597	78.6471563	2738.254	2716.1204	22.1336
BN-B	2.64031983	78.6771016	2928.9172	2906.6509	22.2663
BN-C	2.64046264	78.6901408	2954.7899	2932.4742	22.3157
BN-CH	2.69150656	78.62064	2305.0743	2282.1009	22.9734
PL-33	2.58058328	78.6201639	2493.3249	2469.5845	23.7404
PL-100	2.729402	78.6385364	2372.2139	2349.3918	22.8221
PL-109	2.75309133	78.6671744	2675.2063	2652.2919	22.9144
PL-11	2.58995653	78.5991523	2439.6742	2416.0555	23.6187

Selección de posibles variables auxiliares para Cokriging

El método de Cokriging usa una variable que tenga bastante correlación con la variable de estudio, por lo que para este caso se usaron las ondulaciones geoidales proporcionadas por los modelos geopotenciales EGM 96, EGM 08, el modelo generado por el Instituto Geográfico Militar (IGM), adicional se tomaron en cuenta anomalías de gravedad como son Bouguer, Aire libre, Isoestática y un modelo digital de elevaciones. Los dos primeros modelos fueron obtenidos por medio de la página International Centre for Global Earth Models (<http://icgem.gfz-potsdam.de/home>).

Esta página ofrece varios servicios de cálculos, entre ellos la obtención de la ondulación geoidal usando los modelos mencionados anteriormente. Para obtener la ondulación geoidal la plataforma da la opción de subir coordenadas de latitud, longitud y altura elipsoidal de manera individual o ingresando un archivo en formato .txt con un conjunto de coordenadas, para este caso se seleccionó la segunda opción. Luego se abrirá una nueva ventana en la que primero se selecciona el modelo que se usará, para el presente estudio se seleccionó la opción EGM 08 y luego EGM96, posterior se seleccionó la opción de geoide como función, con la opción de seleccionar archivo se carga el .txt con los datos de entrada y finalmente dar clic en la opción "Start Computation". En la figura 8 se indica de manera gráfica los pasos mencionados.

Figura 8

Obtención de la Ondulación Geoidal usando los modelos EGM 08 y EGM96

The screenshot shows the web application interface for calculating gravity field functionals. The main title is "Calculation of Gravity Field Functionals on User-Defined Points". The interface is divided into several sections:

- Model selection:** A dropdown menu currently set to "Longitude Model". Below it is a list of available models: AUB-CHAMP01S, AUB-CHAMP02S, AUB-GRACE01S, AUB-GRACE02S, AUB-GRACE03S, DEOS-CHAMP-01C, DGM-1S, EGM08S, EGM96S, EIGEN-1, and EIGEN-1s.
- Functional selection:** A section where users can select one or more functionals. The selected functional is "height_anomaly". Other options include "height_anomaly_all", "disturbance", "disturbance_sa", "anomaly", "anomaly_sa", "anomaly_3g", and "acceleration".
- User-Defined Points:** A world map showing the location of user-defined points. Below the map, there are instructions to select the coordinate format and upload a file.
- Reference System:** A dropdown menu set to "WGS84". Fields for "Radius" (6378137.0), "Flat" (298.2672266), "Gm" (3.986004418e+14), and "Omega" (7.292115e-5) are visible.
- Tide System:** A dropdown menu set to "use model's system" and a checked "Zero Degree Term" option.
- Gaussian Filter:** Radio buttons for "None" (selected), "Half response", "Half transfer", and "6 Sigma". A "Filter Length" field is set to "1.0 [Degree]".
- Low-pass filtering:** A section for "Low-pass filtering by (gently) truncating the model". The "Start Gentle Cut" and "Maximum Degree" are both set to "2190".
- Buttons:** A "start computation" button is located at the bottom right.

Nota: Tomado de (Ince, y otros, 2019)

Esta calculadora proporciona los resultados en un archivo formato .dat el cual se pasó a una hoja de cálculo de Excel.

Para la obtención de la ondulación geoidal local para Ecuador continental usó la calculadora proporcionada por el Instituto Geográfico Militar. Esta aplicación permite obtener la altura geoidal digitando un punto en específico como se muestra en la figura 9 o subir un archivo .txt siguiendo las instrucciones que proporciona el servicio tal y como se muestra en la figura 10.

Figura 9

Ingreso por punto para la obtención de la ondulación geoidal

The screenshot shows the 'CÁLCULO DE LA ALTURA GEOIDAL DEL ECUADOR CONTINENTAL' web application. The main menu includes 'Inicio', 'Portafolio', 'Geoeducación', 'Descargas - Visor GNSS', and 'Contactos'. The 'Consulta de un punto' section is active, with a sub-header 'Permite obtener la altura geoidal del punto ingresado'. Below this, there are three tabs: 'Grados, minutos y segundos' (selected), 'Grados decimales', and 'UTM'. A form for entering coordinates is visible, with an example of '0° 29' 30.14520"'. The form includes input fields for 'Latitud' (0, 29, 30.14520) and 'Longitud' (75, 0, 0), and dropdown menus for hemispheres (S and W). A 'Calcular' button is present, along with a display for 'Altura Geoidal: 0.0' and a 'Limpiar campos' button.

Nota: Tomado de (IGM, 2013)

Figura 10

Ingreso de un archivo .txt para la obtención de la ondulación geoidal

The screenshot shows the 'CÁLCULO DE LA ALTURA GEOIDAL DEL ECUADOR CONTINENTAL' web application. The main menu is the same as in Figure 9. The 'Consulta de un archivo' section is active, with a sub-header 'Esta herramienta permite calcular la altura geoidal de varios puntos ingresados en un archivo .txt, el mismo que debe tener las siguientes características:'. Below this, there is a list of six requirements for the .txt file:

1. Archivo de texto que no debe contener encabezado.
2. Coordenadas expresadas en grados decimales positivos, seguidos de las letras w,n,s según sea el hemisferio.
3. El orden de las coordenadas deben ser latitud y luego longitud.
4. La separación entre columnas será un espacio en blanco (no tabuladores).
5. Para indicar los decimales se debe usar el punto (.).
6. No se calculará la altura geoidal de los puntos que estén fuera del polígono de cobertura del Ecuador Continental.

 An example of the file content is provided:


```

    Ejemplo:
    0.5821s 75.0004w
    0.8561s 76.0054w
    1.2555s 78.6821w
    
```

 At the bottom, there is an 'Archivo de entrada' field with a 'Seleccionar archivo' button, a 'No se eligió archivo' message, and a 'Procesar archivo' button.

Nota: Tomado de (IGM, 2013)

Al disponer de varios datos se cargó un archivo .txt con las coordenadas de los puntos y la calculadora arrojó como resultado un archivo formato .txt que al igual que con los resultados de ellos anteriores modelos se colocó en una hoja de cálculo de Excel.

A continuación, en la tabla 2 se muestra las coordenadas de los puntos y su respectiva ondulación geoidal según los modelos EGM 96, EGM08 e IGM.

Tabla 2

Ondulación geoidal usando los modelos EGM96, EGM08 e IGM

Punto	Longitud	Latitud	Altura elipsoidal	EGM96	EGM08	IGM
1	-78.6324899	-2.65280439	2672.01	25.56	24.11	24.53
2	-78.6408702	-2.69961941	2570.93	25.08	23.77	24.26
3	-78.6612885	-2.72192022	2445.96	24.82	23.47	24.02
4	-78.6764943	-2.73385931	2438.42	24.69	23.30	23.87
5	-78.7072123	-2.75485035	2379.45	24.44	22.98	23.58
6	-78.6826165	-2.76422057	2539.43	24.41	23.03	23.62
7	-78.6628414	-2.74868334	2625.35	24.58	23.24	23.83
8	-78.6493329	-2.72790574	2449.78	24.79	23.48	24.04
9	-78.6469351	-2.74566092	2205.66	24.62	23.34	23.94
10	-78.6227694	-2.70078886	2293.36	25.10	23.85	24.34
11	-78.6071322	-2.66173036	2423.69	25.53	24.16	24.59
12	-78.6052589	-2.62923837	2413.75	25.87	24.29	24.69
13	-78.6180227	-2.60259009	2500.53	26.11	24.38	24.72
14	-78.616266	-2.59709076	2495.54	26.17	24.41	24.73
15	-78.612848	-2.59001288	2140.41	26.25	24.45	24.75
16	-78.6214259	-2.56923272	2443.48	26.42	24.60	24.78
17	-78.5920562	-2.58495342	2470.45	26.38	24.48	24.77
18	-78.5684611	-2.59568791	2140.81	26.33	24.41	24.84
19	-78.5559234	-2.61835805	1839.42	26.10	24.31	24.92
20	-78.5268605	-2.62111431	1729.29	26.10	24.21	25.09
21	-78.5082256	-2.59057248	2003.63	26.48	24.30	25.16
22	-78.4922847	-2.58148827	1826.62	26.60	24.30	25.23
23	-78.6400624	-2.68815572	2607.43	25.19	23.86	24.33
24	-78.658086	-2.71833839	2458.21	24.86	23.52	24.06

25	-78.6819431	-2.74252297	2381.08	24.60	23.20	23.78
26	-78.7087909	-2.75274517	2339.28	24.46	22.99	23.59
27	-78.73573	-2.75743372	2242.60	24.36	22.81	23.44
28	-78.7315355	-2.76218975	2265.16	24.33	22.80	23.41
29	-78.7021635	-2.77376019	2387.04	24.30	22.88	23.45
30	-78.6716928	-2.75787544	2624.54	24.48	23.13	23.72
31	-78.6492806	-2.74133631	2357.00	24.66	23.36	23.95
32	-78.6399362	-2.73513053	2337.86	24.73	23.46	24.05
33	-78.6709268	-2.78221394	2599.56	24.26	22.96	23.55
34	-78.6649993	-2.80476186	2384.97	24.07	22.83	23.43
35	-78.6465905	-2.79356331	2451.35	24.17	22.96	23.62
36	-78.64702	-2.76493175	2488.69	24.44	23.17	23.81
37	-78.6392283	-2.7370865	2402.81	24.72	23.45	24.04
38	-78.6180346	-2.70663786	2374.75	25.05	23.83	24.34
39	-78.6135506	-2.67863164	2353.41	25.34	24.05	24.50
40	-78.6005302	-2.65141622	2433.14	25.65	24.22	24.65
41	-78.606358	-2.63280764	2452.82	25.83	24.27	24.68
42	-78.6174533	-2.60856467	2475.40	26.05	24.35	24.71
43	-78.5925998	-2.58557044	2474.14	26.37	24.48	24.77
44	-78.5696439	-2.58110358	2264.80	26.49	24.49	24.83
45	-78.5618074	-2.61360686	1918.43	26.15	24.34	24.88
46	-78.5307493	-2.62542392	1656.95	26.05	24.21	25.07
47	-78.5114187	-2.59611231	1923.72	26.41	24.27	25.15
48	-78.6064301	-2.59163725	2326.60	26.26	24.45	24.75
49	-78.6209155	-2.58703525	2281.99	26.25	24.47	24.75
50	-78.6353764	-2.56900358	2684.00	26.36	24.60	24.81
51	-78.6539383	-2.57120336	2326.20	26.24	24.55	24.86
52	-78.6506351	-2.57753894	2484.80	26.20	24.51	24.82

53	-78.6471563	-2.64087597	2738.25	25.62	24.12	24.56
54	-78.6771016	-2.64031983	2928.92	25.51	24.01	24.55
55	-78.6901408	-2.64046264	2954.79	25.46	23.95	24.55
56	-78.62064	-2.69150656	2305.07	25.20	23.93	24.40
57	-78.6201639	-2.58058328	2493.33	26.32	24.51	24.76
58	-78.6385364	-2.729402	2372.21	24.79	23.52	24.09
59	-78.6671744	-2.75309133	2675.21	24.53	23.18	23.77
60	-78.5991523	-2.58995653	2439.67	26.30	24.46	24.76

Respecto a la anomalía de Bouguer y la anomalía de la gravedad al aire libre fueron obtenidas por medio del modelo geopotencial EGM08. Estas variables se descargaron del mismo sitio web usado para la obtención de la ondulación geoidal del modelo EGM08. Por otro lado, la anomalía de la gravedad isostática se la obtuvo usando el modelo WGM12, ya que este modelo contaba con la anomalía anteriormente mencionada.

Finalmente, por medio del satélite ALOS se obtuvo un modelo digital de elevaciones con una resolución de 12.5 m

Análisis Exploratorio de Datos Espaciales (AED)

Justificación

Dentro del estudio de información georreferenciada, (Henaó, 2019) indica que primero se debe emplear un análisis exploratorio de datos (AED), para identificar localización, variabilidad, forma y observaciones extremas. De acuerdo con (Buzai, 2009), este tipo de análisis se considera una herramienta importante al momento de realizar las primeras aproximaciones al estudio de la estructura de la información espacial en una determinada área de estudio. En cambio, para (Hernández, 2012) la

aplicación de técnicas de análisis exploratorio permite tipificar agrupamientos espaciales, identificar la autocorrelación de los datos e indicar la dirección de las variables en estudio.

Análisis gráfico mediante diagrama de caja

Una de las técnicas más usadas en geoestadística es el análisis gráfico mediante un diagrama de caja, con el objetivo de definir que procedimiento de predicción es el más óptimo para el estudio, según (Henao, 2019) la decisión de emplear cokriging depende de la detección de asociaciones entre las variables. Dentro de las utilidades que ofrece esta técnica se mencionan: identificación de la presencia de valores atípicos, la forma de distribución, cálculo de medidas de variabilidad, medidas de correlación, gráficos de dispersión y tendencia. Estos indicadores, también son de ayuda para saber si los datos se podrán modelar, por ejemplo, si el coeficiente de variación (cv) es mayor al 60%, esto indica que los valores están dispersos, más del 60% es posible que salgan valores atípicos. Por tanto, para hacer un análisis geoestadístico se recomienda que el cv sea menor de 30%.

Una de las técnicas más usadas en geoestadística es el análisis gráfico mediante un diagrama de caja, con el objetivo de definir que procedimiento de predicción es el más óptimo para el estudio, según (Henao, 2019) la decisión de emplear cokriging depende de la detección de asociaciones entre las variables. Dentro de las utilidades que ofrece esta técnica se mencionan: identificación de la presencia de valores atípicos, la forma de distribución, cálculo de medidas de variabilidad, medidas de correlación, gráficos de dispersión y tendencia. Estos indicadores, también son de ayuda para saber si los datos se podrán modelar, por ejemplo, si el coeficiente de variación (cv) es mayor al 60%, esto indica que los valores están dispersos, más del 60% es posible que salgan valores atípicos. Por tanto, para hacer un análisis geoestadístico se recomienda que el cv sea menor de 30%.

Los datos de ondulación geoidal real usados para la aplicación de los dos modelos de predicción indicaron los siguientes resultados: un coeficiente de variación del 2.12%, y la presencia de un valor atípico, tal como se indica en la tabla 3.

Tabla 3

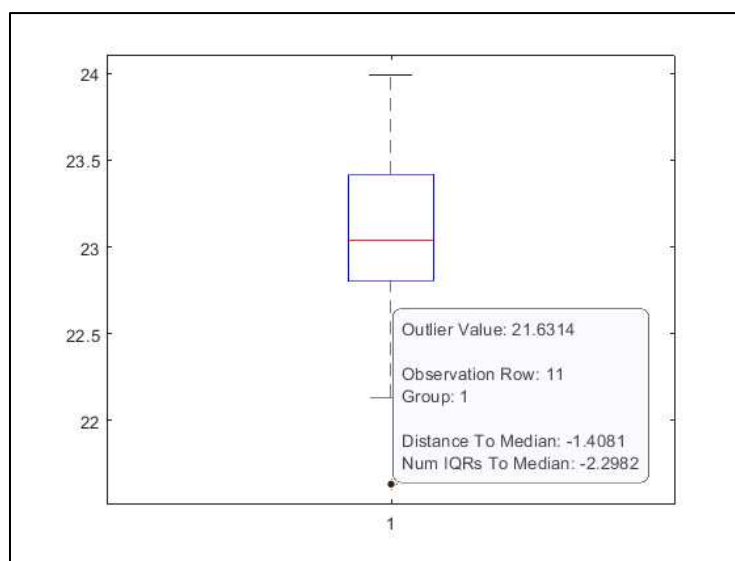
Resumen de los estadístico descriptivos de la ondulación geoidal

Media	23.05801333
Error típico	0.063210359
Mediana	23.0395
Desviación estándar	0.489625338
Varianza de la muestra	0.239732972
Curtosis	0.224299442
Coeficiente de asimetría	-0.21682411
Rango	2.3594
Mínimo	21.6314
Máximo	23.9908
Suma	1383.4808
Cuenta	60
Mayor (1)	23.9908
Menor (1)	21.6314
Nivel de confianza (95.0%)	0.126483637
Límite inferior	21.95185
Límite superior	24.24085
Valores atípicos	21.6314
Coeficiente de variación	2.12%

En la figura 11 se muestra un gráfico del diagrama de caja hecho en Matlab para los datos de ondulación geoidal real, donde el único valor atípico encontrado fue el punto PRCP-11 con una ondulación geoidal de 21.6314 metros, el cual se encuentra bajo el límite inferior de 21.95185 metros.

Figura 11

Diagrama de caja para datos iniciales

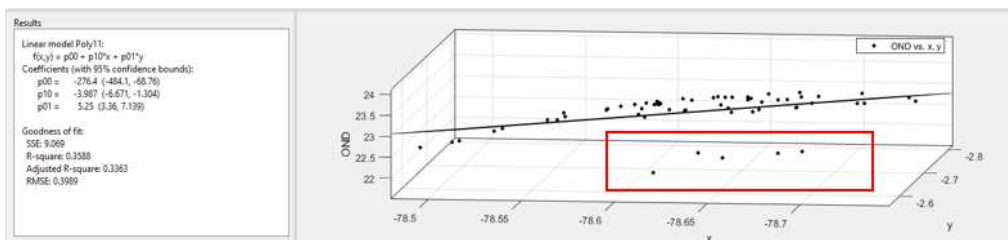


Análisis gráfico por medio de un modelo de tendencia y de dispersión

Para el modelo de tendencia se procedió con la aplicación de un modelo polinomial de primer grado (modelo lineal) usando la herramienta Curve Fitting dentro del software Matlab, el cual indica la tendencia de los datos y de esta manera se pudo observar con mayor facilidad los datos atípicos, dichos datos harían que el error cuadrático medio de los modelos aumente. En la figura 12 se identificó un total de 5 datos que estaban demasiado dispersos del modelo lineal, la presencia de estos valores atípicos puede ser debido a una mala ejecución de toma de medidas en campo, generando así mucha diferencia.

Figura 12

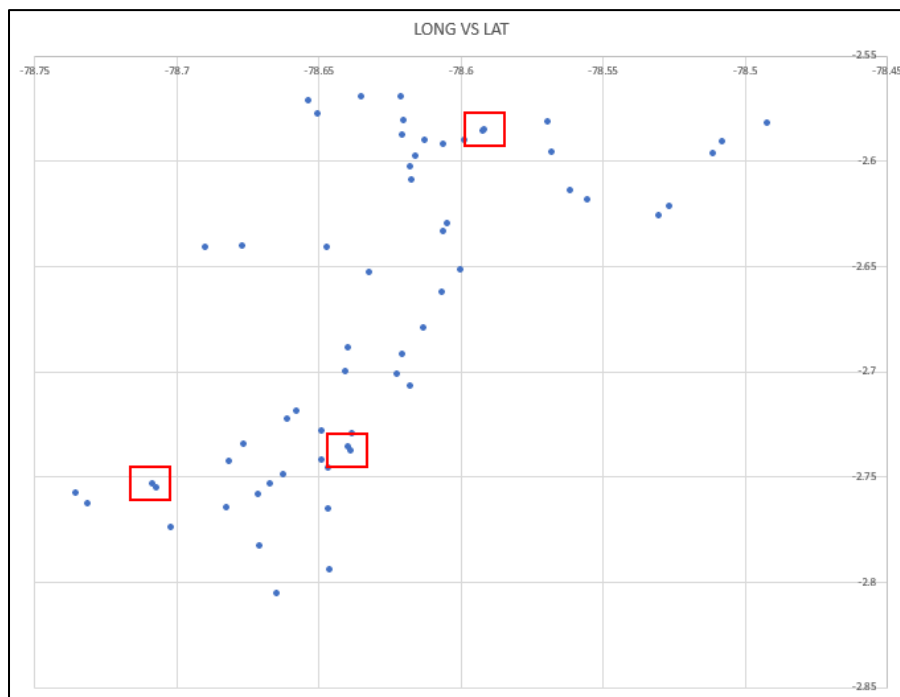
Modelo polinomial de grado 1



Por otra parte, con la ayuda del software Excel se creó un gráfico de dispersión de las coordenadas longitud vs latitud, donde se identificaron 4 pares de datos que tenían una distancia muy corta entre ellos, tal como se observa en la figura13.

Figura 13

Gráfico de dispersión de las posiciones de los puntos de muestreo



Depuración de los datos y Estacionariedad

Se vio la necesidad de realizar una depuración de los 60 datos finales a usar en el modelo. Gracias a los análisis gráficos anteriormente realizados se tomó la decisión de omitir 5 datos, que corresponden a los valores atípicos, por otro lado, para poder aplicar una validación del modelo de predicción se seleccionaron 4 datos al azar de los 8 que tenían distancias muy cortas entre ellos, y los 4 restantes se incluyeron dentro del modelo. De no aplicarse este último cambio el h promedio se vería afectado por estas distancias cortas haciendo que disminuya y sea un valor menos representativo para las diferentes distancias entre los puntos.

De forma visual se observa en la figura 14 y la figura 15 cómo se comporta la ondulación geoidal a medida que aumenta la longitud y la latitud respectivamente, claramente se trata de un comportamiento estacionario, puesto que la varianza se mantiene constante durante todo el tramo de la zona de estudio, además se puede observar que hay mayor tendencia en el eje Y es decir en la latitud.

Figura 14

Gráfico de dispersión de la coordenada Longitud vs Ondulación geoidal real

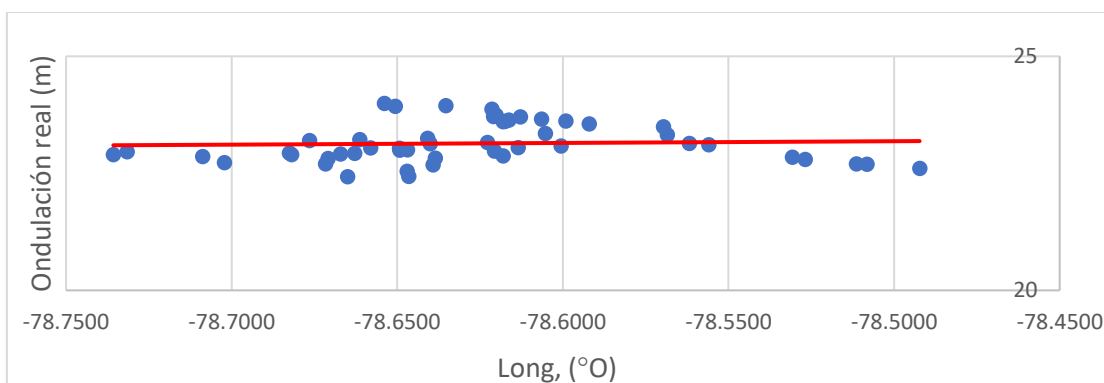
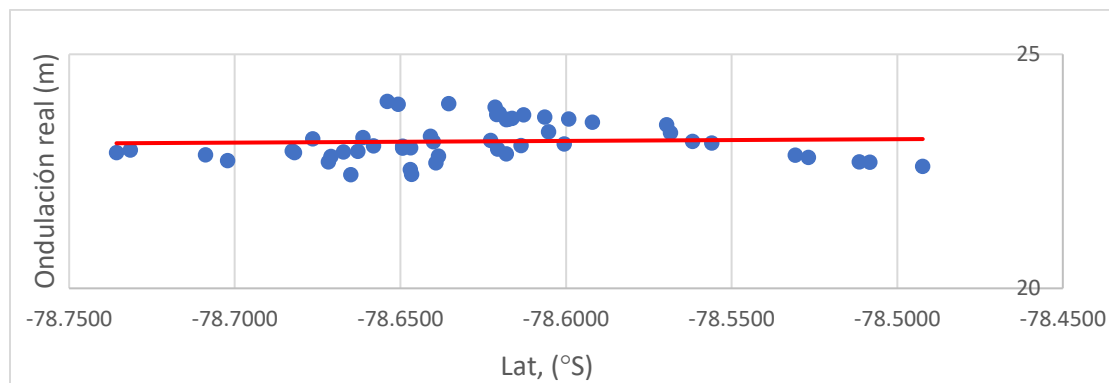


Figura 15

Gráfico de dispersión de la coordenada Latitud vs Ondulación geoidal real



Parámetros usados en la técnica Cokriging ordinario

Para la aplicación de la técnica de Cokriging se contó con un total de 51 datos muestreados tanto de alturas elipsoidales como niveladas, las mismas que sirvieron para calcular las ondulaciones geoidales reales. Este conjunto de datos fue considerado como la variable principal del modelo cokriging, mientras que para la variable auxiliar se tomaron en cuenta varias opciones.

La selección de la variable auxiliar útil para este estudio dependió del grado de correlación calculado por medio del coeficiente de Pearson (R^2) el cual debe ser mayor a 0.6, en la tabla 4 se observa que el modelo geoidal con mejor coeficiente fue el EMG08 (resolución 2.5'x2.5') mostrando un R^2 de 0.709, el cual es un valor aceptable para este estudio.

Tabla 4*Análisis de correlación de posibles variables auxiliares*

Modelo geoidal	Coefficiente de Pearson (R²)
EGM96	0.64242932
EGM08	0.709115107
IGM	0.507635907
Anomalía de gravedad de Aire libre	-0.216815594
Anomalía de gravedad de Bouguer	-0.338309006
Anomalía de gravedad Isostática	-0.300117756
DEM ALOS	0.223515781

Una vez calculada la matriz de distancias entre cada uno de los puntos de muestreo y su h promedio, el siguiente paso consiste en definir el número de intervalos que conformarán el semivariograma experimental, este número de intervalos depende de la cantidad de datos que se disponga, para este caso el total de datos con los que se trabajó fue menor a 100 por tanto se aplicaron 8 intervalos.

A partir de este número de intervalos lo siguiente es calcular un valor de h específico o h óptimo que se define como el vector de separación y cuyo propósito es que el número de pares proporcionado por el h promedio para los diferentes intervalos sea el más homogéneo. El incremento usado para variar el h promedio fue de 0.0001 m, este valor se lo escogió a fin de que las desviaciones estándar sean significativas y dé como resultado un h óptimo con la menor desviación. Dentro de este proceso se seleccionaron 200 valores sobre y bajo el h promedio obteniendo un valor de h óptimo igual a 0.02894 m con una desviación estándar de 22.784, no obstante, se escogieron valores cercanos a este h para poder verificar cual valor se ajusta mejor al modelo, tal como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5

Posibles valores de h óptimo para el modelo

h óptimo (°)	Desviación estándar
0.02894	22.784315
0.02904	23.41512
0.02914	23.790379
0.02924	23.963887
0.02934	24.726721
0.02944	23.969847
0.02954	24.447831
0.02964	24.778663

Después de obtener el Semivariograma experimental se aplicó un gráfico de dispersión para poder hallar los parámetros iniciales ('Nugget', 'Sill' y 'Range') del semivariograma teórico, los cuales se presentan a continuación en las figuras 16, 17 y 18.

Figura 16

Semivariograma experimental para la variable principal

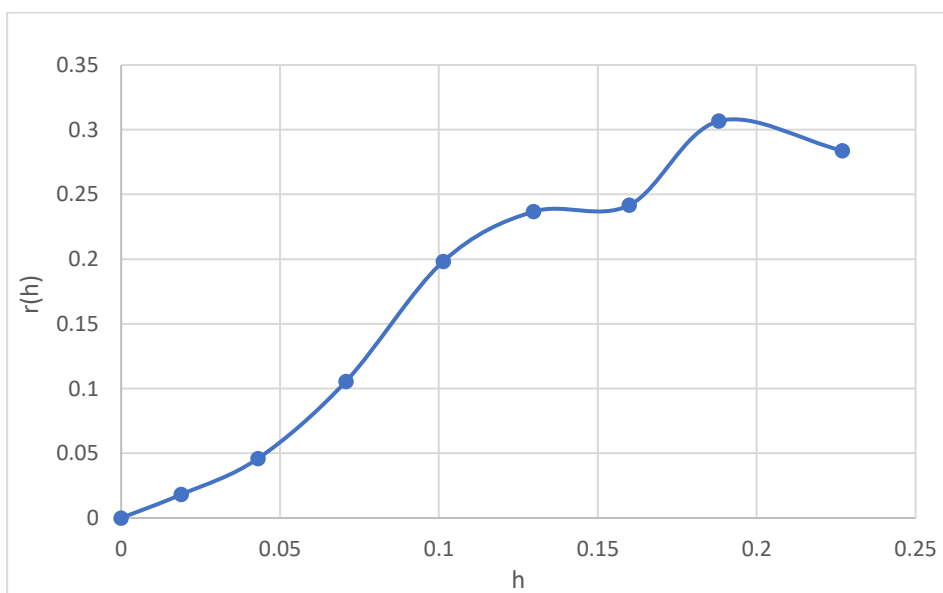
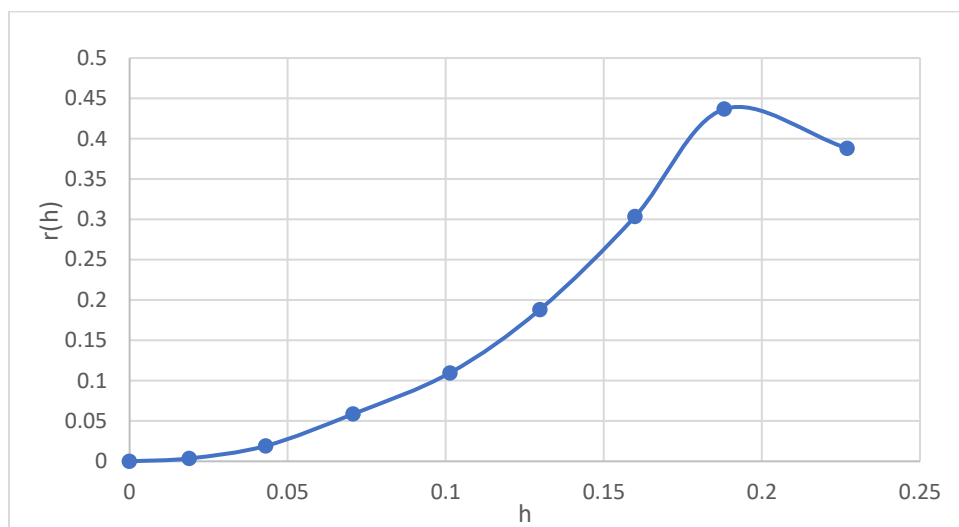
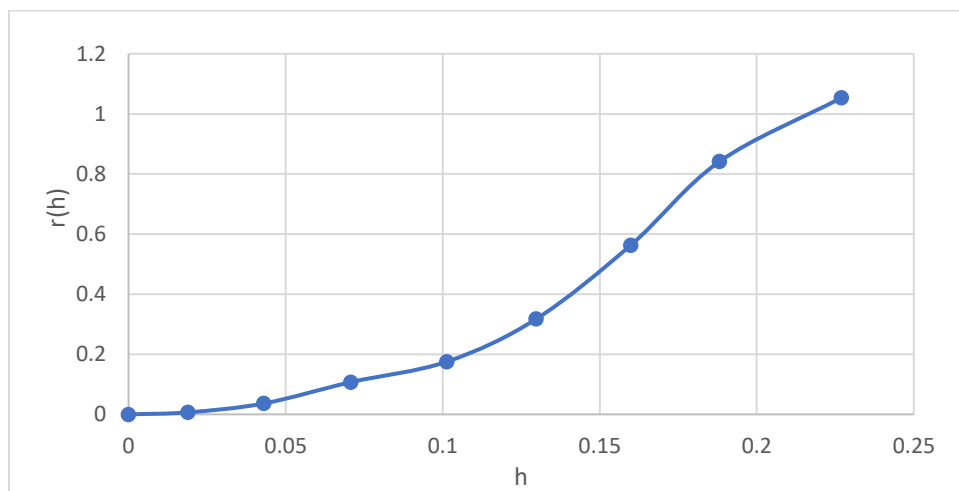


Figura 17

Semivariograma experimental para la variable cruzada

**Figura 18**

Semivariograma experimental para la variable auxiliar



En base a estos parámetros definidos de acuerdo con la gráfica de dispersión se procedió con el cálculo del semivariograma teórico, formado mediante el ajuste de las funciones teóricas que soportan la

construcción de este. Para el mismo se consideraron 4 de los modelos más conocidos que son: modelo gaussiano, modelo exponencial, modelo esférico y modelo estable.

A continuación, se aplicó la función matemática de cada uno de estos modelos usando los parámetros anteriormente obtenidos (C_0 , C_1 , a), y se calcularon sus errores cuadráticos medios respectivamente. Para mejorar los parámetros del modelo, se hizo un ajuste por medio de la herramienta *solver*. En total se modelaron tres semivariogramas, dos simples (uno para la variable principal y otro para la variable auxiliar) y un cruzado, en las figuras 19, 20 y 21 se representa cada uno de los modelos teóricos ajustados y en las tablas 6, 7 y 8 sus coeficientes calculados.

Figura 19

Semivariogramas teóricos ajustados para la variable principal

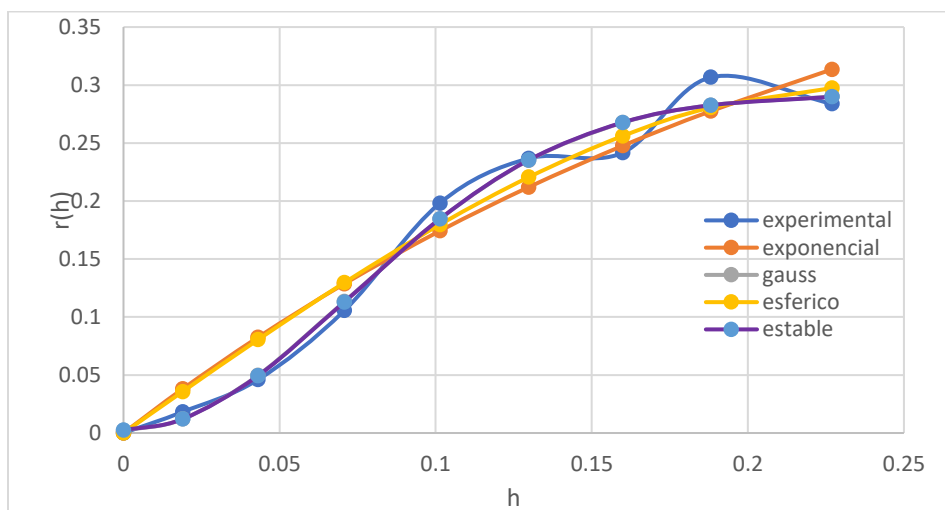


Tabla 6

Coefficientes de Semivariograma teórico de la variable principal

Aplicando SOLVER

S. EXPONEN

S. GAUSSIANO

S. ESFERICO

S. ESTABLE

NUGGET	0	0.00213331	0	0.002444352
SILL	0.53443631	0.2899674	0.298168704	0.289224436
RANGO	0.77066853	0.17628656	0.236867314	0.175313627
Angulo teta				2.016348202

Figura 20

Semivariogramas teóricos ajustados para la variable cruzada

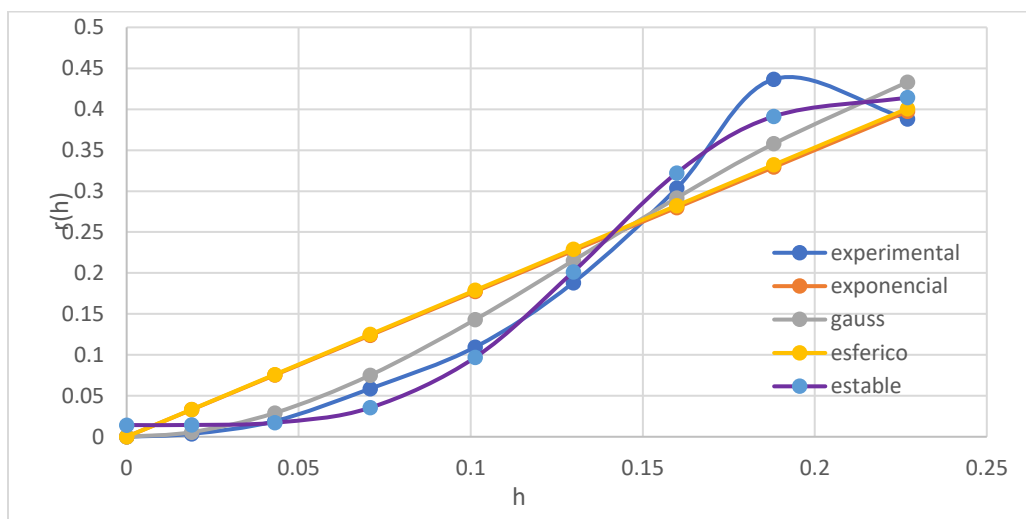


Tabla 7

Coefficientes de Semivariograma teórico de la variable cruzada

Aplicando SOLVER				
	S. EXPONENCIAL	S. GAUSSIANO	S. ESFERICO	S. ESTABLE
NUGGET	0	0	0	0.014332114
SILL	93431530.6	0.561191736	26.27561143	0.400908715
RANGO	160107456	0.323326668	22.31629383	0.191053299
Angulo teta				4.042200552

Figura 21

Semivariogramas teóricos ajustados para la variable auxiliar

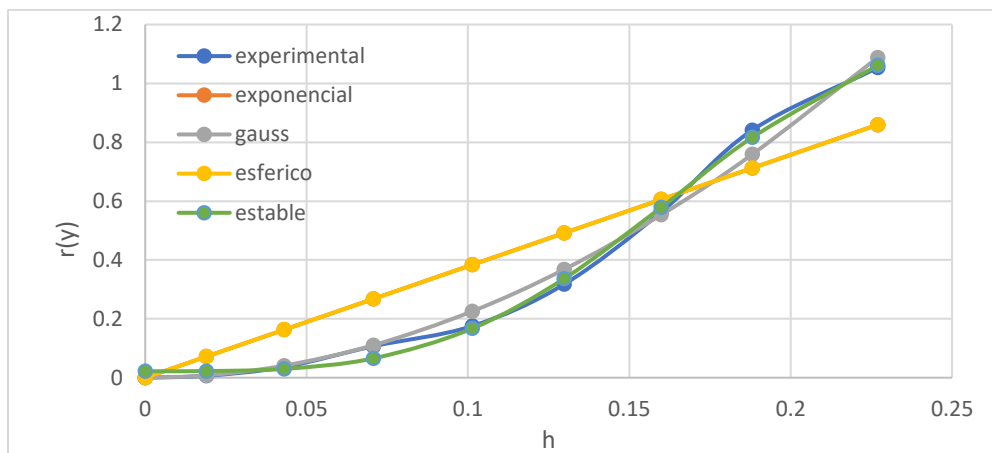


Tabla 8

Coefficientes de Semivariograma teórico de la variable auxiliar

Aplicando SOLVER				
	S. EXPONENCIAL	S. GAUSSIANO	S. ESFERICO	S. ESTABLE
NUGGET	0	0	0	0.022140789
SILL	106625629	11.3074767	515.7055723	1.173286625
RANGO	84462734.9	1.23608084	204.2771155	0.24923549
Angulo teta				3.469436445

Tal como se observó en la tabla 7 y tabla 8, a pesar de que el modelo estable no cumplió con la restricción del parámetro teta al ser superior a 2 para el caso de la variable auxiliar y cruzada se lo va a tomar en cuenta para el estudio, hasta verificar si su parámetro estadístico RMSE resulta bueno en comparación a los demás modelos, esto se confirmará en el capítulo de análisis y discusión de resultados.

El siguiente paso fue construir una matriz compuesta por los semivariogramas simples y cruzados entre las muestras, además se formaron los vectores columna de distancias entre cada uno de los puntos

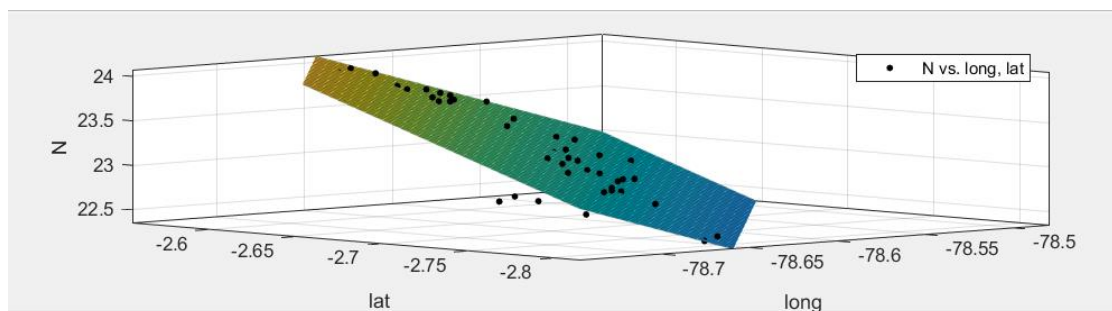
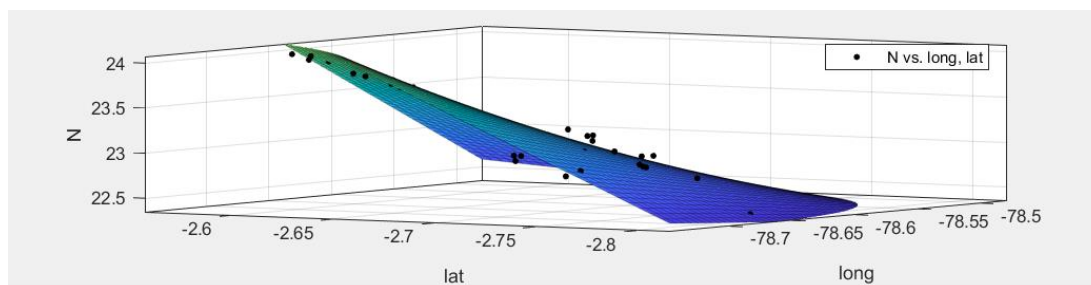
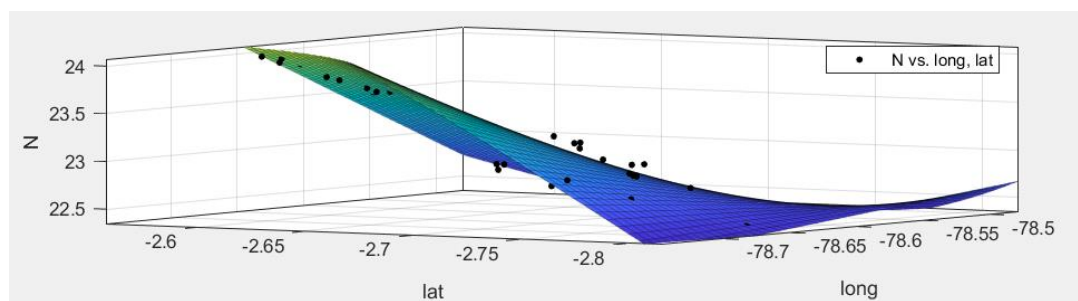
a predecir y las muestras para después calcular los vectores columna γ_{i0} tomando en cuenta los parámetros usados en la matriz compuesta.

La matriz de pesos surge de la multiplicación de la inversa de la matriz compuesta por el vector γ_{i0} , es importante que la sumatoria de los pesos de dicho vector resultante sea igual a 1, el valor a predecir se obtiene de la sumatoria de todos los pesos por sus respectivos valores muestreados de la variable principal, para fines de ingeniería el intervalo de confianza de la predicción se trabajó con un nivel de confianza al 95%.

Parámetros usados en la técnica Mínimos Cuadrados Colocación

Para la aplicación de la técnica de Mínimos Cuadrados Colocación se usaron los mismos datos empleados anteriormente en la técnica de Cokriging, y la misma metodología para hallar el h óptimo.

Con la base de datos de entrada y por medio del software Matlab se procedió a aplicar distintos modelos funcionales para hallar las mejores superficies de tendencia. Con la herramienta curve fitting se pudo reconocer 3 modelos funcionales los cuales fueron: modelo polinomial de primer grado (x, y) , modelo polinomial de segundo grado (x, y^2) y modelo polinomial de tercer grado (x, y^3) , el resto de modelos se los descartó puesto que, en el software al aumentar el grado del polinomio, la ecuación resultaba mal condicionada (ecuaciones cuya leve modificación en sus coeficientes provoca una gran diferencia en sus soluciones). Cabe recalcar que se aplicaron modelos polinomiales, puesto que los datos de ondulación geoidal forman una superficie suave. A continuación, en la figura 22, figura 23 y figura 24 se presentan las superficies generadas con los modelos de grados de polinomios usados en el presente estudio.

Figura 22*Modelo matemático x, y* **Figura 23***Modelo matemático x, y^2* **Figura 24***Modelo matemático x, y^3* 

En la siguiente tabla 9 se resume los valores de R^2 y RMSE de las 3 funciones matemáticas, en donde observa un coeficiente de correlación muy bueno para cada uno de los casos.

Tabla 9

Estadísticos de regresión de las diferentes funciones polinomiales

Función matemática	Grado	RMSE	R^2
$F(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y$	X1 Y1	0.1377	0.8952
$F(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{11}xy + p_{02}y^2$	X1 Y2	0.1017	0.9452
$F(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3$	X1 Y3	0.1021	0.9472

Con la función matemática de cada modelo, se empleó una regresión lineal para obtener los coeficientes de la ecuación, el vector de residuos y el vector de pronóstico L. A continuación, en la tabla 10, tabla 11 y tabla 12 se presentan los coeficientes de las diferentes funciones de tendencia, obtenidos con mayor precisión gracias a la herramienta *regresión* del software Excel.

Tabla 10

Coefficientes de la función polinomial de grado X1 Y1

Coefficientes	
Intercepción	-481.947286236648
X	-6.664134498988
Y	7.067921887656

Tabla 11

Coefficientes de la función polinomial de grado X1 Y2

Coefficientes	
Intercepción	-7108.4416023105
X	-90.8971590776
Y	-2501.9370606061
X*Y	-31.8847372968
Y ²	-0.2465057417

Tabla 12

Coefficientes de la función polinomial de grado X1 Y3

Coefficientes	
Intercepción	99032.564888784
X	1276.455279738
Y	76503.605999579
x*y	992.462346431
y ²	14495.993847014
x*y ²	191.664250568
y ³	-71.420233507

Para la formación de la matriz de covarianza empírica, se dividió los intervalos totales de distancias en intervalos Δd , obtenido a partir del h óptimo dividido entre 2. Con la matriz de covarianza empírica se generó un gráfico de dispersión de datos, para agregar una línea de tendencia usando modelos polinomiales de distintos grados, donde solo se seleccionaron aquellos cuyos coeficientes de correlación sean los más cercanos a uno y la diferencia entre ellos resulten significativas. Así se realizó la prueba con el modelo polinomial de segundo, tercer, cuarto orden. Después se usó la herramienta *regresión* con las ecuaciones de cada modelo obtenidas, a fin de obtener una mayor precisión en los coeficientes de cada ecuación.

En las siguientes figuras se presentan los mejores modelos de covarianza los cuales indican su gráfico de dispersión, función matemática y su coeficiente R^2 .

Figura 25

Función para la covarianza de grado 2 de la superficie de tendencia de grado X1 Y1

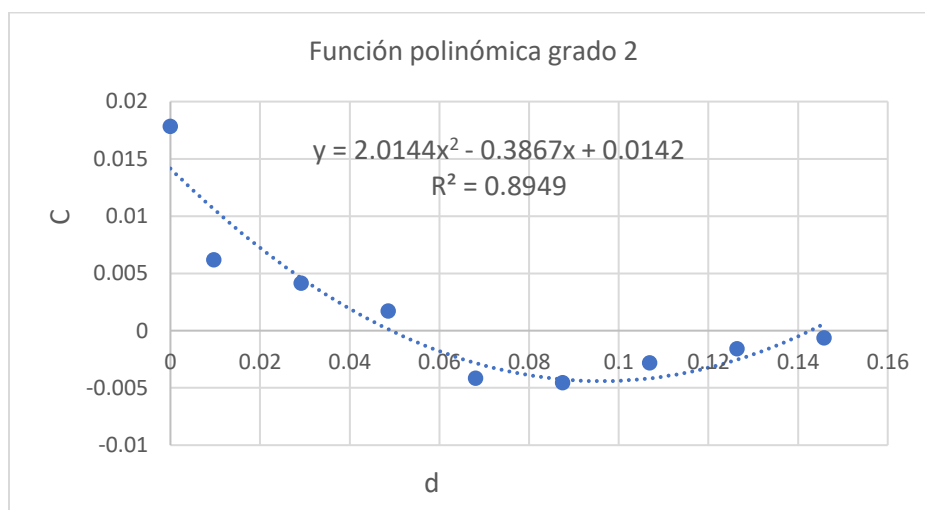


Figura 26

Función para la covarianza de grado 3 de la superficie de tendencia de grado X1 Y1

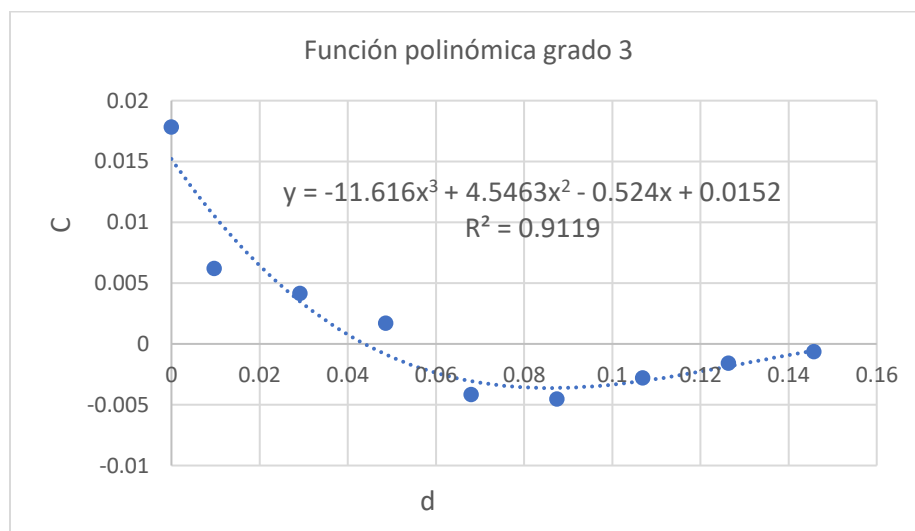
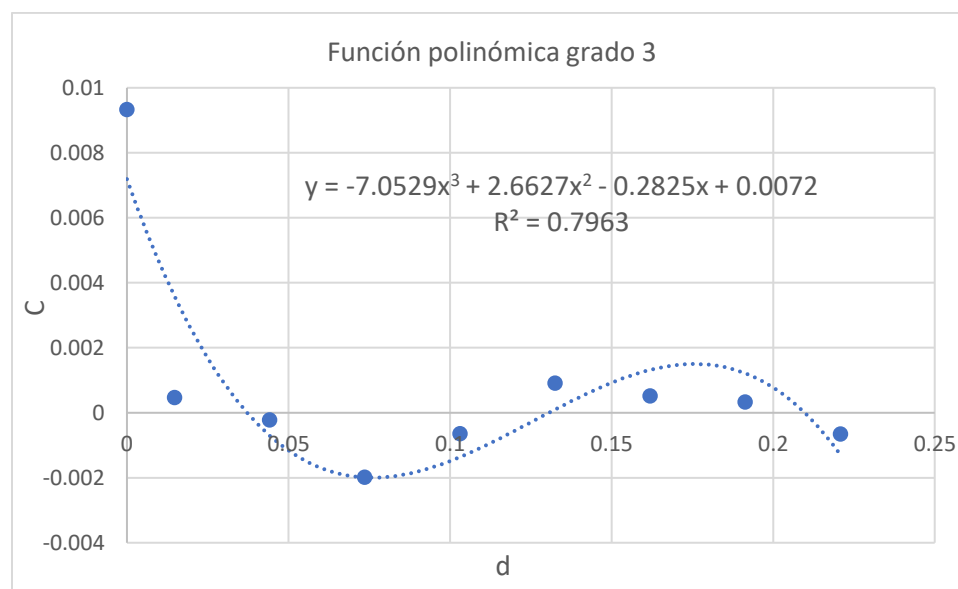


Figura 27

Función para la covarianza de grado 3 de la superficie de tendencia de grado X1 Y2

**Figura 28**

Función para la covarianza de grado 4 de la superficie de tendencia de grado X1 Y2

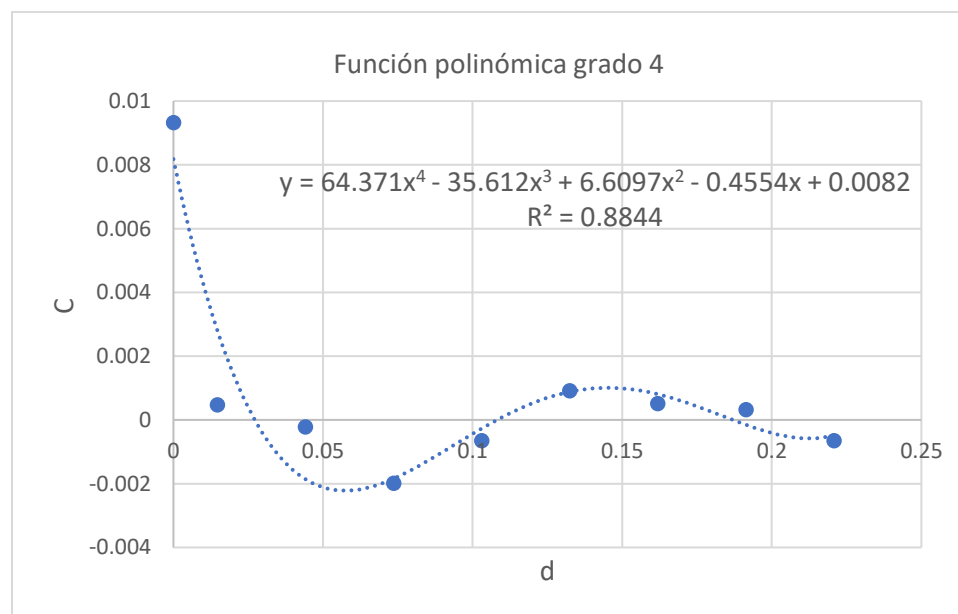
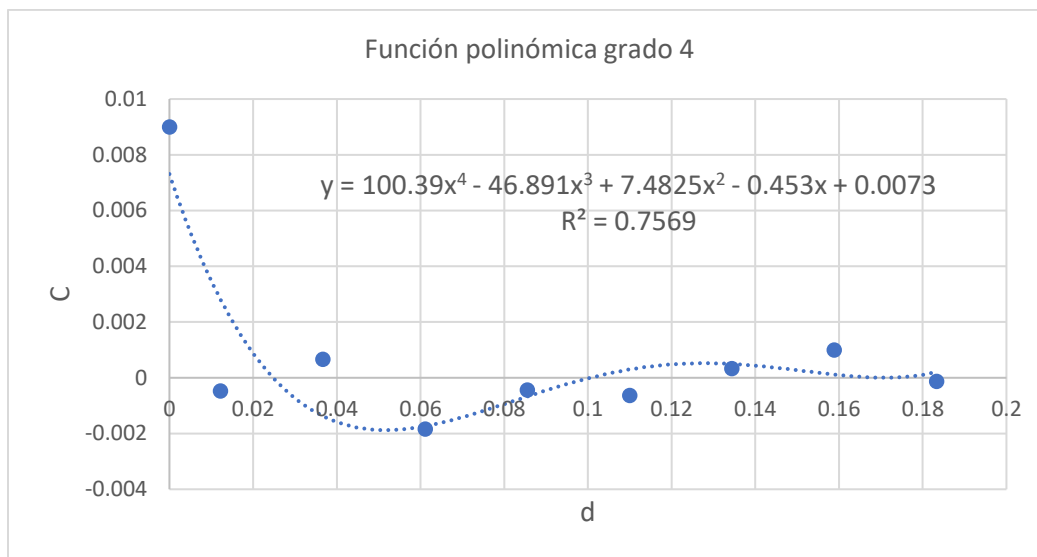


Figura 29

Función para la covarianza de grado 4 de la superficie de tendencia de grado X1 Y3



Finalmente, para la generación de la matriz de ruido, se usó el valor de 0.0001 m. Dicho valor dependió de la precisión de los datos, en este caso la precisión de nivelación y GPS llegan hasta la décima del milímetro. Sin embargo, se hicieron pruebas con un ruido de 0.001 m, 0.01 m y 0.1m con el fin de corroborar si mejora la predicción del modelo.

Para realizar todos los cálculos, los ajustes, la aplicación de la metodología de mínimos cuadrados colocación y la validación de los resultados obtenidos, se automatizó todo proceso mediante el desarrollo de scripts creados en el software Matlab en conjunto con Excel.

Métodos de validación

Validación cruzada

Existen varias técnicas que permiten validar los modelos de predicción, un ejemplo de ellos es el comparar los valores por parte de un modelo teórico con los valores obtenidos por parte del modelo creado, otra técnica es la validación cruzada el mismo que fue aplicado en este proyecto.

Este método consistió en separar el conjunto total de datos en dos subconjuntos, un conjunto es destinado para el entrenamiento del modelo y el otro para realizar la validación. Con el modelo creado se generan datos de salidas los cuales fueron comparados con los datos reservados para el test. Para dar una validez del modelo, es necesario el cálculo de estadísticos, el RMSE fue el estadístico implementado para la validación, por lo que el modelo que brinde un RMSE menor será el modelo más adecuado para el cálculo de la ondulación geoidal.

Para el caso de cokriging primero se hicieron pruebas de validación cruzada usando un h óptimo de 0.2994 m el cual indicaba la menor desviación estándar, en donde se comparó el RMSE de validación cruzada para cada modelo de semivariograma (gaussiano, exponencial, estable, esférico), esto se realizó a fin de saber cuál es el mejor modelo que mejor se ajusta al modelo experimental. Una vez encontrado el mejor modelo de semivariograma se procedió a variar su h óptimo ligeramente hasta encontrar el menor RMSE usando nuevamente validación cruzada

Para el caso de mínimos cuadrados colocación, se aplicó la validación cruzada para las diferentes funciones de tendencia con sus respectivas funciones de covarianza, de tal forma que se pueda identificar cuales presentan los menores valores de RMSE. Una vez escogidos los mejores modelos mediante validación cruzada, se procedió a volver a hacer pruebas, pero con los datos tomados en campo, donde se fue variando el h óptimo y el valor del ruido hasta encontrar un nuevo valor de RMSE mucho más significativo que el de validación cruzada.

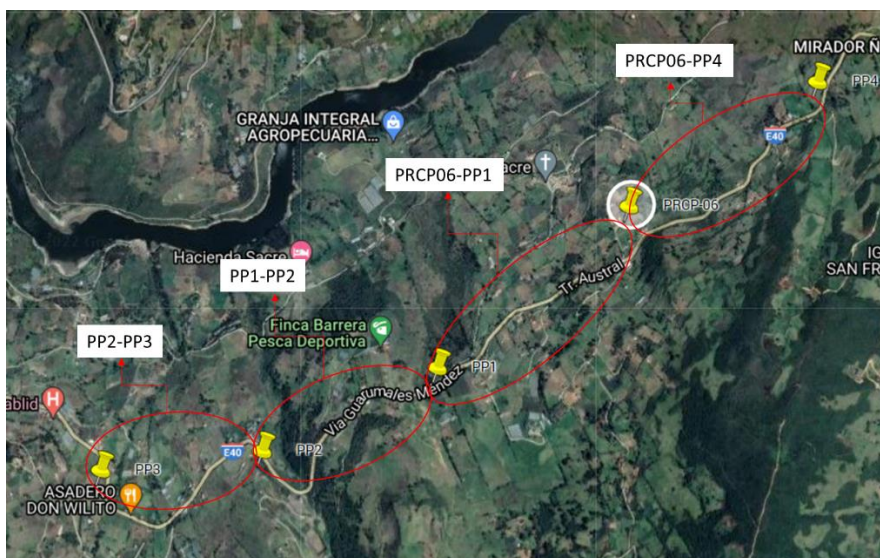
Metodología para validación de campo

La validación de campo es una parte fundamental para determinar qué tan bien se ajusta un modelo a la realidad, puesto que los datos que serán usados para comprobación son tomados directamente de la zona de estudio. Para este proceso se tomó la altura nivelada y la altura elipsoidal.

Toma de la altura nivelada: En primer lugar, se determinó una placa de nivelación de partida la cual corresponde al punto PRCP-06 cuya altura nivelada es de 2516.4904 m, a partir de esta cota conocida se ubicaron puntos a una distancia de al menos 500 m de separación entre ellos. Una vez planificado los puntos para comprobación, se realizó pequeños circuitos cerrados y se aplicó la metodología de nivelación compuesta (línea doble) explicado en el capítulo II. En la figura 30 se muestra de manera gráfica la planificación de la toma de datos en campo.

Figura 30

Circuitos de nivelación



A continuación, en la tabla 13 se presentan los datos obtenidos de la nivelación geométrica, dichos datos fueron tomados a través del nivel digital Leica DNA10 y descargados por medio del software Leica Geo Office versión 8.4.

Tabla 13*Alturas niveladas*

PUNTOS	ALTURA NIVELADA (m)
PP1	2470.964
PP2	2424.4177
PP4	2570.1744
BM1	2368.7049
BM2	2517.8649
BM3	2496.8382

En la toma de datos se adicionaron puntos de liga con el fin de acortar las distancias entre cada punto y también como otra herramienta de comprobación.

Toma de la altura elipsoidal: Para la toma de la altura elipsoidal se realizó posicionamiento GNSS en cada uno de los puntos indicados en la toma de altura nivelada. Se aplicó el método faststatic a los móviles con una duración de 30 minutos por punto y un intervalo de grabación de 5 segundos, PDOP de 6 y una máscara de elevación de 10 grados.

Para el postproceso de los puntos se usó el software Trimble bussines center, a continuación, en la tabla 14 se muestra el resumen del procesamiento de las líneas base de cada punto mientras que en la tabla 15 se presentan las coordenadas geodésicas de cada punto de rastreo

Tabla 14*Resumen de precisiones de procesamiento de líneas base*

Observación	De	A	Tipo de solución	Prec. H. (Metro)	Prec. V. (Metro)	Aci. geod.	Dist. elip (Metro)	Δ Altura (Metro)
PRCP07 --- PRCP-06 (B1)	PRCP07	PRCP-06	Fija	0.003	0.011	231°59'49"	2790.440	-85.914
PRCP07 --- PP4 (B7)	PRCP07	PP4	Fija	0.005	0.009	230°23'05"	1836.493	-28.826
PRCP-06 --- BM2 (B15)	PRCP-06	BM2	Fija	0.003	0.006	159°24'01"	70.383	1.368
PRCP-06 --- PP2 (B4)	PRCP-06	PP2	Fija	0.004	0.006	236°32'33"	1814.939	-92.061
PRCP-06 --- PP1 (B9)	PRCP-06	PP1	Fija	0.006	0.008	231°18'52"	956.495	-45.513
PRCP-06 --- BM3 (B2)	PRCP-06	BM3	Fija	0.004	0.007	226°46'10"	434.217	-19.632
PRCP-06 --- PP4 (B6)	PRCP-06	PP4	Fija	0.004	0.008	55°05'47"	956.073	57.113
PRCP07 --- BM2 (B16)	PRCP07	BM2	Fija	0.005	0.019	230°37'43"	2812.293	-84.563
PRCP07 --- BM1 (B13)	PRCP07	BM1	Fija	0.012	0.019	235°28'44"	5184.958	-233.693
PRCP07 --- PP2 (B5)	PRCP07	PP2	Fija	0.011	0.014	233°47'16"	4601.918	-177.977
PRCP07 --- PP1 (B10)	PRCP07	PP1	Fija	0.013	0.018	231°49'21"	3746.886	-131.434
PRCP07 --- BM3 (B3)	PRCP07	BM3	Fija	0.011	0.019	231°17'37"	3223.094	-105.561
PRCP-06 --- BM1 (B12)	PRCP-06	BM1	Fija	0.012	0.020	239°31'10"	2405.643	-147.767

Tabla 15*Coordenadas geodésicas obtenidas del postproceso*

ID	Este (m)	Norte (m)	Elevación (m)
BM1	755562.6948	9693000.1216	2391.661
BM2	757663.7762	9694150.8626	2540.797
BM3	757322.0461	9693919.9033	2519.796
PP1	756891.0225	9693620.1783	2493.916
PP2	756122.3515	9693218.7586	2447.367
PP4	758424.6189	9694762.5820	2596.527
PRCP07	759842.2511	9695931.3142	2625.354
PRCP-06	757639.1312	9694216.8215	2539.428

Capítulo IV Análisis y discusión de resultados

Para la selección del modelo final de predicción de ondulación geoidal, fue necesario hacer varias pruebas tanto en cokriging como en mínimos cuadrados, para después ser comparados con dos indicadores estadísticos de precisión. En este capítulo se analizarán los resultados de RMSE de validación cruzada y RSR de validación de campo, donde se dará mayor peso a los resultados de campo ya que se están comparando con datos reales. Finalmente se discutirán los criterios tomados en cuenta para la selección del modelo geoidal frente a criterios que han sido considerados por otros autores respecto al modelamiento de alturas geoidales con cokriging, y otras técnicas geoestadísticas.

Como se mencionó anteriormente uno de los estadísticos considerados para la selección del modelo más óptimo es el RMSE ya que la raíz del error cuadrático medio debe tener los valores más bajos puesto que la técnica cokriging reduce los errores por lo que se consideraría un estadístico de buena precisión, no obstante se consideró otro estadístico adicional denominado RSR, este estadístico es una razón entre el RMSE y la desviación estándar de las observaciones por lo que se considera más robusto al momento de seleccionar el modelo más adecuado. El modelo cuyo coeficiente RSR sea más cercano a cero será el modelo correcto para la zona de estudio. (Cruz, Villaseñor, López, & Ortiz, 2013).

Resultados de cokriging ordinario

Validación cruzada para cokriging ordinario

Este tipo de validación fue de gran utilidad para tener una primera aproximación a los semivariogramas teóricos que mejor se ajustan a los semivariogramas experimentales, tanto para la variable principal (ondulación geoidal real), variable secundaria (ondulación geoidal del modelo EGM08) y la cruzada, usando un h óptimo de 0.02894 m con desviación estándar 22.784. Adicionalmente se tomó en cuenta el RMSE entre los valores de h y $r(h)$ de los modelos teóricos frente a los modelos experimentales, dando como resultado las siguientes tablas:

Tabla 16

RMSE entre los valores de h y $r(h)$ de los modelos de semivariograma teóricos y experimentales

Tipo de variable	Semivariograma Teórico	RMSE (S Experimental - S. Teórico)	RMSE min
Variable principal	Exponencial	0.0263	0.0155
	Gaussiano	0.0165	
	Esférico	0.0222	
	Estable	0.0155	
Variable cruzada	Exponencial	0.0609	0.0287
	Gaussiano	0.0419	
	Esférico	0.0591	
	Estable	0.0287	
Variable secundaria	Exponencial	0.1397	0.0232
	Gaussiano	0.0439	
	Esférico	0.1391	
	Estable	0.0232	

Tabla 17

RMSE entre la ondulación real vs la ondulación predicha usando validación cruzada

Semivariograma Teórico	RMS Validación cruzada
Exponencial	0.1098
Gaussiano	92.7632
Esférico	0.1079
Estable	0.4309

En la tabla 16 se puede observar que el modelo estable presenta un valor de RMSE min para todos los casos, sin embargo, en la validación cruzada su rms no es tan bajo en comparación a los modelos

exponencial y gaussiano, por otro lado, el modelo gaussiano presenta un mal ajuste puesto que su RMSE es demasiado alto por ende será descartado para los análisis siguientes usando validación de campo.

Para analizar la bondad de los modelos de prueba se realizaron gráficos de dispersión entre los valores reales de ondulación geoidal y los estimados con validación cruzada para los distintos casos, tal como se cómo se observan en las siguientes figuras:

Figura 31

Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo exponencial

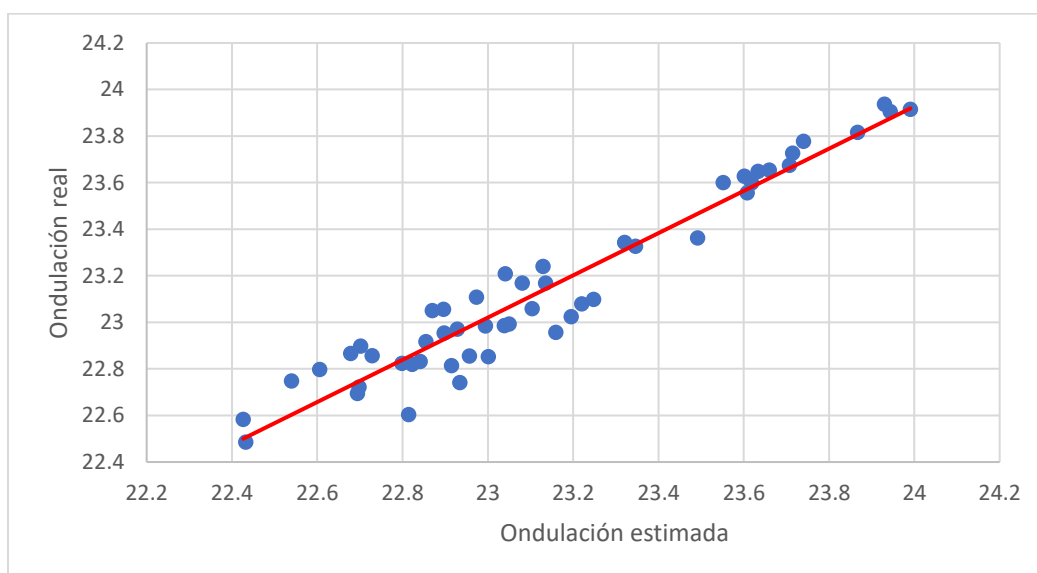
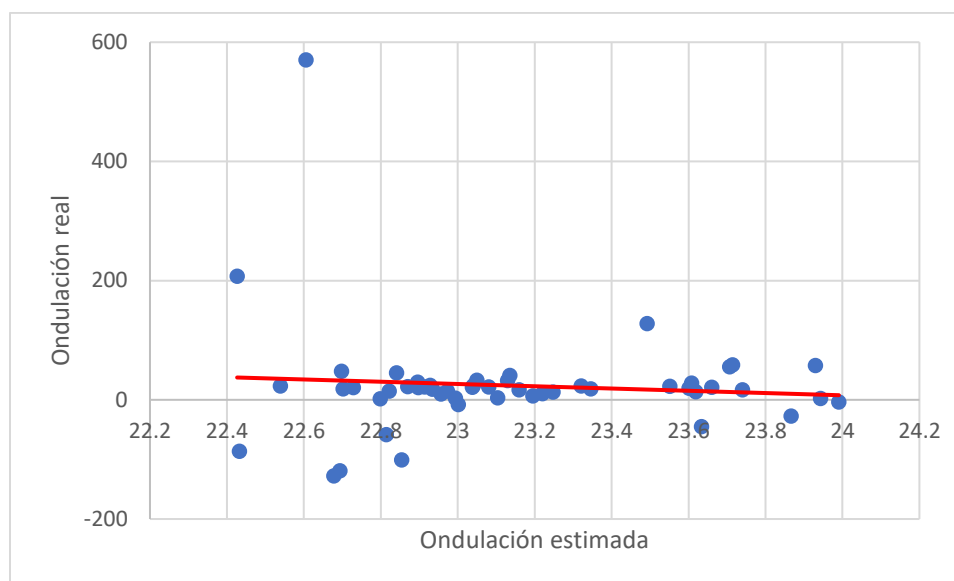


Figura 32

Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo gaussiano

**Figura 33**

Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo esférico

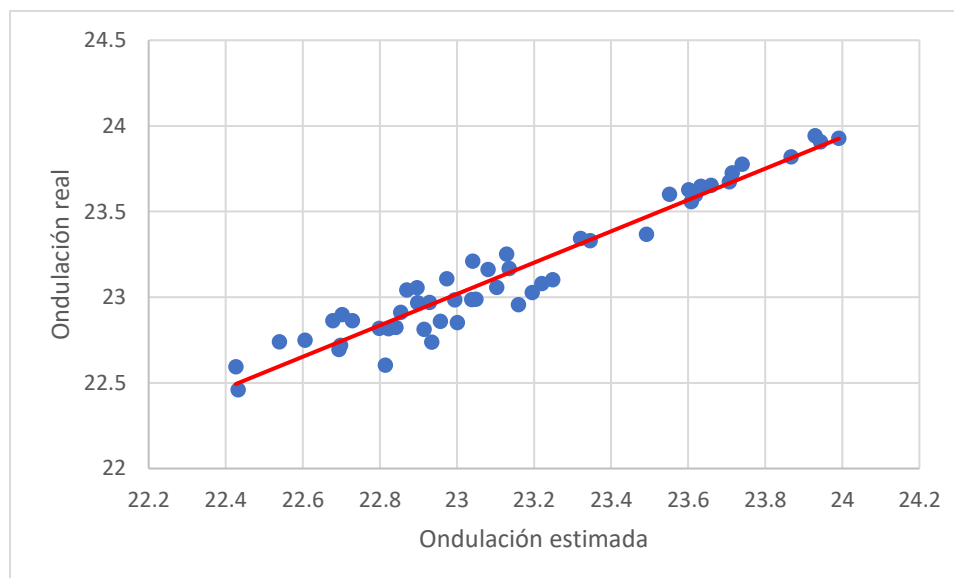
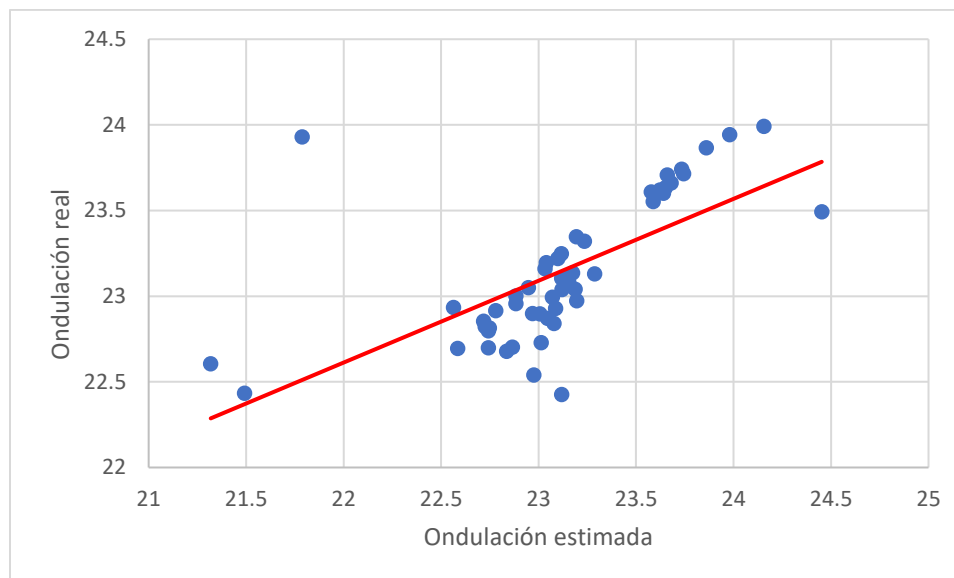


Figura 34

Comparación entre valores reales vs valores estimados usando el modelo estable



Visualmente se puede afirmar que el modelo gaussiano es uno de los modelos que mayor dispersión tiene, después sigue el modelo estable, sin embargo, se lo tomara en cuenta para el análisis de validación de campo y verificar sus resultados estadísticos frente a los modelos exponencial y esférico, los cuales presentaron un buen ajuste tanto validación cruzada como en sus valores de h y $r(h)$.

Validación de campo para cokriging ordinario

Para corroborar el aparente mal ajuste del modelo estable en validación cruzada se hizo una comparación del RMSE frente a los demás modelos, pero en esta ocasión se usaron los 9 datos tomados en campo, la tabla 18 muestra un resumen de los estadísticos que se obtuvieron con cada modelo de semivariograma teórico.

Tabla 18

RMSE entre la ondulación real vs la ondulación predicha usando validación de campo con 9 datos

Semivariograma Teórico	RMSE Validación de campo
Exponencial	0.1778
Esférico	0.1775
Estable	0.1618

De acuerdo con la tabla 18 se puede observar que el modelo estable presenta un RMSE de 0.1618 m, en comparación a los modelos esféricos y estable este valor es mejor, por tanto, el siguiente análisis será en base a este modelo, puesto que su validación de campo tiene mayor peso que a lo que se obtuvo en validación cruzada. El siguiente análisis consistió en variar ligeramente el h óptimo calculado, a fin de hallar un nuevo h óptimo que mejore los estadísticos RMSE y RSE del modelo, tal como se indica en la tabla 19:

Tabla 19

Variación de h óptimo para el modelo de semivariograma estable

Modelo de semivariograma	h óptimo (°)	 Error máx. (m) 	 Error min. (m) 	RMSE (m)	RSR
	0.02924	0.321	0.0035	0.1912	0.4589
	0.0293	0.4553	0.0037	0.2292	0.5502
	0.02934	0.2838	0.0021	0.1526	0.3662
Estable	0.0294	0.5951	0.0043	0.2704	0.6488
	0.02944	0.2981	0.0019	0.1578	0.3786
	0.02954	0.5219	0.0034	0.2441	0.5857
	0.02964	0.3258	0.0011	0.1882	0.4517
				RSR min	0.3662

Como se puede observar en la tabla 19, usando un modelo estable con un h óptimo 0.02934 m se puede llegar a disminuir el RMSE inicial de 0.1618 m a 0.1525 m, además se obtuvo un error máximo de 0.284 m y un error mínimo de 0.002 m en la predicción de los datos de campo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente para la selección del mejor modelo de cokriging se tomará en cuenta el parámetro estadístico RSR, por tanto, el mejor modelo a usar será el modelo cuyo valor de RSR sea más cercano a 0, en este caso tanto el RMSE como el RSR coinciden con el mismo modelo.

Resultados de mínimos cuadrados colocación

Validación cruzada para MCC

Las primeras pruebas realizadas de validación cruzada con mínimos cuadrados se hicieron con el objetivo de identificar cuáles son los mejores modelos funcionales con sus respectivos modelos de covarianza, tal como se muestra en la tabla 20:

Tabla 20

RMSE de validación cruzada para mínimos cuadrados

Grado del modelo funcional	Grado de la función de covarianza	RMSE validación cruzada
X1 Y1	2	0.557663198
	3	0.185367314
X1 Y2	3	0.118830228
	4	0.096962852
X1 Y3	4	0.127777162
	5	0.175327079

Al igual que en el análisis de cokriging, para este caso también se emplearon gráficos de dispersión entre los valores predichos con validación cruzada y los valores reales, de tal forma que se puedan observar el comportamiento de dispersión de los modelos en las siguientes figuras:

Figura 35

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional X1Y1 y modelo de covarianza grado 2

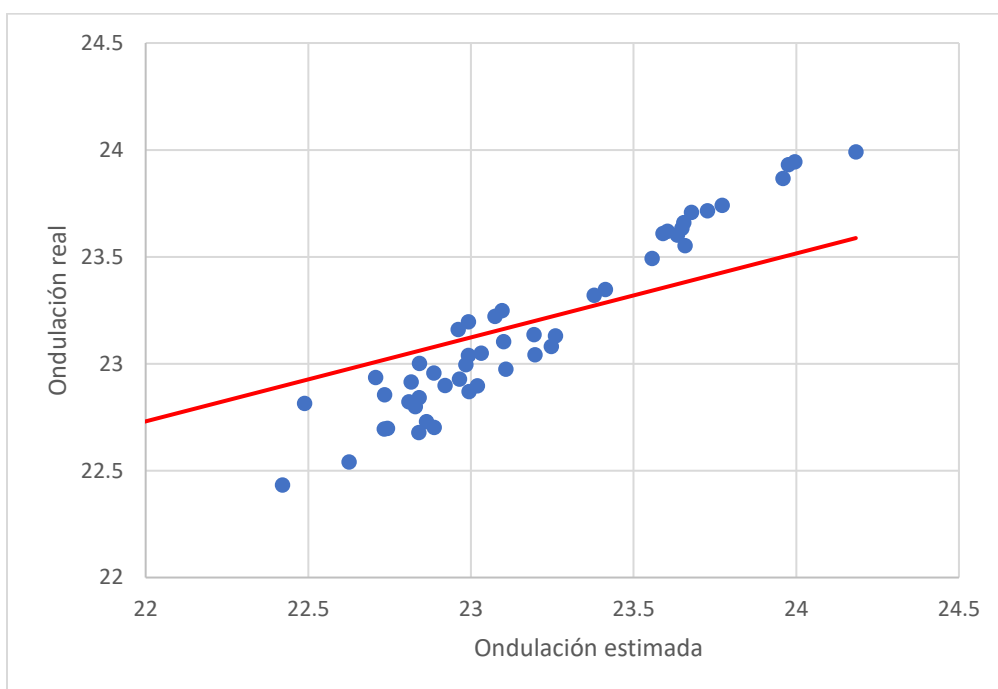
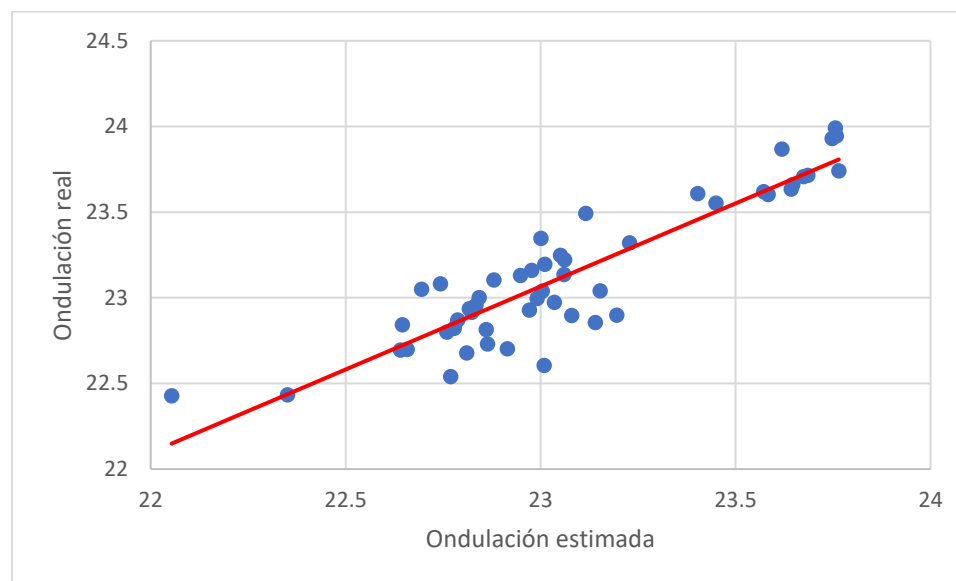


Figura 36

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y1$ y modelo de covarianza grado 3

**Figura 37**

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional $X1Y2$ y modelo de covarianza grado 3

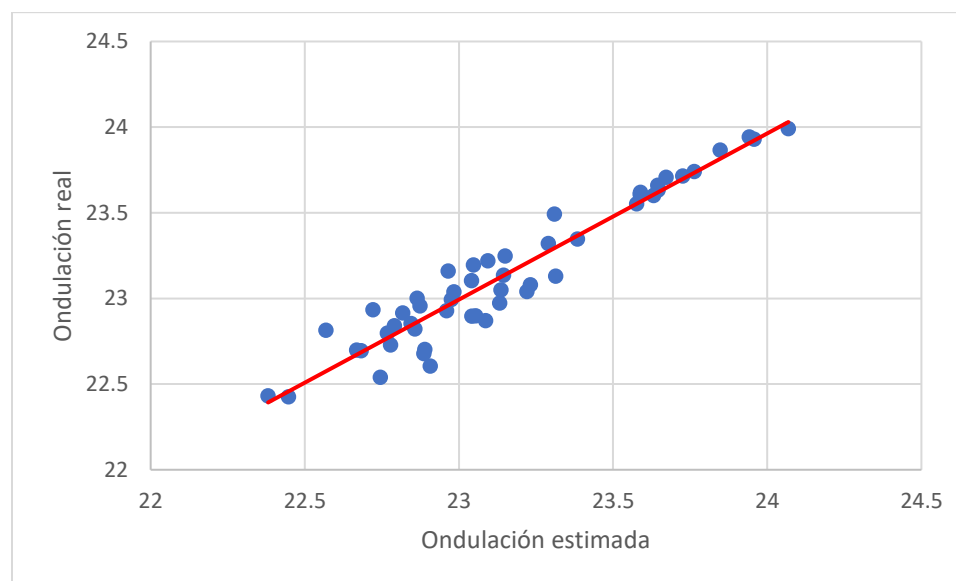
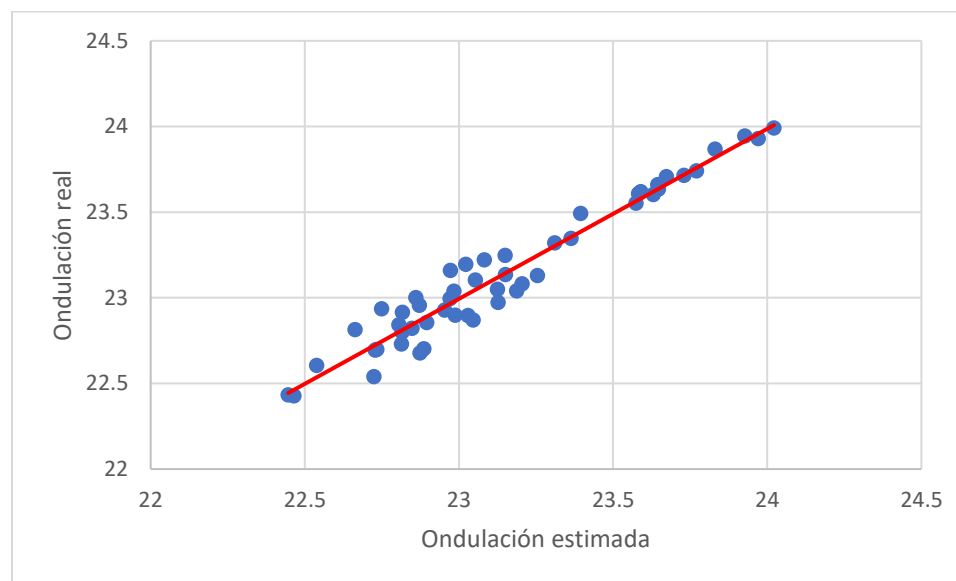


Figura 38

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional X1Y2 y modelo de covarianza grado 4

**Figura 39**

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional X1Y3 y modelo de covarianza grado 4

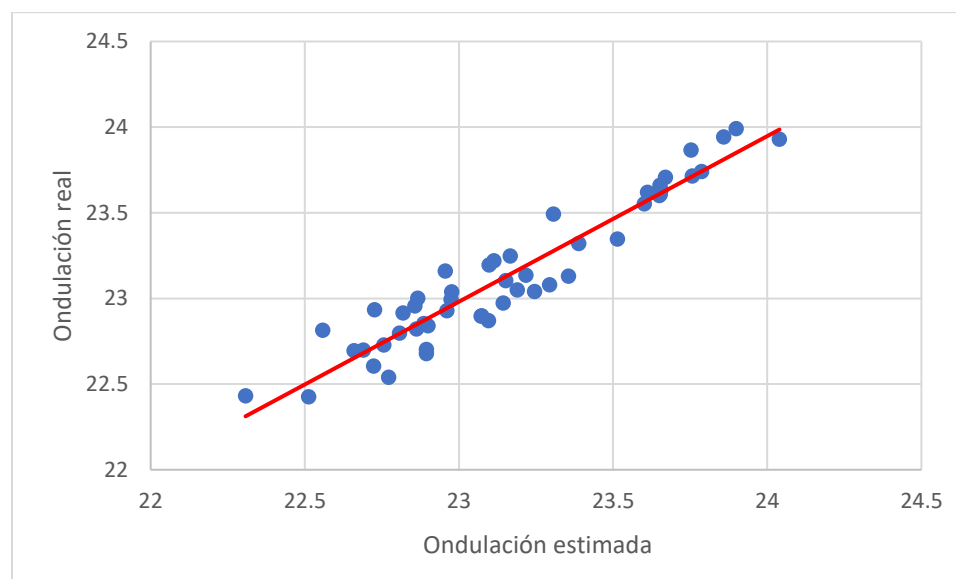
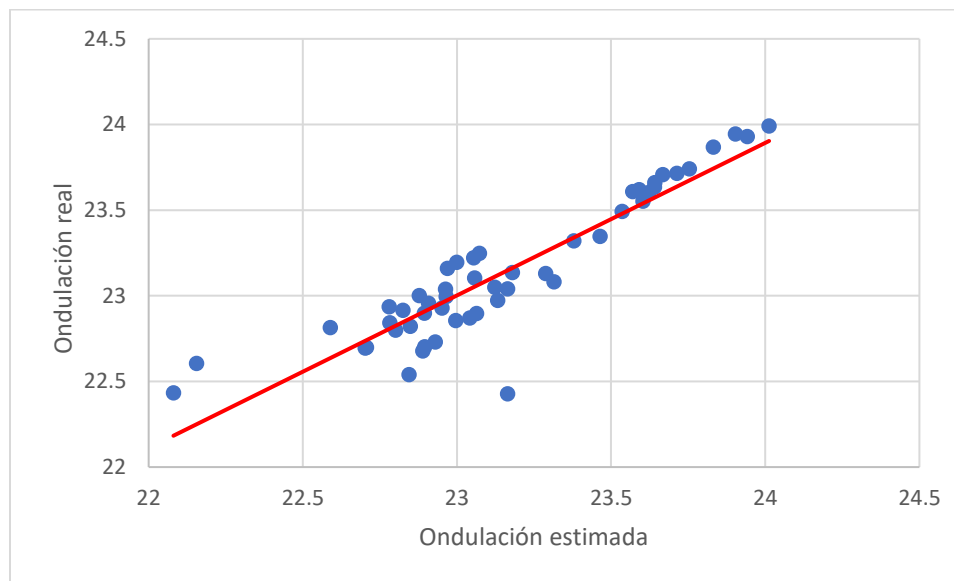


Figura 40

Comparación entre valores reales vs valores estimados modelo funcional X1Y3 y modelo de covarianza grado 5



Tanto con la comparación visual de los gráficos de dispersión como la de la tabla indican que los modelos de grado X1Y1 no aportan resultados buenos, debido sus valores altos de RMSE, por otro lado, el modelo de grado X1Y3 a pesar de tener una dispersión moderada no se la tomará en cuenta puesto que al ser de grado 3 posiblemente se estén forzando a que los datos muestreados se ajusten al modelo, por ende, serán descartados para el posterior análisis. Mientras que, el modelo funcional de grado X1Y2 presenta un RMSE bastante bueno en sus dos modelos de covarianza, los mismos que serán considerados para las siguientes pruebas usando los datos tomados en campo.

Validación de campo para MCC

En base al análisis de la tabla 20, se procedió a comparar los resultados con otros parámetros tales como el ruido y el h óptimo, haciéndolos variar ligeramente y evaluando sus valores de RMSE y RSR, pero en este caso se usaron como referencia los datos tomados en campo. La tabla 21 muestra los indicadores

estadísticos que servirán para la selección del mejor modelo de predicción con mínimos cuadrados colocación.

Tabla 21

Parámetros estadísticos para la selección del mejor modelo de predicción MCC

Grado del modelo de covarianza	h óptimo (°)	Varianza del ruido	Error máx. (m)	Error min. (m)	RMSE (m)	RSR
3	0.02894	0.1	0.2189	0.0809	0.1763	0.4231
		0.01	0.2262	0.0212	0.1713	0.4110
		0.001	0.2513	0.0084	0.1719	0.4125
		0.0001	0.3054	0.0138	0.1854	0.4449
4		0.01	0.5584	0.1484	0.2663	0.6390
3	0.02934	0.1	0.2187	0.0777	0.1697	0.4074
		0.01	0.2254	0.0220	0.1709	0.4100
		0.001	0.2506	0.0086	0.1715	0.4115
		0.0001	0.3052	0.0137	0.1847	0.4433
4		0.1	0.2188	0.0756	0.1687	0.4048
3	0.02944	0.1	0.2187	0.0767	0.1679	0.4028
		0.01	0.2542	0.0019	0.1846	0.4429
		0.001	0.2499	0.0088	0.1706	0.4094
		0.0001	0.3048	0.0141	0.1817	0.4360
4		0.1	0.2188	0.0758	0.1687	0.4048
RSR min						0.4028

De la tabla 21, se puede inferir que el mejor modelo de predicción es el que tiene un RSR de 0.403 el cual corresponde a un modelo con una función para la covarianza de grado 3, además hay otro candidato con un valor de RSR de 0.405 el cual es muy cercano al anterior, no obstante, este modelo usa

una función para la covarianza de grado 4, en este caso no conviene escoger un modelo de grado tan alto debido a que se está forzando el ajuste, por lo tanto el mejor modelo sigue siendo el que tiene un RSR de 0.403 m.

Selección del mejor modelo de predicción

Como se mostró en las tablas anteriores, los parámetros estadísticos de precisión RSR y RMSE indican que el mejor modelo de predicción para cokriging fue un modelo estable para los tres semivariogramas (principal, cruzado, secundaria) con un h óptimo de 0.02934 m, mientras que para el caso de mínimos cuadrados colocación el modelo que mejor se ajusta a la realidad es un modelo funcional de grado X1 Y1 con un modelo de covarianza de grado 3, un h óptimo de 0.02944 m y un ruido de 0.1 m. Las siguientes tablas que se muestran a continuación es un resumen de las predicciones para cada uno de los 9 puntos de verificación de campo, con sus respectivos estadísticos.

Tabla 22

Resumen de los resultados obtenidos con validación de campo para Cokriging

PUNTO	Long, (°E)	Lat, (°N)	Ond. Real (m)	Ond. Cokrg (m)	Intervalo de confianza (+-)	Error.Cokrg (m)
BM1	-78.7012620	-2.7752558	22.9561	22.6950	0.0164	0.2611
BM2	-78.6823938	-2.7648164	22.9321	22.9342	0.0164	-0.0021
BM3	-78.6854618	-2.7669102	22.9578	22.9599	0.0162	-0.0021
PP1	-78.6893313	-2.7696272	22.9520	22.9363	0.0159	0.0157
PP2	-78.6962345	-2.7732695	22.9493	22.8104	0.0160	0.1389
PRCP-05	-78.7072123	-2.7548504	23.0797	22.8953	0.0163	0.1844
BN-11	-78.6399362	-2.7351305	23.0500	22.7662	0.0164	0.2838
BN-20	-78.6063580	-2.6328076	23.1249	23.2077	0.0169	-0.0828
BN-22	-78.5925998	-2.5855704	23.5775	23.5569	0.0164	0.0206

Tabla 23

Resumen de los resultados obtenidos con validación de campo para MCC

PUNTO	Long, (°E)	Lat, (°N)	Ond. Real (m)	Ond. MCC (m)	Intervalo de confianza (+-)	Error.MCC (m)
BM1	-78.7012620	-2.7752558	22.9561	22.7553	0.0554	0.2008
BM2	-78.6823938	-2.7648164	22.9321	22.7955	0.0499	0.1366
BM3	-78.6854618	-2.7669102	22.9578	22.7865	0.0626	0.1713
PP1	-78.6893313	-2.7696272	22.952	22.7739	0.0709	0.1781
PP2	-78.6962345	-2.7732695	22.9493	22.7603	0.0676	0.1890
PRCP-05	-78.7072123	-2.7548504	23.0797	22.9523	0.0586	0.1274
BN-11	-78.6399362	-2.7351305	23.05	22.8832	0.0548	0.1668
BN-20	-78.6063580	-2.6328076	23.1249	23.3436	0.0619	-0.2187
BN-22	-78.5925998	-2.5855704	23.5775	23.5008	0.0506	0.0767

Tabla 24

Comparación de los estadísticos obtenidos de la validación de los mejores modelos generados

Modelo	 Error máx (m) 	 Error min (m) 	RMSE	RSR
Cokriging	0.2838	0.0021	0.1526	0.3662
Mínimos cuadrados colocación	0.2187	0.0767	0.1678	0.4028

En base a las tablas 22, 23 y 24 se puede observar que el (Error MCC) es más homogéneo que el (Error Cokriging) sin embargo el intervalo de confianza al 95% es mucho mejor en el caso de cokriging, además se puede observar que tanto el error máximo, error mínimo, RMSE y RSR se dan mejor en el modelo cokriging, esto implica que el modelo que mejores resultados a presentado para esta zona de estudio es el modelo de cokriging ordinario.

Discusión de resultados

A continuación, se discutirán los resultados del modelo frente a otras investigaciones similares al tema.

Para la generación de modelos geoidales existen diferentes métodos y técnicas, una de las investigaciones similares al presente trabajo fue la del autor (Palacios, 2019) quién obtuvo una precisión de 8 cm de RMSE y 2 cm de RSR en su modelo local para la zona rural del cantón Guayaquil, se puede deducir que dicho trabajo fue más preciso que el nuestro, por varios factores como: la zona de su estudio la cual fue plana mientras que la nuestra fue una zona montañosa haciendo que la ondulación geoidal tenga más variabilidad, su variable auxiliar (EGM08) presentó un coeficiente de correlación más alto por lo que se puede decir que el modelo EGM08 se ajusta mejor en Guayaquil que en Cuenca, aplicó varios tipos de cokriging, y contó con una mayor cantidad de datos. Además otra razón por la cual el modelo generado en este trabajo no presentó las precisiones esperadas como la que el autor obtuvo, fue quizás en la generación de modelo de semivariograma cruzado, según el autor (Goovaerts, 1997) el uso de modelos convencionales no asegura el cumplimiento de las propiedades de semivariograma cruzado, es por esto que se opta por emplear un modelo de correogionalización lineal, dicho de otra forma, un modelo anidado, lo cual no se aplicó en este estudio ya que el modelo que se usó para la variable cruzada fue un convencional (modelo estable).

Desde otra perspectiva, el modelo generado frente al de otros autores tales como (Rapp, 1997) fue más preciso ya que el nuestro obtuvo un RMSE de 0.152 m y la del otro autor fue un RMSE de 3m, en ambos casos se implicaron zonas montañosas, (Paute para nuestro estudio y para el otro fue el Himalaya), sin embargo, el autor aplicó coeficientes potenciales para la determinación de las ondulaciones geoidales, una técnica muy diferente a la del presente estudio.

Visto desde otro enfoque, en base a los resultados se puede afirmar que el modelo local generado es mucho más preciso que los modelos globales tales como el EGM08 y EGM96 ya que sus valores de error esta al orden de los 3 metros en zonas montañosas, inclusive el modelo del IGM del cual se esperaba mejores resultados en su análisis de correlación al ser un modelo regional para el Ecuador, fue superado por el modelo local de cokriging ya que de acuerdo al (IGM, 2013) su modelo geoidal tiene errores de hasta 40 cm y un RMSE de 15 cm lo cual en la práctica no se vio reflejado en los resultados.

Capítulo V Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Se demostró que es posible modelar alturas geoidales empleando diferentes técnicas geoestadísticas, ya que sus errores esperados fueron menores a los que ofrecen otros modelos convencionales como el EGM08, EGM96 y modelo IGM.

El mejor modelo de predicción aplicando cokriging fue un modelo conformado por tres semivariogramas de tipo estable con un h óptimo de 0.02934 grados, tomando como variable auxiliar los datos de ondulación geoidal derivado del EGM08 (2.5'x 2.5'), dando como resultado un RMSE de 0.1526.

Para el caso de mínimos cuadrados colocación el modelo que mejor se ajusta a la realidad es un modelo funcional de grado X1 Y1 con un modelo de covarianza de grado 3, un h óptimo de 0.02944 grados y un valor de ruido de 0.1, dando como resultado un RMSE de 0.1678.

A pesar de que la precisión esperada era obtener un RMSE de 0.10 m, el modelo geoidal final presentó un RMSE de 0.1526 m con un error máximo de 0.2838 m y un error mínimo de 0.0021 m lo cual es de gran ayuda para realizar trabajos topográficos en la zona de estudio que impliquen el uso alturas referidas al nivel medio del mar.

La eficiencia del modelo radica desde el punto de vista económico, ya que al reemplazar la nivelación geométrica por la nivelación GPS se están ahorrando costes y tiempo, no solo para la Central Hidroeléctrica de Paute, sino para toda la comunidad puesto que su uso puede ser aplicado en diferentes estudios.

Recomendaciones

Antes de emplear el modelo se recomienda diseñar un mapa de errores de predicción, puesto que para trabajos que impliquen una precisión mayor que el RMSE del modelo es necesario conocer si el error de predicción en la zona de estudio entra en la tolerancia requerida.

Se recomienda aplicar distintas técnicas de Cokriging ya que en este estudio únicamente se aplicó la técnica de Cokriging ordinario. Además, la cantidad de datos empleados en esta técnica se podría considerar abundante para la técnica, por lo que es recomendable realizar pruebas con un limitado número de datos.

Se recomienda usar la calculadora diseñada en zonas cercanas a los puntos usados para la construcción del modelo puesto que en zonas donde no se encuentran ningún punto podría realizar una predicción no tan precisa.

Se puede difundir la utilidad de la técnica Cokriging a otras empresas, corporaciones o GAD's que no cuenten con un modelo geoidal local, ya que por lo general este tipo de instituciones suelen disponer de datos de puntos GPS y alturas niveladas en su zona de estudio, y como ya se sabe una de las ventajas de este método es que no se requiere una gran cantidad de datos, ya que es de uso exclusivo para trabajos en los que la variable de estudio es muy costosa de obtener.

Para próximos estudios se podría incrementar el número de puntos usados en la elaboración del modelo para poder incrementar la zona de influencia de la calculadora, de tal manera que cubra un área más extensa.

Referencias bibliográficas

- Alfaro, M. (2007). *Estimación de Recursos Mineros*. París, Francia: Escuela de Minas de París.
- Ballester Salazar, K. (Abril de 2021). *Comparación de modelos predictivos de ondulación geoidal mediante métodos de Mínimos Cuadrados Colocación y Redes Neuronales, en la zona rural del cantón Guayaquil*. Obtenido de <http://repositorio.espe.edu.ec/xmlui/bitstream/handle/21000/24133/T-ESPE-044395.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Bonvalot, S., Balmino, G., Briais, A., M., K., Peyrefitte, A., Vales, N., . . . Sarrailh, M. (2012). *Mapa mundial de gravedad*. . Paris: Comisión para el Mapa Geológico del Mundo.
- Buzai, G. D. (2009). Análisis exploratorio de datos espaciales. En *Geografía y Sistemas de Información Geográfica*.
- Cañizares, E. (2015). *Análisis del Sistema de Alturas para la Red de Control Básico Vertical del Ecuador*. Obtenido de <http://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/11017/1/T-ESPE-049089.pdf>
- Casanova, L. (2002). *SlideShare*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/davidchacnaarraya/libro-de-topografa-plana-leonardo-casanova>
- CINARQLH-KAWSUS-GEOCAM, C. (2019). *Informe de Red Geodésica y Ruta de Nivelación*.
- Córdoba, M. (2015). *Researchgate*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/287995990_Geoestadistica
- Cruz, G., Villaseñor, J., López, L., & Ortiz, E. (2013). Distribución espacial de la riqueza de especies de plantas vasculares en México. *Revista Mexicana de Biodiversidad*, 1189-1199.

Díaz, M. (2002). *Geoestadística aplicada*. México: UNAM.

Drewes, H., & Sánchez, L. (2002). *Sistema de Referencia en Geodesia*. Bogota: Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

Echeverría, A., & Tierra, A. (2010). GENERACIÓN DE UN MODELO DE ONDULACIONES GEOIDALES DEL ECUADOR CONTINENTAL A PARTIR DE DATOS DISPERSOS MEDIANTE MÍNIMOS CUADRADOS, COLOCACIÓN (LSC). *Revista Geoespacial*, 54, 55.

Emery, E. (2007). *Geoestadística*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile.

Enriquez, D. A., & Cárdenas, S. J. (2019). *Validación del Método de nivelación GPS en el Ecuador Continental, mediante el Análisis de Variación de Ondulación Geoidal*.

Farjas, M. (2013). *Repositorio de la Universidad Politécnica de Madris*. Obtenido de <https://www.yumpu.com/es/document/read/7882905/tema-4-nivelacion-geometrica-ocw-upm>

Gallardo. (2007). *Geostadística Ecosistemas 15(3)*. Obtenido de <https://www.revistaecosistemas.net/index.php/ecosistemas/article/view/161>

Gallardo, A. (2006). *Geostadística. Ecosistemas*, 10.

Giraldo, R. (2001). Propuesta de un indicador como variable auxiliar en el análisis Cokriging. *Revista Colombiana de Estadística*, 24(1), 1-12.

GISGeography. (2018). *Acolita*. Obtenido de <https://acolita.com/geoestadistica-interpolacion-con-kriging/>

Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation (Applied Geostatistics)*. New York, EUU: Oxford University Press.

- Haro Ruiz, S. N. (10 de Septiembre de 2021). *Control de deformaciones en el Puente 8 de la Avenida General Rumiñahui mediante observaciones topográficas convencionales y GNSS, para controlar y monitorear el estado de la estructura*. Obtenido de <http://repositorio.espe.edu.ec/jspui/bitstream/21000/26062/1/T-ESPE-044804.pdf>
- Henaó, R. (2019). *INTRODUCCION A LA GEOESTADISTICA*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Hengl, T. (2006). Finding the right pixel size. En *Computers & Geosciences* (págs. 32(9), 1283–1298).
- Hernández, V. (2012). Análisis exploratorio espacial de los accidentes de tránsito en Ciudad Juárez, México. *Revista Panamericana de Salud Pública*, 31, 396-402.
- Hoffmann, B., & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Austria: SpringerWienNewYork.
- Hoyer, M., Wildermann, E., Suárez, H., & Hernández, J. (2004). *Modelo geoidal combinado para Venezuela (MGCV04)*. Interciencia.
- ICGEM. (2021). *International Centre for Global Earth Models (ICGEM)*. Obtenido de <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>
- IGM. (2006). *ESPECIFICACIONES TÉCNICAS GENERALES PARA LA REALIZACIÓN DE CARTOGRAFÍA TOPOGRÁFICA A CUALQUIER ESCALA*. Obtenido de http://www.geoportaligm.gob.ec/portal/?wpfb_dl=52
- IGM. (Julio de 2013). *CÁLCULO DE LA ALTURA GEOIDAL DEL ECUADOR CONTINENTAL*. Obtenido de <http://www.geoportaligm.gob.ec/portal/index.php/calculo-de-altura-geoidal/>

Ince, S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., & Schuh, H. (2019). *ICGEM: 15 años de recopilación y distribución exitosas de modelos gravitacionales globales ,servicios asociados y planes futuros*. Obtenido de Earth System Science Data, 11, págs. 647-674.: DOI: <http://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>

Instituto Geográfico Militar. (2013). *Geoportal Instituto Geográfico Militar*. Obtenido de <http://www.geoportalmgm.gov.ec/portal/index.php/calculo-de-altura-geoidal/>

Journal, A. (1989). *Fundamentos de geoestadística*. Washington.

Kavzoglu, T., & Saka, M. (2005). Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks. *Journal of geodesy*, 78(9), 520-527.

Lambertucci , D., & Rueda, A. (2017). *Comparación de modelos geo-espaciales para datos de rendimiento en lotes de cultivos*.

Leiva González, C. (Octubre de 2014). *Determinación de Modelos de Predicción Espacial de la Variable Ondulación Geoidal, Para la zona urbana del cantón Quito y la zona rural del cantón Guayaquil, utilizando Técnicas Geoestadísticas*. Obtenido de <https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/8703/3/CD-5841.pdf>

Ligas, M., & Szombara, S. (2018). Geostatistical prediction of a local geometric geoid - kriging . *Studia Geophysica et Geodaetica*, 187–205. doi:10.1007/s11200-017-0713-7.

Lima Yacelga, P. (Diciembre de 2005). *Determinación del modelo matemático parra obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito*. Obtenido de <http://repositorio.espe.edu.ec/xmlui/bitstream/handle/21000/805/T-ESPE-025068.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Llano Cuz , H., & Gonzalez Aceituno, J. (2018). *Generación de modelo digital de elevaciones (MDE) de ondulaciones geoidales usando el método GNSS/nivelación en redes neuronales artificiales a partir de datos dispersos*. Obtenido de http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/7316/Llano_Cruz_Heber_Gonzales_Aceituno_Jorge_Luis%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Luna, M. (2017). *Contribución a la definición de un modelo de velocidades de la corteza terrestre para Ecuador a partir de datos GNSS*.
- M. Ligas, & S. (2018). Geostatistical prediction of a local geometric geoid - kriging and cokriging with the use of EGM2008 geopotential model. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 62(2), 187-205 doi:10.1007/s11200-017-0713-7.
- Mena , J. (2008). *Geodesia Superior, Volumen 2*. Madrid: Centro Nacional de Información Geográfica.
- Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*,. Herbert Wichman Verlag.
- NASA. (18 de enero de 2006). *ccdis*. Obtenido de <https://cddis.nasa.gov/926/egm96/nasatm.html>
- Nelson, H. (2002). *SlideServe*. Obtenido de GEOESTADISTICA MULTIVARIADA: <https://www.slideserve.com/harry/geoestadistica-multivariada>
- Oliver, M. (2010). *Geostatistics Applications for Precision Agriculture*. New York, EE.UU: Springer.
- Palacios, I. (2019). *GENERACIÓN DE UN MODELO DE PREDICCIÓN DE LA VARIABLE ONDULACIÓN GEOIDAL, PARA LA ZONA RURAL DEL CANTÓN GUAYAQUIL, MEDIANTE EL USO DEL MÉTODO COKRIGING*. Sangolquí.

Rapp, R. H. (1997). Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference.

Journal of Geodesy, 71(5), 282-289.

Rebollo, R. (2021). *Análisis de Señales en Geofísica*.

Rivoirard, J. (2003). *Course on multivariate geostatistics*. París, Francia: Ecole des Mines de Paris.

Sanchez Osorio, E. (2017). *INFORME DE PASANTIA, NIVELACIÓN GEOMETRICA PARA LA GENERACIÓN DE UN MODELO GEOIDAL LOCAL EN LA EMPRESA ECOMPASS SAS*. Obtenido de <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/7539/SanchezOsorioEdissonCamilo2017.pdf;jsessionid=DCD78F9406843D5C00734BD3830E63F4?sequence=1>

Sevilla, J. (1987). *COLOCACION MINIMOS CUADRADOS*. Madrid.

Sotter.et.al. (2002). Geoestadística aplicada a estudios de contaminación ambiental. Ingeniería.

Tierra, A. (2009). *Evaluación del EGM08 y EGM96 en el Ecuador a partir de datos de GPS y Nivelación Geométrica*. Obtenido de

http://doccdn.simplesite.com/d/2e/8e/281756459821862446/74ee5ee2-cdee-4652-8043-849827570bee/EVALUACION_EGM08_EGM96.pdf

Vanícek.et.al. (2003). *Algunos Aspectos sobre Alturas Ortométricas y Normales*. Obtenido de <http://www2.unb.ca/gge/Personnel/Vanicek/AlgunosAspectos.pdf>

Wendroth, O. (2018). *Spatial and Temporal Statistics: Crossvariograms and Cokriging*. Quito, Ecuador: Universidad Central del Ecuador - Universidad de Kentucky.

Zhong, D. (1997). Robust estimation and optimal selection of polynomial parameters for the interpolation of GPS geoid heights. *Journal of Geodesy*, 71(9), 552-561.

