ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO

EXTENSIÒN LATACUNGA

CARRERA DE INGENIERÍA AUTOMOTRIZ

“DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR”

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO AUTOMOTRIZ

ELIANA ELIZABETH MORILLO TACO

RAMIRO ISRAEL CLAUDIO ESPINEL

Latacunga, Septiembre de 2010

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

Nosotros, ELIANA ELIZABETH MORILLO TACO y RAMIRO ISRAEL CLAUDIO ESPINEL, declaramos que:

El proyecto de grado denominado "DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR" ha sido desarrollado con base a una investigación exhaustiva, respetando derechos intelectuales de terceros, cuyas fuentes se incorporan en la bibliografía. Consecuentemente este trabajo es de nuestra autoría.

En virtud de esta declaración, nos responsabilizamos del contenido, veracidad y alcance científico del proyecto de grado en mención.

Latacunga, Septiembre de 2010.

Eliana Elizabeth Morillo Taco	Ramiro Israel Claudio Espinel
CC. 0502513153	CC. 0502676562

AUTORIZACIÓN

Nosotros, ELIANA ELIZABETH MORILLO TACO y RAMIRO ISRAEL CLAUDIO ESPINEL, declaramos que:

Autorizamos a la Escuela Politécnica del Ejército, la publicación en la biblioteca virtual de la Institución del trabajo “DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR”, cuyo contenido, ideas y criterios son de nuestra exclusiva responsabilidad y autoría.

Latacunga, Septiembre de 2010.

Eliana Elizabeth Morillo Taco	Ramiro Israel Claudio Espinel
CC. 0502513153	CC. 0502676562

CERTIFICADO

Se certifica que el presente trabajo titulado “DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR” fue desarrollado por ELIANA ELIZABETH MORILLO TACO y RAMIRO ISRAEL CLAUDIO ESPINEL, bajo nuestra supervisión, cumpliendo con normas estatutarias establecidas por la ESPE en el Reglamento de Estudiantes de la Escuela Politécnica del Ejército.

Latacunga, Septiembre de 2010.

Ing. Germán Erazo	Ing. Julio Acosta
DIRECTOR DE PROYECTO	CODIRECTOR DE PROYECTO

CERTIFICACIÓN

Se certifica que el presente trabajo fue desarrollado por ELIANA ELIZABETH MORILLO TACO y RAMIRO ISRAEL CLAUDIO ESPINEL, bajo nuestra supervisión.

Ing. Germán Erazo
DIRECTOR DE PROYECTO

Ing. Julio Acosta
CODIRECTOR DE PROYECTO

DEDICATORIA

Mi tesis la dedico con mucho amor a ti Dios que me diste la oportunidad de vivir y permites que ahora esté cumpliendo una de las metas más importantes en mi vida.

A mi madre Zoila, ya que siempre fuiste mi ejemplo a seguir, enseñándome a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desmayar en el intento, me has dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia mi empeño, todo ello con tu inmenso amor y sin pedir nunca nada a cambio, gracias mami por creer en mí.

A mi hermana Mel, porque con su nacimiento acrecentó en mí las ganas de superarme profesional y humanamente.

A mis abuelitos, tíos, tías, primos y primas por su comprensión, consejos y por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, los quiero mucho.

Eliana

DEDICATORIA

La concepción de este proyecto de tesis está dedicada a Dios y a mis padres. A Dios porque ha estado conmigo en cada paso que doy, cuidándome y dándome fortaleza para continuar, a mis padres, quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo mi apoyo en todo momento. Depositando su entera confianza en cada reto que se me presentaba, sin dudar ni un solo momento en mi inteligencia, capacidad y honestidad que han sido pilares fundamentales en mi vida. Sin ellos, jamás hubiese podido conseguir lo que hasta ahora. Su tenacidad y lucha insaciable han hecho de ellos el gran ejemplo a seguir y destacar, no solo para mí, sino para mis hermanas y familia en general. Es por ellos que soy lo que soy ahora.

Israel

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento más profundo a:

Dios, por haberme permitido cumplir con mi meta profesional.

A mi amada familia que siempre me ha apoyado y estimulado.

.

A Pancho, Pablo, Geova, Lucho, Isra, Junior, por ser incondicionales y expresarme su amistad en los momentos más difíciles.

A todos los señores profesores de la especialidad, que con su voluntad y mística de educadores transmitieron el conocimiento científico en forma clara y precisa.

A mis asesores de tesis, Ing. Germán Erazo e Ing. Julio Acosta, por hacer posible esta tesis y por el apoyo brindado.

Eliana

AGRADECIMIENTO

La presente Tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas opinando, dándome ánimo y acompañándome en momentos críticos y de felicidad.

En primer lugar agradezco a Dios por haberme guiado por el camino de la felicidad; en segundo lugar a mi padre Ramiro Claudio por siempre haberme dado su fuerza y apoyo incondicional, ayudándome y llevándome hasta donde estoy ahora.

A mi madre y a toda mi familia por siempre haberme brindado su apoyo. Pero, principalmente mis más sinceros agradecimientos están dirigidos hacia mi director de tesis; el Ing. Germán Erazo y de igual manera a mi codirector el Ing. Julio Acosta, sin los cuales no hubiese podido culminar satisfactoriamente esta tesis.

Gracias a todos.

Israel

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ECUACIONES

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El presente trabajo detalla el diseño, construcción, pruebas e implementación del módulo de gestión electrónica de control y posición vehicular.

El dispositivo se concibe básicamente como un sistema de visualización de variables del ambiente (temperatura y presión barométrica), de ergonomía en la conducción (vectores de aceleración) y de situación (posición global).

El hardware y firmware del sistema son los encargados de transformar las variables análogas en digitales, con alta resolución y error mínimo; convertir los valores numéricos en caracteres ASCII, los valores numéricos en representaciones gráficas de incremento o decremento, para enviarlas al subsistema de visualización.

Podemos recalcar que para la instalación y funcionamiento de este módulo, no se requiere de ninguna modificación relevante en el sistema electrónico o mecánico.

SUMMARY

The present work details the design, construction, tests and implementation of the module of electronic administration of control and vehicular position.

The device is conceived basically as a system of visualization of variables of the atmosphere (temperature and barometric pressure), of ergonomics in the conduction (vectors of acceleration) and of situation (global position).

The hardware and firmware of the system, transforming the similar variables in digital variables, with high resolution and minimum error; to transform the numeric values into characters ASCII, the numeric values in graphic representations of increment or decrement, to send them to the visualization subsystem.

We can emphasize that for the installation and operation of this module, it is not required of any outstanding modification in the electronic or mechanic system.

PRESENTACIÓN

La visualización de parámetros que generalmente no poseen los vehículos de serie, brindará al conductor mayor seguridad y ergonomía.

La fusión de la electrónica con la ingeniería automotríz, da lugar a innovadoras aplicaciones con tecnología de punta para su posterior inserción en los vehículos.

El proyecto de graduación denominado sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular, está diseñado para mostrar valores de temperatura, presión barométrica, aceleración, inclinación, longitud, latitud, velocidad, hora y fecha.

En el presente, se explica de forma detallada y didáctica los requisitos del sistema y la aproximación del hardware. Para esto se tiene referencia en las condiciones del ambiente de trabajo y las actividades para las que se lo concibió, todo esto se halla expuesto en el capítulo 2.

El capítulo 3, presenta los criterios y procedimientos tomados en la caracterización del módulo. Allí se menciona su desarrollo.

Posteriormente, en el capítulo 4 se detalla la implementación y pruebas del sistema electrónico. También se indican las pruebas realizadas en la comprobación de su funcionamiento y exactitud.

Latacunga, Septiembre 2010

Realizado por:

____

ELIANA MORILLO TACO

____

RAMIRO CLAUDIO ESPINEL

____

ING.JUAN CASTRO C.
DIRECTOR DE CARRERA
INGENIERÍA AUTOMOTRIZ

____

DR. EDUARDO VÁSQUEZ A.
DIRECTOR DE LA UNIDAD DE
ADMISIÒN Y REGISTRO

CAPÍTULO I

I. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR

1.1. ANTECEDENTES

La gestión automotriz ha evolucionado dinámicamente, reemplazando los rudimentarios medidores analógicos por instrumentos digitales y / o virtuales gobernados por unidades de control.

Existen innumerables aplicaciones autotrónicas que no sólo controlan y monitorean el desempeño de los motores, sino también determinan variables concernientes a la navegación del vehículo.

Los sistemas de navegación para automóviles han sido objeto de una extensa experimentación a través de varias décadas. No obstante, los tableros de instrumentos en vehículos de fabricación en serie, permiten únicamente verificar parámetros básicos de funcionamiento. Sistemas de gestión con monitoreo detallado que incluya también determinación de variables del ambiente, se encuentran sólo en vehículos de lujo.

El éxito en la masificación de sistemas de navegación no sólo depende de la adquisición del dispositivo electrónico, sino de la disponibilidad de mapas cartográficos de ciudades, carreteras y vías.

En el Ecuador existen soluciones que tienen aplicación funcional en referencia a la determinación de la posición global de flotas de vehículos, con costos de adquisición o implementación altos. No existen asistentes para navegación vehicular en el mercado nacional.

1.2. JUSTIFICATIVO

En base a esta problemática es necesaria la implementación de un sistema automotriz con interfaz gráfica, que permita determinar variables del ambiente (temperatura y presión barométrica), variables de ergonomía en la conducción (vectores de aceleración) y variables de situación (posición global).

Creemos imperiosa la elaboración de una aplicación que permita monitorear gráficamente parámetros que normalmente no se verifican en los tableros de serie, para asistir al usuario en la navegación del vehículo.

Proponemos el desarrollo de un sistema electrónico, que muestre una interfaz sencilla y amigable con el operador, posea suficiente versatilidad para que, con ligeras modificaciones de hardware y firmware, permita su empleo en cualquier tipo de automotor. Del desarrollo de esta investigación se obtendrá un equipo con índice beneficio – costo aceptable, vida útil larga, mantenimiento módico y repuestos accesibles en nuestro medio.

El diseño y construcción de este sistema se basa en conocimientos, habilidades, capacidades, destrezas y aptitudes, vinculadas a nuestra competencia profesional. Para ello, aplicamos conocimientos adquiridos en el área de autotrónica.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

- Diseñar y construir un sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar las tecnologías implicadas en la determinación del posicionamiento global y de las variables ambientales, para sistemas controlados de concepción embebida.

- Identificar requerimientos que debe cumplir el sistema electrónico aplicable a la solución del problema, en base al medio de trabajo, desempeño solicitado y especificaciones de potencia.

- Seleccionar los elementos electrónicos idóneos.

- Emplear el software CODEVISION AVR para la programación de microcontroladores AVR en lenguaje C, el simulador PROTEUS para la depuración de errores, y el editor gráfico de capas EAGLE, para el diseño de diagramas esquemáticos y placas de circuito impreso.

- Instalar el módulo en el vehículo marca SUZUKI, modelo SAMURAI SJ413, para realizar pruebas en condiciones reales de trabajo.

- Realizar un manual de usuario que contenga el funcionamiento, requerimientos y precauciones en la manipulación del mecanismo.

1.4. METAS

Con la culminación del presente proyecto esperamos conseguir lo siguiente:

- Implementar el módulo para varios tipos y marcas de vehículos a fin de obtener mayor seguridad y ergonomía, en el plazo de dos meses.

- Tomar el diseño como base para la realización de otros sistemas aplicados al campo automotriz, en seis meses.

CAPÍTULO II

II. REQUERIMIENTOS / REQUISITOS DEL DISPOSITIVO

2.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

La función principal del dispositivo es monitorear variables del ambiente, de situación, y de ergonomía en la conducción, constituyéndose en un prototipo de gestión electrónica automotriz.

El sistema utiliza diversos elementos eléctricos y electrónicos que le permiten:

- Sensar de manera precisa las variables implicadas en las condiciones ambientales, de situación geográfica, y de ergonomía en la conducción.
- Visualizar gráficamente y en tiempo real el valor de los parámetros adquiridos.

2.2. REQUISITOS DEL SISTEMA

Los requisitos que cumple el sistema se basan en las condiciones del ambiente de trabajo, las especificaciones de potencia y las actividades que realiza.

2.2.1. REQUISITOS EN BASE AL AMBIENTE DE TRABAJO

El dispositivo deberá presentar las siguientes características:

- Inmunidad a la interferencia, así, evitar la que puede ser generada por elementos del motor y vehículo.
- Indemnidad a la vibración, en el caso de caminos irregulares.
- Capacidad de trabajo en altas temperaturas del ambiente, para eliminar averías en el sistema.
- Impacto mínimo de implementación en el sistema eléctrico del vehículo, para incrementar su seguridad y facilitar su instalación.

2.2.2. REQUISITOS EN BASE A ESPECIFICACIONES DE POTENCIA

El dispositivo deberá presentar las siguientes características:

- Protección contra conexión invertida y sobrevoltajes, para impedir la avería del módulo.
- Consumo de corriente mínimo, para evitar descarga del acumulador con su funcionamiento durante períodos largos de tiempo.
- Alta sensibilidad de recepción de señales de radiofrecuencia enviadas por los satélites de posicionamiento global, y así obtener datos exactos.

2.2.3. REQUISITOS EN BASE AL DESEMPEÑO SOLICITADO

El dispositivo deberá presentar las siguientes características:

- Accesibilidad a los elementos empleados y costo de adquisición relativamente bajo.
- Margen de error pequeño en la lectura e interpretación de señales desde los sensores.
- Velocidad de adquisición, procesamiento y ejecución moderados.
- Vida útil larga con mantenimiento mínimo.

Deberá poseer todas éstas características para convertirse en un dispositivo de última tecnología.

2.3. APROXIMACIÓN EN BLOQUES

La concepción básica del hardware, según la figura 2.1 se fundamenta en bloques agrupados en subsistemas de acuerdo a las funciones generales de sensado, procesamiento y visualización.

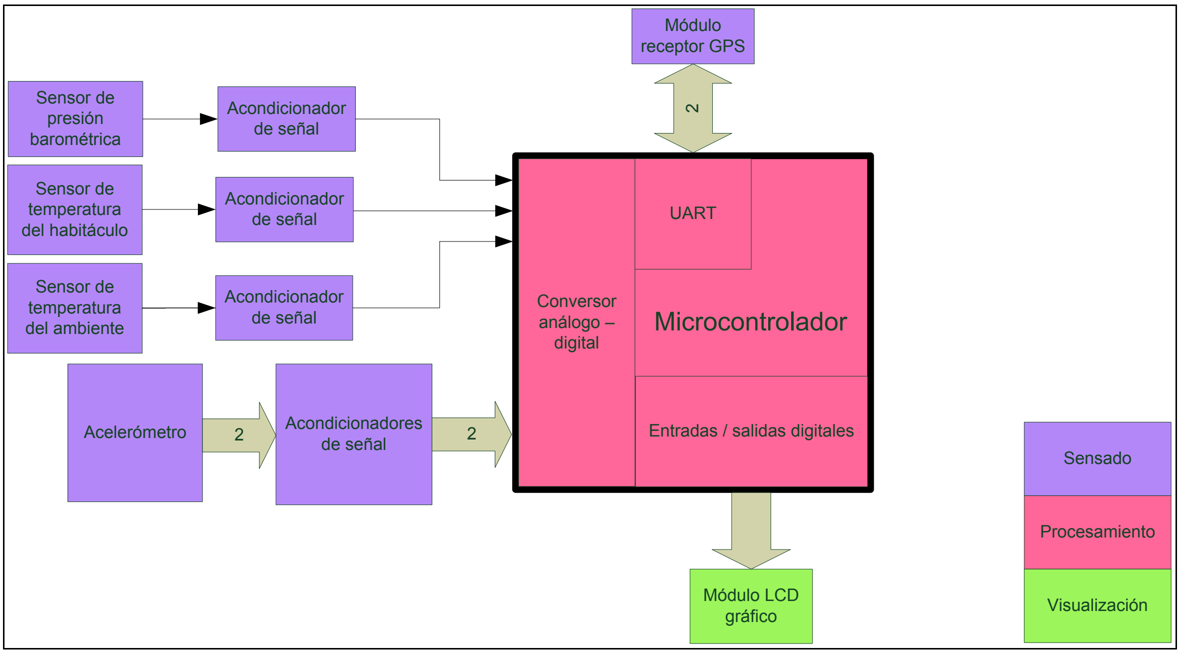


Figura 2.1: Diagrama de bloques del sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular

2.3.1. SUBSISTEMA DE SENSADO

Las señales continuas útiles en la gestión básica del sistema provienen de sensores especializados. Su velocidad de muestreo no es crítica, característica que exige del uso de procesadores de mediana prestación, con conversores análogo – digitales de velocidad de muestreo moderada.

La temperatura del habitáculo del vehículo y la temperatura del exterior son tomadas a través de sensores de temperatura de respuesta lineal. Su rango de medición no es crítico ya que en nuestro medio, las temperaturas del ambiente son moderadas.

El sensor de presión barométrica puede dar lecturas comprendidas entre la máxima presión barométrica medida a nivel del mar y la mínima presión muestreada en los terrenos altos accesibles mediante vehículos.

La aceleración e inclinación del auto se toman desde el mismo sensor, un acelerómetro de tres ejes con respuesta analógica. Este dispositivo está colocado en el centro de gravedad del vehículo, característica que aporta muestreos reales. Se implementan filtros *pasabajo* pasivos que atenúan componentes altas de frecuencia, adheridas a las señales continuas muestreadas. Todo esto en vista de que la interferencia electromagnética y el ruido blanco están presentes en la mayoría de motores térmicos y en especial los encendidos por chispa.

Los datos de posicionamiento global se reciben de forma serial desde un módulo GPS. El microcontrolador posee el puerto serial correspondiente con velocidad de transmisión ajustable, además de tener la capacidad de procesamiento suficiente, para tomar las tramas necesarias en la gestión del sistema.

2.3.2. SUBSISTEMA DE PROCESAMIENTO

El microcontrolador, base fundamental del mecanismo, digitaliza toda la información proveniente de los sensores. Posee el hardware y firmware necesarios para realizar las siguientes funciones:

- Transformar las variables análogas en digitales, con alta resolución y error mínimo.
- Convertir los valores numéricos en caracteres ASCII, para enviarlos al subsistema de visualización.
- Convertir los valores numéricos en representaciones gráficas de incremento o decremento, para enviarlas al subsistema de visualización.

2.3.3. SUBSISTEMA DE VISUALIZACIÓN

Este subsistema comprende al dispositivo que permite visualizar (en caracteres alfanuméricos y de manera gráfica), los valores de todas las variables que han sido digitalizadas. Aquí, el usuario observa el resultado del proceso de monitoreo digital.

Para ello, existe un módulo GLCD. En éste se muestran los valores tomados desde los sensores en tiempo real.

CAPÍTULO III

III. DESARROLLO

3.1. CARACTERIZACIÓN DEL HARDWARE

Puesto que la concepción del dispositivo es de aplicación universal, el vehículo escogido para su implementación no influye en la caracterización del sistema. Por lo tanto, luego de implementar el módulo en éste vehículo, es posible su aplicación en vehículos con ligeros cambios en firmware y hardware.

A continuación se realiza la determinación de los componentes y su configuración, de manera que puedan apegarse a los requisitos del sistema y a las funciones concebidas en el diagrama de bloques.

3.1.1. SUBSISTEMA DE SENSADO

3.1.1.1. Presión barométrica

Para la medición de esta variable se tuvo a disposición dos sensores diferentes. El primero, el SCP1000, con rango de medición entre 30kPa y 120kPa, compensación de linealidad y de temperatura, comunicación I^2C y SPI, entre otras. La segunda opción, el sensor MPX4115, con máximo error de 1.5%, respuesta analógica lineal, rango de medición entre 15kPa y 115kPa.

Al final se escogió el sensor MPX4115 de FREESCALE[1], las razones más importantes se basan en que el código para el microcontrolador es menos extenso y más simple, ya que no se necesitaría entablar comunicación serial; además de que su costo es la mitad del otro.

[1] FREESCALE: Fabricante estadounidense de sensores de aceleración, presión y proximidad de alta calidad y 100% compatibles con microcontroladores.

La tensión de salida del sensor (0,13 – 4,725 voltios) es proporcional a la presión atmosférica absoluta y es sumamente sensible para detectar variaciones del orden de décimas de milibar, características que lo que lo hacen idóneo para su empleo como barómetro.

Su consumo de corriente típico es de unos 7mA, factor que no cargaría en demasía a los reguladores de voltaje. La figura 3.1 muestra su disposición en el sistema.

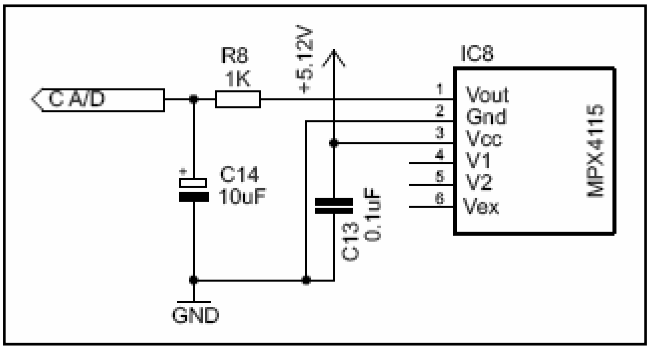


Figura 3.1: Circuito del sensor MPX4115

El tratamiento de la señal proporcionada por el sensor, no requiere de mayor cuidado, más que de la implementación de un filtro pasabajo formado por un polo RC. Además, C13, un capacitor de desacople, asegura la no inserción de voltajes inducidos hacia el suplemento de voltaje del sensor. La ecuación 3.1 indica el cálculo de la frecuencia de corte del filtro mencionado.

$f_{corte} = \frac{1}{2\pi \cdot R_8 \cdot C_{14}}$	Ecuación 3.1: Frecuencia de corte de filtro pasabajo RC

$$f_{corte} = \frac{1}{2\pi \cdot 1K\Omega \cdot 10\mu F} = 15.91Hz$$

3.1.1.2. Temperatura del habitáculo

Para las mediciones tanto de temperatura en el habitáculo, como de temperatura en el exterior, el sensor LM35 de NATIONAL[2] fue seleccionado. Sus características relevantes para la concepción del proyecto son:

- Precisión calibrada de 1ºC y rango de medición que abarca desde -55º a +150ºC.
- Presentación en diferentes encapsulados, siendo el más común el to-92.
- Respuesta lineal equivalente a 10mV/ºC.
- Baja impedancia de salida.
- Bajo costo.
- Rango de alimentación comprendido entre 4 y 30 voltios.
- Baja corriente de alimentación (60uA).

Como se puede observar en la figura 3.2, el LM35 tiene una conexión sumamente sencilla, salvo el capacitor de desacople C12, que evita la inserción de corrientes parásitas. El circuito formado por R7 y C18, suaviza el voltaje de respuesta, para evitar fluctuaciones significantes.

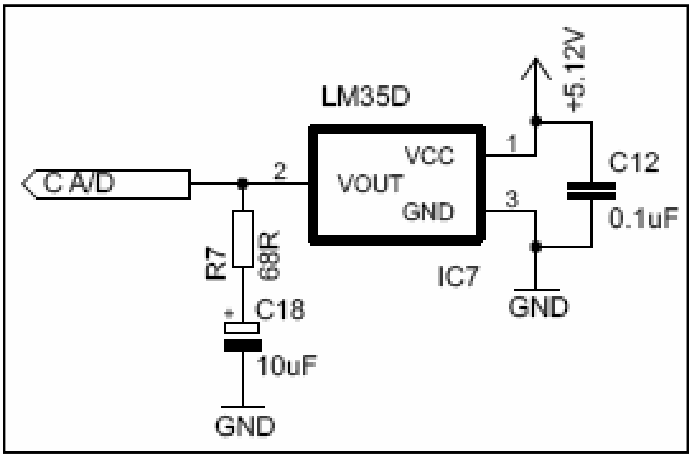


Figura 3.2: Circuito de medición de temperatura del habitáculo

[2] NATIONAL: Compañía líder en la creación de sistemas electrónicos que consumen menos energía y pueden generar menos calor.

3.1.1.3. Temperatura del ambiente

Como se acotó en el ítem anterior, el sensor LM35 es el elemento indispensable para la medición de temperaturas en el sistema. En particular, la determinación de la temperatura exterior, se realiza colocando el sensor remotamente en la parte externa del vehículo, adherido a la carrocería. Su conexión con el módulo electrónico se hace a través de conectores DB9 y cable blindado, característica que disminuye en alto grado, la inclusión de voltajes parásitos generados por diversos elementos del vehículo. La figura 3.3 muestra lo detallado.

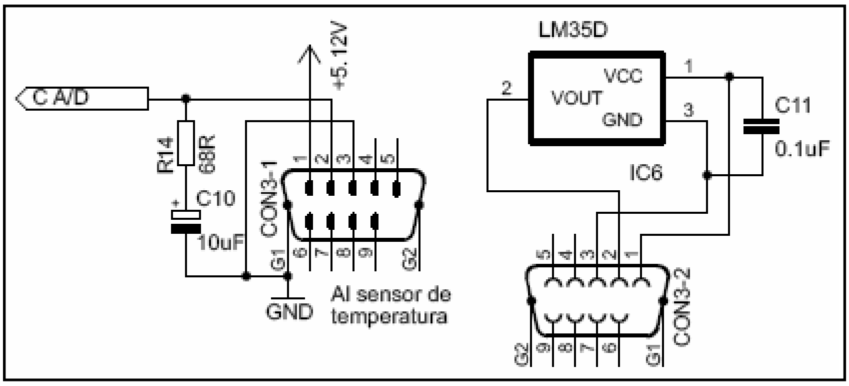


Figura 3.3: Circuito de medición de temperatura del ambiente

Cabe destacar que el circuito pertinente es exactamente igual al del medidor de temperatura del habitáculo y por lo tanto se aplica el mismo criterio de diseño.

3.1.1.4. Aceleración e inclinación

Para obtener los valores de inclinación y movimiento del vehículo, se utilizó el sensor MMA7260QT de FREESCALE, ya que es de última tecnología y proporciona valores de aceleración para tres ejes X, Y y Z.

Las siguientes son algunas de las características importantes del sensor:

Tabla III.1: Características del sensor MMA7260

CARACTERÍSTICAS DEL SENSOR MMA7260	
Voltaje nominal de operación	3.3V
Consumo de corriente	500µA / 3µA en modo SLEEP
Peso	25g / 0.9oz
Sensibilidad configurable	1.5g, 2g, 4g y 6g
Resistencia a altos impactos	+-5000g

Se usa al sensor para mediciones estáticas y dinámicas de bajas aceleraciones. El tope de escala escogido es de 1.5g, con una respuesta analógica del sensor de 800mV por cada gravedad, dotando al sistema de alta sensibilidad y resolución.

La aceleración de la gravedad es un estímulo estático y constante que afecta a los ejes de medición según su ángulo de inclinación. Así, la gravedad incidirá proporcionalmente sobre cada eje hasta llegar al tope de 1g cuando cada uno se haya desplazado 90°. Este es el principio para la medición de inclinación del vehículo: conocer la desviación con respecto a la tensión de OFFSET, despreciando las variaciones por aceleraciones dinámicas.

Como se observa en la figura 3.4 el acelerómetro remoto IC9 se conecta al módulo principal a través de un cable blindado de nueve conductores y conectores DB9 (CON2-1 y CON2-2). Tanto C16 como C17 se comportan como cortocircuitos ante los cambios bruscos de voltaje (transientes). También evitan que los picos de ruido, se desplacen hacia el conversor análogo – digital del microcontrolador.

Los polos R4 – C7, R5 – C8 y R6 – C9 son filtros pasabajos cuya frecuencia de corte calculada según la ecuación 3.1 es de 15.91Hz.

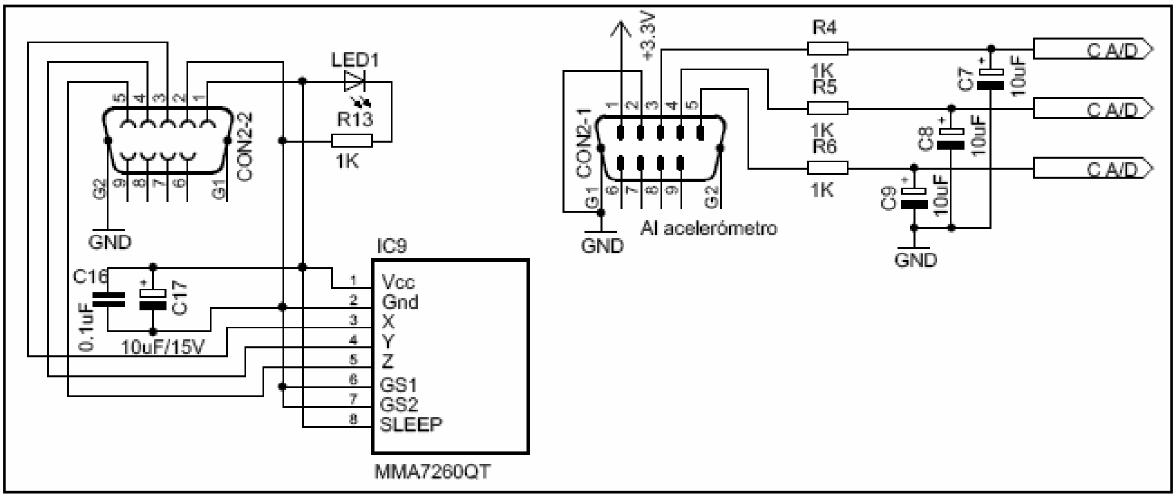


Figura 3.4: Conexión del sensor de aceleración MMA7260QT

3.1.1.5. Posición global

El GPS, es un dispositivo que recibe señales de radio, proporcionando información de navegación (aérea, automovilística, náutica, etc.), mapas (gasolineras, atracciones turísticas, restaurantes, etc.) y posicionamiento (identificación de la posición de un bote, de un auto, de un excursionista, etc.), mediante 24 satélites que se encuentran estratégicamente situados en el espacio. De de estos 24, al menos 4 siempre serán visibles para cualquier receptor GPS.

Para el proyecto se escogió el GPS GS405 del fabricante SIRF debido a que es de aplicación automotriz y tiene una antena incluida de alta sensibilidad, característica que le permite montarse en aplicaciones portátiles.

A continuación se presenta una tabla con las especificaciones más importantes de este módulo:

Tabla III.2: Características del módulo GPS GS405

CARACTERÍSTICAS DEL MÓDULO GPS GS405	
Frecuencia de operación	1575.42MHz ± 2MHz
Voltaje de alimentación	3.3Vdc (típico)
Consumo de corriente	75 mA (típico)
Ancho de haz	> 120 ° (típico
Temperatura de operación	-40 A +85 ° C
Dimensiones	10 mm x 17 mm
Velocidad de transmisión nominal	4800bps
Protocolo de mensajes	NMEA-0183 ASCII (NATIONAL MARINE ELECTRONICS ASSOCIATION)
Frecuencia de salida	1Hz
Precisión	10m posición, 0.1m/s velocidad, 1µs tiempo
Tiempo de adquisición de la primera lectura arreglada	Alrededor de 42 segundos
Canales	20

Tal como se observa en la figura 3.5, el módulo GPS mantiene una conexión simple con el microcontrolador a través del puerto UART.

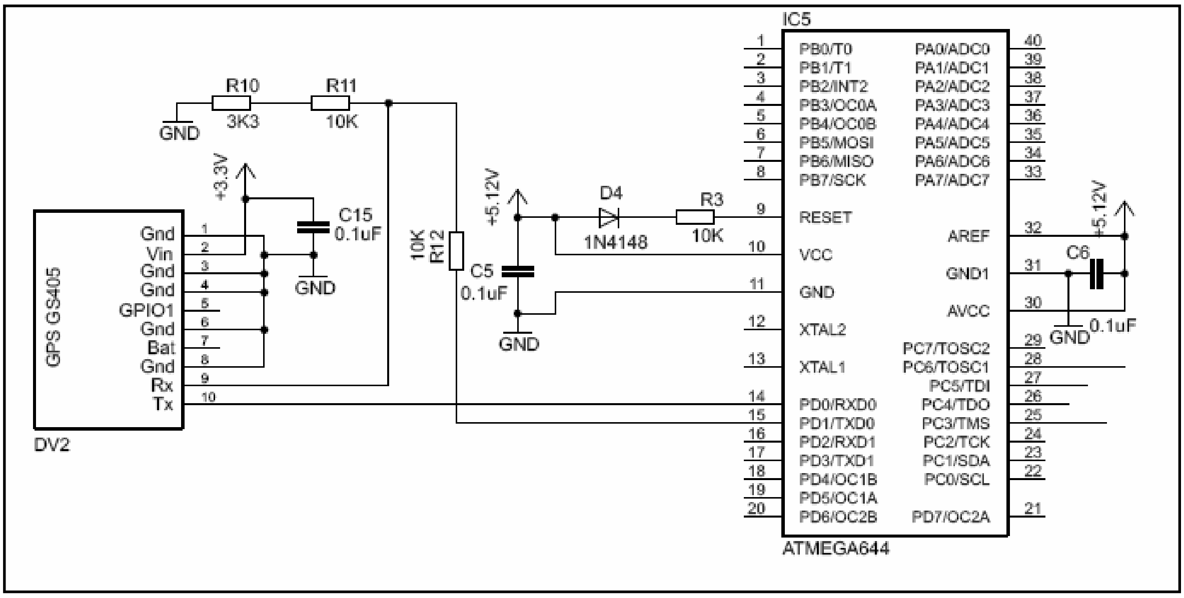


Figura 3.5: Conexión del GPS GS405

Las resistencias R10, R11 y R12, forman un divisor de voltaje de 2/3, calculado según el modelo 3.2. Su propósito es adecuar la señal lógica de alrededor de 5V proveniente del pin TX del microcontrolador, en una señal de 3.4V apta para el pin RX del módulo GPS.

$V_{rxGPS} = V_{txMICRO} \dfrac{(R_{10} + R_{11})}{(R_{10} + R_{11}) + R_{12}}$	Ecuación 3.2: Divisor de voltaje

$$V_{rxGPS} = 5.12V \frac{(10+10)K\Omega}{((10+10)+10)K\Omega} = 3.41V$$

3.1.2. SUBSISTEMA DE PROCESAMIENTO

La base del sistema es el microcontrolador ATMEGA644 de ATMEL. Entre las razones para su selección están su alta inmunidad a la interferencia eléctrica y su gran memoria de programa (64Kbytes). Estas características son importantes para su aplicación automotriz y su uso en el desarrollo de una interfaz gráfica con GLCD, respectivamente.

Las siguientes son varias características adicionales, convenientes en la concepción del sistema:

- Memoria FLASH de 64Kbytes.
- Memoria RAM de 4Kbytes.
- Tres módulos temporizadores (TIMER0 a TIMER2).
- Módulo UART (Transmisor receptor asincrónico universal), con registros de trabajo independientes para transmisión y recepción.
- Conversor análogo – digital de hasta 8 canales con resolución de 10bits y tiempo de adquisición programable.
- Oscilador interno RC calibrado de 8Mhz con un THROUGHPUT de 8MIPS,
- Multiplicación en hardware en un ciclo de instrucción.
- Niveles de prioridad para las interrupciones.
- Arquitectura optimizada para compilación en lenguaje C, con set extendido de instrucciones.

- Rango de voltaje de operación entre 2.7V y 5.5V.
- Capacidad de retención de datos de 100 años a 25°C.

Una de las ventajas más importantes del microcontrolador ATMEGA644 con respecto a PIC, es su capacidad de procesamiento más rápida, que nos permitirá realizar proyectos de alta rigurosidad y nivel académico.

En la Figura 3.6, se muestra el diagrama de bloques del ATmega644.

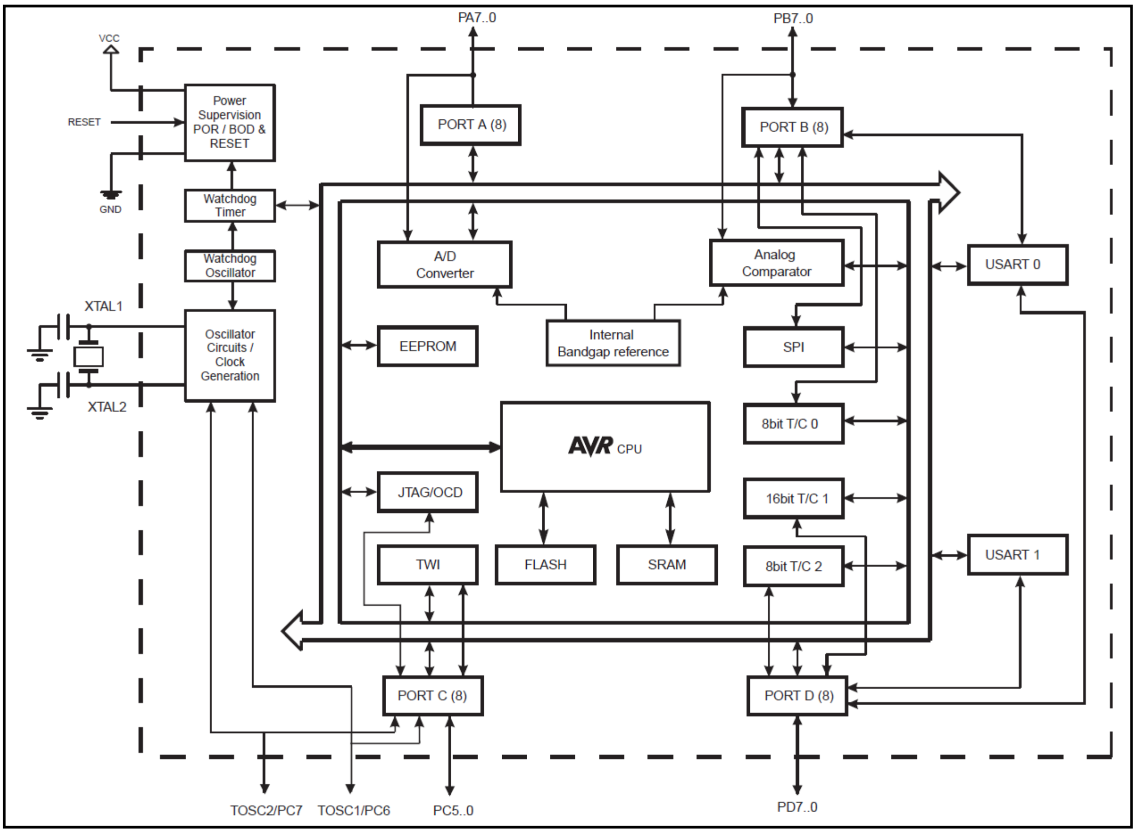


Figura 3.6: Diagrama de bloques del ATMEGA644

El ATMEGA644 se encarga del procesamiento de la información, al adquirir todos los datos de las variables externas, manipularlos y entregarlos de forma adecuada para su visualización.

A continuación en la Figura 3.7, se observa el PINOUT del ATMEGA644.

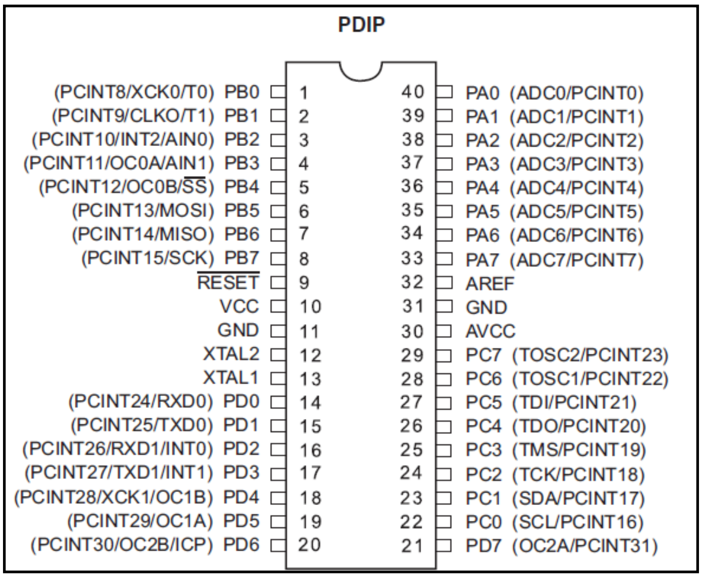


Figura 3.7: PINOUT del ATMEGA644

3.1.2.1. Conexión del microcontrolador de procesamiento

La Tabla III.3 resume el destino de conexión de cada uno de los pines del microcontrolador. Define además si son entradas o salidas, y en el caso de ser entradas, si éstas son análogas o digitales.

Algunas características especiales de configuración del hardware del microcontrolador son:

- La referencia del conversor análogo – digital es el mismo voltaje de alimentación (5.115V).
- El oscilador del microcontrolador es interno de 8Mhz.

Tabla III.3: Configuración de puertos del microcontrolador de procesamiento

CONFIGURACIÓN DE PUERTOS MICROCONTROLADOR ATMEGA644					
NOMBRE		PIN	E/S	A/D	FUNCIÓN / OBSERVACIÓN
PORTA	PA0/ADC0	40	E	A	EJE X ACELERÓMETRO
	PA1/ADC1	39	E	A	EJE Y ACELERÓMETRO
	PA2/ADC2	38	E	A	EJE Z ACELERÓMETRO
	PA3/ADC3	37	-	-	-
	PA4/ADC4	36	E	A	TEMPERATURA DEL HABITÁCULO
	PA5/ADC5	35	E	A	TEMPERATURA DEL EXTERIOR
	PA6/ADC6	34	E	A	PRESIÓN BAROMÉTRICA
	PA7/ADC7	33	-	-	-
PORTB	PB0/TO	1	E/S	D	DB0 GLCD
	PB1/T1	2	E/S	D	DB1 GLCD
	PB2/INT2	3	E/S	D	DB2 GLCD
	PB3/OCOA	4	E/S	D	DB3 GLCD
	PB4/OCOB	5	E/S	D	DB4 GLCD
	PB5/MOSI	6	E/S	D	DB5 GLCD
	PB6/MISO	7	E/S	D	DB6 GLCD
	PB7/SCK	8	E/S	D	DB7 GLCD
PORTC	PC0/SCL	22	-	-	-
	PC1/SDA	23	-	-	-
	PC2/TCK	24	-	-	-
	PC3/TMS	25	S	D	CE GLCD
	PC4/TDO	26	S	D	WR GLCD
	PC5/TDI	27	S	D	RD GLCD
	PC6/TOSC1	28	S	D	C/D GLCD
	PC7/TOSC2	29	S	D	RST GLCD
PORTD	PD0/RXD0	14	E	D	TX GPS
	PD1/TXDO	15	S	D	RX GPS
	PD2/RXD1	16	-	-	-
	PD3/TXD1	17	-	-	-
	PD4/OC1B	18	-	-	-
	PD5/OC1A	19	-	-	-
	PD6/OC2B	20	-	-	-
	PD7/OC2A	21	-	-	-

3.1.3. SUBSISTEMA DE VISUALIZACIÓN

Se maneja un visualizador gráfico que permite al usuario observar en tiempo real, gráfica y numéricamente el valor de las variables medidas.

Este visualizador es una GLCD de 240x128 píxeles, gobernada por el procesador TOSHIBA T6963C. Algunas de las características específicas del módulo empleado, el JHD240128D, son:

- Modo de pantalla STN.
- Tipo de pantalla TRANSFLECTIVA positiva.
- Tipo de módulo COP (CHIP ON BOARD).
- Luz de retroiluminación (BACKLIGHT) verde.
- Alimentación única de 5V.

Las razones para preferirla sobre otras LCD’s son:

- Costo de adquisición moderado.
- Gran área de visualización, útil para poder mostrar digital y gráficamente el valor de todas las variables medidas.
- Alta velocidad de respuesta.

Tal como se observa en la figura 3.8, las patitas PC<3:7> del ATMEGA644, configuradas como salidas, manejan los pines de control; el bus de datos está implementado en las salidas PB<0:7>.

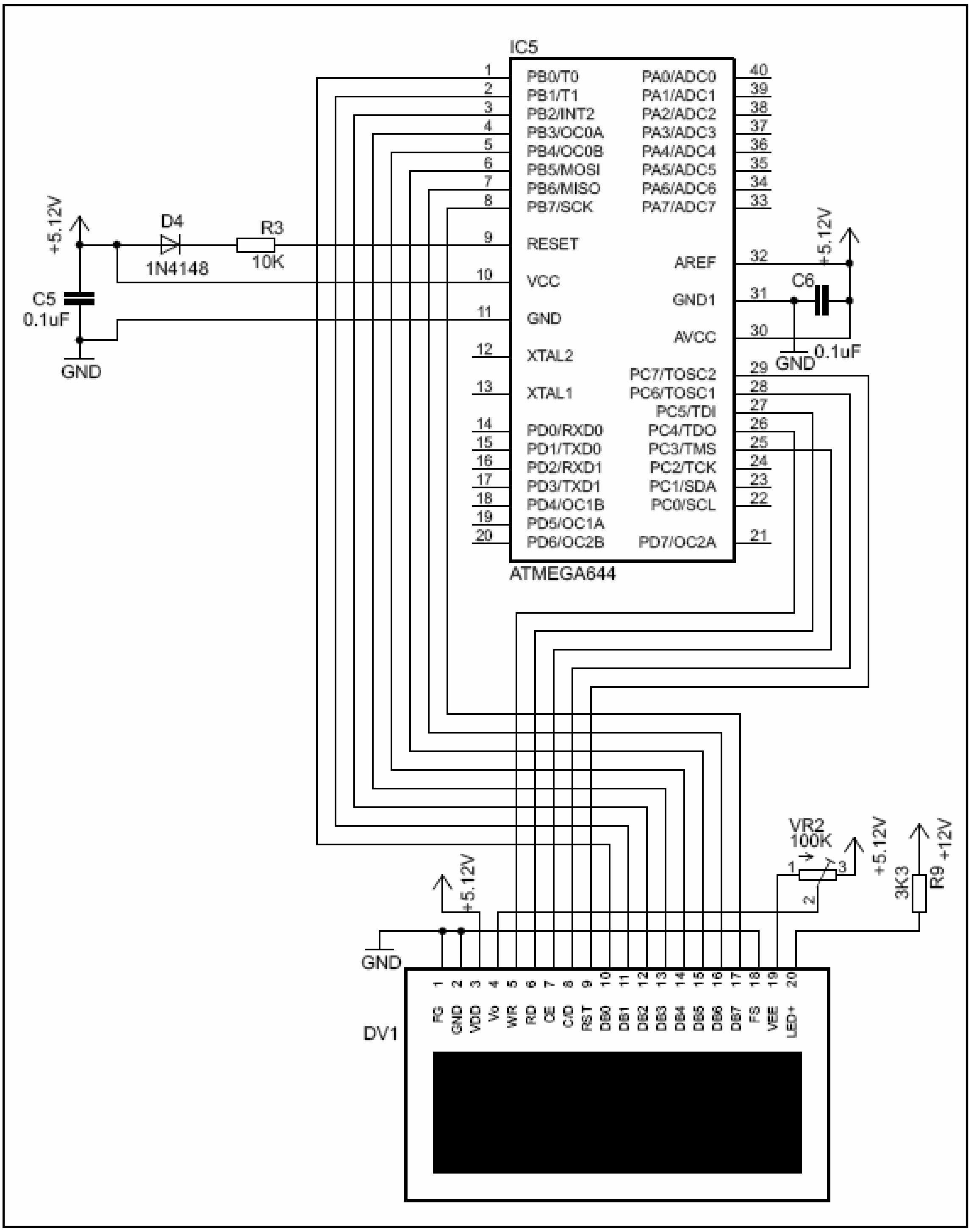


Figura 3.8: Diagrama de conexión entre el módulo GLCD y el microcontrolador

Los LED's de retroiluminación de la pantalla GLCD, son alimentados desde el suministro de corriente del vehículo y a través de la resistencia limitadora de corriente R9. Esto se hace debido a que el consumo relativamente alto de los LED's, provocaría sobrecalentamiento en los reguladores lineales de voltaje.

El ajuste de contraste se realiza al regular el voltaje que polariza al pin VO, mediante el potenciómetro VR2. Es importante resaltar que el voltaje negativo necesario para el contraste, es generado por el propio módulo GLCD a través del pin VEE.

3.1.4. ALIMENTACIÓN DEL SISTEMA

La tensión de alimentación se obtiene de la batería del automóvil, se filtra y se aplica regulada al resto del circuito. La fuente convierte el voltaje de casi 14V de entrada en dos tensiones constantes de 5.115V y 3.3V. El primer voltaje alimenta a todos los elementos del circuito, a excepción del módulo GPS y el acelerómetro que son alimentados por el segundo voltaje.

En la figura 3.9 la fuente de alimentación consta de un rectificador (D3, D1), una protección por sobretensión (R1, D2), filtros de desacople (C1, C2, C3, C4), dos reguladores lineales fijos de 9V (IC1, IC3), un regulador variable ajustado a 5.115V (IC2) y un regulador fijo de 3.3V (IC4).

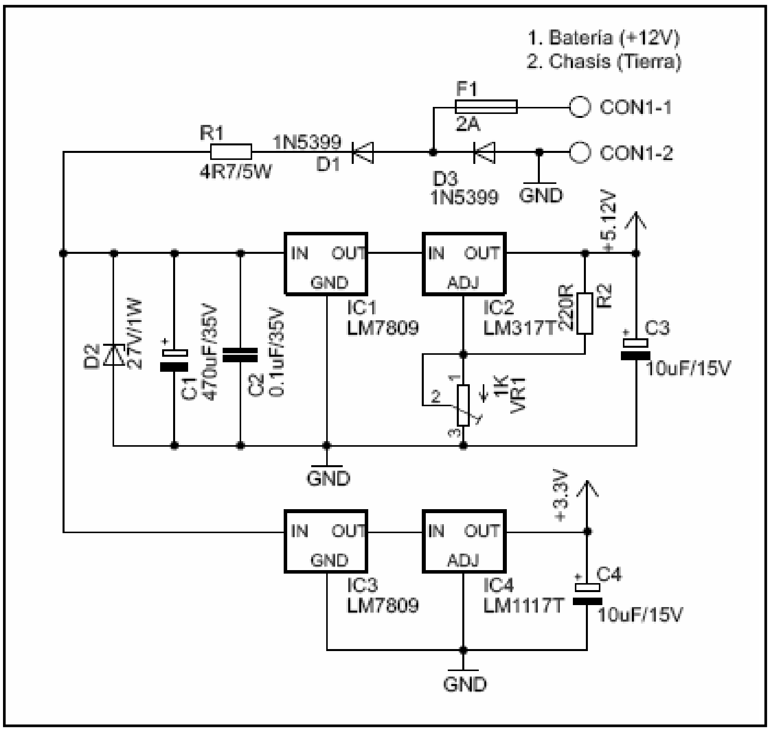


Figura 3.9: Circuito de alimentación del módulo electrónico

El rectificador recorta picos negativos de ruido y protege el circuito cuando por error, se invierte la polaridad de la batería. Si esto sucede, el fusible F1 se destruye y el módulo se bloquea. De allí que la corriente nominal del fusible es la misma que del diodo D3.

La resistencia R1 y el zener D2, resguardan el circuito de sobrevoltajes instantáneos. Estos pueden escaparse desde el alternador cuando se quita contacto del motor.

La regulación de voltaje se hace en etapas: primero se regula a 9V y luego a 3.3 y 5.12V simultáneamente. De esta manera, la caída de voltaje de 10.7V y 8.88V respectivamente (considerando un voltaje de entrada de 14V), se disipa en algunos integrados. Así, los reguladores de voltaje se calientan menos.

La ecuación 3.3, extraída y adaptada desde la hoja de datos del LM317T, indica el voltaje de salida obtenido en IC2 con la configuración de resistencias R2 y VR1.

$V_{regulación} \cong \frac{R_2 + VR_1}{R_2} \cdot (1.25V)$	Ecuación 3.3: Voltaje de salida en regulador variable LM317

$$V_{regulación} \cong \frac{220\Omega + 681.12\Omega}{220\Omega} \cdot (1.25V) = 5.12V$$

La corriente que pueden suministrar los reguladores según las hojas de datos, es de máximo 1A. Este valor es suficiente para satisfacer las necesidades de potencia del circuito.

3.2. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO GENERAL

El diagrama esquemático general de la figura 3.10 agrupa todos los circuitos estudiados, más ciertos componentes de igual importancia como son los condensadores de desacople. Así se evita que corrientes parásitas afecten a microcontroladores, módulos de visualización y de radiofrecuencia; además se incluyen conectores necesarios en su implementación física.

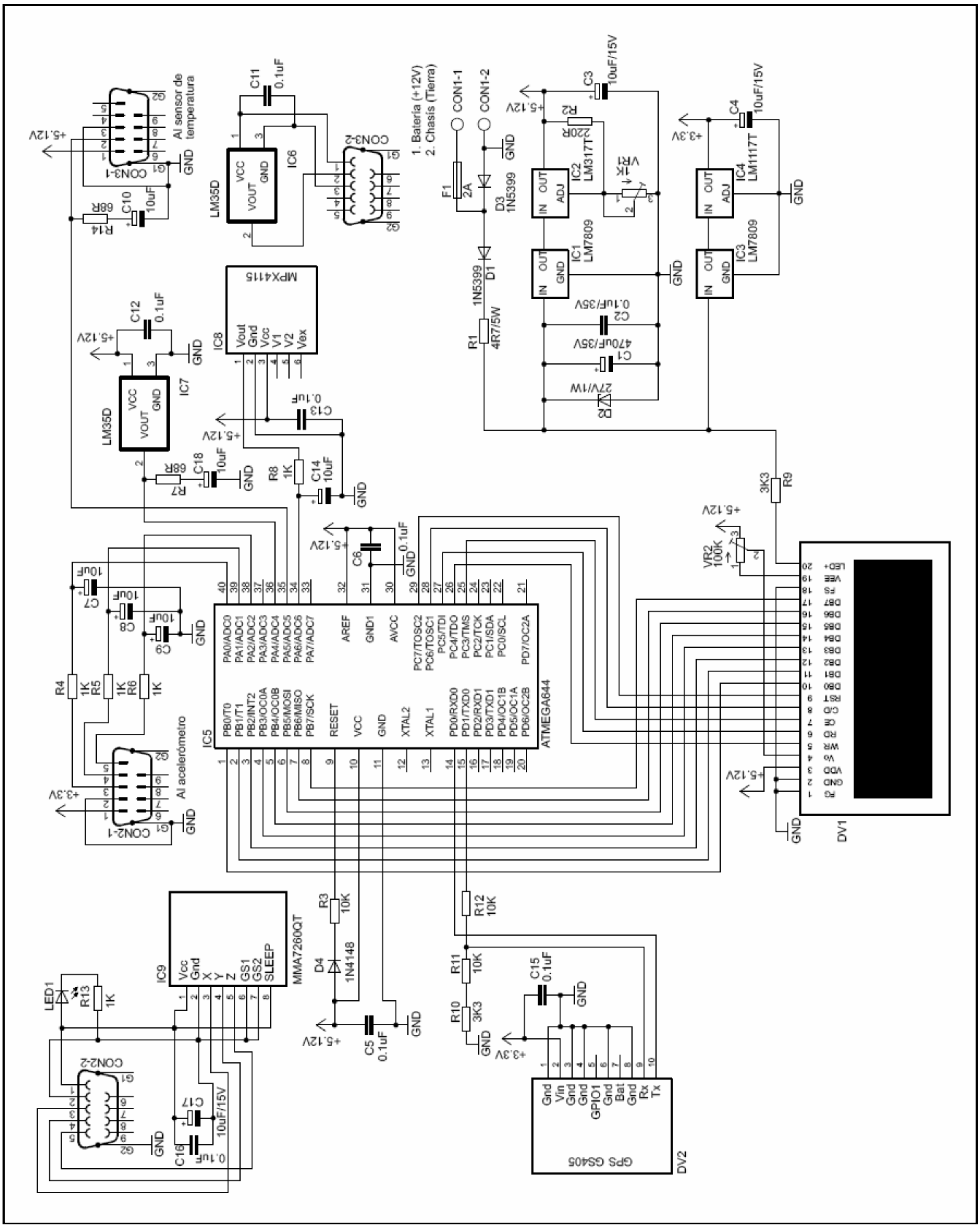


Figura 3.10: Diagrama esquemático general

3.3. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL FIRMWARE

3.3.1. CRITERIOS DE SELECCIÓN DEL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN

La tendencia actual, en lo que respecta a la programación de microcontroladores de cualquier marca y tipo, es el uso de compiladores en lenguaje C para el desarrollo de aplicaciones.

C es un lenguaje de nivel intermedio que incorpora, elementos propios del ensamblador, puede acceder a los registros del sistema y trabajar con direcciones de memoria, con la particularidad de que permite realizar las operaciones mucho más legibles, utilizar estructuras de datos y otras características propias de los lenguajes de alto nivel.

Este lenguaje permite un manejo abstracto independiente del hardware, a diferencia del ensamblador, pero sin perder mucho del poder y eficiencia que tienen los lenguajes de bajo nivel. Así, es aplicable para desarrollos que necesiten alto grado de optimización.

Según los expertos, posiblemente el lenguaje C no permita desarrollar un programa de forma rápida o segura, pero el hecho real es que si algo no se puede hacer con C, posiblemente no se pueda crear con ningún otro lenguaje de programación.
Algunas de las características más importantes que definen al lenguaje son:

- Tamaño pequeño.
- Uso extensivo de llamadas a funciones.
- Comandos breves (poco tecleo).
- Lenguaje estructurado.
- Programación de bajo nivel (nivel bit).
- Implementación de apuntadores - uso extensivo de apuntadores para la memoria, arreglos, estructuras y funciones.

Las diversas razones por la cual se ha convertido en un lenguaje de uso profesional son:

- El uso de constructores de alto nivel.
- El poder manejar actividades de bajo-nivel.
- El generar programas eficientes.
- La posibilidad de poder ser compilado en una variedad de microcontroladores, con pocos cambios (portabilidad).

Un punto en contra es que tiene una detección pobre de errores, lo cual en ocasiones es problemático para los principiantes.

3.3.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL COMPILADOR CODEVISION AVR

El compilador es la aplicación encargada de traducir un lenguaje de alto nivel al código de máquina para una determinada arquitectura, depositándolo en un fichero binario, que un microcontrolador será capaz de ejecutar.

El compilador CODEVISION AVR se basa en proyectos en lenguaje C, e incluye un generador de código automático llamado CODEWIZARD AVR que genera todo el código necesario para la inicialización de los periféricos internos de los microcontroladores AVR, así como de algunos periféricos externos (usando librerías que también incluye). Dichas librerías dan soporte a un gran número de aparatos frecuentemente usados como son pantallas LCD, relojes de tiempo real RTC, sensores de temperatura, UART, entre otros.

CODEVISION dispone también de un programa terminal que puede enviar y recibir archivos y también visualizar los datos recibidos o enviarlos en hexadecimal o ASCII.

3.3.3. FIRMWARE DEL MICROCONTROLADOR DE PROCESAMIENTO

3.3.3.1. Programa principal

Como se observa en la figura 3.11, el programa empieza con la inicialización de pines, configuración de módulos internos y activación de interrupciones. Luego permanece en un bucle infinito, esperando a que se realice una interrupción por desbordamiento del TIMER0 y le indique que variable muestrear a través de un registro bandera.

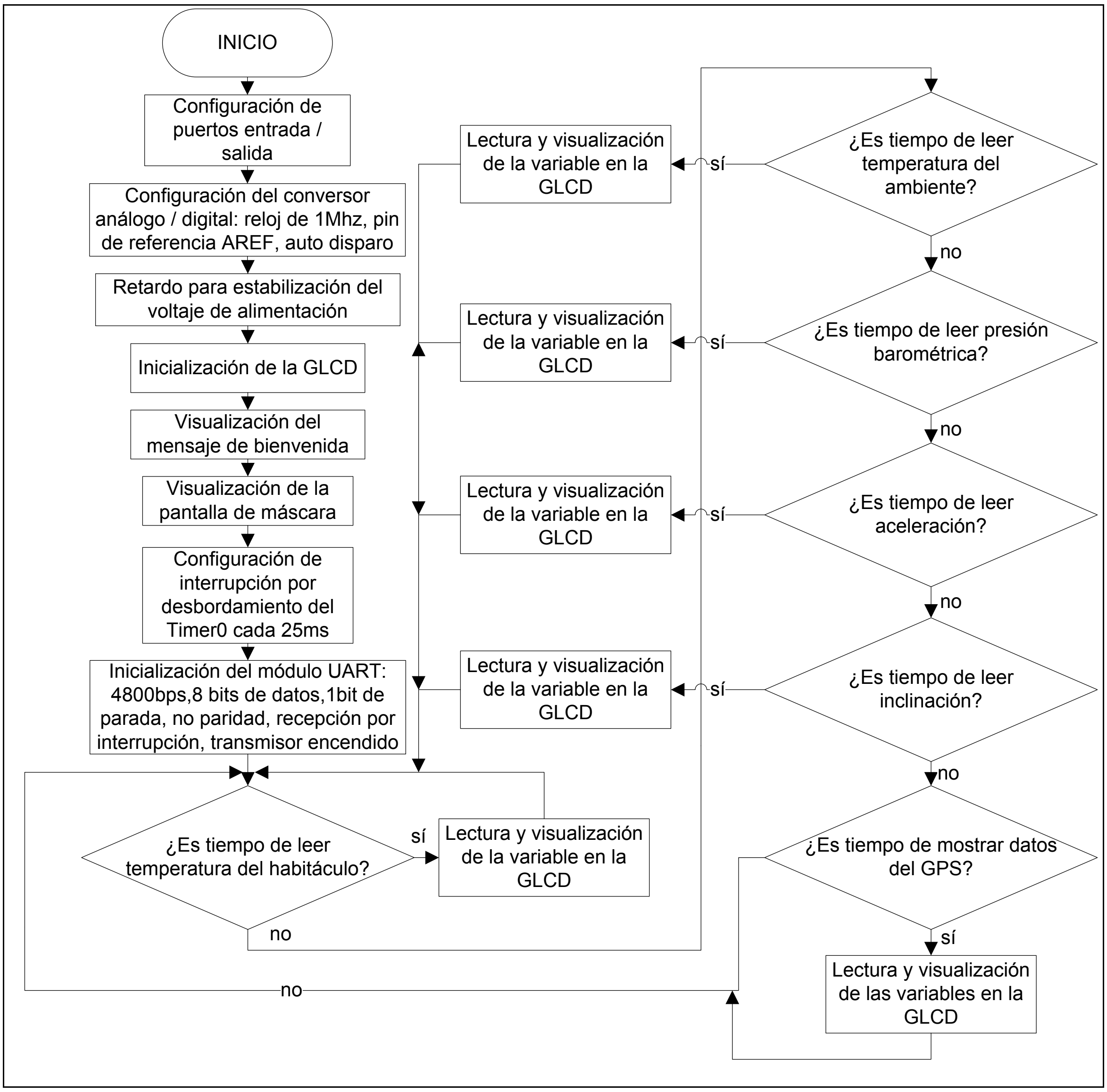


Figura 3.11: Diagrama de flujo del programa principal del microcontrolador

Las variables muestreadas por el programa son:

- Temperatura del habitáculo del vehículo.
- Temperatura del ambiente exterior.
- Presión barométrica.
- Aceleración del vehículo.
- Inclinación.
- Datos de posicionamiento global (GPS).

3.3.3.2. Subrutinas especiales

A continuación se detallan los procedimientos realizados en la digitalización de las variables.

3.3.3.2.1. Medición de temperatura del habitáculo

Una característica importante del hardware es que la alimentación y la referencia de voltaje para el conversor análogo – digital, se hacen con 5.115V. Por tanto, el valor resultante de la conversión con la que se adquiere el voltaje, se multiplica por 5.115V y se divide entre 1023 (resolución del conversor).

Este valor estratégico de voltaje hace que el cociente de la división (5.115V/1023) sea exacto, resultando en menores imprecisiones por aproximación en los cálculos.

El valor se multiplica también por 100 debido a que el sensor de temperatura LM35 tiene una respuesta lineal de 10mV por grado centígrado. Así, al simplificar el factor de conversión (1°C/10mV), se obtiene la relación 100°C/ V.

$V = \frac{5.115}{1023} * Valor_{CAD} * 100$	Ecuación 3.4: Digitalización de la temperatura desde el sensor LM35

El proceso que realiza el sistema para la digitalización y visualización de esta variable se puede observar en la figura 3.12.

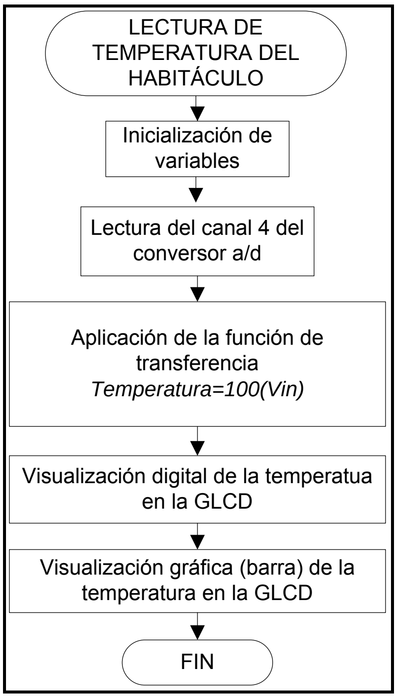


Figura 3.12: Diagrama de flujo de la subrutina de adquisición y visualización de la temperatura del habitáculo

A pesar de que el sensor de temperatura usado puede medir entre -55ºC y +150ºC, el rango de medición del sistema está entre 0°C y 50°C para la visualización gráfica, y entre 0°C y +150°C para la visualización digital. Esto debido a que en muy pocos casos se encontrará en el Ecuador carreteras con temperaturas bajo cero.

3.3.3.2.2. Medición de temperatura del exterior

La subrutina es exactamente igual a la anterior ya que toma datos del mismo tipo de sensor, ubicado remotamente en la parte externa del vehículo. Así, el criterio es el mismo a diferencia de que se adquiere la señal desde el canal 5 del conversor análogo – digital. El diagrama de bloques de la figura 3.13 muestra lo descrito.

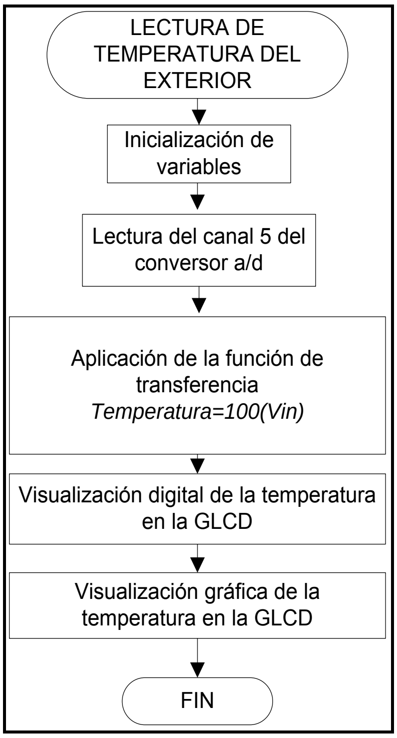


Figura 3.13: Diagrama de flujo de la subrutina de adquisición y visualización de la temperatura exterior

El rango de temperaturas que puede medir el sistema, es el mismo que para la medición de la temperatura interior (0°C a 150°C).

3.3.3.2.3. Medición de presión barométrica

El procedimiento de multiplicación del valor obtenido desde el conversor análogo – digital por la resolución del conversor y por el inverso del divisor de voltaje, también se realiza aquí. El valor que se obtiene está en voltios y para transformarlo a presión barométrica, se utiliza la función de transferencia que caracteriza al sensor MPX4115. Esta ecuación es tomada de la hoja de datos del dispositivo y adaptada para las condiciones del hardware del sistema.

$P = 21.7226 * V_{IN} + 10.5556$	Ecuación 3.5: Función de transferencia del sensor MPX4115

En la ecuación 3.5, P representa a la presión barométrica en miles de Pascales (KPa) y V_{IN} al voltaje (V) medido en el canal 6 del conversor análogo – digital del microcontrolador.

La siguiente figura indica el flujo de la subrutina mencionada.

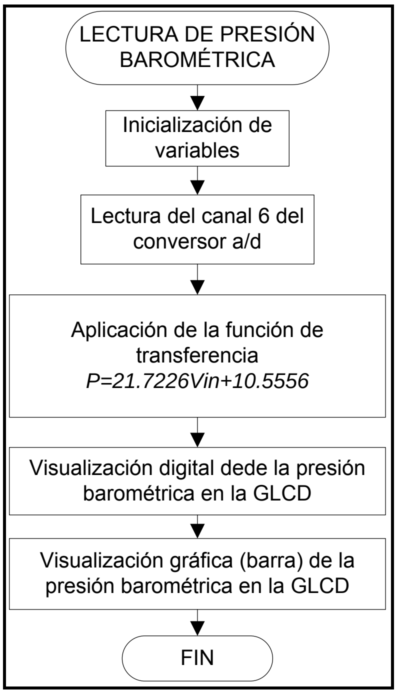


Figura 3.14: Diagrama de flujo de la subrutina de adquisición y visualización de la presión barométrica

Los topes de escala de la medición se encuentran entre 15kPa y 115kPa, el mismo rango que puede medir el sensor.

3.3.3.2.4. Medición de aceleración del vehículo

Esta medición es fruto de la respuesta analógica del acelerómetro MMA7260QT. Luego de transformar el valor resultante del conversor análogo – digital a valores de voltaje, igual que en los procesos anteriores, se utiliza la función de transferencia establecida por las características del sensor dadas en su hoja de datos.

El proceso de determinación del modelo matemático es simple. Únicamente se tiene en cuenta que para el tope de escala de ±1.5g, el sensor responde incrementando o decrementando 0.8V por cada gravedad medida. Cabe resaltar que el voltaje correspondiente a 0g tiene un OFFSET equivalente al voltaje de alimentación del sensor, dividido en dos (3.3V/2=1.65V). La siguiente es la función de transferencia:

$G = (5/4)(V_{IN} - 1.65)$	Ecuación 3.6: Función de transferencia del sensor MMA7260QT calibrado para ±1.5g

El anterior modelo se aplica a las mediciones de aceleración del eje x (coincidente con el eje longitudinal) y del eje y (coincidente con el eje transversal), en el automóvil. La convención utilizada establece que las gravedades de aceleración (incremento de velocidad en el vehículo) son positivas y las gravedades de deceleración (frenado o decremento de velocidad) son negativas, a lo largo del eje x. Por otro lado, las gravedades con dirección a la derecha son positivas, y a la izquierda son negativas, en el eje y.

En la figura 3.15 se muestra la subrutina correspondiente a esta medición.

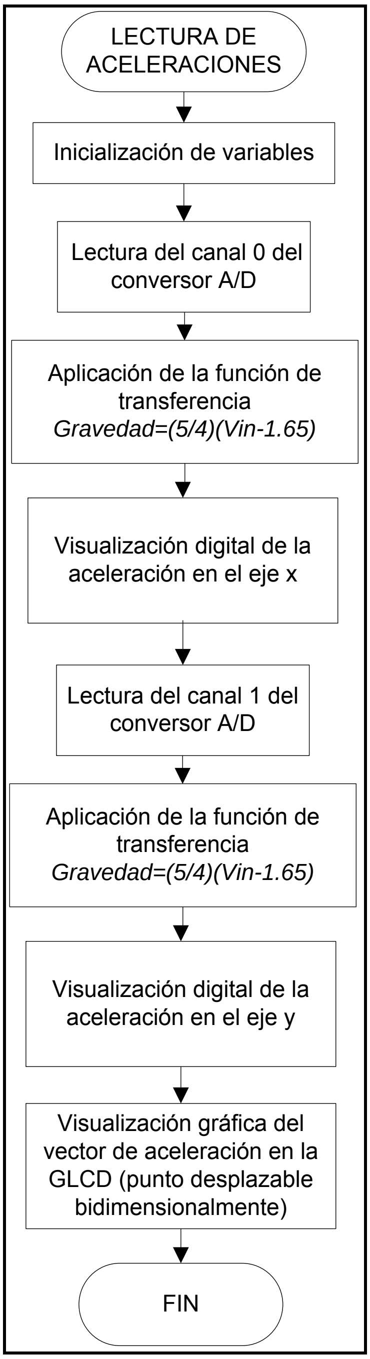


Figura 3.15: Diagrama de flujo de la subrutina de adquisición y visualización de la aceleración del vehículo

La visualización gráfica de la medición con rango de -1.5g hasta +1.5g para los dos ejes, se realiza al representar el vector resultante de las componentes de aceleración en el eje x y eje y.

3.3.3.2.5. *Medición de inclinación del vehículo*

Este parámetro se mide a partir de las mismas señales de aceleraciones en el eje x y eje y proporcionadas por el sensor MMA7260QT, pero interpretadas y visualizadas de una forma distinta.La interrupción de esta medición se observará en la figura 3.16.

Como se detalló en líneas previas, la aceleración de la gravedad estimula estáticamente a los ejes de medición del sensor, de manera proporcional a su ángulo de posición respecto a la horizontal. Tal es el caso que estáticamente, para un determinado eje en posición horizontal, el valor que dará el sensor será el de OFFSET (voltaje de alimentación dividido entre dos) equivalente a 0g. Por otro lado, si se gira al sensor hasta colocar al mismo eje en 90° respecto a la horizontal, la influencia de la gravedad terrestre hará que la respuesta del sensor sea de +1g o -1g, es decir el voltaje de OFFSET sumado o restado 0.8V, según la dirección en que se giró el dispositivo. De la anterior deducción y teniendo los factores de conversión (90°=1g) y (1g=0.8V), se concluye con la siguiente función de transferencia:

$\acute{A}ngulo = 112.5(V_{IN} - 1.65)$	Ecuación 3.7: Función de transferencia del sensor MMA7260QT para medición de ángulo de inclinación

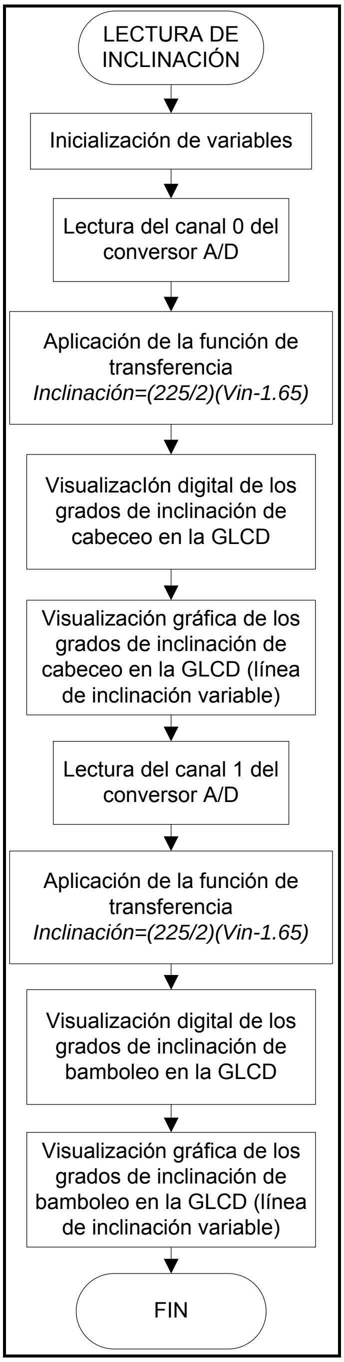


Figura 3.16: Diagrama de flujo de la subrutina de adquisición y visualización de las inclinaciones de bamboleo y cabeceo del vehículo

Las convenciones para estas mediciones limitan un rango de medición comprendido entre -45° y +45° para cabeceo, siendo positivo el giro hacia adelante y negativo el giro hacia atrás. Para bamboleo, se tiene un rango similar de -45° para la máxima inclinación hacia la izquierda y +45° para la máxima inclinación hacia la derecha.

3.3.3.2.6. Visualización de datos desde el GPS

Antes de indicar qué hace el algoritmo para visualización de datos del GPS, es necesario poner énfasis en explicar cómo funciona el módulo GS405.

Este dispositivo se encarga de realizar el procesamiento de toda la información proveniente de la triangulación y comunicación con los satélites del sistema GNSS (sistema global de navegación por satélite). Una vez hecho esto, envía los datos a través del puerto UART a una velocidad nominal de 4800bps.

El protocolo de los mensajes enviados es el NMEA-0183, establecido según su acrónimo por la organización americana NATIONAL MARINE ELECTRONICS ASSOCIATION. Así, el receptor GPS envía por el puerto serial los siguientes tipos de mensajes:

- GGA, datos arreglados del sistema de posicionamiento global.
- GSA, medición de la precisión de lecturas y número de satélites activos GNSS.
- GSV, satélites GNSS a la vista.
- RMC, datos mínimos recomendados del sistema GNSS.

Una vez detallado lo anterior, se puede explicar el tipo de trama que se ha escogido interpretar.

Dada la concepción del sistema, diseñado como prototipo de navegación automotriz, se ha decidido indicar solo datos relevantes dentro de la información GPS. Por lo tanto, el tipo de mensaje que el microcontrolador acepta es el RMC. De esta manera, el programa se encarga de la visualización de longitud, latitud, velocidad respecto a la tierra, hora y fecha UTC (universales coordinadas ajustadas a los relojes atómicos).

Es importante resaltar que las tramas NMEA-0183 son recibidas por el microcontrolador y almacenadas en un búfer de datos. Esto se hace en segundo plano, es decir, mediante interrupciones ante la llegada de cada byte. Luego de que la trama RMC ha llegado completa, la rutina de interrupción autoriza a la rutina de visualización la impresión en la GLCD de la cadena almacenada previamente en el búfer de recepción. El diagrama de flujo de la figura 3.17 detalla lo indicado.

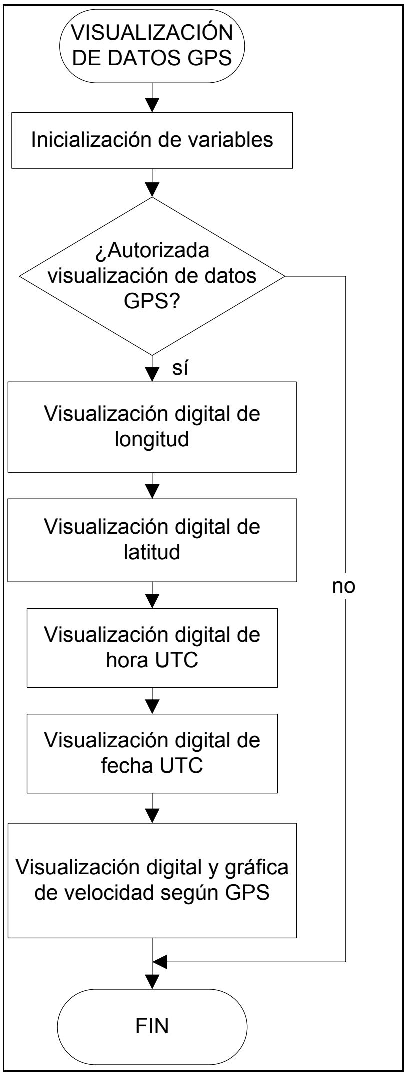


Figura 3.17: Diagrama de flujo de la subrutina de visualización de los datos GPS

3.3.3.3. Interrupciones

Las interrupciones del programa, en orden de prioridad, son:

- Desbordamiento del TIMER0.
- Dato recibido por el módulo UART.

3.3.3.3.1. Desbordamiento del TIMER0

El TIMER0, configurado como temporizador ascendente con desbordamiento cada 24.985ms, se usa para dar la base de tiempo en la lectura de variables. Para ello, se utiliza preescala de 1024. Con la ecuación 3.8 se calcula la temporización descrita:

$T = \frac{1}{f_{osc}} * preescala * (256 - TCNT0)$	Ecuación 3.8: Temporización en el TIMER0

$$T = \frac{1}{8Mhz} * 1024 * (256 - 61) = 24.985ms$$

El período de desbordamiento medido varias veces, indica cada qué tiempo el sistema adquiere y visualiza una variable. La siguiente tabla refleja lo mencionado:

Tabla III.4: Frecuencias de muestreo de las variables del sistema

FRECUENCIAS DE MUESTREO DE LAS VARIABLES DEL SISTEMA			
Variable	**Número de interrupciones del TIMER0**	**Período de muestreo (Seg)**	**Frecuencia de muestreo (Hz)**
Temperatura del habitáculo del vehículo	40	1	1
Temperatura del ambiente exterior	40	1	1
Presión barométrica	40	1	1
Aceleración del vehículo	10	0.25	4
Inclinación del vehículo	20	0.5	2
Datos de posicionamiento global (GPS)	-	1	1

Esta rutina especial de interrupción, detallada en la figura 3.18, se basa en la activación de autorizaciones cada cierto tiempo preestablecido, las mismas que serán interpretadas por el programa principal al realizar el muestreo del parámetro autorizado.

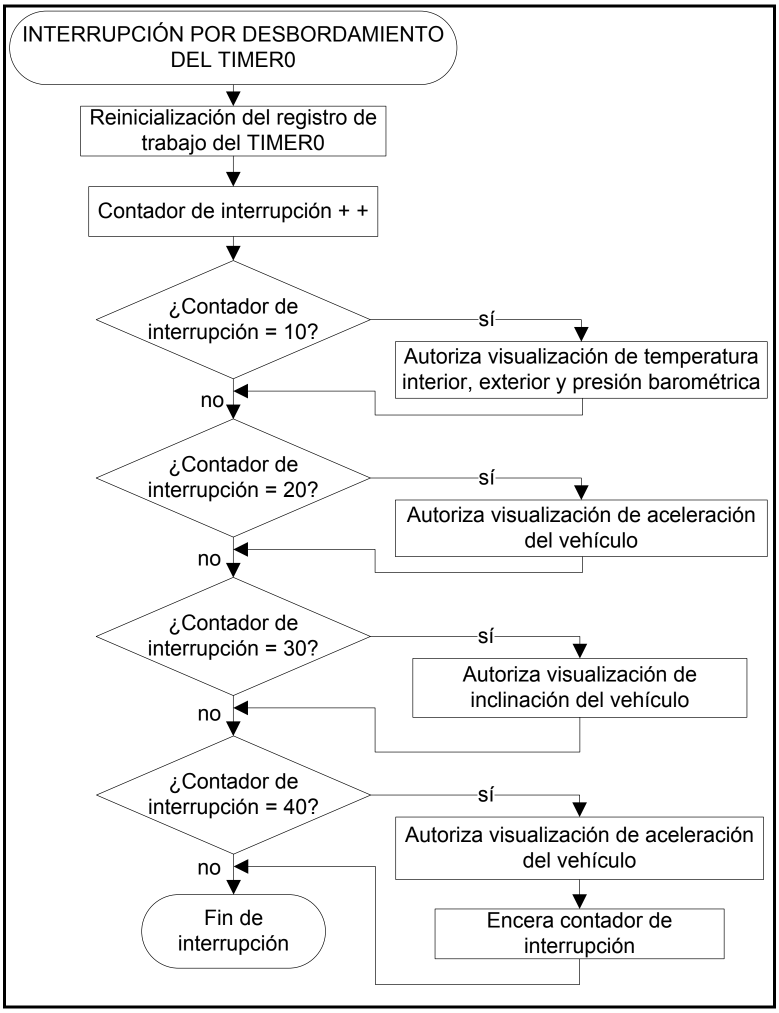


Figura 3.18: Diagrama de flujo de la rutina especial de interrupción por desbordamiento del TIMER0

3.3.3.3.2. Dato recibido por el módulo UART

Esta interrupción es la que verdaderamente se encarga de la recepción y verificación de datos provenientes del GPS. La información es recibida desde el módulo GS405 a nivel de bytes. Cada mensaje NMEA adquirido en formato ASCII empieza con un “$” seguido de “GP” y a continuación, para la trama escogida en este proyecto, las letras “RMC”. Luego se reciben los datos GPS separados por comas, y por último los caracteres especiales <CR> y <LF>, como se muestra en la figura 3.19.

```
$GPRMC, 161229.487,A,3723.2475,N,12158.3416,W,0.13,309.62,120598, ,*10
```

Figura 3.19: Ejemplo de formato de trama NMEA tipo RMC

El diagrama de flujo de la interrupción se muestra en la figura 3.20. Una vez que la rutina recibe el carácter especial <CR> (fin de trama), verifica si la cadena de caracteres recibida corresponde al tipo “$GPRMC”. Si corresponde, guarda toda la información de la trama en el búfer; si no es el caso, la deshecha.

Luego de verificar una cadena correcta, la subrutina activa un señalizador que le permitirá al programa principal, saber que han llegado nuevos datos GPS y se tienen que imprimir.

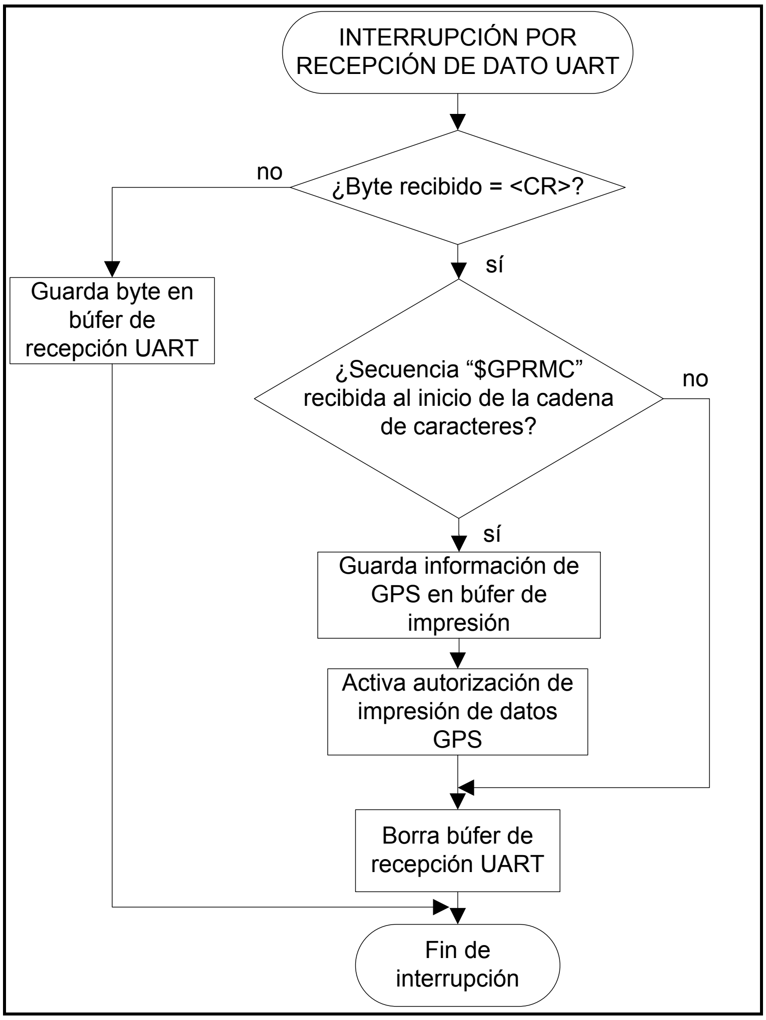


Figura 3.20: Rutina especial de interrupción por recepción UART

3.4. DISEÑO DE LAS PLACAS DE CIRCUITO IMPRESO

El diseño de las placas como se observa en las figuras 3.21 y 3.22, se realizó cuidando que los circuitos de potencia estén lo suficientemente lejos del microcontrolador. Además, dibujando los condensadores de desacople lo más cercano posible a los integrados. Todo esto para eliminar interferencias.

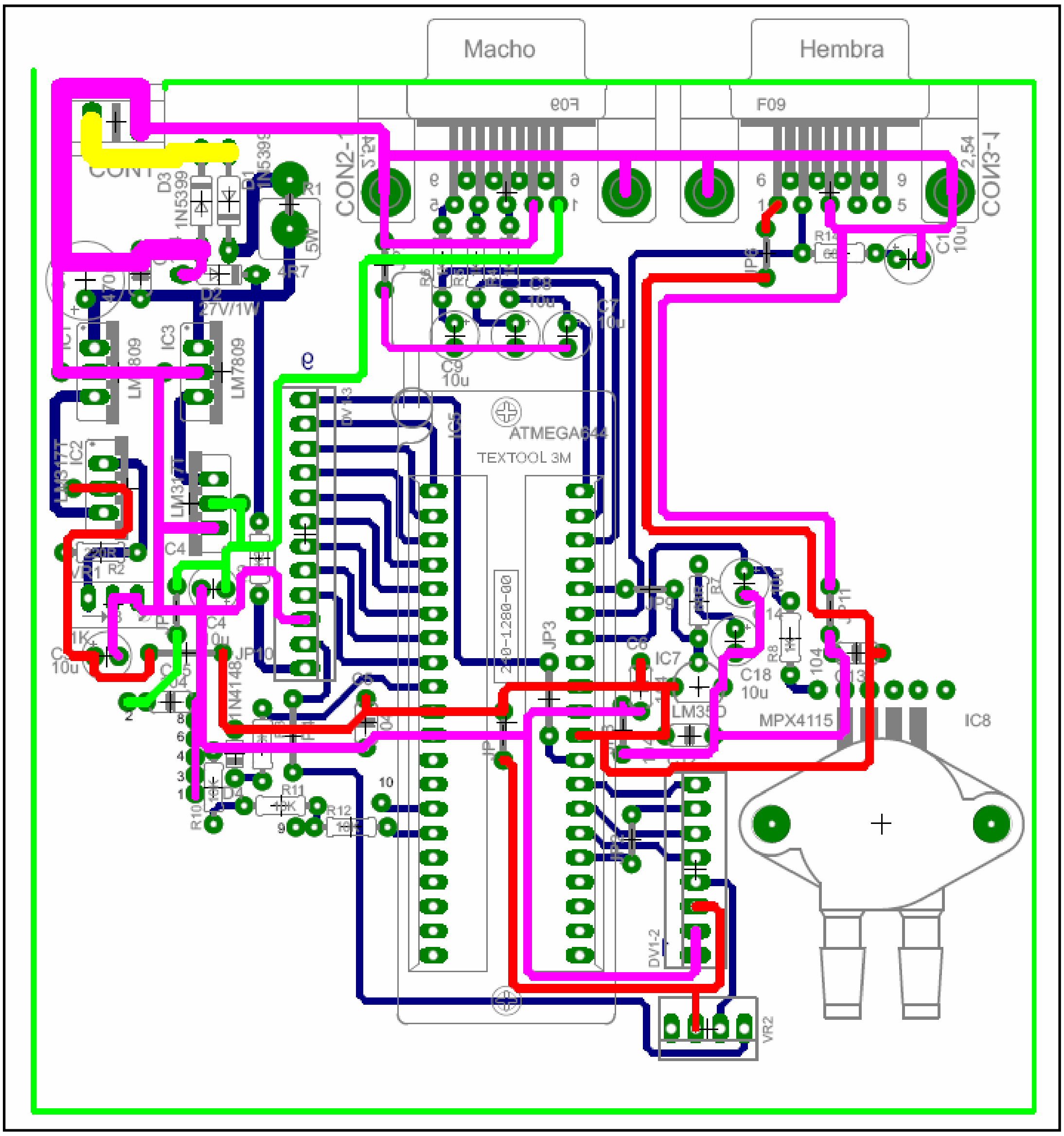


Figura 3.21: Ruteo de la placa principal del módulo (no mostrado con escala)

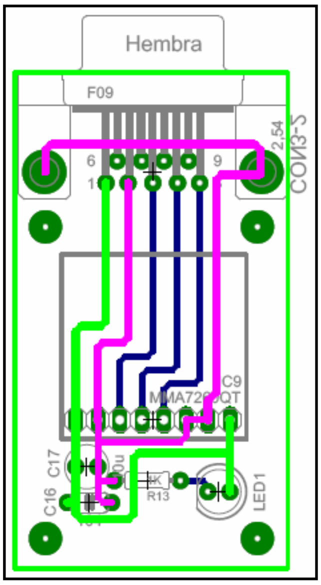


Figura 3.22: Ruteo de la placa del sensor de aceleraciones (no mostrado con escala)

CAPÍTULO IV

IV. IMPLEMENTACIÓN Y PRUEBAS DEL SISTEMA ELECTRÓNICO

El montaje de éste sistema en el vehículo se lo realizó evitando al máximo causar algún tipo de impacto en su cableado.

El sensor de temperatura del ambiente o temperatura exterior, debió ser instalado exteriormente.

La base regulable metálica del sensor de aceleración e inclinación permite encerar la posición de este elemento, visualizando sus grados en la GLCD.

Los elementos montados fuera del módulo principal, es decir los elementos remotos se encuentran conectados por medio de cable blindado.

La corriente de alimentación para el sistema se recibe directamente de la batería.

4.1. MONTAJE FÍSICO DE LOS SISTEMAS DE SENSADO Y VISUALIZACIÓN

Una vez que las placas impresas están terminadas y montados sus respectivos elementos, se las colocó en cajas (acrílica y metálica).

En la placa principal como se observa en la figura 4.1, se encuentran los componentes electrónicos utilizados para el sensado como son el de temperatura del habitáculo, presión barométrica y posición global, los cuales están incorporados en la placa principal conjuntamente con la GLCD.

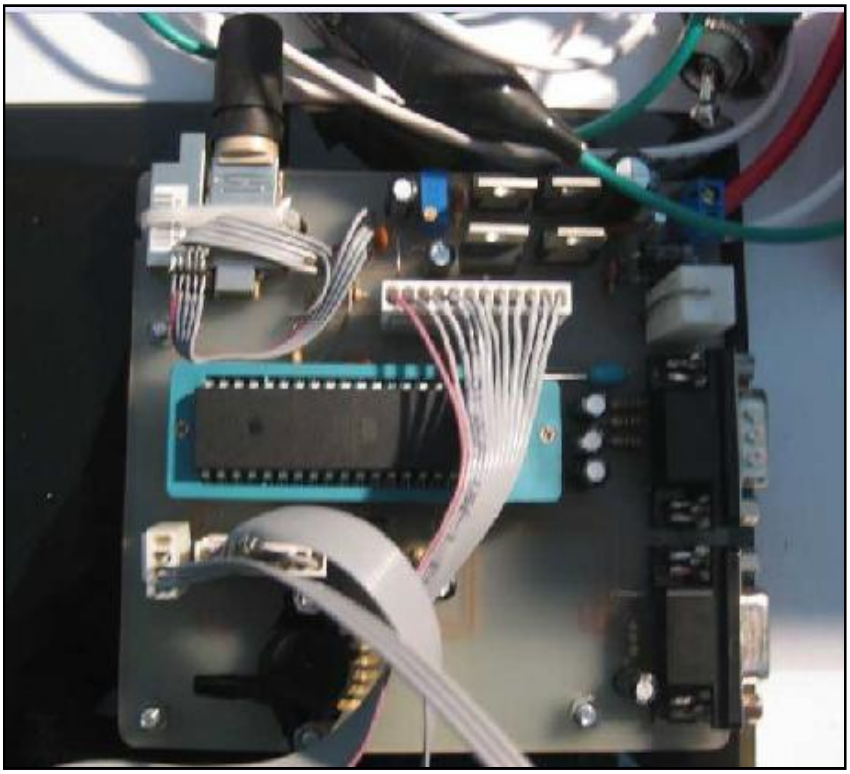


Figura 4.1: Placa del circuito principal terminada del diseño y construcción de un sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular

El acelerómetro fue montado en una caja metálica (figura 4.2) para darle mayor seguridad.

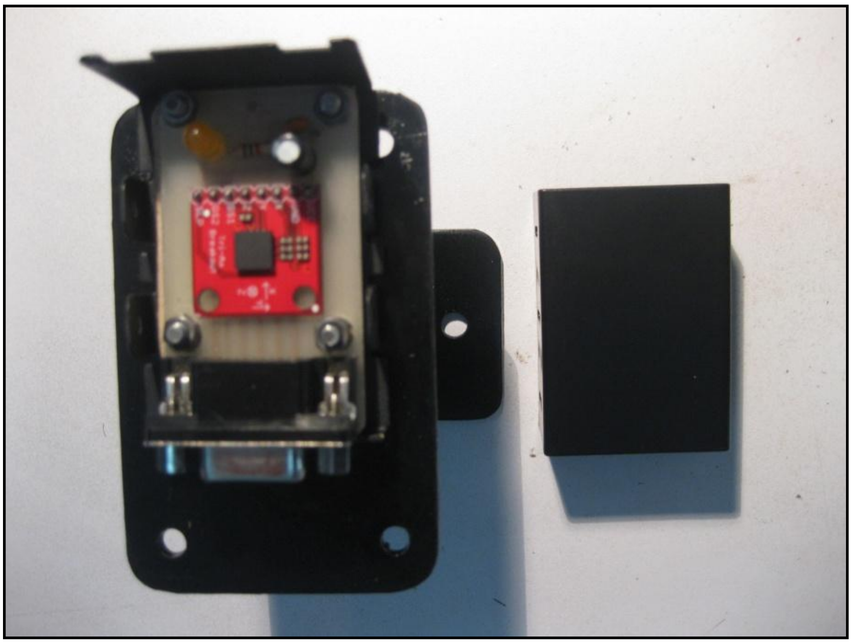


Figura 4.2: Placa terminada del acelerómetro del sistema

En la figura 4.3, apreciamos todos los componentes del sistema.

Figura 4.3: Módulos y cables de conexión

4.1.1. SENSOR DE TEMPERATURA EXTERIOR

Este sensor remoto es estrictamente necesario que se encuentre montado en el exterior del vehículo, es decir en contacto con el ambiente.

En el automotor Suzuki se procedió a instalarlo alejado de los sectores calientes del motor, especialmente del múltiple de escape, ya que se obtendrá un valor totalmente distinto al real. Se deberá proteger al sensor de cualquier contacto con agua, para evitar su desperfecto.

El sensor LM35 desde el circuito principal, se encuentra conectado por medio de cable blindado y un recubrimiento de silicón en la unión del sensor con el cable blindado.

Se instaló el sensor, en el chasis del vehículo por debajo de la carrocería en la parte central (figura 4.4), en este lugar no existirá ningún factor externo que altere la temperatura que se requiere sensar.

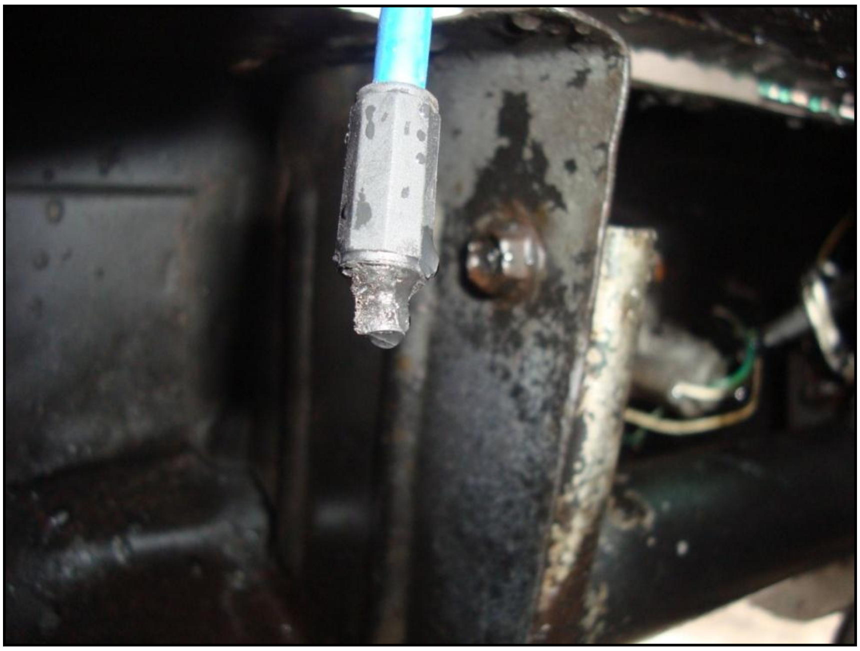


Figura 4.4: Sensor de temperatura exterior

4.1.2. MONTAJE DEL SISTEMA DE VISUALIZACIÓN

En la caja de material acrílico, se encuentra montada la GLCD, como se indicó anteriormente aquí también se encuentran alojados elementos para las demás variables que son mostradas.

Para facilitar el montaje y fijación de estos elementos sobre el tablero del vehículo, se fabricó una caja metálica que también servirá como protección para sus componentes.

Está ubicada con su frente hacia el conductor para facilitar la visualización y no provocar distracción alguna mientras observa las variables mostradas en la GLCD del sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular.

La sujeción de la caja metálica se lo realizó con un tornillo, en el tablero del vehículo, lo que se puede apreciar en la figura 4.5.

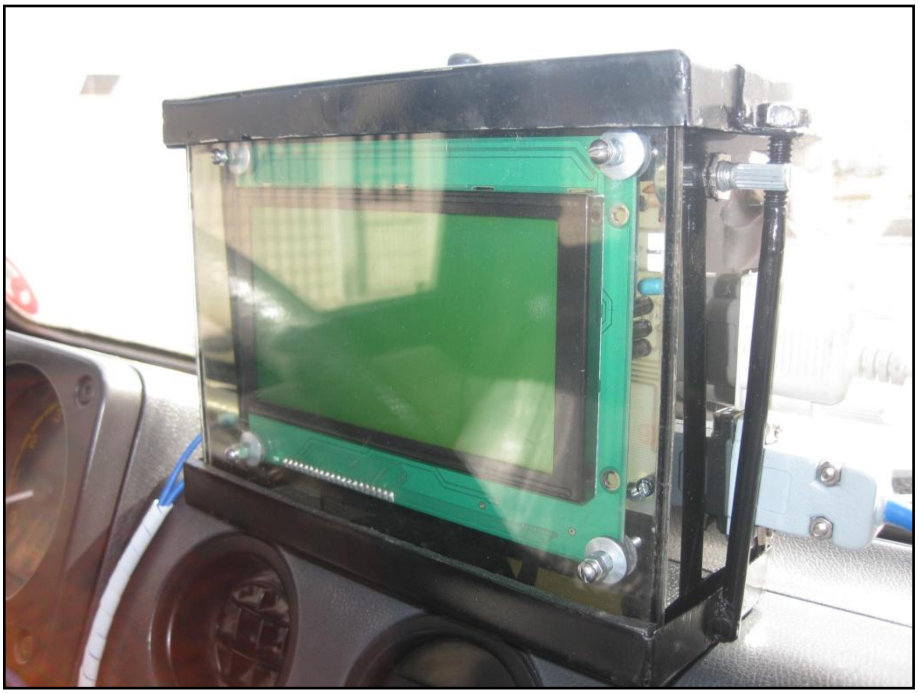


Figura 4.5: Pantalla GLCD montada sobre el tablero del vehículo

4.1.3. CONEXIÓN ELÉCTRICA

Se toma corriente (+) directamente de la batería y tierra (-) a la carrocería, ya que se puede requerir el funcionamiento del sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular en cualquier momento, no siempre con el vehículo encendido o en estado para accesorios.

El encendido y apagado se lo realiza con un interruptor de palanca, el cual está instalado en el tablero de control de instrumentos del vehículo, en la parte izquierda (figura 4.6), siendo de fácil acceso y visualización.

Como protección para el sistema, se instaló un fusible de 20A. cerca al módulo.

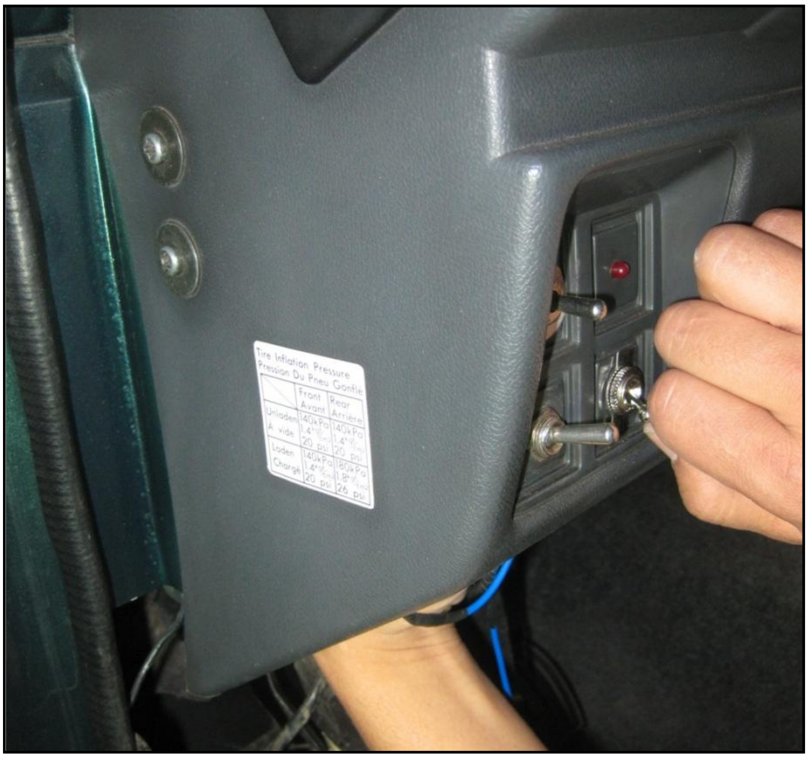


Figura 4.6: Interruptor de encendido y apagado del sistema

4.1.4. DISPOSITIVO PARA ACELERACIÓN E INCLINACIÓN

Se empezó por instalar la caja que contiene la placa del acelerómetro, en la base regulable metálica, que fue diseñada para que el sensor de aceleración MMA7260QT quede alojado en el centro de gravedad del vehículo, ésto se observa en la figura 4.7.

Para el presente caso se procedió a montar dicha base regulable frente a la palanca de cambios, atornillándola a la carrocería. Es necesario encerar al sensor visualizando en la GLCD (0º) en sus dos lecturas, tanto en la de inclinación vertical como en la horizontal.

Una vez encerado el acelerómetro se ajusta fuertemente el tornillo que posee la base regulable, para impedir que el sensor varíe su posición.

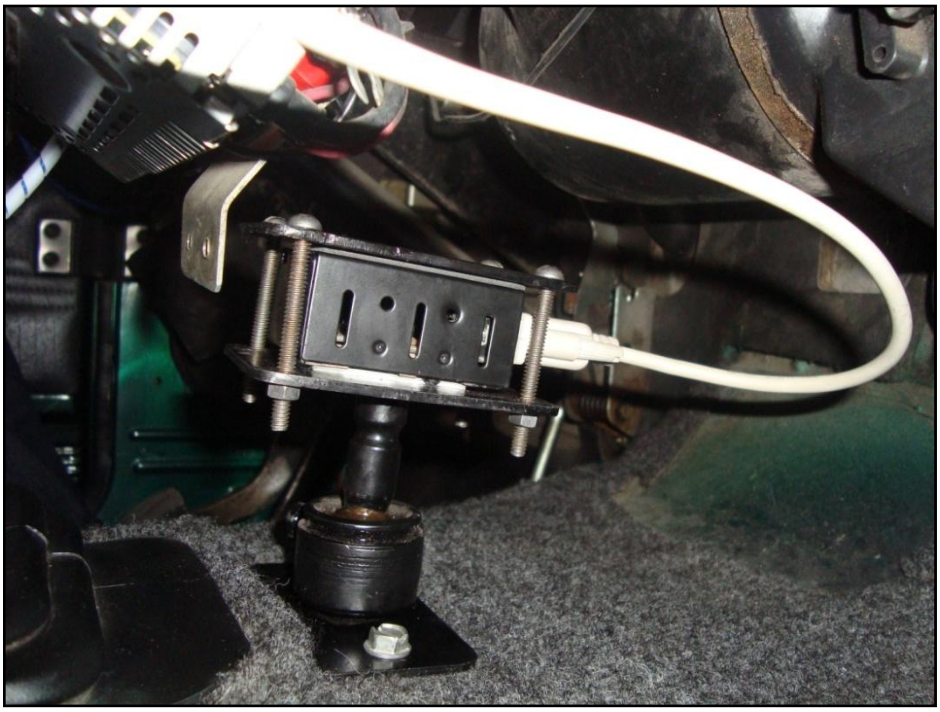


Figura 4.7: Base regulable y acelerómetro montados en el vehículo

4.2. PRUEBAS

La naturaleza programable del proyecto obligó a que se realicen innumerables pruebas en firmware y hardware (figura 4.8, 4.9). Las verificaciones más importantes son las siguientes:

- Comunicación entre el microcontrolador y la pantalla GLCD.
- Adecuada actualización de datos en la GLCD de acuerdo a las frecuencias de muestreo establecidas para cada variable.
- Correspondencia entre los valores medidos de las variables y los valores calculados mediante las funciones de transferencia.
- Apropiada entrega de voltaje desde los reguladores lineales hacia los dispositivos electrónicos.
- Adecuada recepción e interpretación de las diferentes tramas de datos recibidas desde el módulo GPS.

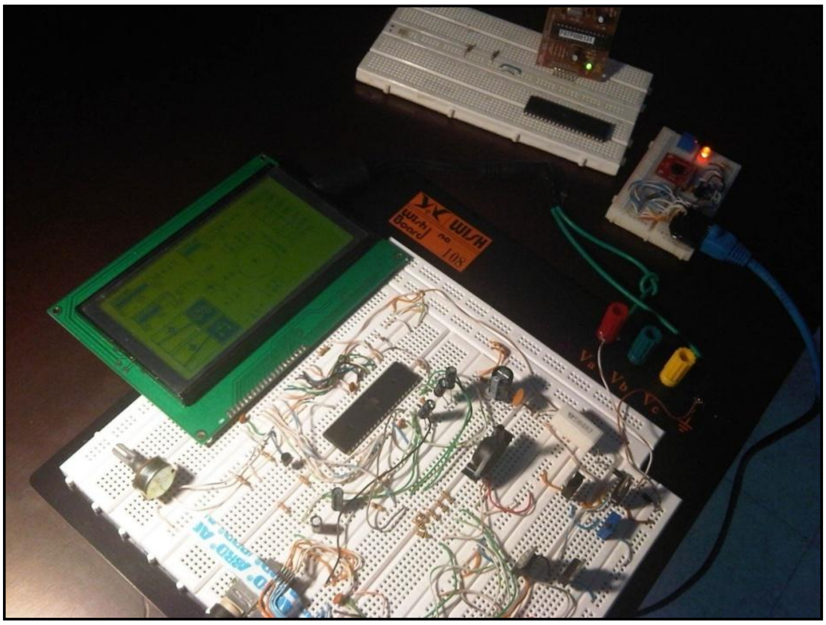


Figura 4.8: Ensayo del sistema completo en tablero de pruebas

Luego de superar todas las verificaciones mencionadas y de haber sido montado en el vehículo, se confirmó el funcionamiento de todo el sistema en conjunto.

Al ser un instrumento de monitoreo, las pruebas de campo realizadas consistieron en tomar datos ante distintas condiciones de funcionamiento y compararlos con lecturas adquiridas desde instrumentos digitales similares y de precisión aceptable.

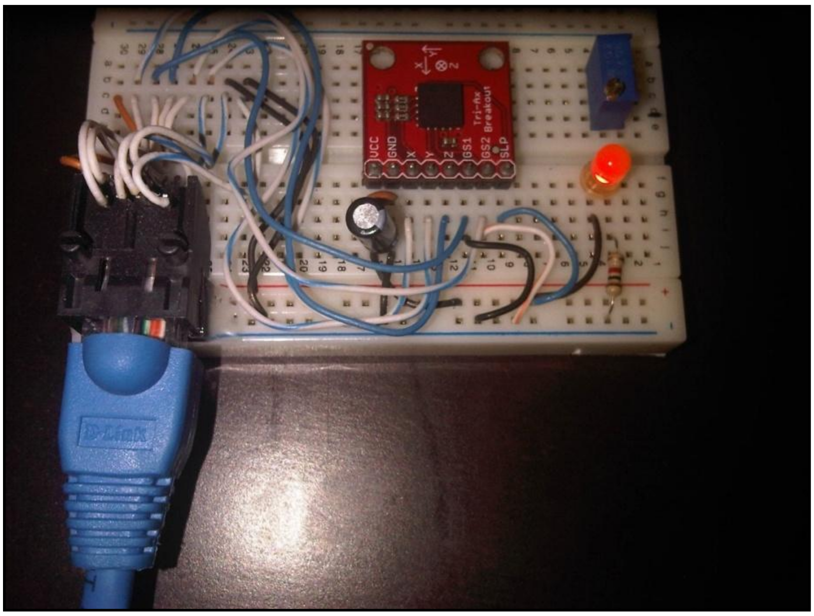


Figura 4.9: Ensayo del acelerómetro en tablero de pruebas

Para las referencias de temperatura interior, temperatura exterior y presión barométrica se utilizó el equipo DIGITAL COMPASS & ALTIMETER de procedencia china, que presta algunos servicios como: compás digital, altímetro, barómetro y termómetro. La tabla IV.1, muestra sus características:

Tabla IV.1: Características técnicas del DIGITAL COMPASS & ALTIMETER

Rango del compás	0° a 359°, 1-16 puntos gráficos
Precisión de altura relativa	+/- 3m
Precisión de altura absoluta	+/- 12m
Rango de temperatura	-20° a +60°C
Precisión de temperatura	+/- 1.0°C
Medida del intervalo de temperatura	3 seg.
Reducción de la presión	0.1 KPa (0.1mmhg, 0.01inHg)
Precisión de la presión absoluta	+/- 1.5kPa

Para la determinación de la fiabilidad del GPS se utilizó el equipo GPS GARMIN ETREX H, el cual es un receptor de GPS que hace posible que las funciones más frecuentes como creación de rutas y WAYPOINTS, sean muy fáciles de realizar. Posee una pantalla gráfica que informa sobre todos los datos de navegación, garantizando también una navegación por satélite fiable y simple. Además presenta las características de la tabla IV.2:

Tabla IV.2: Características técnicas del GPS GARMIN ETREX H

Alimentación	2 pilas AA, 12 V
Receptor	12 canales paralelos
Memoria	500 waypoints alfanuméricos
Velocidad	999 nudos
Interface NMEA	0183
Interface PC	RS232
Duración baterías	18 horas
Dimensiones	50 x 112 x 30 mm

4.2.1. TEMPERATURA DEL HABITÁCULO DEL VEHÍCULO

La prueba se hizo en un día frío (tabla IV.3 y figura 4.10). Consistió en abrir las puertas del vehículo hasta que exista un equilibrio térmico entre el habitáculo y el ambiente. Luego de esto, se cerraron las puertas, ventanas y se encendió el vehículo y su calefacción. Se tomaron muestras conforme iba subiendo la temperatura del interior.

Tabla IV.3: Mediciones de temperatura en el habitáculo del automóvil

Muestra	Lectura Patrón (°C)	Lectura Sistema (°C)	%Error
1	9	10	-11,111
2	12	13	-8,3333
3	15	16	-6,6667
4	18	19	-5,5556
5	21	22	-4,7619
6	24	25	-4,1667
7	27	28	-3,7037
8	30	31	-3,3333
9	33	33	0
10	36	36	0

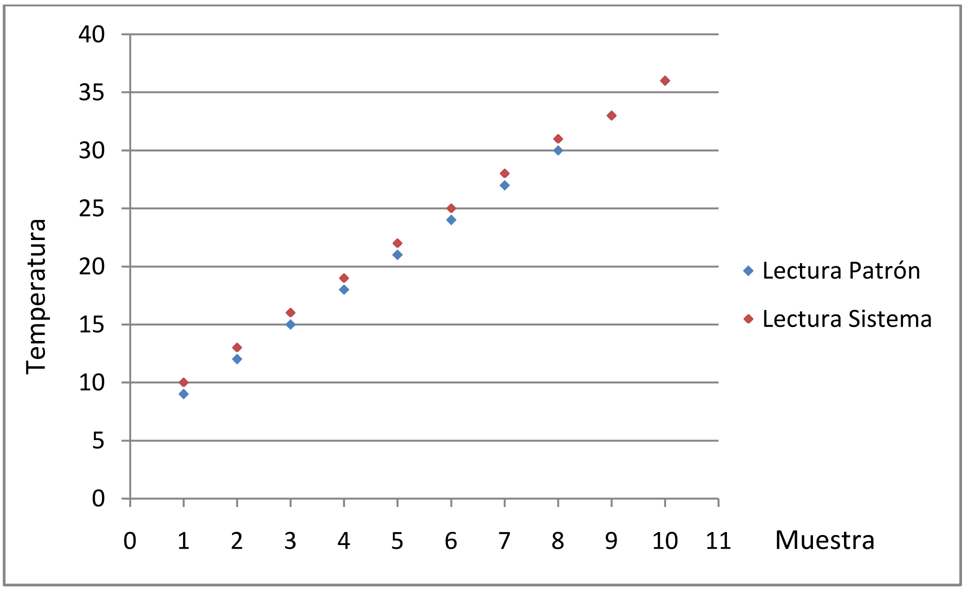


Figura 4.10 Diagrama de dispersión de mediciones de temperatura interior

$y = 3x + 6$	Ecuación 4.1: Lectura patrón de la temperatura de la interior
$y = 2.903x + 7.333$	Ecuación 4.2: Lectura del sistema de la temperatura interior

4.2.2. TEMPERATURA DEL AMBIENTE EXTERIOR

Esta prueba tomó varias horas para su realización (tabla IV.4 y figura 4.11) Consistió en tomar medidas del ambiente a lo largo de todo un día, esperando las fluctuaciones de temperatura.

Tabla IV.4: Mediciones de temperatura del ambiente

Muestra	Lectura Patrón (°C)	Lectura Sistema (°C)	%Error
1	8	8	0
2	10	10	0
3	12	12	0
4	14	14	0
5	16	16	0
6	18	18	0
7	20	20	0
8	22	22	0
9	24	24	0
10	26	26	0

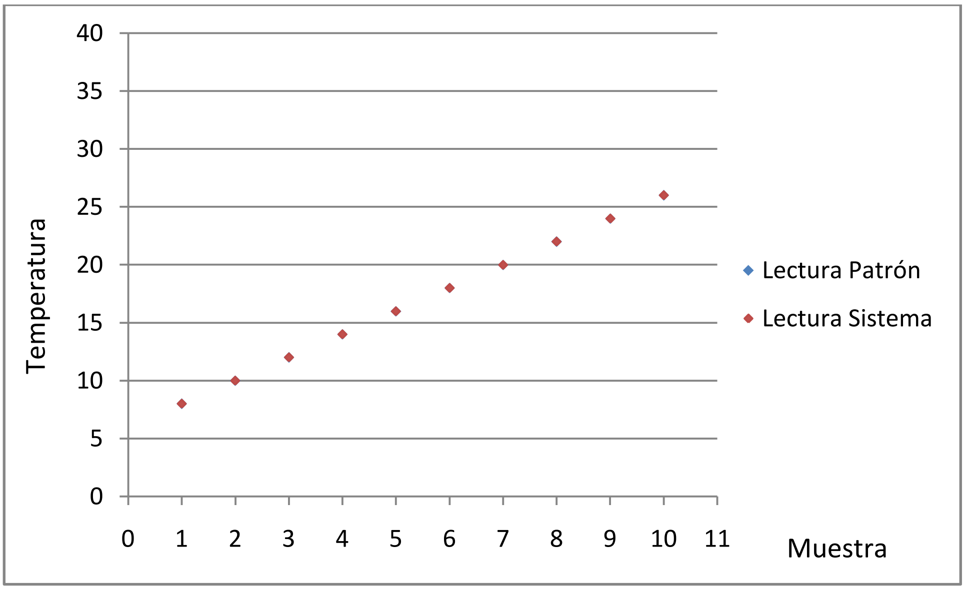


Figura 4.11: Diagrama de dispersión de mediciones de temperatura exterior

$y = 2x + 6$	Ecuación 4.3: Lectura patrón de la temperatura exterior
$y = 2x + 6$	Ecuación 4.4: Lectura del sistema de la temperatura exterior

4.2.3. PRESIÓN BAROMÉTRICA

La presión barométrica en similares condiciones del ambiente, para varios puntos de una misma ciudad, no tiene una variación significativa (tabla IV.5 y figura 4.12). Por esta razón se decidió tomar lecturas a lo largo de un trayecto que implique dos puntos geográficos separados por varios cientos de metros de altura sobre el nivel del mar.

Se escogió el recorrido comprendido entre Latacunga (2800msnm) y Zumbahua (3600msnm), a lo largo del cual, fueron tomadas varias muestras.

Tabla IV.5: Mediciones de presión barométrica

Muestra	Lectura Patrón (KPa)	Lectura Sistema (KPa)	% Error
1	71,9	71,8	0,13908
2	71,4	71,3	0,14006
3	71	70,9	0,14085
4	70,5	70,4	0,14184
5	70	70	0
6	69,6	69,6	0
7	69,1	69,1	0
8	68,6	68,6	0
9	68,1	68,1	0
10	67,6	67,6	0

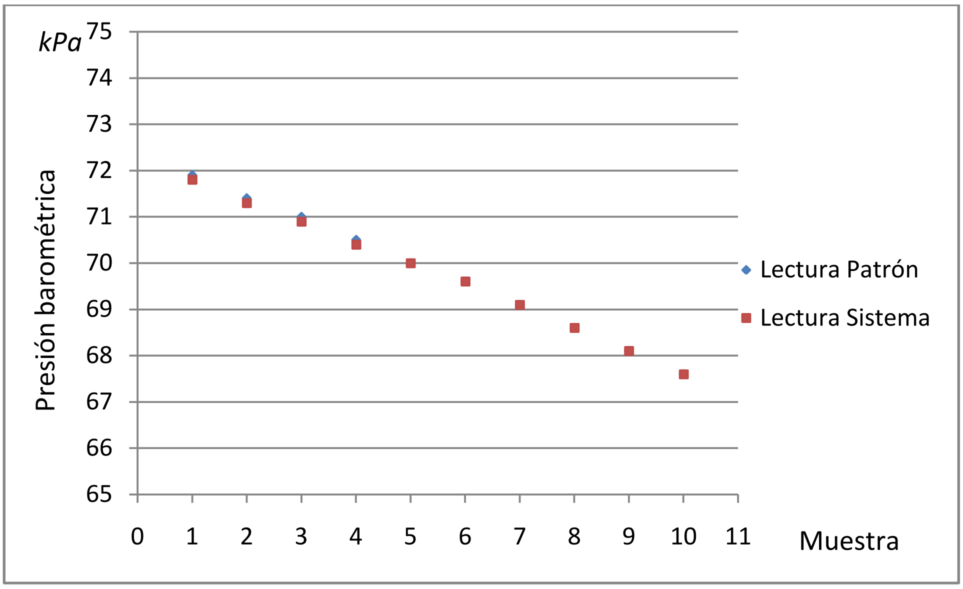


Figura 4.12: Diagrama de dispersión de mediciones de presión barométrica

$y = -0.475x + 72.39$	Ecuación 4.5: Lectura patrón de presión barométrica
$y = -0.460x + 72{,}27$	Ecuación 4.6: Lectura del sistema de presión barométrica

4.2.4. INCLINACIÓN DEL VEHÍCULO

Para esta medición se recurrió a un nivel de burbuja.

Para determinadas inclinaciones del vehículo, se tomó como medida patrón a la desviación angular existente entre cierta línea de referencia graficada cerca del centro de gravedad del automóvil, y la horizontal determinada por el nivel.

Observamos las variaciones obtenidas en la tabla IV.6 y en la figura 4.13.

Tabla IV.6: Mediciones de inclinación del vehículo

Muestra	Lectura Patrón (°)	Lectura Sistema (°)	% Error
1	25,5	25	1,96078
2	20,3	20	1,47783
3	15,2	15	1,31579
4	10,1	10	0,9901
5	5	5	0
6	2,5	2,5	0
7	0	0	0
8	-2,5	-2,5	0
9	-5	-5	0
10	-10,2	-10	1,96078
11	-15,3	-15	1,96078
12	-20,4	-20	1,96078
13	-25,5	-25	1,96078

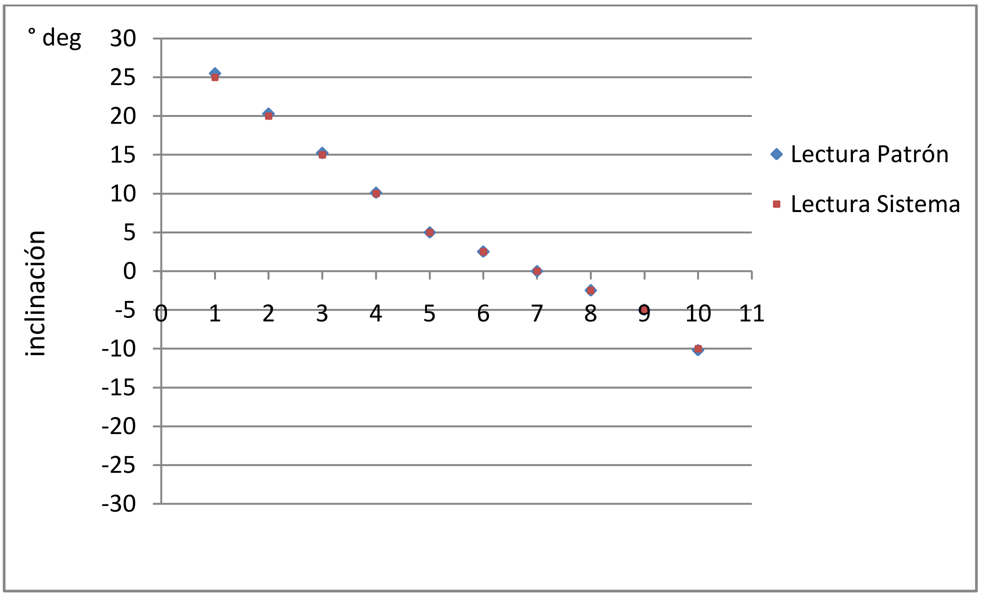


Figura 4.13: Diagrama de dispersión de mediciones de inclinación

$y = -3.755x + 26.74$	Ecuación 4.7: Lectura patrón de inclinación del vehículo
$y = -3.697x + 26.33$	Ecuación 4.8: Lectura del sistema de inclinación del vehículo

4.2.5. DATOS DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)

Las mediciones de latitud, longitud y velocidad respecto a la tierra, fueron muestreadas en el autódromo de Yahuarcocha[3]. En la determinación de longitud y latitud se tomaron 10 muestras a lo largo de los 10Km de extensión de la pista.

4.2.5.1. Latitud

Debido a que las lecturas variaron en décimas de minuto, se hizo el análisis comparativo orientado a estas fracciones (tabla IV.7 y figura 4.14).

Tabla IV.7: Mediciones de latitudes

Muestra	Orientación	Grados	Minutos	Fracciones de min. Patrón	Fracciones de min.sistema	% Error
1	N	0	22	0,581	0,5715	1,635111876
2	N	0	22	0,4564	0,4564	0
3	N	0	22	0,1403	0,1384	1,354240912
4	N	0	21	0,5923	0,59	0,388316731
5	N	0	21	0,3212	0,3255	-1,33872976
6	N	0	21	0,7537	0,7683	-1,93711026
7	N	0	22	0,3237	0,3261	-0,74142725
8	N	0	22	0,7514	0,7619	-1,39739154
9	N	0	23	0,0162	0,0159	1,851851852
10	N	0	22	0,7555	0,7547	0,105890139

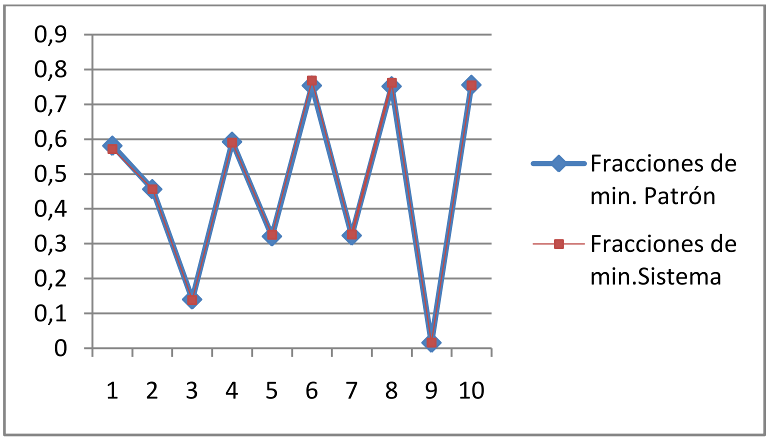


Figura 4.14: Diagrama de dispersión de mediciones de latitud

[3] Autódromo de YAHUARCOCHA: Pista de 3.650 km de longitud, ubicada en Ibarra-Ecuador.

$y = 0.007x + 0.430$	Ecuación 4.9: Lectura patrón de fracciones de minuto de latitud
$y = 0.008x + 0.426$	Ecuación 4.10: Lectura del sistema de fracciones de minuto de latitud

4.2.5.2. Longitud

Aquí se recurrió al mismo criterio utilizado para el análisis comparativo de los valores de latitud (tabla IV.8 y figura 4.15).

Tabla IV.8: Mediciones de longitudes

Muestra	Orientación	Grados	Minutos	Fracciones de min. Patrón	Fracciones de min.sistema	% Error
1	O	78	6	0,6556	0,655	0,091519219
2	O	78	6	0,6398	0,6375	0,35948734
3	O	78	6	0,4708	0,4652	1,189464741
4	O	78	6	0,3041	0,2974	2,203222624
5	O	78	5	0,9915	0,9885	0,302571861
6	O	78	5	0,4488	0,4329	3,542780749
7	O	78	5	0,2454	0,243	0,97799511
8	O	78	5	0,4076	0,4036	0,981354269
9	O	78	5	0,6949	0,6839	1,582961577
10	O	78	5	0,9877	0,9876	0,010124532

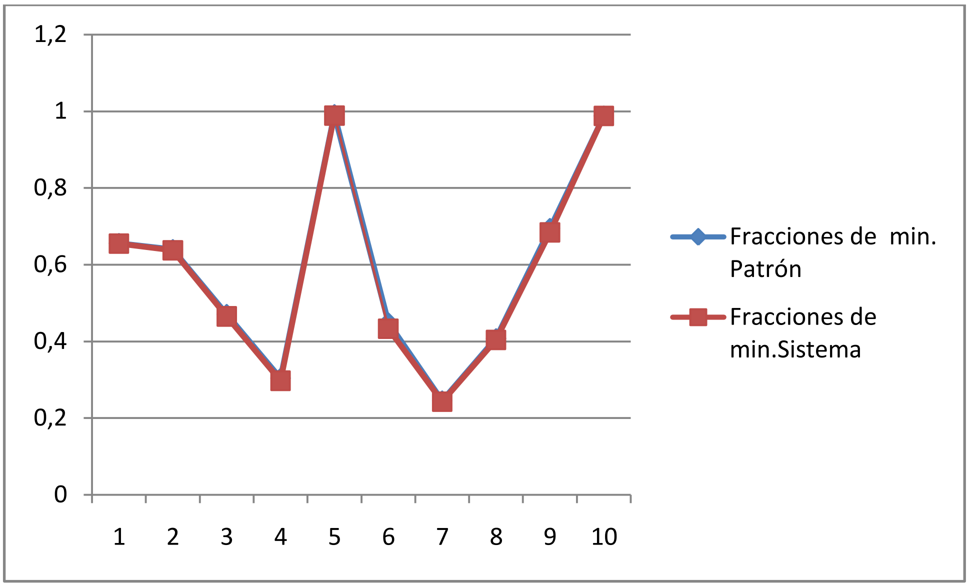


Figura 4.15: Diagrama de dispersión de mediciones de longitud

$y = 0.014x + 0.506$	Ecuación 4.11: Lectura patrón de fracciones de minuto de longitud
$y = 0.013x + 0.503$	Ecuación 4.12: Lectura del sistema de fracciones de minuto de longitud

4.2.5.3. Velocidad

El patrón de comparación de velocidad se tomó desde el velocímetro del vehículo (tabla IV.9 y figura 4.16).

Tabla IV.9: Mediciones de velocidades

Muestra	Velocidad patrón(kph)	Velocidad sistema(kph)	% Error
1	10	10,9	-9
2	20	18,23	8,85
3	30	27,8	7,33333333
4	40	37,5	6,25
5	50	47,1	5,8
6	60	57,57	4,05
7	70	67,32	3,82857143
8	80	77,47	3,1625

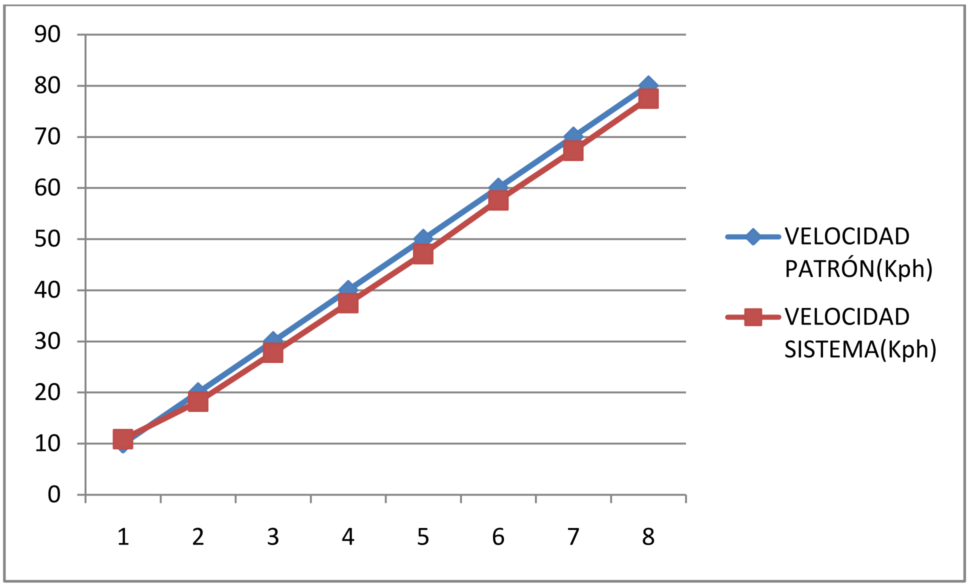


Figura 4.16: Diagrama de dispersión de mediciones de velocidad

$y = 10x$	Ecuación 4.13: Lectura patrón de velocidad
$y = 9.647x - 0.425$	Ecuación 4.14: Lectura del sistema de velocidad

4.3. DESEMPEÑO GENERAL DEL SISTEMA

De las pruebas indicadas anteriormente se puede determinar que, de todas las mediciones se obtuvieron valores completamente satisfactorios, en relación a los patrones utilizados. En la tabla IV.10, se observa el error máximo obtenido con cada una de las variables medidas.

Tabla IV.10: Error máximo de cada prueba ejecutada

VARIABLE MEDIDA	ERROR MÁXIMO (%)
Temperatura del habitáculo del vehículo	11.111
Temperatura del ambiente exterior	0
Presión Barométrica	0,14085
Inclinación del vehículo	1.96
Latitud	1,93711026
Longitud	3,542780749
Velocidad	9

La temperatura del habitáculo del vehículo se desvía en un grado aproximadamente, debido a que el sensor de temperatura LM35 se encuentra ubicado en el interior de la caja de lámina acrílica. El calor generado por los diferentes elementos electrónicos, en especial los reguladores de voltaje, afectan la medición.

En lo referente a la temperatura del exterior no existen errores, por lo que se deduce que el sistema está perfectamente calibrado.

Como resultado de la comparación entre la presión barométrica patrón y la tomada por el dispositivo, se obtuvo un error prácticamente imperceptible. Se presume que esta desviación es la misma prevista por el fabricante del sensor MPX4115.

Al interpretar las mediciones de la inclinación del vehículo, se concluye que la desviación existente se debe únicamente a la aproximación a una cifra decimal que realiza el algoritmo.

Para las tolerancias existentes entre los valores GPS del sistema y los valores patrón, no se puede concluir ningún tipo de falla en el dispositivo, ya que la adquisición de datos es digital. Las imprecisiones dependen de la propia sensibilidad del módulo receptor GPS utilizado.
De manera general, las pruebas de funcionamiento del sistema completo en el vehículo, indican que el dispositivo es fiable y sensible. Por lo tanto, su implementación sobre cualquier vehículo es recomendable.

4.4. PRESUPUESTO

El presupuesto que describe los costos de los elementos del módulo se aprecia en la tabla IV.11.

Tabla IV.11: Costos de componentes electrónicos del módulo para gestión electrónica de control y posición vehicular

DESCRIPCIÓN	CANTIDAD	VALOR UNITARIO	VALOR TOTAL
Microcontrolador ATMEGA644	1	50.00	50.00
Regulador de voltaje variable LM317T	1	0.80	0.80
Regulador de voltaje a 9V LM7809	2	0.80	1.60
Regulador de voltaje a 3.3V LM1117T	1	1.00	1.00
Conector MOLEX de 12 pines	2	2.00	4.00
Conector MOLEX de 8 pines	2	1.50	3.00
Conector MOLEX de 4 pines	1	0.80	0.80
Conector DB9 acodado hembra	1	0.70	0.70
Conector DB9 acodado macho	1	0.70	0.70
Módulo receptor GPS GS405	1	145.00	145.00
Módulo GLCD 240x128 con BACKLIGHT	1	100.00	100.00
Potenciómetro de 100K	1	0.30	0.30
Sensor de temperatura LM35D	2	5.00	10.00
Sensor de presión barométrica MPX4115	1	50.0	50.00
Sensor de aceleración en 3 ejes MMA7260QT	1	52.00	52.00
Caja de lámina acrílica para alojamiento del dispositivo electrónico	1	15.00	15.00
Caja metálica para alojamiento del sensor G	1	3.00	3.00
Base regulable para montaje del sensor G	1	15.00	15.00
Base para fijación de la caja de lámina acrílica	1	25.00	25.00
Cable blindado de 9 conductores con terminales DB9	1	5.00	5.00
Cable plano de 20 conductores(1/2 METRO)	1	3.00	3.00
Zócalo ZIF de 40 pines	1	6.00	6.00
Bornera de tornillo de 2 pines	1	0.30	0.30
Placa de fibra de vidrio ,incluido manufactura de la PCB	1	15.00	15.00
Elementos de soldadura	1	5.00	5.00
Elementos varios (resistencias, capacitores y diodos)	1	10.00	10.00
TOTAL (USD)			522.20

A continuación se presenta un detalle general (tabla IV.12) de todos los gastos realizados en el diseño y construcción del módulo para gestión electrónica de control y posición vehicular:

Tabla IV.12: Costo total del diseño y construcción del módulo para gestión electrónica de control y posición vehicular

INGENIERÍA E INFORMACIÓN		**550**
Colaboración científica	400	
Investigación	150	
COSTOS DIRECTOS		**902.20**
Elementos eléctricos y electrónicos	522.20	
CodeVisionAVR V2.03.04	190	
Programador para AVRs STK500	70	
Edición de trabajo escrito	120	
IMPREVISTOS		**330**
Transporte y desplazamiento	180	
Otros	150	
COSTO TOTAL (USD)		**1782.20**

4.5. ANÁLISIS COSTO – BENEFICIO

- Una particularidad del sistema en cuestión es que no existe su similar en el mercado.

- El prototipo cumple con todas las características para poder ser implementado en cualquier automóvil: versatilidad, capacidad de reprogramación, respuesta eficiente. Su costo es relativamente bajo y tiene la ventaja de estar fabricado con elementos disponibles en el medio.

- El impacto de su implementación sobre los sistemas del automóvil, es exiguo. Requiere únicamente de alimentación eléctrica ya que todos los sensores son independiente.

V. CONCLUSIONES

- Se diseñó, construyó e implemento el SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR.

- La inserción de varias tecnologías de sensores para la determinación de variables de situación geográfica, condiciones ambientales y ergonomía en la conducción, hacen de este prototipo de gestión electrónica automotriz, un dispositivo único en su género.

- Cumpliendo con los requerimientos propuestos en su creación, algunas de las características del dispositivo son: impacto mínimo en el vehículo, velocidad de procesamiento aceptable, precisión en las variables adquiridas y facilidad de interpretación de la interfaz gráfica.

- Los elementos electrónicos con los que se fabricó el mecanismo, a pesar de provocar su encarecimiento, son dispositivos accesibles y de última tecnología.

- El correcto desempeño de este mecanismo se debe al software usado para su desarrollo. El compilador CODEVISION AVR permitió la programación del firmware del microcontrolador con relativa facilidad. PROTEUS disminuyó el tiempo de diseño al permitir simular el hardware y firmware. Además, EAGLE facilitó el diseño de los diagramas electrónicos.

- Luego de implementar el módulo en el vehículo SUZUKI SAMURAI SJ413 y realizar las pruebas de campo, se determinó que el sistema de gestión electrónica de control y posición vehicular es un prototipo eficiente y versátil, lo cual justifica su costo.

- El manual de usuario realizado es una herramienta que facilitará la familiarización del conductor con el sistema.

VI. RECOMENDACIONES

- Ubicar el módulo en un lugar donde no obstaculice la visibilidad del conductor, además donde pueda recibir las señales del GPS sin interferencia.

- Las rutinas de programación para visualización gráfica en GLCD y los algoritmos de interpretación de los sensores, pueden servir de referencia para realizar sistemas más complejos de instrumentación electrónica en el automóvil.

- Utilizar un lenguaje de programación en el que se pueda realizar varias funciones en pocas instrucciones.

- Incentivar el desarrollo científico en los alumnos, para de ésta forma implementar en nuestro medio, sistemas con prestaciones innovadoras.

- Seguir las instrucciones de instalación del sistema para evitar daños en el mismo.

VII. BIBLIOGRAFÍA

- ATMEL CORPORATION. “8 – Bit AVR Microcontroller with 16 / 32 / 64Kbytes In – System Programmable Flash”. Editorial Atmel Corporation, USA, 2007.

- ATMEL CORPORATION. “Getting Started with the CodeVisionAVR C Compiler”. Editorial Atmel Corporation, USA, 2007.

- FISH P.: “Electronic Noise and Low Noise Design”. Editorial”. Editorial Mc Graw Hill, México, 1994.

- GADRE D.: “Programming and Customizing the AVR Microcontroller”. Editorial Mc Graw Hill, USA, 2001.

- IBRAHIM D.: “Microcontroller Based Applied Digital Control”. Editorial John Wiley & Sons, Inglaterra, 2006.

- JOHNSON D.: “Análisis Básico de Circuitos Eléctricos”. Editorial Prentice, México, 1995.

- MOMPIM J.: “Electrónica y automática industriales”. Editorial Marcombo Boixareu, España, 1979.

- PARDUE J.: “C Programming for Microcontrollers”. Editorial Smiley Micros, USA, 2005.

- RAMOS G.: “Electrónica Digital y Circuitos Integrados”. Editorial CEKIT, Colombia, 2000.

- VALENCIA R.: Aplicaciones Electrónicas con Microcontroladores, Editorial Microtel, Ecuador, 2008.

VIII. ANEXOS

ANEXO A. MANUAL DE USUARIO DEL SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR

MANUAL DE USUARIO DEL SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR

DESCRIPCIÓN

El módulo de gestión electrónica de control y posición vehicular, es una herramienta que permite visualizar de una manera sencilla y exacta valores de variables del ambiente (temperatura y presión barométrica), de ergonomía en la conducción (vectores de aceleración) y de situación (posición global).

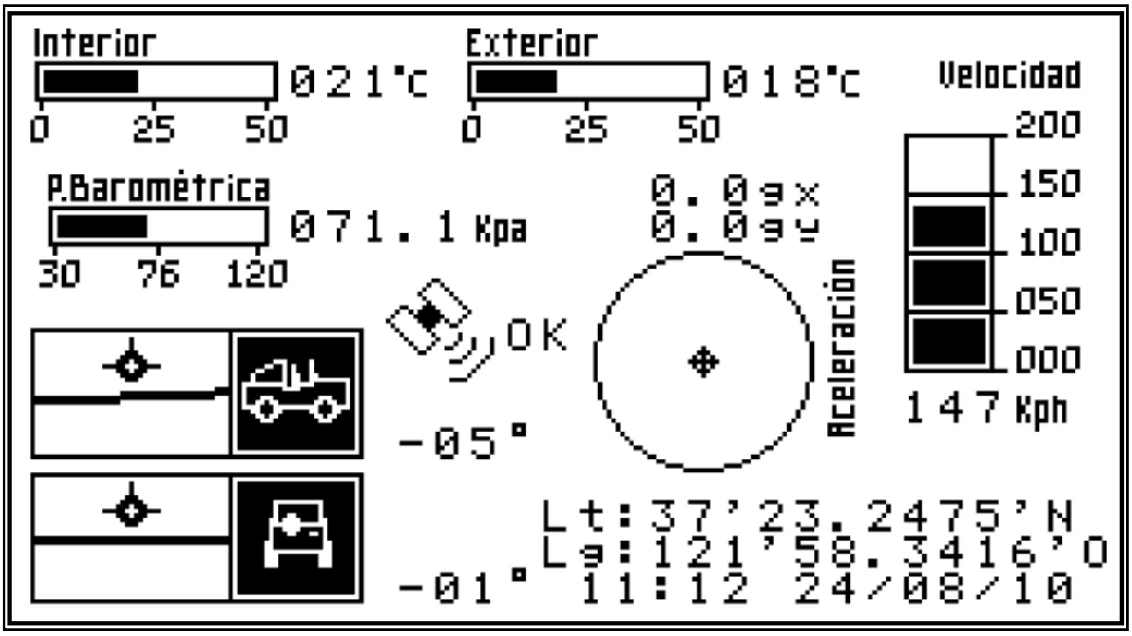
A continuación se muestra una tabla con los valores mínimos y máximos que cada sensor tendrá.

Escalas de los sensores

Sensores	Valor mínimo	Valor máximo
Interior	0°C	50°C
Exterior	0°C	50°C
P.Barométrica	30Kpa	120Kpa
Aceleración	X=0g Y=0g	X=1.5g Y=1.5g
Inclinación	0°	45°
Velocidad	0Kph	200Kph

FUNCIONAMIENTO

Al encender el módulo, aparecerá la siguiente pantalla con los indicadores y valores que arrojen los sensores y el GPS en ese instante:

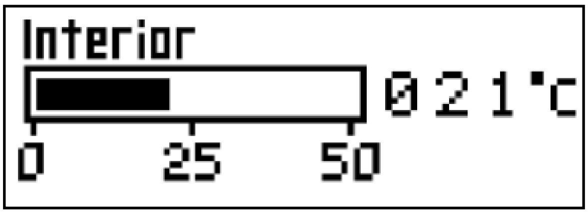


DETALLE DE CADA UNA DE LAS VARIABLES VISUALIZADAS EN LA PANTALLA

VARIABLES DEL AMBIENTE

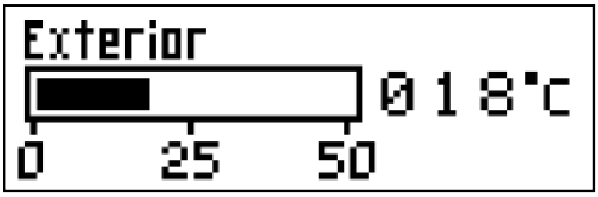
Interior

Muestra mediante una barra, la variación de temperatura en grados centígrados, en el interior del vehículo, valor que se expresa numéricamente al lado derecho de la barra.



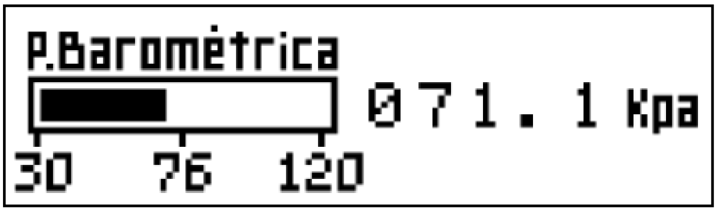
Exterior

Muestra mediante una barra, la variación de temperatura en grados centígrados, en el exterior del vehículo, valor que se expresa numéricamente al lado derecho de la barra.



P. Barométrica

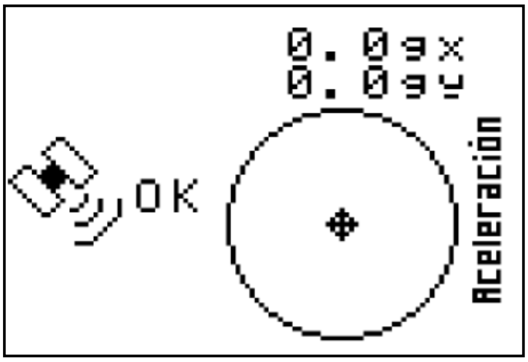
Muestra mediante una barra, la variación de la presión barométrica en KiloPascales, valor expresado numéricamente al lado derecho de la barra.



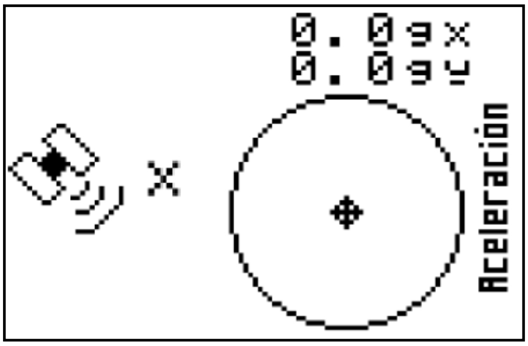
VARIABLE DE ERGONOMÍA EN LA CONDUCCIÓN

Aceleración

Muestra los valores de las coordenadas X y Y de la gravedad, ésta a la vez se ve representada mediante un punto que variará su ubicación de acuerdo a la posición del vehículo.



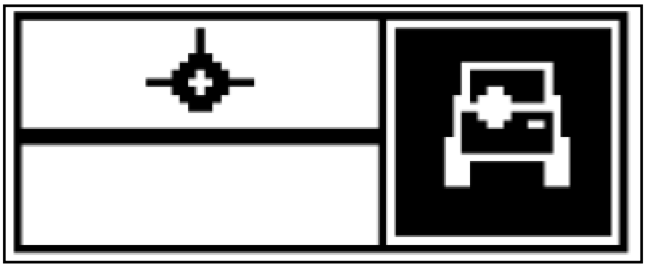
Cuando en la pantalla observemos **OK**, significa que los satélites están enlazados a nuestro acelerómetro, caso contrario aparecerá una **X**, como se muestra en el siguiente gráfico.



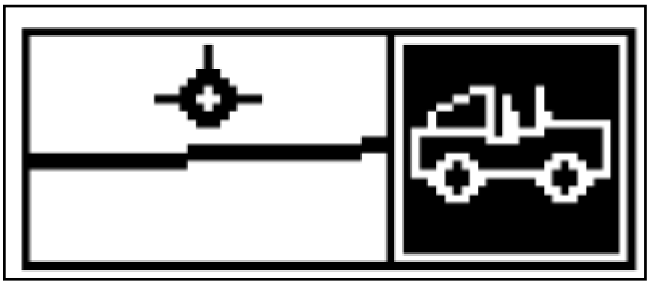
Inclinación

Los siguientes gráficos muestran los ángulos de inclinación del vehículo, tanto en cabeceo como en bamboleo.

CABECEO



BAMBOLEO



VARIABLE DE SITUACIÓN

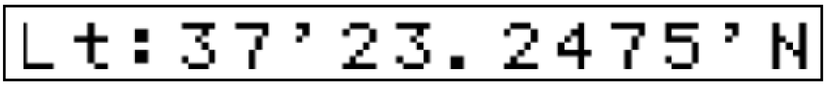
Posición global

Long.

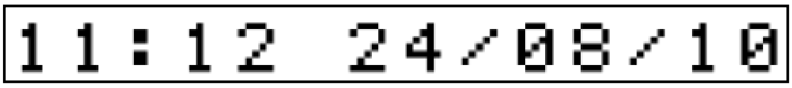
Muestra la longitud respecto a la tierra, en grados, minutos y centésimas de minuto**.**

Lat.

Muestra la latitud respecto a la tierra, en grados, minutos y centésimas de minuto**.**

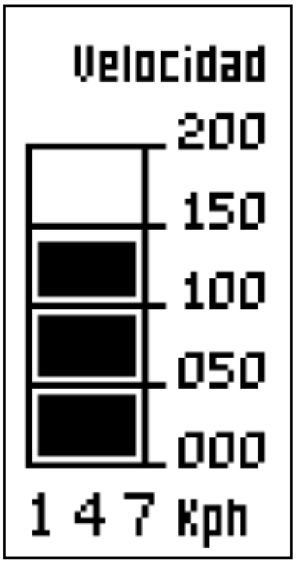


Además en la pantalla observaremos la hora y fecha UTC (hora y fecha universal coordinada, ajustada a los relojes atómicos).



Velocidad

Muestra mediante una barra vertical, la variación de la velocidad en Kilómetros por hora, valor expresado numéricamente debajo de la barra.



PRECAUCIONES

- Asegurarse que las conexiones son correctas.
- No usar voltaje de alimentación mayor a 14V.
- Ubicar el GPS en un lugar donde la recepción de la señal no sea interrumpida.
- Ubicar el acelerómetro en el centro de gravedad del vehículo para evitar lecturas de datos incorrectos.
- Conectar el sensor de temperatura exterior con el módulo electrónico, a través de conectores DB9 y cable blindado, para disminuir la inclusión de voltajes parásitos.
- En caso de calibración del módulo, consultar con el fabricante.

ANEXO B. ARTÍCULO PARA REVISTA

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE GESTIÓN ELECTRÓNICA DE CONTROL Y POSICIÓN VEHICULAR

Morillo T. Eliana E. AUTOR1
Claudio E. Ramiro I. AUTOR1
Dept. of Mechanique Automotive Eng. Escuela Politécnica del Ejército Sede Latacunga, Quijano y Ordóñez y Márquez de Maenza S/N Latacunga, Ecuador,
Email: elianamorillo@gmail.com, jsrael88@latinmail.com

Resumen

El dispositivo se concibe básicamente como un sistema de visualización de variables del ambiente (temperatura y presión barométrica), de ergonomía en la conducción (vectores de aceleración) y de situación (posición global).

Para la instalación y funcionamiento de este módulo, no se requiere de ninguna modificación relevante en el sistema electrónico o mecánico.

I. INTRODUCCIÓN

Desarrollamos un sistema electrónico, que permita monitorear gráficamente parámetros que normalmente no se verifican en los tableros de serie, para asistir al usuario en la navegación del vehículo.

El hardware y firmware del sistema son los encargados de transformar las variables análogas en digitales, con alta resolución y error mínimo; convertir los valores numéricos en caracteres ASCII, los valores numéricos en representaciones gráficas de incremento o decremento, para enviarlas al subsistema de visualización.

II. CARACTERIZACIÓN DEL HARDWARE

1. SUBSISTEMA DE SENSADO

PRESIÓN BAROMÉTRICA

El sensor MPX4115, posee un código para microcontrolador menos extenso y más simple.
La tensión de salida del sensor (0,13 – 4,725 voltios) es proporcional a la presión atmosférica absoluta y es sumamente sensible para detectar variaciones del orden de décimas de milibar.

TEMPERATURA DEL HABITÁCULO Y EXTERIOR

El sensor LM35 fue seleccionado para medir las temperaturas tanto interna como externa del vehículo ya que tiene respuesta lineal equivalente a 10mV/ºC, baja impedancia de salida, bajo costo, rango de alimentación comprendido entre 4 y 30 voltios, baja corriente de alimentación (60uA).

ACELERACIÓN E INCLINACIÓN

Para obtener los valores de inclinación y movimiento del vehículo, se utilizó el sensor MMA7260QT de FREESCALE, ya que es de última tecnología y proporciona valores de aceleración para tres ejes X, Y y Z.

POSICIÓN GLOBAL

Se utiliza, el GPS GS405 del fabricante SIRF debido a que es de aplicación automotriz y tiene una antena incluida de alta sensibilidad.

2. SUBSISTEMA DE PROCESAMIENTO

El microcontrolador ATMEGA644 de ATMEL fue seleccionado por su alta inmunidad a la interferencia eléctrica, su gran memoria de programa (64Kbytes), su aplicación automotriz y su uso en el desarrollo de una interfaz gráfica con GLCD.

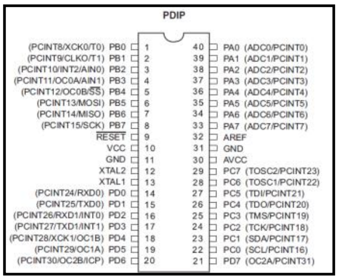


Figura 1: PINOUT del ATMEGA644

3. SUBSISTEMA DE VISUALIZACIÓN

Se maneja un visualizador gráfico que permite al usuario observar en tiempo real, gráfica y numéricamente el valor de las variables medidas.

Este visualizador es una GLCD de 240x128 píxeles, gobernada por el procesador TOSHIBA T6963C.

III. INSTALACIÓN

Una vez que las placas impresas están terminadas y montados sus respectivos elementos, se las colocó en cajas (acrílica y metálica).

Al módulo principal y a la panatalla GLCD, los colocamos en el tablero del vehículo.

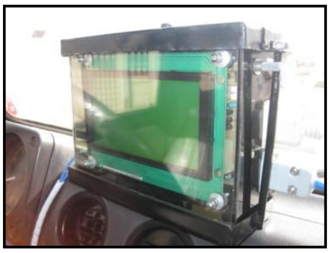


Figura 2. Pantalla GLCD montada sobre el tablero del vehículo

Al sensor de temperatura exterior, lo ubicamos en el chasis del vehículo por debajo de la carrocería en la parte central, ya que en éste lugar no existirá ningún factor externo que altere la temperatura real.

Figura 3. Sensor de temperatura exterior

El dispositivo para aceleración e inclinación es colocado en el centro de gravedad del vehículo

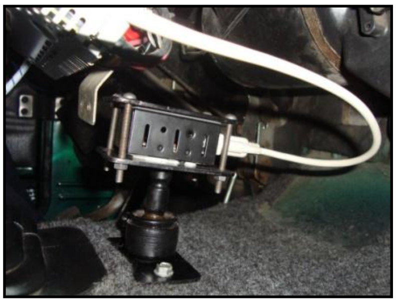
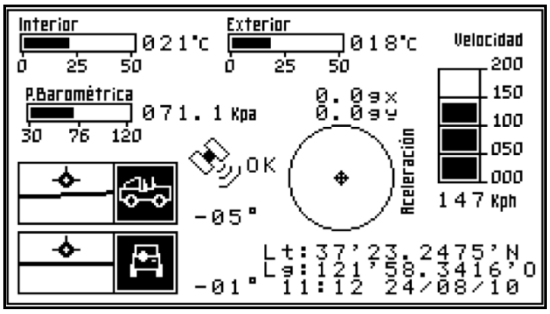


Figura 4. Acelerómetro montado en el vehículo.

IV. FUNCIONAMIENTO

Al encender el módulo, aparecerá la siguiente pantalla con los indicadores y valores que arrojen los sensores y el GPS en ese instante.
Es decir, aparecerán los valores reales de temperatura del habitáculo, temperatura exterior, presión barométrica, inclinación del vehículo tanto en cabeceo como bamboleo, aceleración, velocidad, latitud, longitud, hora y fecha.



III. CONCLUSIONES

- La inserción de varias tecnologías de sensores para la determinación de variables de situación geográfica, condiciones ambientales y ergonomía en la conducción, hacen de este prototipo de gestión electrónica automotriz, un dispositivo único en su género.

- Cumpliendo con los requerimientos propuestos en su creación, algunas de las características del dispositivo son: impacto mínimo en el vehículo, velocidad de procesamiento aceptable, precisión en las variables adquiridas y facilidad de interpretación de la interfaz gráfica.

- Los elementos electrónicos con los que se fabricó el mecanismo, a pesar de provocar su encarecimiento, son dispositivos accesibles y de última tecnología.

IV. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- ATMEL CORPORATION. "8 – Bit AVR Microcontroller with 16 / 32 / 64Kbytes In – System Programmable Flash". Editorial Atmel Corporation, USA, 2007.

- ATMEL CORPORATION. "Getting Started with the CodeVisionAVR C Compiler". Editorial Atmel Corporation, USA, 2007.

- FISH P.: "Electronic Noise and Low Noise Design". Editorial". Editorial Mc Graw Hill, México, 1994.

Ministerio de Educación del Ecuador

Nuevo Bachillerato Ecuatoriano

ÁREA DE MATEMÁTICA

La importancia de enseñar y aprender Matemática

La sociedad tecnológica que está cambiando constantemente requiere de personas que puedan pensar de manera cuantitativa para resolver problemas creativa y eficientemente. Los estudiantes requieren desarrollar su habilidad matemática, obtener los conocimientos fundamentales y las destrezas que le servirán para comprender analíticamente el mundo y ser capaces de resolver los problemas que surgirán en sus ámbitos profesional y personal. Por ello, la tarea fundamental del docente es la de proveer un ambiente que integre objetivos, conocimientos *aplicaciones*, *perspectivas*, *alternativas metodológicas* y *evaluación significativa* para que el estudiante desarrolle, a más de confianza en su propia potencialidad matemática, gusto por la Matemática.

La Matemática es una de las asignaturas que, por su esencia misma (*estructura*, *lógica*, formalidad, la *demostración* como su método, *lenguaje cuantitativo preciso* y *herramienta* de todas las ciencias) facilita el desarrollo del pensamiento y posibilita al que la conozca a integrarse a equipos de trabajo interdisciplinario para resolver los problemas de la vida real, los mismos que, actualmente, no pueden ser enfrentados a través de una sola ciencia. Además, la sociedad tecnológica e informática en que vivimos requiere de individuos capaces de adaptarse a los cambios que ésta fomenta; así, las destrezas matemáticas mencionadas anteriormente son capacidades fundamentales sobre las cuales se cimientan otras destrezas requeridas en el mundo laboral.

Eje integrador del área

De lo dicho anteriormente, la propuesta curricular presente se sustenta en el eje integrador del área

A*dquirir conceptos e instrumentos matemáticos que desarrollen el pensamiento lógico, matemático y crítico para resolver problemas mediante la elaboración de modelos*.

En otras palabras, en cada año del Bachillerato, se debe promover en los estudiantes la capacidad de resolver problemas modelándolos con lenguaje matemático, resolviéndolos eficientemente e interpretando su solución en su marco inicial. Los ejes de aprendizaje, los bloques curriculares y las destrezas parten de este eje transversal.

Los ejes de aprendizaje
El eje curricular integrador del área de Matemática se sostiene en los siguientes ejes de aprendizaje: *abstracción, generalización, conjetura y demostración*; *integración de conocimientos*; *comunicación de las ideas matemáticas*; y *el uso de las tecnologías en la solución de los problemas*.

1. **Abstracción, generalización, conjetura y demostración**. La fortaleza de la matemática como herramienta en la solución de problemas se sustenta en la capacidad de ésta para reconocer en realidades diversas, elementos comunes y transformarlos en conceptos y relaciones entre ellos para elaborar modelos generales que luego se aplican exitosamente a problemas diversos, e incluso, bastante diferentes de aquellos que originaron el modelo. Por ello, aprender a generalizar partiendo de lo particular es necesario para establecer propiedades entre los objetos matemáticos que representan la realidad y comprender el alcance de estos así como su uso en la solución de los problemas. Adicionalmente, asegurar que los resultados de los modelos proveen soluciones a los problemas pasa por la obtención de demostraciones, ya sean formales u obtenidas mediante métodos heurísticos. Finalmente, la posibilidad de obtener estos modelos generales incluye el análisis y la investigación de situaciones nuevas, la realización de conjeturas, y de su aceptación o de su rechazo (sustentado en la demostración).

2. **Integración de conocimientos**. Hay dos tipos de integración. El primero, entre los conocimientos adquiridos anteriormente, lo que reforzará su aprendizaje y posibilitará el aprendizaje de nuevos conocimientos. Es necesario, entonces, enfatizar en la interacción entre los bloques curriculares, ya que las habilidades desarrolladas en unos ayudarán a desarrollar habilidades en otros, lo que fomentará habilidades matemáticas altamente creativas. Por ejemplo, el Álgebra debe entenderse desde el punto de vista de las funciones y no solamente como una destreza de manipulación simbólica. Un segundo tipo de integración de conocimientos se deberá realizar entre los conocimientos matemáticos y los de otras aéreas de estudio, pues la gran mayoría de los problemas que los estudiantes encontrarán en la vida cotidiana solo podrán ser resueltos mediante equipos interdisciplinarios. Esta integración de conocimientos enriquecerá los contenidos matemáticos con problemas significativos y estimularán una participación activa de los estudiantes al apelar a diversos intereses y habilidades.

3. **Comunicación de las ideas matemáticas**. El proceso de enseñanza-aprendizaje se sustenta en la comunicación, pues las ideas matemáticas y las manipulaciones simbólicas deben acompañarse con descripciones en los lenguajes oral y escrito. En efecto, a pesar de que la Matemática posee

un lenguaje altamente simbólico, los significados que representa deben ser comunicados y aprehendidos por los estudiantes a través de la lengua. Es, por lo tanto, fundamental que el docente enfatice en el uso adecuado del lenguaje en sus diferentes manifestaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta práctica le permitirá al estudiante convertirse en un expositor claro al momento de explicar ideas, podrá desarrollar sus capacidades de razonamiento y demostración, y expresar sus argumentos de forma adecuada, convincente y sustentada, y no expondrá únicamente las soluciones de los problemas, sino que también podrá explicar (y justificar su uso) los procedimientos que ha utilizado para alcanzar dichas soluciones.

4. **El uso de las tecnologías en la solución de problemas.** En la solución de problemas mediante la Matemática muy a menudo es necesario realizar cálculos, gráficos, tareas repetitivas, etcétera. Éstas, en general, consumen mucho tiempo y esfuerzo que, gracias a la tecnología, pueden ser llevadas a cabo por medio de software matemático en computadoras, o por medio de calculadoras gráficas o emuladores de las mismas. El tiempo y el esfuerzo que podemos ahorrarnos al utilizar exitosamente las tecnologías debe ser utilizado en aquello que las tecnologías no pueden hacer: elaborar los modelos matemáticos mediante los cuales resolveremos los problemas. Ésta misma idea se debe aplicar en el proceso de enseñanza-aprendizaje: las tecnologías no reemplazan nuestras capacidades de abstraer, generalizar, formular hipótesis y conjeturas para poder transformar un problema de la vida real en un modelo matemático que la tecnología nos provee de herramientas valiosas para resolver el problema. Por lo tanto, el conocimiento, el uso racional y la eficiencia de las tecnologías será una herramienta invaluable en la aplicación de los conocimientos matemáticos para la solución de los problemas.

Las macro-destrezas

Las destrezas con criterios de desempeño incluidas en la propuesta curricular por año se pueden agrupar de manera general en tres categorías:

1. **Conceptual.** El desarrollo, el conocimiento y reconocimiento de los conceptos matemáticos (su significado y su significante), sus representaciones diversas (incluyendo la lectura e interpretación de su simbología), sus propiedades y las relaciones entre ellos y con otras ciencias.

2. **Calculativa o procedimental.** Procedimientos, manipulaciones simbólicas, algoritmos, cálculo mental.

3. **Modelización.** La capacidad de representar un problema no matemático (la mayoría de las veces) mediante conceptos matemáticos y con el lenguaje de la

matemática, resolverlo y luego interpretar los resultados obtenidos para resolver el problema.

Los bloques curriculares

Son cuatro: *números y funciones*; *álgebra y geometría*; *matemáticas discretas*; y *probabilidades y estadística*.

1. **Números y funciones**. El conjunto de los números reales es nuestro conjunto universo y es la base sobre la cual se desarrolla la gran pirámide que constituye el mundo matemático. Ahora bien, en la educación básica, los estudiantes desarrollan progresivamente la noción de número hasta llegar a tratar con el conjunto de números reales, sus operaciones básicas y propiedades. En el bachillerato, los estudiantes deben profundizar el conocimiento de este conjunto utilizándolo en la resolución de problemas algebraicos. El concepto de función es, posiblemente, el más importante en Matemática; difícilmente, se puede representar un fenómeno sin el auxilio de este concepto. Los estudiantes del bachillerato parten y amplían el conocimiento previo de funciones, desarrollado en la educación básica a través de la investigación de patrones, de la descripción de relaciones lineales mediante la gráfica de la recta y de ejemplos de funciones polinomiales. Las destrezas adquiridas en el estudio del álgebra, la manipulación de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones son cimientos que facilitan el estudio del concepto de función. En el bachillerato, se integra lo anteriormente aprendido con la introducción y desarrollo de la noción de función, que incluye sus diversas representaciones (tabla, gráfica, fórmula y relación), el estudio del dominio y el recorrido, el análisis de las variaciones, simetrías y extremos. La solución de las ecuaciones deben comprenderse como el método para encontrar un cero o la imagen de una función. En el bachillerato, se estudiarán las diferentes clases de funciones (llamadas elementales) y sus caracteristicas: polinomiales, racionales, trigonométricas exponencial y logarítmicas, las que nos permiten interpretar y conocer el mundo: comportamiento y evolución en la economía, predicciones y estimaciones, tiempos, velocidades, el crecimiento de una población, etcétera. Este bloque es fundamental para la preparación de los estudiantes hacia estudios universitarios.

2. **Algebra y geometría**. Este bloque enfatiza la relación entre álgebra y geometría. Este bloque se caracteriza por desarrollar el conocimiento del álgebra de vectores en dos y tres dimensiones. Partiendo de la noción de combinación lineal, se desarrollan las descripciones vectoriales de la recta y el plano. Seguidamente se investigan las transformaciones del plano: traslaciones, rotaciones, homotecias (dilataciones o contracciones), etcétera. El álgebra vectorial y sus aplicaciones a la geometría analítica

constituyen una herramienta fundamental en el tratamiento de fenómenos físicos como la fuerza, la velocidad, campos eléctricos y magnéticos, gravitación universal y órbitas planetarias, tiro parabólico, entre otros.

3. **Matemáticas discretas**. Este bloque provee de conocimientos y destrezas necesarias para que los estudiantes tengan una perspectiva sobre una variedad de aplicaciones, donde instrumentos matemáticos relativamente sencillos sirven para resolver problemas de la vida cotidiana: problemas de transporte, asignación de recursos, planificación de tareas, situaciones en sí complejas, pero muy comunes en el mundo laboral.

4. **Probabilidad y estadística.** En el bachillerato el conocimiento de probabilidad y estadística debe fundamentarse en lo desarrollado en la educación básica. El bloque incluye una revisión de la estadística descriptiva aprendida anteriormente; enfatiza en la habilidad de leer y comprender la información estadística publicada en los medios; plantear preguntas que puedan ser respondidas mediante encuestas, recopilar datos, organizarlos y desplegar la información con medidas estadísticas. Se introduce la noción de probabilidad condicionada y el teorema de Bayes. El bloque considera la noción de aleatoriedad, muestreo y técnicas sencillas de simulación para resolver problemas pertinentes.

Valores

El aula de matemática debe ser utilizada también como un espacio para desarrollar destrezas actitudinales que coadyuvan a los objetivos generales del área como a los objetivos generales del bachillerato. Entre muchas otras destrezas mencionamos las siguientes:

1. Compromiso con su aprendizaje.
2. Conciencia de su aprendizaje.
3. Búsqueda de la autonomía en el aprendizaje.
4. Uso efectivo de algoritmos.
5. Coherencia en la formulación y en la exposición de ideas.
6. Responsabilidad en el aula y solidaridad con sus compañeros al compartir los conocimientos.
7. Claridad y orden al momento de exponer la resolución de problemas.
8. Limpieza en la presentación de trabajos.
9. Ética.

Perfil de salida del área

El Bachillerato General Unificado (BGU) busca formar ciudadanos capaces de insertarse en la sociedad de manera democrática, responsable y productiva. El egresado del BGU conoce los conceptos matemáticos suficientes para utilizarlos en la resolución de problemas de la vida cotidiana; entiende el lenguaje matemático y sus diferentes representaciones, y es capaz de expresarse en él correctamente. Además, comprende que la matemática desempeña un papel importante en el cambio social como elemento formador y de conocimiento, y está en condiciones ´optimas para continuar sus estudios de matemáticas a nivel superior.

Al terminar el BGU, los educandos poseerán el siguiente perfil de salida en el área de Matemática:

- Resuelve problemas mediante modelos construidos con la ayuda de funciones elementales; álgebra y geometría; elementos de la matemática discreta, de la estadística y de las probabilidades. Justifica (argumenta) la validez de los resultados obtenidos mediante el modelo y la pertinencia de utilizarlos como solución de los problemas.

- Usa adecuadamente el lenguaje para comunicar las ideas matemáticas que utiliza en la solución de un problema.

- Comprende el alcance de la información estadística, lo que le ofrece elementos para el ejercicio de una ciudadanía democrática.

- Utiliza las tecnologías de la información en la solución de los problemas, lo que le permitirá desempeñarse con soltura en el campo laboral. También es capaz de estar actualizado en el avance de las tecnologías de la información.

- Conoce los conceptos matemáticos básicos que le facilitan la comprensión de otras disciplinas.

Objetivos educativos del área

1. Comprender la modelización y utilizarla para la resolución de problemas.

2. Desarrollar una compresión integral de las funciones elementales: su concepto, sus representaciones y sus propiedades. Adicionalmente, identificar y resolver problemas que pueden ser modelados a través de las funciones elementales.

3. Dominar las operaciones básicas en el conjunto de números reales: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación.

4. Realizar cálculos mentales, con papel y lápiz y con ayuda de tecnología.

5. Estimar el orden de magnitud del resultado de operaciones entre números.

6. Usar conocimientos geométricos como herramientas para comprender problemas en otras áreas de la matemática y otras disciplinas.

7. Reconocer si una cantidad o expresión algebraica se adecúa razonablemente a la solución de un problema.

8. Decidir qué unidades y escalas son apropiadas en la solución de un problema.

9. Desarrollar exactitud en la toma de datos y estimar los errores de aproximación.
10. Reconocer los diferentes métodos de demostración y aplicarlos adecuadamente.
11. Contextualizar la solución matemática en las condiciones reales o hipotéticas del problema.
12. Contextualizar la solución matemática a las condiciones reales o hipotéticas del problema.

PROYECCIÓN CURRICULAR

PRIMERO DE BACHILLERATO

Objetivos educativos del año:

1. Comprender que el conjunto solución de ecuaciones lineales y cuadráticas es un subconjunto de los números reales.

2. Reconocer cuando un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática.

3. Comprender el concepto de función mediante la utilización de tablas, gráficas, una ley de asignación y relaciones matemáticas (por ejemplo, ecuaciones algebraicas) para representar funciones.

4. Determinar el comportamiento local y global de función (de una variable) lineal o cuadrática, o de una función definida a trozos o por casos mediante funciones de los tipos mencionados, a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetría, intersecciones con los ejes y sus ceros.

5. Utilizar TICs:
   (a) para graficar funciones lineales y cuadráticas;
   (b) manipular el dominio y el rango para producir gráficas;
   (c) analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones);
   (d) analizar las características geométricas de la función cuadrática (intersecciones, monotonía y vértice).

6. Entender los vectores como herramientas para representar magnitudes físicas.

7. Desarrollar intuición y compresión geométricas de las operaciones entre vectores.

8. Comprender la geometría del plano mediante el espacio R^2.

9. Utilizar la programación lineal para resolver problemas en la administración de recursos.

10. Identificar situaciones que pueden ser estudiadas mediante espacios de probabilidad finitos.
11. Recoger, utilizar, representar e interpretar colecciones de datos mediante herramientas de la estadística descriptiva.

13. Reconocer y utilizar las permutaciones, combinaciones y arreglos como técnicas de conteo.

Planificación por bloques curriculares

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeños
1. **Números y funciones**	• Representar **funciones lineales, cuadráticas y definidas a trozos mediantes funciones de los dos tipos mencionados** por medio de tablas, gráficas, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas. **(P)** • Evaluar **una función** en valores numéricos y/o simbólicos. **(P)** • Reconocer **el comportamiento local y global de funciones elementales de una variable** a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría (paridad). **(C)** • Calcular la **pendiente de una recta** si se conocen dos puntos de la misma. **(C, P)** • Calcular la **pendiente de una recta** si se conoce su posición relativa (paralela o perpendicular) respecto a otra recta y la pendiente de ésta. **(C, P)** • Determinar **la ecuación de una recta** dados dos parámetros (dos puntos, o un punto y la pendiente). **(P)** • Determinar la **monotonía de una función lineal** a partir de la pendiente de la recta que representa dicha función. **(C,P)** • Determinar la **pendiente de una recta** a partir de su ecuación escrita en sus diferentes formas. **(P)** • Determinar **la relación entre dos rectas** a partir de la comparación de sus pendientes respectivas (rectas paralelas). **(P)** • Graficar **una recta** dada su ecuación en sus diferentes formas. **(P)** • Reconocer a **la gráfica de una función lineal** como una recta a partir del significado geométrico de los parámetros que definen a la función lineal. **(C)** • Resolver **un sistema de dos ecuaciones con dos variables** de forma gráfica y analítica. **(P)** • Identificar **la intersección de dos rectas** con la igualdad de las imágenes de dos números respecto de dos funciones lineales. **(C)** • Determinar **la intersección de una recta con el eje horizontal** a partir de la resolución de la ecuación f(x) = 0 donde f e**s l**a función cuya gráfica es la recta. **(P)** • Determinar **la intersección de una recta con el eje vertical** a partir de la evaluación de la función en *x*=0 (*f*(0)). **(P)** • Resolver **sistemas de inecuaciones lineales** gráficamente. **(P)** • Resolver **ecuaciones e inecuaciones lineales con**

valor absoluto en forma analítica utilizando las propiedades del valor absoluto. **(P)**

- Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones lineales** (costos, ingresos, velocidad, etcétera) identificando las variables significativas y las relaciones entre ellas. **(M)**
- Resolver **problema**s con ayuda de modelos lineales. **(P,M)**
- Graficar **una parábola** dados su vértice e intersecciones con los ejes. **(P)**
- Reconocer **a la gráfica de una función cuadrática como una parábola** a través del significado geométrico de los parámetros que la definen. **(P)**
- Resolver **una ecuación cuadrática** por factorización, o usando la fórmula general de la ecuación de segundo grado o completando el cuadrado. **(P)**
- Identificar **la intersección gráfica de una parábola y una recta** como solución de un sistema de dos ecuaciones: una cuadrática y otra lineal. **(C,P)**
- Identificar **a la intersección de dos parábolas** como la igualdad de las imágenes de dos números respecto de dos funciones cuadráticas. **(C,P)**
- Determinar **las intersecciones de una parábola con el eje horizontal** a través de la solución de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ donde f es la función cuadrática cuya gráfica es la parábola. **(P)**
- Comprender que **la determinación del recorrido de una función cuadrática** f es equivalente a resolver la ecuación cuadrática $y = f(x)$ para todo y en el recorrido de f. **(C)**
- Determinar **el comportamiento local y global de la función cuadrática** a través del análisis de su dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, concavidad y simetría y de la interpretación geométrica de los parámetros que la definen. **(C,P)**
- Comprender que el **vértice de una parábola** es un máximo o un mínimo de la función cuadrática cuya gráfica es la parábola. **(C)**
- Resolver **inecuaciones cuadráticas** analíticamente mediante el uso de las propiedades de las funciones cuadráticas asociadas a dichas inecuaciones. **(P)**
- Resolver **sistemas de inecuaciones lineales y cuadráticas** gráficamente. **(P)**
- Resolver **ecuaciones e inecuaciones cuadráticas con valor absoluto** analíticamente mediante el uso de las propiedades del valor absoluto y de las funciones cuadráticas. **(P)**
- Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones cuadráticas** (ingresos, tiro

	parabólico, etcétera) identificando las variables significativas presentes en los problemas y las relaciones entre ellas. **(M)** • Resolver **problemas** mediante modelos cuadráticos. **(P,M)**
2. **Algebra y Geometría**	• Representar un **vector en el plano** a partir del conocimiento de su dirección, sentido y longitud. **(P)** • Reconocer **los elementos de un vector** a partir de su representación gráfica. **(C)** • Identificar entre sí **los vectores que tienen el mismo sentido, dirección y longitud** a través del concepto de relación de equivalencia. **(C)** • Operar con **vectores en forma gráfica** mediante la traslación de los orígenes a un solo punto. **(P)** • Demostrar **teoremas simples de la geometría plana** mediante las operaciones e identificación entre los vectores. **(C,P)** • Representar **puntos y vectores en R^2. (P)** • Representar **las operaciones entre elementos de R^2 en un sistema de coordenadas** a través de la identificación entre los resultados de las operaciones y vectores geométricos. **(P)** • Determinar la **longitud de un vector** utilizando las propiedades de las operaciones con vectores. **(P)** • Calcular **el perímetro y el área de una figura geométrica** mediante el uso de la distancia entre dos puntos y las fórmulas respectivas de la geometría plana. **(P)** • Resolver **problemas de la física** (principalmente relacionados con fuerza y velocidad) aplicando vectores. **(C,P,M)**
3. **Matemáticas Discretas**	En un problema de optimización lineal con restricciones (programación lineal) dado: • Identificar **la función objetivo** y escribir **una expresión lineal** que la modele. **(M)** • Graficar **la función lineal objetivo**. **(P)** • Identificar **las restricciones del problema** y escribir **desigualdades lineales** que modelen. **(M)** • Graficar **el conjunto solución de cada desigualdad. (P)** • Determinar **el conjunto factible** a partir de la intersección de las soluciones de cada restricción. **(P)** • Resolver un **problema de optimización** mediante la evaluación de la función objetivo en los vértices del conjunto factible. **(P,C)** • Interpretar **la solución de un problema de programación lineal. (C,M)**
4. Probabilidad y Estadística	▪ Calcular **las medidas de tendencia central y de dispersión** para diferentes tipos de datos. **(P)**

	▪ Reconocer en **diferentes diagramas estadísticos (**tallo y hojas, polígonos de frecuencia, gráfico de barras, histogramas, etcétera**)** la información que estos proporcionan. **(C)** ▪ Interpretar **un diagrama estadístico** a través de los parámetros representados en él. **(C)**. ▪ Reconocer y elaborar **cuadros de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas**, con datos simples y con datos agrupados. **(C,P)** ▪ Representar **los resultados de cuadros de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas** mediante los diferentes diagramas **(**tallo y hojas, polígonos de frecuencia, gráfico de barras, histogramas, etcétera**)**. **(P)** • Comprender **situaciones de la vida cotidiana** a través de la interpretación de datos estadísticos. **(M)** ▪ Aplicar **diferentes técnicas de conteo** en la resolución de problemas. **(P)** ▪ Establecer **la técnica de conteo apropiada para un experimento**, mediante la identificación de las variables que aparecen en el experimento y la relación que existe entre ellas. **(C,M)** ▪ Determinar **el número de elementos del espacio muestral de un experimento** mediante el uso de las técnicas de conteo adecuadas**. (P,M)** ▪ Describir **situaciones no determinísticas** mediante el concepto de probabilidad. **(C,P)** ▪ Conocer y utilizar correctamente **el lenguaje de las probabilidades** en el planteamiento y resolución de problemas. **(C)** • Calcular **la probabilidad de eventos (simples y compuestos (uniones, intersecciones, diferencias)** en espacios muestrales finitos asociados a experimentos contextualizados en diferentes problemas (frecuencias, juegos de azar, etcétera). **(P)**

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de “Matemáticas discretas”.

2 Primero de bachillerato

A partir del eje curricular integrador del área, el docente debe fundamentar su práctica docente en la comprensión y el uso de la matemática como un instrumento para el análisis y la resolución de problemas. El bloque de “Número y funciones” en el primer curso del bachillerato es un terreno fértil donde se puede concretar el elemento central del aprendizaje mediante el énfasis que el docente haga en los siguientes aspectos:

- Muchas situaciones de la vida encierran relaciones cuantitativas.
- Las funciones nos permiten representar o modelar relaciones entre cantidades que surgen de estas situaciones.
- El comportamiento de una función nos informa sobre la situación modelada. Nos permite responder preguntas sobre la realidad o describir elementos de ella (por ejemplo, pronosticar valores, optimizar, entre otras).

El proceso que se sigue para la elaboración de un modelo matemático requiere de todos los ejes de aprendizaje establecidos en este documento. A través del siguiente ejemplo, se ofrecen directrices generales que enfatizan en cada eje de aprendizaje y de cómo utilizar la elaboración de modelos, tanto para que los estudiantes comprendan nuevos conceptos matemáticos como para que los utilicen en la resolución de un problema. En *cursiva*, aparecerán los conceptos (o nociones) matemáticos que se presentarán a los estudiantes; en **negrita**, los ejes de aprendizaje que se trabajan.

El docente plantea el siguiente problema a la clase.

Problema 1 (La cartelera de la clase)**.** *Queremos una cartelera rectangular de corcho para el aula, en la que podamos colocar anuncios, fotografías, mensajes, etcétera. Disponemos de algunas piezas de corcho de forma cuadrada; cada lado mide* 10 cm*; también disponemos de una tira de madera de* 180 cm *para el marco. ¿Cuántas piezas de corcho necesitaremos para que la cartelera sea la más grande que pueda ser enmarcada con la tira de madera?*

Conduzca, en primer lugar, a los estudiantes a que precisen el significado de “más grande” como la cartelera “de mayor área posible”; en segundo lugar, a que comprendan que el problema de hallar el número de piezas es equivalente a determinar las dimensiones de la cartelera buscada.

En el aula, los estudiantes conforman grupos para trabajar de manera cooperativa. Inician la actividad realizando bosquejos de posibles carteleras haciendo variar las dimensiones. Facilite un formato, como el que se muestra a continuación, para que los estudiantes registren y organicen sus datos:

Ancho (cm)	Largo (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
10	80	180	800
20	70	180	1 400

Guíe a los estudiantes en una discusión sobre *variables independientes* y *dependientes*, mediante el reconocimiento de la dependencia que existe entre las variables. El grupo podrá llegar a la conclusión de que hay tres variables, “ancho”, “largo” y “área”, y de que existen, por lo menos, dos dependencias: una entre el “ancho” y el “largo”, y otra entre una de las otras dos y el “área”. El “ancho” puede ser considerado como variable independiente y el largo, como dependiente (o viceversa); esto da cuenta de la primera dependencia. Si el “ancho” es la variable independiente, entonces el “área” es una variable dependiente de éste, lo que da cuenta de la segunda dependencia.

Pida a los estudiantes que grafiquen los pares ordenados correspondientes a $(x = \text{ancho},\ y = \text{área})$ y que luego tracen una curva que pase por los puntos dibujados. El profesor comparte la solución tanto de la tabla como del gráfico con la clase e introduce más lenguaje: la curva tiene el nombre de *parábola*. Aproveche la oportunidad para hacer notar cualidades importantes de la parábola: la *simetría*, el valor *extremo*, la *monotonía*, haciendo, en cada caso, la interpretación respectiva con el problema original. Por ejemplo, la simetría corresponde al hecho de que el rectángulo tiene la misma área si intercambiamos las dimensiones del largo y del ancho, entre sí.

Indique que se realice una gráfica con los pares ordenados $(x = \text{ancho},\ y = \text{largo})$. Los estudiantes deben reconocer esta gráfica como una recta distinta a la parábola. La comparación de los dos gráficos indica la existencia de una relación *no lineal* entre las variables (el ancho y el área).

En este punto, es posible responder la pregunta inicial: ¿con cuántas piezas de corcho se construye la cartelera de mayor área? Se requieren 20 piezas, colocadas en un rectángulo de cuarenta por cincuenta centímetros.

Ahora proponga **generalizar** el problema; es decir, proponga un nuevo problema: ¿cómo se puede encontrar el extremo de cualquier parábola? Para ello, los estudiantes deben determinar la función que describe el área de la cartelera en términos de uno de los lados, para lo cual deben **integrar** su conocimiento de geometría y álgebra. Conduzca a una discusión sobre cómo **abstraer** lo que han encontrado.

En esta discusión, el docente recalca el uso de símbolos para representar tanto los diversos elementos involucrados en el problema como las relaciones existentes entre ellos. Por ejemplo, se sabe que en cualquier rectángulo se verifica

$$\text{Perímetro} = 2\text{ancho} + 2\text{largo}.$$

En el caso de la situación dada, se tiene

$$180 = 2\text{ancho} + 2\text{largo},$$

de donde

$$\text{largo} = 90 - \text{ancho}.$$

Si el ancho es representado por x, entonces el largo será representado por $90 - x$.

Finalmente, sabemos que

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{largo}.$$

Entonces

$$A = x(90 - x),$$

de donde

$$A = -x^2 + 90x.$$

La discusión debe ser conducida a enfatizar que el área es una *función* del ancho, de allí la inclusión de (x) después de A:

$$A(x) = -x^2 + 90x.$$

Si se dispone de **tecnología**, se puede graficar esta función, determinar algunos valores que no se encuentran en la tabla (por ejemplo, la ubicación precisa del vértice). También se puede extender o **generalizar** el problema dando otros valores al perímetro, determinando un *patrón* para la fórmula de $A(x)$ en función del perímetro y la ubicación del vértice.

Una vez introducida la función cuadrática, es importante iniciar un estudio sistemático comenzando con $y = x^2$, y variando esta función "madre" mediante homotecias, reflexiones y traslaciones hasta llegar a la forma general $y = ax^2 + bx + c$. Por ejemplo, se pueden estudiar los siguientes casos:

$$y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = (x+1)^2, \quad y = -(x+1)^2, \ldots$$

En cada uno debemos observar el cambio en la monotonía, concavidad, el vértice y los cortes con los ejes.

Por ejemplo, ¿qué propiedades tiene $y = -5(x+1)^2 + 6$? Empecemos con $y = x^2$. La parábola representada por esta ecuación tiene el vértice en $(0,0)$ y su concavidad es hacia arriba. Entonces la parábola representada por $y = -x^2$ tiene la concavidad hacia abajo, pero el mismo vértice. Al multiplicar por 5, la parábola representada por $y = -5x^2$ tiene una abertura menor, pero no cambia la concavidad ni el vértice. A continuación, realizamos una traslación horizontal: $y = -5(x+1)^2$; ahora el vértice se traslada a $(-1,0)$, pero las otras propiedades no cambian. Finalmente, al realizar la traslación vertical, la parábola representada por $y = -5(x+1)^2 + 6$, su vértice se mueve a $(-1,6)$, pero la concavidad y la apertura se mantienen.

La *fórmula del vértice* puede ser obtenida generalizando el ejemplo anterior: de la forma $y = a(x-h)^2 + k$, el vértice se encuentra en el punto (h,k). Se debe notar que el valor $y = k$ es el más grande (o más pequeño) si el signo de a es positivo (o negativo, respectivamente).

Mediante un ejemplo podemos establecer la relación entre la función cuadrática f de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la forma anterior. En esta situación, se requiere completar el cuadrado por lo que es necesario utilizar un ejemplo sencillo donde el procedimiento sea fácil y no se convierta en un obstáculo técnico para el estudio de la parábola. Mediante observación y generalización de varios ejemplos sencillos, se puede establecer la fórmula del vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Un reto para los estudiantes más avanzados es el completar el cuadrado de manera general y establecer la fórmula del vértice:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Es fundamental que los estudiantes desarrollen un sentido geométrico-algebraico. El problema de determinar los cortes de la parábola con los ejes provee de un tema donde tal destreza puede ser desarrollada: los cortes de la parábola corresponden a los ceros de la función; en otras palabras, resolver una ecuación cuadrática es equivalente a determinar los cortes de una parábola con el eje horizontal, es decir, encontrar los ceros de una función. Es importante empezar este tema con un repaso de las destrezas necesarias (factorización de trinomios y uso de la fórmula cuadrática):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número de cortes depende de la expresión del interior del radical, el *discriminante*: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, se tienen dos raíces reales. En este caso se debe notar que la parábola corta en dos puntos distintos el eje horizontal. Si $\Delta < 0$, no hay solución para la ecuación y, por tanto, no hay cortes: la parábola está localizada enteramente por encima o debajo del eje horizontal; si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución en el conjunto de los números reales; es decir, la parábola toca el eje x en un solo punto que corresponde al vértice.

* * *

¿Qué ejes se han trabajado? Hemos visto que los estudiantes deben **abstraer** para realizar una **conjetura** sobre la relación entre variables, **deducen** una fórmula utilizando relaciones geométricas conocidas, es decir, relacionando otros conocimientos entre sí (**integración de conocimientos**).

Hemos observado también que los estudiantes deben **generalizar** lo encontrado en el problema para realizar una conjetura sobre la ubicación del *máximo de la función* como el *punto vértice de la parábola*. Si los estudiantes o el profesor disponen de la tecnología adecuada (calculadora gráfica, aplicaciones en el internet o software de computadora), el proceso de realizar una gráfica puede ser más rápido, facilitando de esta manera la determinación del vértice.

El proceso de enseñanza aprendizaje requiere de **comunicación verbal y escrita** de ideas matemáticas. Es así que se incorpora el **lenguaje escrito** para la presentación del problema, la designación de los símbolos que representan los elementos del problema con los que se trabaja. Respecto del **lenguaje oral**, el docente debe promover en los estudiantes la formulación correcta de las respuestas que ellos ofrezcan en los procesos interactivos en los que se identifican variables y sus relaciones mutuas.

2.1 Bloque de números y funciones

La introducción de noción de función debe ser gradual, y deben incluirse, al menos, las siguientes nociones.

- Partiendo del conocimiento previo que tienen los estudiantes, la función puede ser vista como una ecuación algebraica. Por ejemplo, de la ecuación $y = 2x + 3$, se puede conducir a una reflexión sobre la dependencia de la variable y con respecto a la variable x. El uso de una tabla con valores de x y de y refuerza esta situación. De ahí que tiene sentido escribir $y = f(x)$.
- La función puede ser vista como una máquina que realiza una operación a un objeto de "entrada" y da como resultado un objeto de "salida". Por ejemplo: traducir "mi máquina toma un número, lo triplica y al resultado suma 1" como "$f(x) = 3x + 1$", y viceversa.

- La función puede ser vista como una regla de asignación entre dos variables. Por ejemplo: el profesor pide a cada estudiante de su clase que digan el nombre de un animal, la clase responde: “gato”; en la pizarra, el profesor anota “gato” y a su lado, el número “4”; a continuación, pide el nombre de otro animal, la clase responde: “culebra”; el profesor la anota, pero también escribe el número “0” a su lado. Luego de repetir este ejercicio varias veces, el profesor pregunta: “¿cuál es la regla de asignación?”.

  A esta noción también se la puede entender como una relación entre dos conjuntos: a cada elemento del primero le corresponde un único elemento en el segundo. En nuestro ejemplo, entre el conjunto de animales y un subconjunto de los números naturales: a cada animal le corresponde un número natural: el número de patas que tiene ese animal.

El profesor debe utilizar simultáneamente varias representaciones de una función:

- Tablas de valores.
- Gráfica en el plano cartesiano.
- Una regla de asignación $x \mapsto f(x)$.
- Una ecuación algebraica.
- Un conjunto de pares ordenados.

Es necesario proponer situaciones a través de una de las representaciones y pedir a los estudiantes que obtengan las otras. Por ejemplo, el problema de obtener la ecuación de una recta dados dos puntos que pertenecen a la recta corresponde a esta perspectiva. De la ecuación algebraica de la recta a su representación gráfica es otro ejemplo. Es igualmente recomendable presentar situaciones en donde no sea posible obtener la regla de asignación, y solamente se deba utilizar la información que da la gráfica o la tabla. Por ejemplo, si se tiene la gráfica de una función, y no su regla de asignación, peticiones como “encontrar el valor de $f(5)$” o “encontrar x de manera que $f(x) = 2$” obligan al estudiante a utilizar la información que proporciona la gráfica o la tabla.

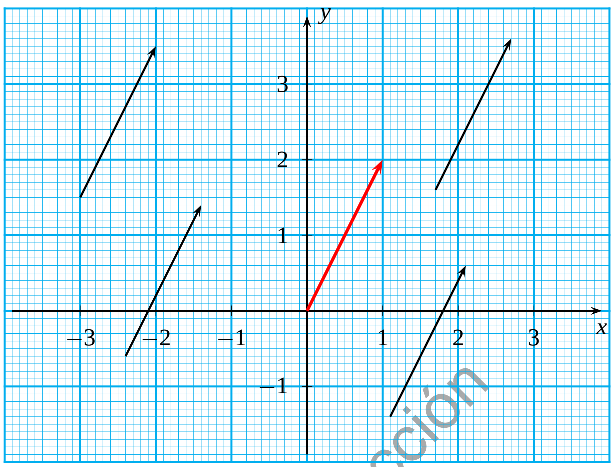
Un aspecto importante del bloque es el interrelacionar el lenguaje algebraico con el lenguaje funcional. Por ejemplo, el problema algebraico de encontrar la solución de la ecuación $x+1 = x^2 - 2$ se debe presentar también como el problema de encontrar la intersección entre las gráficas de las funciones f y g definidas por $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2 - 2$.

2.2 El bloque de algebra y geometría

La historia de la matemática nos devela el hecho de que los vectores fueron desarrollados para expresar posición y movimiento de objetos en el plano y el espacio. Es recomendable mantener esta relación para comprender los vectores geométricos y su relación con los vectores algebraicos.

Los estudiantes están familiarizados con el plano cartesiano desde sus estudios de EGB. El maestro debe partir de este conocimiento para presentar de manera simultánea el espacio $\mathbb{R}^2$ y la equivalencia entre *parejas ordenadas*, *puntos* y *vectores*.

Para presentar el concepto de vectores, se puede recurrir a una variedad de actividades lúdicas. Por ejemplo, el profesor puede trazar un plano cuadriculado simulando el plano cartesiano en el piso de la clase o en el patio del colegio. Luego pide a sus estudiantes que paren en los puntos de coordenadas enteras y pide que, simultáneamente, se muevan una unidad a la derecha y dos unidades hacia arriba. El profesor pide que cada estudiante trace con una tiza un segmento de recta que una el punto de origen y punto final de su movimiento, usando una flecha para indicar la dirección del movimiento. A cada estudiante le corresponde un vector distinto sin embargo todos obedecieron la misma instrucción. Esta actividad debe servir para presentar la noción de *vector*, y su *notación*, las definiciones de *vectores equivalentes*, y la *forma estándar* de un vector. En el pizarrón, el profesor resume en un gráfico en el plano lo que sus estudiantes realizaron.



Todos los vectores son equivalentes al vector cuyo punto inicial es el origen de coordenadas y cuyo punto final es el punto de coordenadas $(1,2)$. Para expresar el movimiento, podemos indicar que, para llegar a $(1,2)$ desde $(0,0)$, damos un (1) paso en la dirección hacia el punto de coordenadas $(1,0)$ y dos (2) pasos en la dirección del punto de coordenadas $(0,1)$. Se indica, entonces, que los dos vectores con el mismo punto inicial, el de coordenadas $(0,0)$, pero con puntos finales los de coordenadas $(1,0)$ y $(0,1)$, respectivamente, son especiales, pues nos pueden servir para describir cualquier movimiento. El profesor indica que se los representa mediante $\vec{i}$ y $\vec{j}$, y al vector con punto inicial el origen de coordenadas y con punto el de coordenadas $(1,2)$ como $\vec{i}+2\vec{j}$. El profesor conduce a sus estudiantes a las siguientes conclusiones:

- A cada punto de coordenadas (a,b) en el plano, *le corresponde* el vector $a\vec{i}+b\vec{j}$.
- Un vector cuyos puntos inicial y final tienen las coordenadas (c,d) y e, f, respectivamente, es *equivalente* al vector $a\vec{i}+b\vec{j}$ si y solo si

$$e - c = a \quad \text{y} \quad f - d = b.$$

En el espacio $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$, se definen dos *operaciones*. Una es entre dos parejas ordenadas, y se la denomina *suma*; la otra, llamada *producto por un escalar*, entre una pareja ordenada y un número real (escalar). La suma y multiplicación por un escalar son, desde el punto de vista algebraico, sencillas de operar.

Estas operaciones deben ser presentadas de manera conjunta con su representación vectorial que puede ser más difícil de entender:

1. La *suma entre pares ordenados* se realiza sumando las coordenadas respectivas entre sí.
2. La *suma entre vectores* se realiza *algebraicamente* sumando los términos “semejantes” en $\vec{i}$ entre sí y los términos semejantes en $\vec{j}$ entre sí, separadamente.
3. La *suma de vectores* se realiza *geométricamente* con la traslación de uno de los vectores, o la ley del paralelogramo como una alternativa a la traslación.

Por ejemplo:

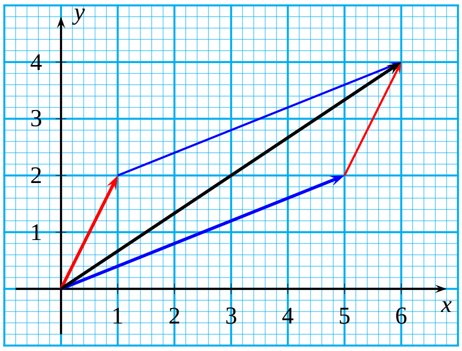
Suma en $\mathbb{R}^2$:

$$(5,2) + (1,2) = (6,4).$$

Suma algebraica de vectores:

$$(5\vec{i}+2\vec{j}) + (\vec{i}+2\vec{j}) = 6\vec{i}+4\vec{j}.$$

Suma geométrica de vectores:



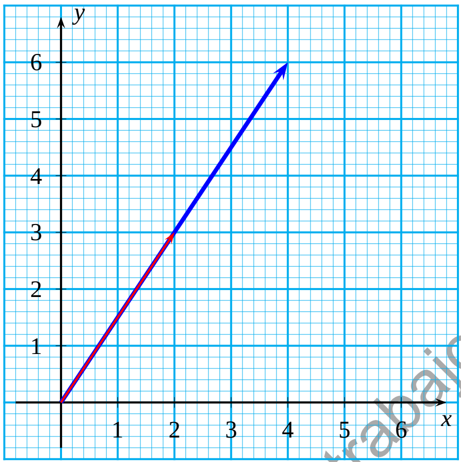
Producto por un escalar en $\mathbb{R}^2$:

$$2(2,3) = (4,6).$$

Producto por un escalar algebraicamente:

$$2(2\vec{i}+3\vec{j}) = 4\vec{i}+6\vec{j}.$$

Producto por un escalar geométricamente:



El profesor puede utilizar las representaciones geométricas de la suma y del producto por un escalar para verificar las propiedades que que hacen que $\mathbb{R}^2$ sea un espacio vectorial: la *asociatividad*, la *conmutatividad*, la existencia del *elemento neutro* (el *vector "cero"*), la existencia del *inverso aditivo*, la *distributividad*, etcétera.

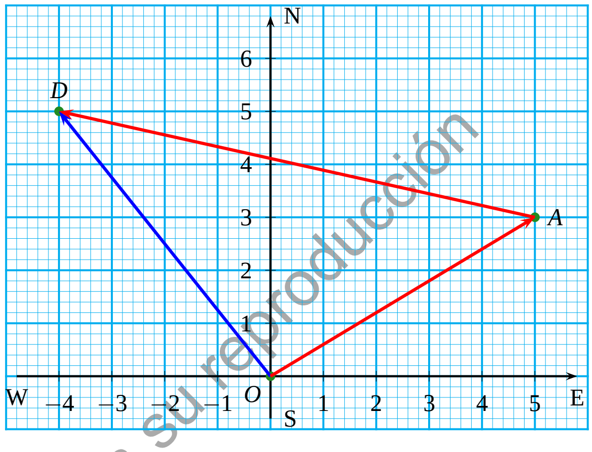
Haga notar casos importantes para la suma y el producto por escalar. Por ejemplo:

- El efecto de multiplicar un vector por un escalar menor que 1 y mayor que cero es el de contraer o "encoger" al vector.
- El efecto de multiplicar un vector por un escalar menor que cero es que este apunta en dirección opuesta.
- Al multiplicar un vector por -1, se obtiene el *vector inverso*.
- Si tomamos varios puntos sobre una recta y les sumamos un mismo vector, los puntos resultantes estarán también en una recta.

Las primeras dos observaciones pueden conducir a la presentación de las nociones de *longitud* y de *dirección* de un vector (ángulo que forma con el eje x). La fórmula de longitud de un vector debe salir de la relación pitagórica. Problemas prácticos de ubicación y posición final de objetos que se trasladan deben dar paso a entender con mayor profundidad estos conceptos. Considere utilizar problemas parecidos al siguiente:

Problema 2. *Una persona que viaja en automóvil parte de una ciudad; recorre tres kilómetros hacia el Norte y luego, cinco hacia el Este, y se detiene a almorzar. Si el lugar de destino se encuentra a cuatro kilómetros hacia el Oeste y a cinco kilómetros hacia el Norte de la ciudad de origen, ¿cuál debe ser la dirección y longitud de recorrido desde el lugar de la parada al lugar del destino? Si realizara el viaje en línea recta desde la ciudad de origen hasta el lugar de destino, ¿cuál seria la longitud de su recorrido?*

Es recomendable que el profesor insista en que los estudiante realicen el gráfico de la situación y, paralelamente, la representación del problema en forma vectorial:



Si el vector que describe el movimiento desde el lugar en que la persona se detuvo para almorzar hasta el lugar de destino se representa por $a\vec{i}+b\vec{j}$, entonces se verifica la igualdad siguiente:

$$(5\vec{i}+3\vec{j})+(a\vec{i}+b\vec{j} = -4\vec{i}+5\vec{j}$$

implica que $a=-9$ y $b=2$. Por lo tanto, el movimiento de la parada al destino final se describe mediante el vector $-9\vec{i}+2\vec{j}$ y la distancia entre las dos ciudades es

$$|-9\vec{i}+2\vec{j}| = \sqrt{81+4} = \sqrt{85} \approx 9{,}2$$

kilómetros.

Finalmente, hay una variedad de recursos en línea que realizan la suma de vectores[1]. Si la clase dispone de tecnología, deberá utilizar estas herramientas para realizar ejercicios para comprobar propiedades, realizar suma de varios vectores, que realizados a mano, tomaría mucho tiempo, etcétera.

2.3 El bloque de matemáticas discretas

Aquí se presentan algunas formas de modelar situaciones utilizando herramientas matemáticas diversas: grafos, algoritmos, funciones recursivas, entre otras. En el primer año del bachillerato, el bloque incluye programación lineal.

La programación lineal es una aplicación de varios conocimientos previos que serán integrados en un algoritmo sencillo y extremadamente útil. El siguiente ejemplo muestra un problema y la elaboración de un modelo que lo represente. Se recalca las oportunidades de enseñanza con atención a los ejes de aprendizaje del área.

Problema 3 (Ganancia máxima de una mezcla)**.** *La clase quiere reunir fondos para el paseo de fin de año, para lo cual se organizan para vender bebidas. Deciden ofrecer jugos cítricos de dos tipos: "ácido" y "super ácido". Para elaborar un litro de jugo super ácido, se requiere el zumo de dos naranjas y cuatro limones; para un litro del jugo ácido, el zumo de una naranja y cuatro limones. Un vaso de jugo ácido será vendido en* 50 *centavos y uno de*

[1] `http://www.unalmed.edu.co/~daristiz/preuniversitario/unidades/generalidades/applets/AppletSumaPoligJar/SumaPolig.htm`

jugo super ácido, en 75 centavos. Gracias a una donación, la clase consigue 20 naranjas y 60 limones. Se quiere elaborar un total de al menos 10 litros entre ambos jugos. Se utilizarán vasos cuya capacidad es la cuarta parte de un litro. Entonces, ¿cuántos litros de cada jugo deberá la clase elaborar de modo que la ganancia sea la máxima?

Divida la clase en grupos y facilite una tabla en la que los estudiantes registren los resultados de experimentar con varias combinaciones de las variables:

Número de litros de jugo ácido	Número de litros de jugo super ácido	Total de naranjas	Total de limones	Ganancia
13	2	17	60	32
4	10	24	56	36
9	1	11	40	21
10,5	4,5	19,5	60	34,5

Invite a sus estudiantes a llenar la tabla con valores tanto enteros como no enteros. Luego, realice preguntas que inviten a la reflexión sobre cómo se escogen los valores para cada tipo de jugo. Particularmente, el valor que es necesario para que se cumplan las restricciones. Por ejemplo, en la tabla anterior, la segunda opción no cumple con la restricción de que solo hay 20 naranjas. Es conveniente introducir un nombre para aquellos pares de valores:

(número de litros de "ja", número de litros de "jsa"),

que cumplen con las restricciones; el conjunto de estos puntos se denomina *conjunto factible*.

El profesor invita a sus estudiantes a escribir inecuaciones que representen el problema, comenzando con dar nombre a las dos cantidades variables. Por ejemplo, con la letra x, nombramos el número de litros de jugo ácido y con la letra y, el número de litros de jugo super ácido:

x: *número de litros de jugo ácido,*
y: *número de litros de jugo super ácido.*

Discuta la mejor manera de escribir las condiciones para x y y en forma de *inecuaciones*. Luego de llegar a un consenso sobre las inecuaciones, introduzca el término *restricciones del problema*; indique que, en este caso, las restricciones son:

$$x+2y \leq 20, \quad 4x+4y \leq 60, \quad x+y \geq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

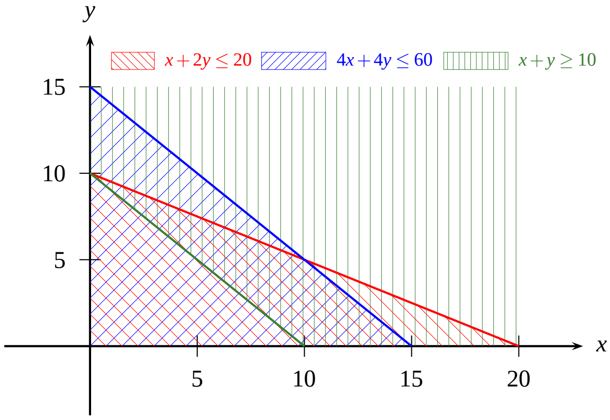
El docente deberá enfatizar en el significado de cada una de esas inecuaciones. Por ejemplo, la primera nos dice que el número de naranjas que se utilicen no puede sobrepasar de 20; la segunda, que el número de limones utilizados no excederá de 60; etcétera.

Se procede luego a escribir una expresión algebraica que represente la ganancia obtenida por la venta de los jugos; a esta expresión se la denomina *la función objetivo*. El docente deberá recalcar en el uso de la palabra *función*: la ganancia varía cuando varían el número de litros de los jugos que se elaboren. En este caso, como cada litro contiene cuatro vasos, $4x$ y $4y$ representarán el total de vasos que serán elaborados de cada tipo de jugo; cada una de estas cantidades multiplicada por el precio de venta de un litro de cada tipo de jugo, respectivamente, nos proporciona la ganancia; luego, la función objetivo será:

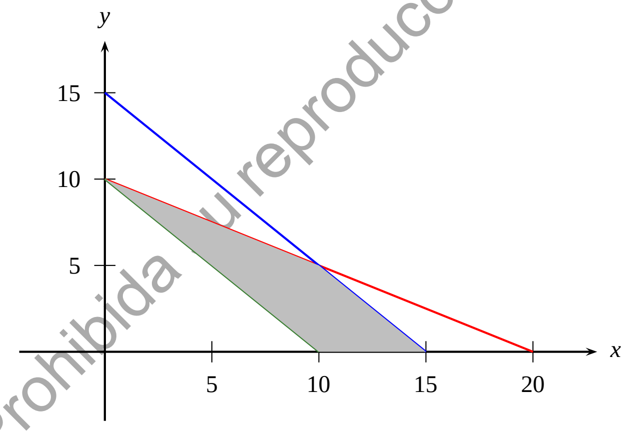
$$G(x,y) = 0{,}5(4x) + 0{,}75(4y) = 2x+3y.$$

Es decir, por un litro de jugo ácido la ganancia es de 2 dólares; de 3, por un litro super ácido.

En vista de que la tabla es una manera ineficiente de encontrar todas las parejas posibles, el profesor pide a sus estudiantes que grafiquen, en un mismo plano cartesiano, cada inecuación (restricción):



Debe llamar la atención de los estudiantes hacia la región que es común a todas las restricciones (región denominada *conjunto factible*):



Dado que el objetivo de aprendizaje no es el realizar gráficas de inecuaciones, este proceso no debe convertirse en un obstáculo en la presentación del problema; por ello, si la clase lo necesita, es recomendable utilizar una calculadora gráfica en lugar de determinar a mano el conjunto factible. En la web podemos encontrar muchas aplicaciones de software libre que grafican el conjunto factible[2]. En ejercicios subsiguientes, el profesor podrá, si los estudiantes lo necesitan, proponer ejercicios para representar gráficamente inecuaciones a mano.

Es importante organizar la información de manera clara resumiendo el problema de la siguiente manera:

$$\text{máx}\, G(x) = 2x+3y$$

$$\text{sujeto a:} \begin{cases} x+2y \leq 20, \\ 4x+4y \leq 60, \\ x+y \geq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

El algoritmo de solución de la programación lineal indica que, para hallar la solución, la función objetivo sea evaluada en los vértices de la región factible. Podemos dar sentido a este algoritmo indicando que si la función objetivo toma distintos valores, las gráficas que se obtienen son rectas paralelas entre sí. En efecto, si la ganancia fuera de 32 dólares, entonces los valores de x y de y que producen esta ganancia, cumplirían la siguiente igualdad:

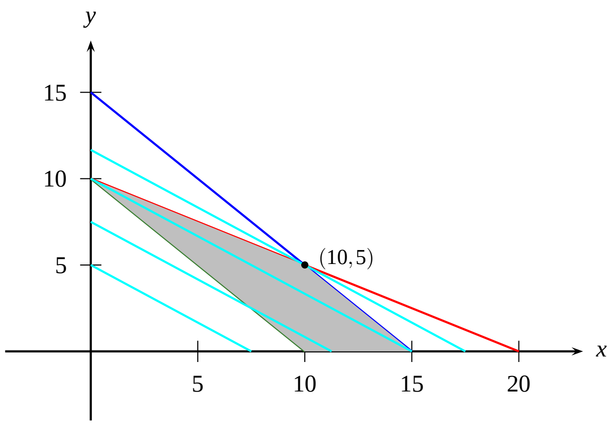
$$2x+3y = 32.$$

Entonces, la gráfica de todos estos puntos (x,y) sería una recta. Si la ganancia fuera de 21 dólares, la recta correspondiente sería

$$2x+3y = 21.$$

[2]Por ejemplo, en `http://www.ronblond.com/M1/Linprog/index.html`.

En el siguiente dibujo, se muestran algunas rectas obtenidas para distintos valores de la función objetivo:



El valor de la función objetivo en este caso crece conforme la recta se mueve hacia la derecha. Claramente vemos que el valor máximo de la función objetivo debe obtenerse en uno de los vértices de la región factible.

Para este problema, el vértice correspondiente a la intersección de las rectas de ecuaciones $x+y=15$ y $x+2y=20$, corresponde al máximo que buscamos. Las coordenadas del punto de intersección es $(10,5)$; es decir, $x=10$, $y=5$ y la ganancia es

$$2x+3y=20+15=35$$

dólares.

Es importante que el docente pida a los estudiantes que calculen el valor de la función objetivo en los otros vértices del conjunto factible y comparen la ganancia obtenida con la óptima.

Un aspecto de extrema importancia es interpretar los resultados que el procedimiento matemático nos provee. Por ello, el profesor debe enfatizar en que los estudiantes escriban la solución utilizando frases completas como "El valor máximo de la ganancia se obtiene elaborando 10 litros de jugo ácido y 5 litros de jugo super ácido". Además, los estudiantes pueden extender el problema, plantear **hipótesis** y **conjeturas** como las siguientes: "si variáramos el precio de cada vaso de jugo super ácido de 75 centavos a 85 centavos, ¿como cambiaría la solución?", "parece que la solución siempre se dará en la esquina superior y no inferior", etcétera.

Como una **extensión** a esta actividad, se puede pedir a cada estudiante que escriba su propio problema de programación lineal, similar al ya propuesto. Esto estimula su imaginación y creatividad, obliga a pensar en cantidades que están relacionadas linealmente, ayuda al estudiante a diferenciar entre las restricciones y la función objetivo.

Vemos que varios ejes de aprendizaje se manifiestan en esta actividad: la representación de relaciones cuantitativas requiere un nivel de **abstracción**, el uso de **tecnología** para facilitar la solución del problema, la **comunicación oral**, la **generalización** del tipo de problema que se presenta (problema de mezclas).

2.4 El bloque de estadística y probabilidad

Este bloque parte del conocimiento adquirido sobre estadística descriptiva en años anteriores. Una actividad estimulante es pedir a los estudiante que se planteen una pregunta que se pueda responder mediante una encuesta. La encuesta debe incluir preguntas que representen variables numéricas y categóricas. Luego de procesar los resultados de la encuesta, estos deben ser representados en forma gráfica mediante, gráficos de círculo, de barras, histogramas, etcétera.

El resumen de resultados también debe incluir un reporte de tendencia central y variación de cada variable. Los estudiantes pueden preparar un cartel con sus resultados y exponerlos a sus compañeros. Preguntas relevantes para su edad pueden ser:

- ¿Qué tipo de comida prefiere?
- ¿Cuánto tiempo de mirar televisión es bueno?
- ¿Necesitamos otras materias de estudio?

La encuesta debe incluir preguntas demográficas para realizar comparaciones interesantes: sexo, edad, lugar de origen, etcétera.

Todos tenemos nociones básicas de probabilidad que provienen del uso del lenguaje común :

- ¿Qué tan probable es que gane mi equipo favorito?
- ¿Cuál es la probabilidad de que llueva el día de hoy?

El maestro puede dar ejemplos de eventos que podamos catalogar en una recta de probabilidad. Marcando en la recta 0 como imposible y 1 como totalmente cierto, se pide a los estudiantes que den ejemplos de eventos que estén en el uno o en el otro extremo y luego eventos que estén entre los dos extremos pidiendo que se los ubique según sea su criterio.

Los experimentos de probabilidad binomial son igualmente recomendados en este nivel: lanzar una o dos monedas, responder preguntas que tengan respuesta verdadero o falso, escribir el sexo de una persona, etcétera. El concepto de *variable aleatoria* y *espacio muestral o de eventos* debe surgir de estos experimentos. A continuación los estudiantes realizan experimentos con dados, cartas, etcétera, con el fin de generalizar estos conceptos.

La *probabilidad* se define en estos experimentos como el número de eventos favorables sobre el número de eventos en el espacio muestral. A medida que el experimento probabilístico se hace más complicado, es necesario desarrollar técnicas de conteo, lo que nos conduce a encontrar el número de combinaciones con o sin repetición y el número de permutaciones de los elementos de un conjunto. Es recomendable introducir el *factorial* como una herramienta para calcular el número de permutaciones de un conjunto finito de objetos. Por ejemplo, ¿cuántas placas de carros se pueden hacer si tenemos 6 dígitos y no queremos que un dígito aparezca más de una vez?

Es importante mostrar otras representaciones de probabilidad. Por ejemplo, la probabilidad geométrica: dado un círculo partido en varias regiones, ¿cuál es la probabilidad de lanzar un dardo en una región dada?

Este bloque incluye el cálculo de probabilidades de eventos simples y de eventos que resulten de la unión disjunta de eventos simples. Por ejemplo, la probabilidad de que salga un "dos" o un "tres" en el experimento de lanzar un dado corresponde a la unión de dos eventos simples disjuntos. En el segundo de bachillerato, se estudiará la probabilidad de eventos resultantes de uniones no disjuntas y de intersecciones.

3 Indicadores esenciales de evaluación

- **Evalúa una función dada por la ley de asignación $f(x)$ con valores numéricos o literales.**
- Determina la imagen y pre-imagen de un elemento del dominio o del recorrido respecto de una función inspeccionando su gráfica o su tabla de valores.
- **Grafica rectas y parábolas.**
- Determinan la pendiente de una recta
- Describe la pendiente de una recta como tasa de cambio.
- **Obtiene la ecuación de una recta dada su pendiente y punto por el cual pasa, o dados dos puntos.**
- Identifica si dos rectas son paralelas dadas sus ecuaciones lineales.
- **Ubica el vértice de una parábola tanto inspeccionando la gráfica como utilizando la fórmula correspondiente.**
- Identifica el vértice de una parábola como el mínimo o el máximo de la función cuadrática correspondiente.
- Describe la monotonía y la concavidad de una parábola dada su gráfica o dada su formula.
- Determina los cortes de la parábola con los ejes resolviendo una ecuación cuadrática o inspeccionando una gráfica.
- **Grafica parábolas mediante traslaciones horizontales, verticales, reflexiones y homotecias a la parábola madre $y = x^2$.**
- Evalúa funciones lineales y cuadráticas a trozos.
- Grafica funciones lineales y cuadráticas a trozos.
- **Encuentra la intersección de dos recta, de una recta y una parábola, y de dos parábolas mediante la solución de un sistema de ecuaciones y mediante la inspección de gráficas.**
- **Grafica vectores libres y vectores en forma estándar.**
- **Suma vectores y multiplica un vector por un escalar en forma algebraica y geométrica.**
- Modela problemas de ubicación de objetos utilizando vectores.
- **Calcula la longitud de un vector y la distancia de un punto al origen.**
- Determina un vector dadas su longitud y dirección.
- **Reconoce los distintos elementos de un problema de programación lineal: función objetivo, restricciones, conjunto factible.**
- Traduce del lenguaje natural al lenguaje matemático estableciendo variables y ecuaciones o inecuaciones en un problema de programación lineal.
- **Grafica el conjunto factible y determinan sus vértices.**
- **Evalúa la función objetivo y pueden determinar su valor máximo o mínimo en la región factible.**
- Realiza una encuesta y presenta sus resultados mediante gráficos estadísticos, medidas de tendencia central y dispersión.
- Identifica una variable aleatoria en un problema.
- **Describe el espacio muestral para experimentos sencillos con monedas, dados y cartas.**
- **Calcula la probabilidad de eventos simples y compuestos.**
- **Calcula el número de combinaciones y de permutaciones.**

PROYECCIÓN CURRICULAR
SEGUNDO DE BACHILLERATO

Objetivos educativos del año

1. Aplicar modelos de funciones polinomiales (lineales y cuadráticas), racionales, con radicales o trigonométricas en la resolución de problemas.
2. Reconocer cuando un problema puede ser modelado mediante una función lineal, cuadrática o trigonométrica.
3. Comprender el concepto de función mediante la utilización de tablas, gráficas, una ley de asignación y relaciones matemáticas (por ejemplo, ecuaciones algebraicas) para representar funciones.
4. Comprender que el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones que contengan expresiones polinomiales, racionales, con radicales y trigonométricas como un subconjunto de los números reales.
5. Determinar el comportamiento local y global de función (de una variable) polinomial, racional, con radicales, trigonométricas, o de una función definida a trozos o por casos mediante funciones de los tipos mencionados, a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetría, extremos, asíntotas, intersecciones con los ejes y sus ceros.
6. Operar (suma, resta, multiplicación, división, composición e inversión) con funciones (de una variable) polinomiales, racionales, con radicales, trigonométricas, o aquellas definidas por trozos o casos mediante funciones de los tipos mencionados.
7. Utilizar TICs:
   (a) para graficar funciones polinomiales, racionales, con radicales y trigonométricas;
   (b) manipular el dominio y el rango para producir gráficas;
   (c) analizar las características geométricas de funciones polinomiales, con radicales y trigonométricas (intersecciones con los ejes, monotonía, extremos y asíntotas).
8. Aplicar vectores y matrices en la solución de problemas físicos y geométricos.
9. Comprender y utilizar el concepto de dirección de la recta, rectas paralelas y perpendiculares desde el punto de vista vectorial.
10. Resolver problemas de distancia entre puntos y rectas mediante la representación vectorial de una recta.
11. Realizar operaciones matriciales. Calcular determinantes de matrices y comprender la relación entre determinante e inversa de una matriz.

12. Comprender el comportamiento geométrico de transformaciones del plano. Representar gráficamente las siguientes transformaciones en el plano: traslaciones, rotaciones, simetrías y homotecias.

13. Identificar problemas sobre la administración de recursos que pueden ser modelados y resueltos mediante la teoría de grafos.

14. Representar gráficamente circuitos y reconocer circuitos de Euler.

15. Comprender el uso de herramientas matemáticas en problemas de asignación de tareas.

16. Distinguir problemas donde la probabilidad condicionada sea una herramienta de análisis y solución.

17. Comprender el propósito y uso del muestreo, identificar posibles fuentes de sesgo, comprender la importancia de la aleatoriedad y utilizar técnicas de muestreo en la simulación de situaciones sencillas.

Planificación por bloques curriculares

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeños
1. **Números y funciones**	• Representar **funciones elementales** por medio de tablas, graficas, fórmulas y relaciones. **(C,P)** • Evaluar **una función** en valores numéricos y/o simbólicos. **(C,P)** • Reconocer y representar **el comportamiento local y global de funciones lineales y cuadráticas y combinaciones de ellas (de una variable)** a través de su dominio, recorrido, monotonía, simetría. **(C,P)** • Realizar **operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre** funciones polinomiales o racionales dadas. **(P)** • Determinar **los ceros, la monotonía y la gráfica de una función polinomial** mediante el uso de TIC's. **(C,P)** • Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones polinomiales** (costos, energías, etcétera) identificando las variables significativas y las relaciones existentes entre ellas. **(M)** • Resolver **problemas** con ayuda de modelos polinomiales. **(P,M)** • Determinar **las intersecciones, la variación, las asíntotas y la gráfica de una función racional** mediante el uso de TIC's. **(C,P)** • Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones racionales sencillas** a partir de la identificación de las variables significativas y de las relaciones existentes entre ellas. **(M)** • Resolver **problemas** mediante modelos con funciones racionales sencillas. **(P,M)** • Determinar las intersecciones **los cortes de la gráfica de una función polinomial o racional con el eje horizontal** a través de la resolución analítica, con ayuda de las TIC's, de la ecuación $f(x) = 0$, donde f es la función polinomial o racional. **(C,P)** • Determinar **el recorrido de una función polinomial o racional** a partir de la resolución, con ayuda de las TIC's, de una ecuación algebraica de la forma $y = f(x)$. **(C,P)** • Calcular **las funciones trigonométricas de algunos ángulos** con la definición de función trigonométrica mediante el círculo trigonométrico. **(C,P)** • Reconocer **el comportamiento local y global de las funciones trigonométricas** a través del análisis de sus características (dominio, recorrido, periodicidad, crecimiento, decrecimiento, concavidad, simetría y

	paridad). **(P)** • Identificar **las gráficas correspondientes a cada una de las funciones trigonométricas** a partir del análisis de sus características particulares. **(C,P)** • Representar gráficamente **funciones obtenidas mediante operaciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones trigonométricas** con la ayuda de las TIC`s. **(C,P)** • Estudiar **las caracteristicas de combinaciones funciones trigonométricas representadas gráficamente** con la ayuda de las TIC`s. **(C,P)** • Demostrar **identidades trigonométricas simples**. **(P)** • Resolver **ecuaciones trigonométricas sencillas** analíticamente. **(P)** • Elaborar **modelos de fenómenos periódicos** mediante funciones trigonométricas. **(P,M)** • Resolver **problemas** mediante modelos que utilizan funciones trigonométricas. **(P,M)** • Determinar **la función compuesta** de dos funciones. **(P)**
2. **Algebra y Geometría**	• Reconocer **vectores perpendiculares** a partir de sus coordenadas. **(P)** • Hallar **las ecuaciones paramétricas de una recta con vector director conocido** a partir de su ecuación vectorial. **(P)** • Expresar la **ecuación cartesiana de una recta en forma paramétrica y viceversa** a través de la relación entre los coeficientes y los parámetros. **(P)** • Determinar **la ecuación de una recta paralela o perpendicular a una recta dada** a partir de la relación entre los coeficientes y los parámetros. **(C,P)** • Resolver **problemas de distancias entre puntos y rectas y entre rectas** utilizando vectores. **(P)** • Resolver **problemas de física** utilizando las ecuaciones paramétricas de una recta. **(P,M)** • Realizar **Operaciones con matrices** previa la determinación de si son posibles o no. **(C,P)** • Resolver **problemas** utilizando la igualdad de matrices. **(P)** • Calcular **determinantes de matrices cuadradas (de orden menor o igual a tres)** por medio de diferentes métodos: por menores, la regla de Sarrus, las propiedades de los determinantes. **(P)** • Calcular **determinantes** utilizando TIC's. **(P)** • Resolver **sistemas de ecuaciones lineales de orden 2 o 3** utilizando la regla de Cramer. **(P)** • Resolver **sistemas de ecuaciones lineales con solución única, infinitas soluciones o sin solución**

	mediante el método de Gauss-Jordan. **(P)** • Determinar **la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales** utilizando el determinante de la matriz de coeficientes. **(C,P)** • Expresar **las transformaciones geométricas** como funciones. **(C,P)** • Expresar **las transformaciones geométricas** en forma matricial. **(P)** • Aplicar **transformaciones geométricas** (hallar el simetrico, rotar, ampliar, reducir) a figuras geométricas planas simples. **(P)** • Reconoce**r la ecuación de un círculo** a partir de los parámetros de la misma. **(C)** • **Hallar la ecuación de un círculo** conocidos su centro y su radio. **(P)** • Determinar **las ecuaciones de las rectas asociadas a un círculo** a partir de la su ecuación. **(P)** • Transformar círculos mediante traslaciones y homotecias. **(P)** • Determinar **los puntos de intersección entre rectas y círculos y entre círculos** mediante la solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (ecuaciones lineales y cuadráticas). **(P)** • Realizar **transformaciones en el plano** con la ayuda de las TIC's. **(P)**
3. **Matemáticas Discretas**	En un problema dado: • Identificar y modelar **problemas de distribución de recursos** mediante grafos. **(C,M)** • Identificar **vértices y aristas** de un grafo. **(P)** • Construir **un grafo** dada una red. **(C,P)** • Definir un **circuito de Euler**. **(C)** • Identificar **condiciones suficientes en un grafo para que contenga un circuito de Euler**. **(C,P)** • Determinar **los vértices y el orden de un circuito de Euler** en un grafo. **(C,P)** • Aumentar las aristas necesarias para que un grafo contenga un circuito de Euler. **(C,P)** • Interpretar **el resultado de la obtención de un circuito de Euler** en el contexto del problema inicial. **(C,M)** • Definir un **circuito de Hamilton**. **(C)** • Comprender la diferencia entre **un circuito de Hamilton** y **un circuito de Euler**. **(C)** • Encontrar **un circuito hamiltoniao de menor costo** mediante los métodos de: prueba y error, del vecino próximo. **(C,P,M)** • Encontrar **soluciones aproximadas al problema del viajero** utilizando prueba y error, el algoritmo del

	vecino próximo, y otros métodos. **(P,M)** • Determinar **el árbol generador de menor costo**. **(C,P,M)** • Encontrar **el tiempo mínimo para realizar una secuencia de tareas** mediante la identificación de un camino crítico. **(P,M)** • Identificar **un problema de transporte**.**(M)** • Plantear un **problema de programación lineal** para resolver un problema de transporte. **(C,P,M)** • Utilizar TICs para resolver el problema de transporte. **(P,M)**
4. **Probabilidad y Estadística**	▪ Reconocer **experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada** mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados. **(C,M)** • Calcular **la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones** mediante el teorema de Bayes. **(P)** ▪ Obtener **muestras** a través de diversas formas de muestreo: simple, por conglomerados, estratificado. **(P,M)** • Seleccionar **una muestra** tomando en cuenta la importancia de la aleatoriedad y utilizando las técnicas más conocidas para la selección. **(C,P,M)**

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de “Matemáticas discretas”.

2 Segundo de bachillerato

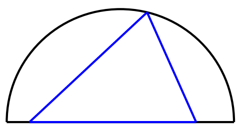
En este año, continúa el estudio de varios tipos de funciones. En particular, se introducen las funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas son fundamentales tanto para modelar fenómenos periódicos como para asistirnos en la llamada resolución de triángulos rectángulos. Históricamente, las funciones trigonométricas fueron inventadas con este propósito. Por ello, la trigonometría es un contenido que nos permite cumplir con el propósito central del aprendizaje del área: la resolución de problemas.

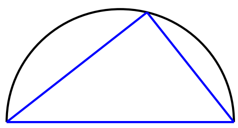
El problema siguiente es un ejemplo de lo que se conoce como “situación problema”; es decir, un problema más o menos complejo que permite descubrir o reforzar al estudiante una o varias nociones (en este caso, la de *función* y sus elementos), vizualizar que existen varias formas de enfrentar un problema y descubrir sus limitaciones y la necesidad de adquirir nuevos conocimientos.

Problema 1 (Optimización)**.** *Hallar el área del triángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio* 5 cm*.*

Paso 1. El profesor pedirá a los estudiantes que dibujen un semicírculo de radio 5 cm y varios triángulos inscritos en él.

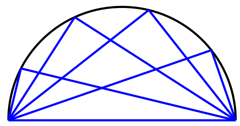
Después de varios intentos, deberá quedar claro para todos los alumnos el significado de un triángulo *inscrito* en un semicírculo:


INCORRECTO


CORRECTO

Paso 2. El profesor pedirá a los estudiantes que identifiquen el tipo de triángulo (rectángulo), y que justifiquen su afirmación. A continuación, pedirá que encuentren una fórmula para calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de las dimensiones de sus lados (semiproducto de las dimensiones de los catetos).

Paso 3. El profesor pedirá a los estudiantes que dibujen varios triángulos inscritos en el semicírculo y que con la ayuda de una regla graduada calculen el área de esos triángulos.



Ese trabajo, con la ayuda de una calculadora, conducirá a una tabla como la siguiente, donde las longitudes están dadas en cm y las áreas en cm^2.

cateto 1	cateto 2	área
5,7	8,3	23,655
6,5	7,7	25,085
7,9	6,2	24,49
7,1	7,1	25,205
…	…	…
…	…	…

El profesor hará notar que medidas como 7,1 y 7,1deben estar mal tomadas, pues no satisfacen la relación de Pitágoras para un triángulo rectángulo:

$$7{,}1^2 + 7{,}1^2 = 100{,}81.$$

Puede sugerir nuevas medidas como las siguientes:

cateto 1	cateto 2	área
5.7	8.3	23.655
6.5	7.7	25.085
7.9	6.2	24.49
7.1	7.1	25.205
…	…	…
6,8	7,3	24,82
6,9	7,19	24,80
7,07	7,07	24,99

Estos resultados, y otros adicionales, llevarán a los estudiantes a sospechar que el área máxima es 25 cm^2; sin embargo, por muchas mediciones que realicen y por muchos decimales que pongan al azar, no podrán encontrar dimensiones tales que el área sea igual a 25.

Paso 4. Es necesario entonces buscar otro método. El profesor sugiere que se busque una fórmula que permita calcular el área del triángulo de área máxima. Al respecto, puede sugerir que se nombren con letras —por ejemplo, con x e y— las longitudes de los catetos. Esto, junto con la relación de Pitágoras, conducirá a los estudiantes a la fórmula del área:

$$A = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}.$$

Interesante: hemos encontrado una fórmula para calcular el área de cualquier triángulo inscrito en un semicírculo; en otras palabras, hemos diseñado un modelo matemático.

Puesto que A depende de x, podemos escribir

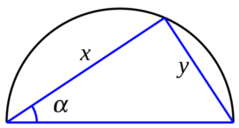
$$A(x) = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}.$$

Hemos definido una función que nos permite calcular el área del triángulo para cada valor de x. ¿Cuál es el dominio de está función? ¿Cuál es su recorrido?

Para calcular el recorrido, requerimos conocer los valores entre los cuales varía $A(x)$, y volvemos a nuestro problema inicial: ¿cuál es valor máximo de $A(x)$?

Los estudiantes manifiestan que no están en condiciones de determinar el máximo de esta función, ante lo cual el profesor explicará que existen métodos que requieren del cálculo diferencial para determinar el máximo de funciones como ésta, y que se tratará en cursos superiores, pero que, sin embargo, el problema no puede quedar sin solución.

Paso 5. El profesor sugiere recurrir a la trigonometría para resolver el problema, para lo cual propone calcular el área del triángulo inscrito en función de uno de los ángulos agudos del triángulo al que llamaremos, por ejemplo, α.



Los alumnos encuentran rápidamente

$$A = \frac{xy}{2} = 50 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

El profesor sugiere que utilicen la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$

lo que conduce a:

$$A = 25 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

La pregunta es ahora evidente: ¿Para qué valor de α, $\operatorname{sen} 2\alpha$ alcanza su máximo valor?

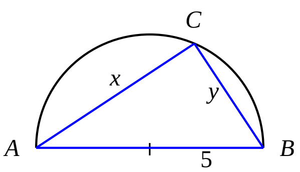
Los estudiantes deberían contestar sin dificultad que, puesto que el mayor valor del seno es 1, el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\alpha$ se obtiene cuando $\alpha = 45^\circ$. El área máxima es entonces $25\ \text{cm}^2$ y el triángulo de área máxima tiene como dimensiones de sus catetos

$$x = 10 \operatorname{sen} 45^\circ = 5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad y = 10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2}.$$

Es necesario hacer notar que, puesto que las dimensiones obtenidas son números irracionales, es imposible encontrarlas mediante mediciones con una regla.

Paso 6. Se puede también sugerir que resuelvan el problema considerando el cuadrado del área: $A^2(x) = \dfrac{x^2\left(100 - x^2\right)}{4}$ y observando que el área alcanza su valor máximo en un punto si y solo si su cuadrado alcanza el máximo en el mismo punto.

Paso 7. El profesor pedirá a los alumnos que generalicen el problema para un semicírculo de radio cualquiera R, y que redacten las soluciones utilizando un lenguaje matemático correcto, como se muestra a continuación.



En el gráfico, el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo por ser un triángulo inscrito en un semicírculo. Sean $x = AC$ y $y = BC$. En este triángulo, podemos tomar el segmento $\overline{AC}$ como la base, y el segmento $\overline{BC}$ como la altura. Su área A es, entonces, igual a:

$$A = \frac{xy}{2}.$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo $\triangle ABC$, se tiene que

$$x^2 + y^2 = 10^2,$$

de donde $y = \sqrt{100 - x^2}$. Reemplazando en $A = \dfrac{xy}{2}$, se concluye que

$$A = \frac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2},$$

que nos proporciona una fórmula para calcular el área del triángulo $\triangle ABC$ en función de la longitud x de uno de los catetos. Podemos, entonces, escribir

$$A(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2},$$

y considerar a A como una función. Los valores que puede tomar x de acuerdo con la naturaleza del problema, son los números reales comprendidos entre 0 y 10. El dominio de la función es, entonces, el intervalo $[0, 10]$.

El recorrido de la función son todos los valores entre el área mínima (0) y el área máxima. Desgraciadamente, los conocimientos que disponemos no nos permiten hallar fácilmente el valor máximo de la expresión $\frac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2}$.

2.1 Bloque de números y funciones

En el tratamiento de polinomios, se recomienda partir de ejemplos sencillos basados en la definición de operaciones entre funciones lineales y cuadráticas, lo que, en definitiva, significa aplicar las propiedades algebraicas de los números reales. Hay que evitar productos de polinomios de grado alto y los conocidos métodos para multiplicar polinomios mediante una serie de reglas que no aportan nada a su conocimiento y utilización. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ es una función cubica; podemos obtener un polinomio cúbico tras multiplicar los factores, pero expresada como el producto de estos, la función cúbica tiene varias ventajas; entre otras, se puede determinar inmediatamente los cortes con el eje x: 1, -2 y 3. También podemos saber los signos de la función en cada intervalo definido por los cortes, simplemente analizando cada término lineal.

Es importante tratar el algoritmo de Euclides (o de la división): dados dos polinomios $p(x)$ y $h(x)$, existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x),$$

donde $r(x)$ o es el polinomio nulo o su grado es menor que el grado del polinomio $h(x)$.

Es importante no confundir —aunque está basado en él— con el procedimiento para dividir dos polinomios, actualmente en desuso.

Con base en el algoritmo de Euclides, se debe tratar el teorema del residuo, la divisibilidad por $x - a$ y la descomposición de un polinomio en factores utilizando sus raíces.

En el tratamiento de funciones racionales, es importante hacer énfasis en el conjunto en el cual están definidas. Y al igual que en el caso de los polinomios, hay que hacer notar que sus operaciones no son más que operaciones entre funciones reales y que, en consecuencia, siguen las reglas de las operaciones entre números reales. Se debe recalcar que la factorización no es más que un mecanismo para su simplificación.

Para presentar funciones trigonométricas se recomienda seguir los siguientes pasos:

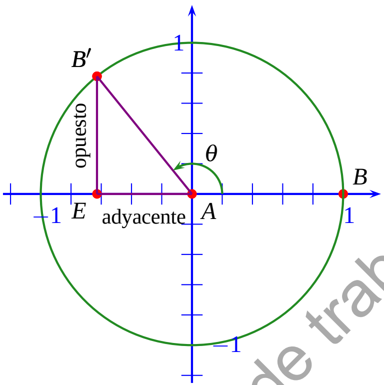
1. Trabajar con un problema que requiera resolver un triángulo rectángulo. Hacer evidente el que dos triángulos rectángulos semejantes tienen lados proporcionales (teorema de Tales). Por ejemplo, el triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 y $\sqrt{3}/2$, respectivamente, e hipotenusa de longitud 2, con el triángulo con catetos 2 y $\sqrt{3}$,respectivamente, e hipotenusa de

longitud 4. La proporción entre el cateto opuesto y la hipotenusa es $1/2 = 2/4$ en ambos triángulos. Entonces introducimos $\operatorname{sen}\theta = 1/2$. Generalizando:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

A continuación hay que hacer notar que, conocido el valor del seno de un ángulo en un triángulo y, el cateto o la hipotenusa, se puede conocer el término faltante. De allí su utilidad. De manera similar se procede con el coseno.

2. Extender la definición propuesta para ángulos entre 0 y 180 grados.
3. Se define el radián en el círculo unidad: recordando que π radianes son iguales a 180 grados. Es necesario que los estudiantes sean eficientes en expresar los ángulos notables: 30°, 45°, 60° como $\pi/6\,\text{rad}$, $\pi/4\,\text{rad}$, $\pi/3\,\text{rad}$, respectivamente.
4. Se definen las funciones trigonométricas en el círculo unitario en un sistema de ejes cartesianos, haciendo notar que, para cada punto sobre el círculo, las coordenadas son $x = \sin\theta$ y $y = \cos\theta$, por lo que las funciones sen y cos tienen signos o positivos o negativos según el cuadrante donde se localiza el lado terminal del ángulo. El docente puede conseguir todas las identidades trigonométricas importantes utilizando el círculo unitario. Particularmente, la periodicidad es importante para el siguiente paso. En esta etapa es recomendable que los estudiantes adquieran un grado de mecanización en cuanto a los valores de las tres funciones trigonométricas para los ángulos notables entre 0 y 2π:



5. El último paso consiste en pensar las funciones trigonométricas como funciones de variable real. Para ello, se puede imaginar que el círculo es desenrollado sobre la recta como una cuerda. Esta ilustración es importante para reconocer que, en el círculo unitario, el ángulo y la longitud del arco coinciden en valor. En esta etapa, extendemos las funciones seno y coseno con dominio real utilizando el aspecto de periodicidad del seno y del coseno. El profesor debe proporcionar sentido a los valores positivos y negativos de la variable como ángulos que se obtienen al recorrer el círculo en sentido anti horario y horario, respectivamente. Es importante "transferir" el conocimiento adquirido en triángulos rectángulos y el círculo unitario a esta nueva definición. Por ejemplo, la ubicación de los ángulos notables, el crecimiento del ángulo con el crecimiento del seno en el intervalo 0 hasta $\pi/2$, los cortes de la función y la situación respectiva en el círculo unitario, etcétera.
6. Se debe analizar con detenimiento las características de las funciones resultantes de homotecias, traslaciones y reflexiones, tanto del seno como del coseno, para conseguir una generalización apropiada de la función definida por $f(x) = A\sin(Bx + C)$.

Finalmente, hay un sin número de situaciones donde las funciones trigonométricas aparecen de manera inmediata: las coordenadas de las agujas del reloj, la altura de un asiento en una rueda moscovita, el movimiento de una masa sujeta a un resorte, el movimiento de los pedales de una bicicleta, etcétera; el profesor debe hacer uso de estos ejemplos y otros para ilustrar identidades y propiedades de funciones trigonométricas.

2.2 Bloque de álgebra y geometría

Se introduce por primera vez en la educación media las ecuaciones paramétricas. Es importante que el estudiante se dé cuenta de las ventajas de utilizar parámetros tanto en las aplicaciones a la física como en los desarrollos matemáticos. Esto coadyuvará a la comprensión del parámetro t, que por ser una herramienta totalmente nueva, resulta de difícil asimilación y comprensión al inicio. Así, en las ecuaciones paramétricas de una recta:

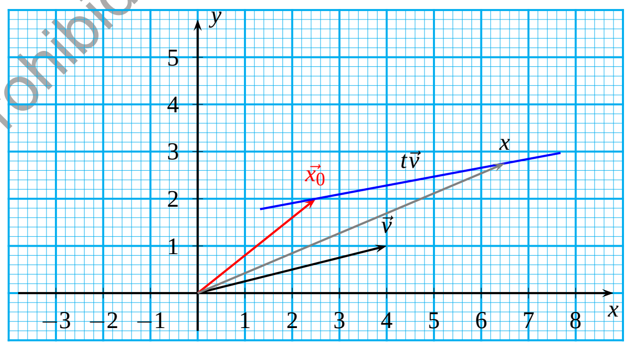
$$\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d, \end{cases}$$

el vector (a,c) determina la dirección de la recta. Por otro lado, en Física, el punto (x,y) representa la posición de una partícula en el instante t. Si el tiempo lo permite, el profesor puede realizar experimentos con objetos que se desplacen en el plano, tomando datos para distintos valores de t y luego graficándolos.

Es importante hacer notar que las ecuaciones paramétricas de una recta y la ecuación vectorial son, en realidad, lo mismo. En efecto, si $\vec{v}$ es el vector director de la recta, $\vec{x_0}$ un punto (o vector) de la recta, cualquier punto $\vec{x}$ de la recta se expresa por

$$\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{v},$$

donde t es un número real.



Si ahora hacemos $\vec{x} = (x,y)$, $\vec{x_0} = (x_0,y_0)$ y $\vec{v} = (a,b)$, reemplazando en la ecuación vectorial se obtiene

$$(x,y) = (x_0,y_0) + t\,(a,b) \iff (x,y) = (x_0 + ta, y_0 + tb)\,,$$

o lo que es lo mismo en terminos de sus componentes:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \end{cases}$$

que no son más que las ecuaciones paramétricas de la recta.

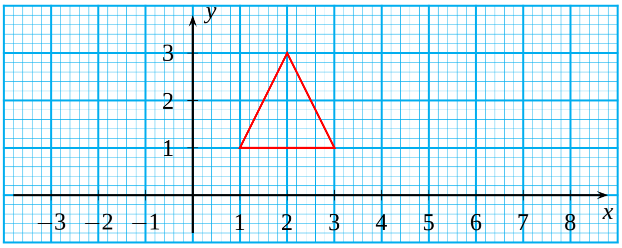
Las matrices, sus determinantes y sus operaciones pueden ser actividades matemáticas sin sentido para el estudiante, y por tanto es necesario proveerles de uno. Buscar tablas con varias columnas y filas en periódicos u otros medios puede ser estimulante para comprender el uso de las matrices en el almacenamiento de la información. En la matemática, brinda un aporte importante al facilitar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Las transformaciones en el plano son una oportunidad para mostrar la Matemática en conexión con el arte. Se puede hacer que el grupo cree hermosas composiciones utilizando reflexiones, traslaciones y rotaciones. Hay una variedad de páginas web que ejecutan esto de manera automática, por ejemplo, las teselaciones[1].

Finalmente, presentamos un problema que combina varias transformaciones en el plano.

[1] http://www.shodor.org/interactivate/activities/Tessellate/

Problema 2 (Transformaciones)**.** *Dibujar el triángulo que se obtiene al realizar las siguientes transformaciones, en forma sucesiva, sobre el triángulo de la figura:*



1. *Traslación de vector* $\overrightarrow{v} = (1,2)$.
2. *Homotecia de razón* 2.
3. *Rotación de* $45°$.

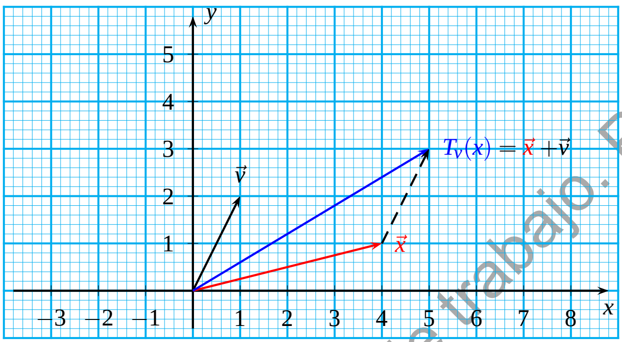
En primer lugar, recordemos las definiciones de las transformaciones que vamos a utilizar.

Definición 1 (Traslación)**.** *La* traslación T_v de vector $\vec{v}$ *suma a cualquier vector* $\vec{x}$ *el vector* $\vec{v}$*:*

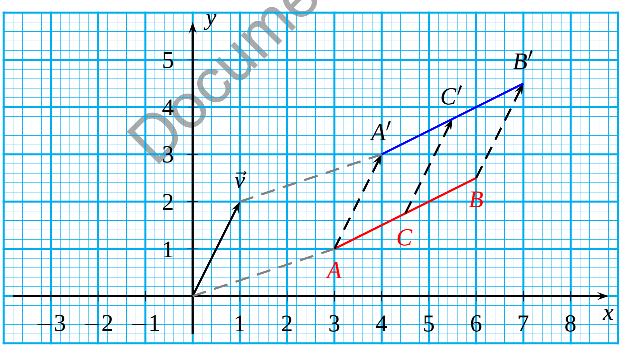
$$T_v(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}.$$

En otros términos, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *y* $\vec{x} = (x_1, x_2)$*, entonces*

$$T_v(x) = T_v(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (v_1, v_2) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2).$$



Una traslación transforma un segmento en un segmento paralelo, como se ilustra a continuación, el segmento $\overline{A'B'}$ es el trasladado del segmento $\overline{AB}$ por la traslación de vector $\vec{v}$:

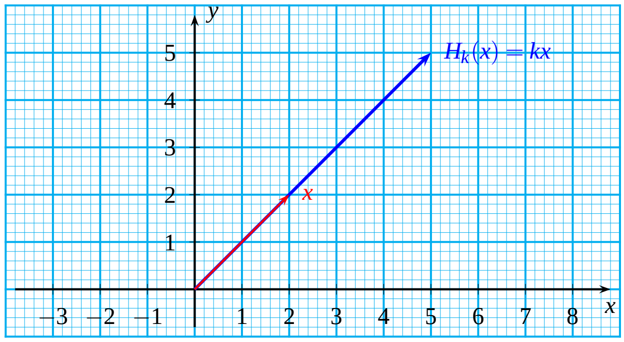


Definición 2 (Homotecia)**.** *Una* homotecia P de razón $k \geq 0$ *transforma un vector* $\vec{x}$ *en un vector del mismo sentido y dirección que* $\vec{x}$*, pero de longitud* k *veces la longitud de* $\vec{x}$*:*

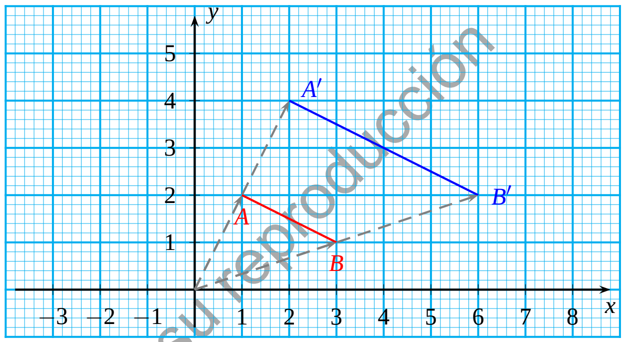
$$H_k(\vec{x}) = k\vec{x}.$$

Si $x = (x_1, x_2)$*, entonces*

$$H_k(x) = H_k(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2).$$



Una homotecia transforma un segmento $\overline{AB}$ en un segmento $\overline{A'B'}$, paralelo al segmento $\overline{AB}$, pero de longitud k veces la longitud de $\overline{AB}$:



Definición 3 (Rotación)**.** *Una* rotación R_θ de ángulo θ *se la puede expresar mediante la matriz:*

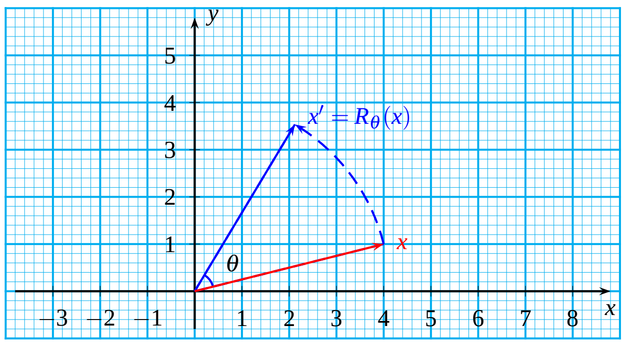
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

De manera más precisa, a rotación del vector $x = (x_1, x_2))$ *es el vector —expresado como vector columna:*

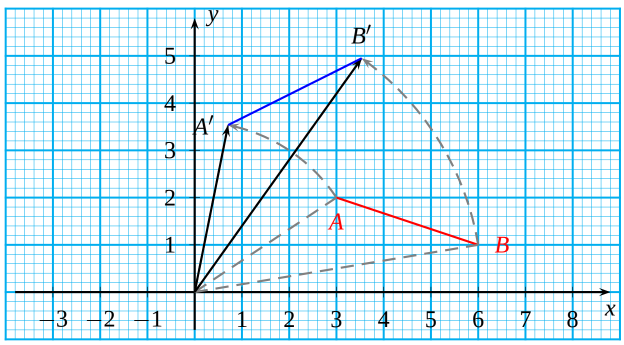
$$R_\theta(x) = R_\theta(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$R_\theta(x_1, x_2) = (x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta, x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta).$$



Una rotación transforma un segmento en un segmento (no necesariamente paralelo) de igual longitud:

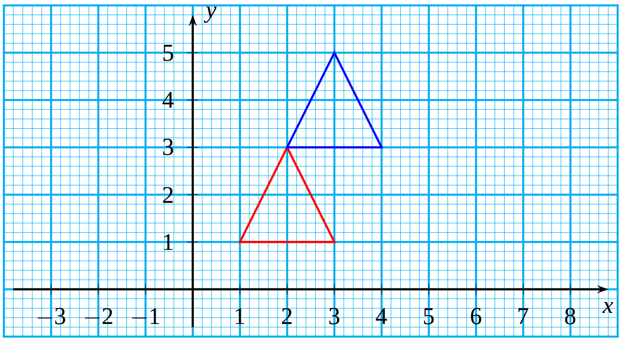


El segmento $\overline{A'B'}$ es la rotación de ángulo θ del segmento $\overline{AB}$.

Volvamos al problema. Como las trasformaciones transforman segmentos en segmentos, es suficiente calcular las imágenes de los vértices del triángulo:

$$T_v(1,1) = (1,1) + (1,2) = (2,3),$$
$$T_v(2,3) = (2,3) + (1,2) = (3,5),$$
$$T_v(3,1) = (3,1) + (1,2) = (4,3).$$

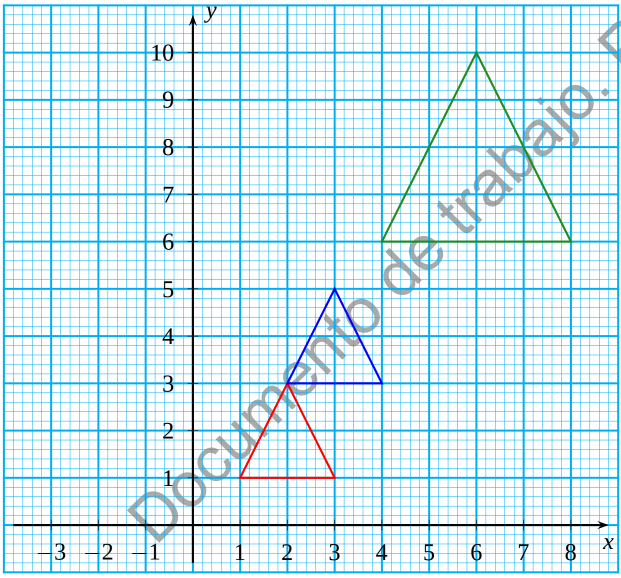
Por lo tanto, el triángulo trasladado tiene por vértices los puntos de coordenadas $(2,3)$, $(3,5)$ y $(4,3)$:



A continuación, aplicamos la homotecia de razón 2 al nuevo triángulo:

$$H_2(2,3) = 2(2,3) = (4,6),$$
$$H_2(3,5) = 2(3,5) = (6,10),$$
$$H_2(4,3) = 2(4,3) = (8,6).$$

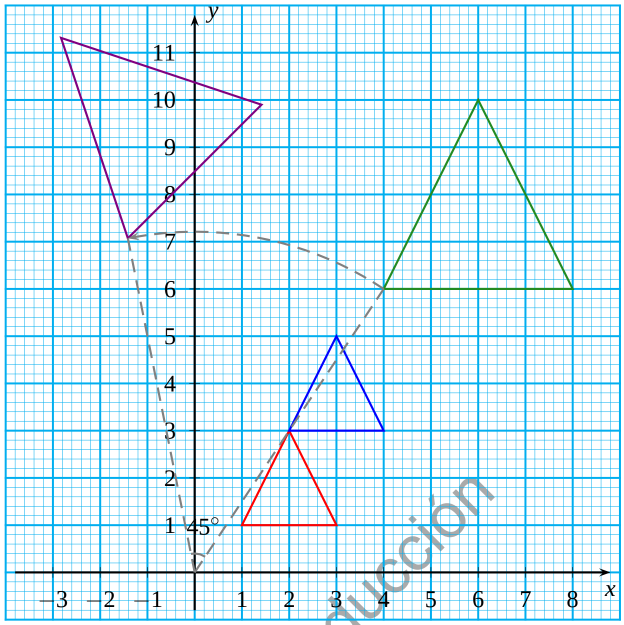
Se obtiene el triángulo de vértices $(4,6)$, $(6,10)$ y $(8,6)$:



Finalmente, aplicamos la rotación al último triángulo R_{45°:

$$\begin{aligned} R(4,6) &= (4\cos 45^\circ - 6\operatorname{sen} 45^\circ, 4\operatorname{sen} 45^\circ + 6\cos 45^\circ) \\ &= (-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}); \\ R(6,10) &= (6\cos 45^\circ - 10\operatorname{sen} 45^\circ, 6\operatorname{sen} 45^\circ + 10\cos 45^\circ) \\ &= (-2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}); \\ R(8,6) &= (8\cos 45^\circ - 6\operatorname{sen} 45^\circ, 8\operatorname{sen} 45^\circ + 6\cos 45^\circ) \\ &= (\sqrt{2}, 7\sqrt{2}). \end{aligned}$$

El triángulo rotado tiene como vértices $\left(-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}\right)$ y $\left(2\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$:

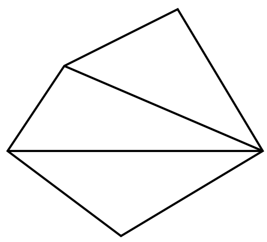


Un trabajo interesante es realizar las transformaciones anteriores gráficamente.

2.3 Bloque de matemáticas discretas

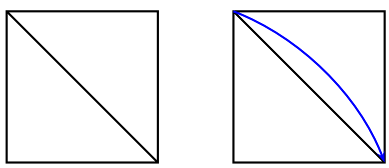
Entre las aplicaciones desarrolladas en las últimas décadas, aquellas que tienen que ver con matemáticas discretas, presentan una oportunidad de aprendizaje que, al menos en los casos sencillos, muestran la potencialidad de la matemática para modelar y resolver problemas. Un ejemplo de esto son los problemas de transporte y manejo del tiempo. El siguiente problema puede utilizarse con este fin.

Problema 3. *El comité de seguridad de la institución busca encontrar el recorrido que optimice el tiempo necesario para evacuar del edificio en el caso de que se presente una emergencia. Si el edificio tiene la forma como se muestra en la figura, ¿cuál deberá ser el recorrido que deba realizarse para dar la información de manera que no se pase dos veces por el mismo pasillo, y así no se pierda tiempo?*



En este diagrama, las aristas representan los pasillos del colegio. Solicite a los estudiantes que discutan entre sí la mejor manera de hacer el recorrido. Alguno de sus estudiantes puede, incluso, reconocer el juego muy popular de poder trazar una gráfica sin levantar la mano ni pasar por una arista dos veces.

Este tipo de diagramas se llama *diagrama de Euler*. Por ejemplo, el siguiente diagrama no es de Euler pero puede ser "eulerizado" aumentando una arista (imaginaria):



No es de Euler "eulerizado"

Se procede a generalizar la idea de grafo. Un instrumento matemático que sirve para representar rutas. La teoría de grafos es de gran utilidad para resolver problemas de manejo de recursos, un área que se dedica a investigar cómo manejar recursos de manera óptima. El objetivo más importante de las aplicaciones que el docente elija para presentar en este bloque consiste en desarrollar la destreza de modelar un problema de manera esquemática con el uso de grafos y el mostrar la existencia de algoritmos heurísticos sencillos que pueden conllevar a soluciones aproximadas relativamente buenas. Entre las aplicaciones interesantes que el docente puede escoger está el problema del viajero (diagramas de Hamilton), el problema de ordenación de tareas, y el problema de transporte de bienes. En la bibliografía de este documento se sugieren fuentes de consulta que brindan ayuda adicional.

2.4 Bloque de probabilidades y estadística

Antes de tratar la probabilidad condicionada, es necesario recordar la noción de probabilidad, el concepto de espacio muestral y de la probabilidad de un evento simple para luego familiarizar al estudiante con el cálculo de la:

- probabilidad de que el evento *A* o el evento *B* sucedan;
- probabilidad de que el evento *A* y el evento *B* sucedan.

Los diagramas de árbol pueden ser útiles en estas situaciones. Por otra parte, toda actividad relacionada con las probabilidades, y sobre todo con la probabilidad condicionada, debe estar asociada a un experimento real y concreto con el cual esté familiarizado el estudiante.

Clásicamente, se utilizan experimentos con cartas, dados y monedas. Pero hay un sinfín de posibilidades que pueden interesar más a la clase. Por ejemplo, el docente puede presentar a la clase la siguiente inquietud:

> *Algunos piensan que las personas que son zurdas de mano también lo son con los pies.*

Luego pide que levanten la mano los estudiantes que usan "la mano derecha y el pie derecho", "la mano izquierda y el pie derecho", etcétera. Luego pide a la clase organizar esta información en una tabla de doble entrada. Con la tabla, se puede calcular probabilidad conjunta y, además, introducir la idea de probabilidad condicionada; por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que alguien que, usando la mano derecha, sea también bueno con el pie derecho?

Mediante esta misma pregunta, se puede comprender que la pregunta planteada solo fue respondida para las personas que están en el aula, pero si queremos una respuesta con mayor validez, debemos considerar a toda la población de un país o del planeta. ¿Qué sucede con preguntas tales como "¿cuál es la probabilidad de que un estudiante ecuatoriano ingrese a la universidad?"? Para ello, es necesario considerar a toda la población estudiantil ecuatoriana. En vista de que tomar datos a tantas personas es imposible, se vuelve necesario hacerlo en un grupo más pequeño. El profesor introduce, entonces, la noción de *población* y de *muestra*, e indica situaciones reales en donde una muestra puede ser *sesgada*. Es interesante para el aula conversar de situaciones actuales donde las estadísticas pueden estar sesgadas; por ejemplo, en encuestas de votación a boca de urna en las elecciones de los mandatarios del país, en encuestas de consumo de productos comerciales, etcétera. Desarrollar métodos para escoger una muestra es importante si se quiere información veraz. Entonces, el profesor presenta la noción de *muestra aleatoria* y métodos para generar *números pseudo aleatorios*. Por ejemplo, un método muy sencillo es tomar el segundo dígito de números de teléfonos que aparecen en la guía telefónica. Es recomendable pedir a sus estudiantes que planteen preguntas en las cuales definan cuál es la población, describan cómo tomarían una muestra evitando el sesgo y cómo usarían números pseudo aleatorios para este fin.

A continuación presentamos un ejemplo de un problema; no se ofrecen la soluciones, sino que se sugieren varias preguntas que se pueden plantear al estudiante.

Problema 4. *A fin de medir el rendimiento en matemática de los estudiantes de bachillerato en el Ecuador, se ha seleccionado una muestra de estudiantes de tercer año de bachillerato de los diferentes establecimientos de educación media con más de* 500 *estudiantes. Para el efecto, se ha seleccionado primero una muestra de establecimientos, y de la muestra seleccionada, se ha escogido la muestra de estudiantes.*

Se conocen los siguientes datos:

1. *Los colegios con más de* 500 *estudiantes son representativos de la educación media en el Ecuador.*
2. *En el país existen* 150 *establecimientos en la sierra con más de* 500 *estudiantes, de los cuales el* 8% *está en el último año de bachillerato.*
3. *En el país existen* 170 *establecimientos en la costa con más de* 500 *estudiantes, de los cuales el* 7% *está en el último año de bachillerato.*
4. *En el país existen* 14 *establecimientos en el oriente con más de* 500 *estudiantes, de los cuales el* 5% *está en el último año de bachillerato.*

1. Explique como determinar el tamaño de la muestra con un e indique la metodología utilizada para seleccionar la muestra de tal manera que esta no sea sesgada.

   Una vez seleccionada la muestra, que a fin de continuar con el desarrollo de nuestro problema la vamos a suponer de tamaño 80, se procede a realizar la prueba de matemáticas. Se obtienen las calificaciones siguientes sobre 20 puntos:

   - 2 estudiantes obtienen la calificación 0.
   - 5 estudiantes obtienen la calificación 2.
   - 3 estudiantes obtienen la calificación 3.
   - 6 estudiantes obtienen la calificación 5.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 6.
   - 10 estudiantes obtienen la calificación 9.
   - 15 estudiantes obtienen la calificación 10.
   - 12 estudiantes obtienen la calificación 11.
   - 12 estudiantes obtienen la calificación 12.
   - 5 estudiantes obtienen la calificación 14.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 15.
   - 3 estudiantes obtienen la calificación 17.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 18.
   - 1 estudiantes obtienen la calificación 20.

2. Haga un cuadro de frecuencias y de frecuencias acumuladas; dibuje los diagramas correspondientes.
3. Calcule la media, la mediana y la desviación estándar de las notas obtenidas por el grupo de la muestra. ¿Qué porcentaje de estudiantes de la muestra se encuentra entre la media $\pm$ una desviación estándar, $\pm$ dos desviaciones estándar? ¿Entre la media y cuántas desviaciones estándar se encuentra el 70% de los estudiantes de la muestra?
4. Calcule las siguientes probabilidades:
   - Que un estudiante ecuatoriano obtenga una nota superior a 10 en una prueba de matemáticas —similar a la receptada a los estudiantes de la muestra.
   - Que un estudiante obtenga una nota inferior a 15.
   - Que un estudiante obtenga una nota entre 8 y 14.
5. Calcule las siguientes probabilidades condicionadas:

(a) Que un estudiante obtenga una nota superior a 12, sabiendo que está en el grupo de los estudiantes que siempre obtienen notas superiores a 8.

(b) Que un estudiante obtenga una nota inferior a 5, sabiendo que está en el grupo de los estudiantes que siempre obtienen notas entre 2 y 13.

3 Indicadores esenciales de evaluación

1. **Analiza funciones simples (lineal, cuadrática, a trozos, con raíz cuadrada) en relación a su dominio, recorrido, monotonía, paridad.**
2. Realiza las operaciones de suma, resta y multiplicación con polinomios de grado menor o igual a cuatro.
3. **Reconoce cuando un polinomio es divisible por $x - a$ y calcula el cociente y residuo de la división.**
4. Encuentra raíces racionales de polinomios y factoriza un polinomio como un producto de la forma $a(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$, donde a_k son las raíces del polinomio.
5. **Identifica el dominio de una función racional y opera con funciones racionales simples.**
6. **Define las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, en el círculo unitario y en la recta real.**
7. **Utiliza funciones trigonométricas para resolver triángulos.**
8. **Utiliza identidades trigonométricas, y conoce las demostraciones de las identidades más básicas.**
9. **Reconoce los valores de funciones trigonométricas de ángulos notables.**
10. **Calcula la medida de un ángulo en radianes a partir de su medida en grados.**
11. Hace uso del circulo trigonométrico para identificar los signos y otras propiedades de las funciones trigonométricas.
12. **Transforma una ecuación cartesiana de una recta en ecuaciones paramétricas y viceversa.**
13. Con base en las ecuaciones paramétricas, reconoce rectas paralelas y perpendiculares.
14. **Conoce las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente: sus dominios, recorridos, monotonía, periodicidad, puntos máximos y mínimos y sus gráficos como funciones de variable real.**
15. **Resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas.**
16. **Opera con matrices de orden menor o igual que** 3**. Para matrices de órdenes mayores, utiliza la tecnología.**
17. **Utiliza las transformaciones geométricas aplicadas a figuras geométricas simples: segmentos, triángulos, cuadriláteros, círculos.**
18. **Utiliza los grafos y circuitos para resolver problemas.**
19. **Calcula probabilidades de eventos compuestos y probabilidades condicionales.**
20. **Dada una pregunta, reconoce la población e identifica una muestra de la misma.**
21. **Comprende la noción de número pseudo aleatorio y su uso para determinar una muestra aleatoria.**

PROYECCIÓN CURRICULAR

TERCERO DE BACHILLERATO

Objetivos educativos del año

1. Reconocer y comprender el conjunto solución de ecuaciones que involucran funciones polinomiales, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas como un subconjunto de los números reales.

2. Identificar, formular y resolver problemas que se modelan utilizando una función exponencial o logarítmica.

3. Utilizar diferentes representaciones de funciones exponenciales y logarítmicas: tabla, gráfica y relación matemática (pares ordenados).

4. Estudiar el comportamiento local y global de función (de una variable) polinomial, racional, con radicales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, o de una función definida a trozos o por casos mediante funciones de los tipos mencionados, a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetría, extremos, asíntotas, intersecciones con los ejes y sus ceros.

5. Operar (suma, resta, multiplicación, división, composición e inversión) con funciones (de una variable) polinomiales, racionales, con radicales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, o aquellas definidas por trozos o casos mediante funciones de los tipos mencionados.

6. Reconocer sucesiones definidas en forma recursiva.

7. Resolver problemas de economía y finanzas, principalmente, mediante las sucesiones aritméticas y geométricas.

8. Utilizar TICs:
   (a) para graficar funciones lineales, cuadráticas, racionales, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas;
   (b) manipular el dominio y el rango para producir gráficas;
   (c) analizar las características geométricas de funciones lineales, cuadráticas, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas (intersecciones con los ejes, monotonía, extremos y asíntotas).

9. Reconocer los diferentes tipos de cónicas y utilizarlas en problemas de aplicación a la física y a la astronomía.

10. Encontrar los elementos de una cónica a partir de su ecuación y, recíprocamente, determinar ecuaciones de cónicas a partir del conocimiento de diferentes propiedades, con énfasis especial en las asíntotas.

11. Utilizar los conocimientos de teoría de juegos y de números para resolver problemas en la administración de recursos, de decisión y de codificación.

12. Reconocer experimentos cuyos resultados están distribuidos en forma binomial o en forma normal.

13. Utilizar TICs para resolver problemas estadísticos distribuidos en forma binomial o en forma normal.

14. Comprender y utilizar la regresión lineal para predecir resultados en problemas de aplicación en la vida real.

Planificación por bloques curriculares

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeños
1. **Números y funciones**	• Representar **funciones elementales** por medio de tablas, gráficas, fórmulas y relaciones. **(P)** • Evaluar **una función** en valores numéricos y/o simbólicos. **(P)** • Reconocer **el comportamiento local y global de funciones elementales de una variable** a través de su dominio, recorrido, variaciones, simetría. **(C)** • Determinar **el comportamiento local y global de las funciones exponenciales** a través de sus características (crecimiento, decrecimiento, concavidad, comportamiento al infinito (asíntotas)). **(P)** • Determinar las intersecciones con los ejes**, la variación y la gráfica de una función exponencial** con la ayuda de las TIC's. **(C,P)** • Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones exponenciales** (crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, etcétera) identificando las variables significativas y las relaciones existentes entre ellas. **(M)** • Aplicar **modelos exponenciales** en la resolución de problemas. **(P,M)** • Determinar si **una función posee inversa** estableciendo si es biyectiva o no. **(C,P)** • Calcular **la inversa de una función f dada** resolviendo la ecuación x = f(y). **(P)** • Calcular **el logaritmo de un número** utilizando la definición de función logaritmo como la función inversa de la función exponencial. **(C,P)** • Determinar **el comportamiento local y global de las funciones logarítmicas** a través de sus características (crecimiento, decrecimiento, concavidad y comportamiento al infinito). **(P)** • Obtener **las interseciones con los ejes, la monotonía y la gráfica de una función logarítmica** con la ayuda de las TIC's. **(P)** • Identificar **las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas** a partir del análisis de sus propiedades y características. **(P)** • Estudiar **las características y obtener la gráfica de funciones obtenidas mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones exponenciales y logarítmicas** con la ayuda de las TIC's. **(C,P)** • Resolver **ecuaciones e inecuaciones**

	exponenciales y logarítmicas utilizando las propiedades de los exponentes y los logaritmos. **(P)** • Resolver **ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas** utilizando TIC`s. **(P)** • Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones logarítmicas** a partir de la identificación de las variables significativas que intervienen en el problema y las relaciones entre ellas. **(M)** • Resolver **problemas** mediante modelos que utilizan funciones exponenciales y logarítmicas. **(P,M)** • Identificar **una función recursiva** a partir de las fórmulas que la definen. **(P)** • Calcular **uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica)** conocidos otros parámetros. **(P)** • Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante progresiones aritméticas o geométricas** (Matemática Financiera: amortizaciones, valor presente, etcétera) a través de la identificación de las variables significativas que intervienen en el problema y las relaciones entre ellas. **(M)** • Resolver **problemas** utilizando modelos que utilicen progresiones aritméticas y geométricas. **(P,M)**
2. **Algebra y Geometría**	• Reconocer **una cónica** a través de la ecuación que la representa. **(C)** • Encontrar **la ecuación de una cónica** conocidos diferentes elementos: centros, ejes, focos, vértices, excentricidad. **(P)** • Hallar **la ecuación de una cónica** con base a su descripción geométrica (lugar geométrico que satisface cierta condición). **(C,P)** • Obtener (y describir sus propiedades) **una cónica** a partir de la aplicación de traslaciones y/o rotaciones a una cónica dada. **(P)** • Reconocer **una cónica degenerada** y el lugar geométrico que representa a partir de la ecuación que la representa. **(P)** • Representar y analizar **cónicas** con la ayuda de las TIC's**. (P)** • Resolver **problemas de física** (órbitas planetarias, tiro parabólico, etcétera) utilizando las cónicas y sus propiedades. **(P,M)** • Representar y analizar **cónicas** con la ayuda de las TIC's. **(C,P)**
3. **Matemáticas Discretas**	• Identificar **problemas sencillos** que se pueden resolver mediante teoría de juegos. **(M)** • Escribir **la matriz de ganancias con dos jugadores**. **(P)**

	• Definir un **punto de ensilladura** (mínimo en su fila y simultáneamente máximo en su columna), y usarlo para determinar la estrategia óptima de cada jugador. **(C,P,M)** • Comprender **el uso de números de identificación** en el mundo cotidiano (supermercado, la cédula de identidad, cuentas bancarias, etcétera). **(C,M)** • Comprender **el propósito del digito de verificación** y el uso del esquema para determinarlo. **(C,P,M)** • Determinar **la validez del digito de verificación** dado un número de identificación y un esquema. **(P)**
4. **Probabilidad y Estadística**	▪ Identificar las **variables aleatorias** en un problema dado. **(C)** ▪ Obtener **la distribución, esperanza y varianza de los resultados de un experimento sujeto a una ley de distribución binomial** con la ayuda de tablas o de las TIC's. **(P,M)** • Obtener **la distribución, esperanza y varianza de los resultados de un experimento sujeto a una ley de distribución normal** con la ayuda de tablas o de las TIC's. **(P,M)** ▪ Obtener **la recta de regresión** mediante el método de ajuste de una curva. **(P)** ▪ Hallar **rectas de regresión** utilizando TICs. **(P)** ▪ Resolver **problemas** para estimar resultados futuros en experimentos mediante regresión lineal. **(P,M)**

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de “Matemáticas discretas”.

2 Tercero de bachillerato

Una pregunta que los estudiantes formulan a sus profesores frecuentemente es: “¿para qué sirve esto?”, donde “esto” es el tema que se está estudiando en ese momento. Y es esta pregunta, quizás, una de las más difíciles de responder sin caer en un enunciado vacío que se limita a repetir que tiene importantes aplicaciones en alguna ciencia.

Y es que la gran parte de las aplicaciones elementales y más conocidas de la Matemática se nos “agotan” en la Educación Básica: cuentas, proporciones de los ingredientes en una receta, etcétera. En cambio, gran parte de los contenidos matemáticos que tradicionalmente han sido trabajados en el Bachillerato son, en realidad, soporte de otros contenidos matemáticos, necesarios en el aprendizaje de otros campos del conocimiento, y que se estudian en la universidad. Incluso estos últimos no siempre se aplican directamente en la solución de problemas, sino que sirven, a su vez, de base para estudios de doctorado dónde sí se resuelven problemas que podríamos llamar de la “vida real”, pero que son complejos.

Sin embargo, los últimos 70 años, fomentado en parte por el desarrollo de las ciencias de la computación, ha emergido el campo de las Matemáticas Discretas. Los problemas que aborda son trabajados con matemática no básica, pero varios de esos problemas pueden ser explicados con un lenguaje matemático sencillo funciones, matrices y teoría elemental de números, que son asequibles a los estudiantes del Bachillerato.

En este año del Bachillerato, se incorporan elementos básicos de la teoría de Números. Esta rama de la matemática fue considerada por mucho tiempo como un campo sin interés práctico, propio de las matemáticas puras. Sin embargo, las técnicas y herramientas que ha desarrollado, en la actualidad, dan soporte a muchas aplicaciones computacionales. Los docentes pueden utilizar una de sus aplicaciones reales, la que se va a mostrar a continuación, para introducir el tema de la *aritmética modular*.

El profesor plantea, a la clase, el siguiente problema de gran actualidad.

Problema 1 (Esquema de cifrado de clave pública RSA)**.** *Hoy en día, es normal enviar información a través de Internet. Muchas veces esa información es confidencial; por ejemplo, la clave de una cuenta de banco o el número de una tarjeta de crédito. Para evitar que una clave sea interceptada, el sistema **emisor** —desde donde se emite el mensaje— cifra la clave mediante un código secreto antes del envío, y lo que se envía es la clave cifrada. Cuando el mensaje cifrado llegue al sistema del banco (**receptor**), éste deberá descifrar el mensaje para obtener la clave.*

Para ello, tanto el sistema que envía la clave cifrada como el sistema del banco que recibe la clave cifrada deben conocer el método de cifrado. Un método común de cifrado consiste en darle al emisor una parte de la información del método de cifrado. Esa parte de información que el emisor conoce es de dominio público, así, cualquier sistema que quiere enviar un mensaje al receptor, utiliza esa información pública, pero, únicamente, el receptor podrá descifrar el mensaje.

Antes de que el docente indique el procedimiento de cifrado y de descifrado, es necesario conocer ya algo sobre la aritmética modular. Con la motivación de que los conceptos que van a estudiarse a continuación servirán para aprender el método de cifrado que se anunció en el problema, éste tema se puede empezar con el planteamiento a la clase de las siguientes preguntas:

a) *Si hoy es miércoles y faltan 23 días para mi cumpleaños, ¿en qué día (el nombre del día) celebraré mi cumpleaños?*
b) *Estamos en el mes de noviembre, ¿en qué mes estaremos 26 meses más tarde?*
c) *A las 6 de la tarde del lunes ocurrió un derrumbe en una mina. El equipo de rescate tardó 50 horas en sacar a los mineros atrapados. ¿A qué hora del día del rescate salieron los mineros?*

Solicite a los estudiantes que respondan estas preguntas sin contar uno a uno los días o los meses, en el caso de las dos primeras preguntas, o una a una las horas, en el caso de la tercera. De las respuestas de los estudiantes, deberá sistematizarlas de la siguiente manera.

a) Al dividir 23 días para 7 días que tiene una semana, obtenemos 3 como cociente y 2 como residuo (es decir, en 23 días caben 3 semanas y 2 días). Se tiene, entonces, la siguiente igualdad:
$$23 = 7 \cdot 3 + 2.$$
Para determinar qué día es el de mi cumpleaños, añadimos 2 días a miércoles; es decir, mi cumpleaños cae en viernes.

b) La división entre 26 y 12 da un cociente de 2 y un residuo de 2. Entonces:
$$26 = 12 \cdot 2 + 2.$$
Para determinar el mes en el que estaremos, añadimos dos meses a noviembre; es decir, luego de 26 meses, estaremos en enero.

c) De la igualdad
$$50 = 24 \cdot 2 + 2,$$
los mineros saldrán, dos días después de ocurrido el accidente, 2 horas más tarde de las 6; es decir, saldrán a las 8 de la noche del miércoles.

A partir de esto se introduce el concepto de $r = a \bmod n$, con lo que las tres igualdades pueden ser escritas de la siguiente manera:
$$2 = 23 \bmod 7, \quad 2 = 26 \bmod 12, \quad 2 = 50 \bmod 24.$$

A continuación, mediante ejemplos, se **generaliza** para obtener el siguiente resultado:

Teorema 1.

$$(a \cdot b) \bmod n = [(a \bmod n) \cdot (b \bmod n)] \bmod n. \quad (1)$$

Con lo trabajado hasta aquí, ya se cuenta con las herramientas suficientes para aprender el método a través de un ejemplo. Tal vez, sea necesario que el docente haga un repaso de los siguientes conceptos: *divisibilidad*, *números primos*, *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo*, pues son utilizados a lo largo del ejemplo y del método de cifrado.

Ejemplo. Como se dijo, el método consiste en que el receptor debe hacer pública cierta información que el emisor utilizará para cifrar el mensaje que enviará. Esta información se obtiene de la siguiente manera.

Información que publica el emisor.

1. El receptor escoge dos números primos que los va a mantener en secreto. Por ejemplo, $p = 5$ y $q = 17$.
2. Define $n = pq$; es decir, $n = 85$.
3. Calcula el número $m = \text{mcm}(p-1, q-1)$; en este caso:

$$m = \text{mcm}(4, 16) = 16.$$

4. Elige un número r que no tenga divisores en común con m —excepto 1. Por ejemplo, $r = 3$, no tiene divisores en común con 16.
5. La información que el receptor hace pública son los números n y r; en este caso, publica los números 85 y 3.

Procedimiento de cifrado del emisor. Supongamos que la clave que se va a enviar es MOL. Con la información publicada por el receptor, el emisor procede de la siguiente manera.

1. El emisor codifica la palabra MOL mediante una secuencia de números, asignando a cada letra del alfabeto un número. Por ejemplo, a la A el 1, a la B el 2, ..., a la Z el 27. Así, la clave MOL se transforma en la secuencia de números

$$13,\ 16,\ 12.$$

   La asignación de los números a cada letra es arbitraria, salvo que hay que asegurarse de que el máximo común divisor de cada número de la secuencia y n (en este caso, 85) sea igual a 1 (es decir, que no tenga divisores en común distintos del 1).

2. Cada número en la secuencia es reemplazado por los siguientes números:

$$13^3 \bmod 85,\ 16^3 \bmod 85,\ 12^3 \bmod 85;$$

   es decir, la secuencia cifrada enviada por el emisor y recibida por receptor es la siguiente:

$$72,\ 16,\ 28.$$

Procedimiento de descifrado del receptor.

1. Obtiene un número s tal que $r \cdot s = 1 \bmod m$, es decir, tal que

$$3s = 1 \bmod 16.$$

   Esto se logra mediante el cálculo de potencias sucesivas de $r \bmod m$ hasta que se obtenga el 1; el s buscado es el penúltimo residuo. En este caso, tenemos los siguientes cálculos:

$$3 \bmod 16 = 3,$$
$$3^2 \bmod 16 = 9 \bmod 16 = 9,$$
$$3^3 \bmod 16 = 27 \bmod 16 = 11,$$
$$3^4 \bmod 16 = 81 \bmod 16 = 1.$$

   Entonces $s = 11$.

2. La secuencia descifrada se obtiene mediante los siguientes cálculos:

$$72^{11} \bmod 85 = 13,\ 16^{11} \bmod 85 = 16,\ 28^{11} \bmod 85 = 12,$$

   que es la secuencia antes del cifrado.

El procedimiento mostrado lleva el nombre de **Esquema de cifrado de clave pública RSA**. Las letras RSA son las iniciales de los nombres de los creadores del método en 1973: Ron Rivest, Adi Shamir y Len Adleman.

En los últimos cálculos, el docente tiene un ejemplo valioso para mostrar que la **tecnología** sola no es suficiente para resolver un problema.

En efecto, muchas calculadoras no tienen la capacidad para calcular de manera exacta el número 72^{11}, un número de al menos 20 cifras; luego, tampoco pueden obtener el residuo de dividir este número entre 85. Sin embargo, mediante la aplicación de la propiedad (1), este cálculo se vuelve sencillo:

1. Se sabe que $72 \bmod 85 = 72$.
2. Con ayuda de la tecnología, si es necesario, se obtiene

$$72^2 \bmod 85 = 84.$$

3. Ahora se calcula $72^4 \bmod 85$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 72^4 \bmod 85 &= [(72^2 \bmod 85)(72^2 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= [(84) \cdot (84)] \bmod 85 \\ &= [(84 \bmod 85)(84 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= (1 \cdot 1) \bmod 85 = 1. \end{aligned}$$

4. Se calcula $72^8 \bmod 85$:

$$\begin{aligned} 72^8 \bmod 85 &= [(72^4 \bmod 85)(72^4 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= (1 \cdot 1) \bmod 85 = 1. \end{aligned}$$

5. Se calcula $72^{11} \bmod 85$:

$$\begin{aligned} 72^{11} \bmod 85 &= (72^8 \cdot 72^2 \cdot 72) \bmod 85 \\ &= [(72^8 \bmod 85)(72^2 \bmod 85) \\ &\quad (72 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= [(1)(84)(72)] \bmod 85 \\ &= 6048 \bmod 85 = 13. \end{aligned}$$

En estos cálculos se combinan la **tecnología** con las propiedades de la aritmética modular. Esto muestra la necesidad de fomentar ambas.

Luego de que los estudiantes practiquen con algunos ejemplos, en los que se enfatice, fundamentalmente, en la verificación de las hipótesis que exige el método para la elección del número r y de la codificación en números de cada letra del mensaje, es necesario que el docente plantee una pregunta fundamental: *¿Por qué funciona el método?*

Al responder esta pregunta, se evidencia el verdadero sentido de utilidad de la Matemática. Que el procedimiento utilizado haga lo que dice que hace —enviar mensajes secretos casi imposibles de descifrar—, solo puede ser establecido a través de una **demostración** dentro de una teoría matemática. Y, aunque el teorema fundamental que se utiliza no pueda ni deba ser demostrado, debe ser enunciado y, a través de ejemplos, lograr que los estudiantes lo comprendan. Una vez logrado esto, el docente podrá explicar de una manera sencilla el por qué el método funciona.

Otro de los ejes de aprendizaje que se trabajan a través de este problema es el de la **integración de conocimientos**: los números primos, máximo común divisor, etcétera, se entrelazan con un problema de las ciencias de la computación.

Finalmente, este problema también se presta para mostrar la utilidad de que una función sea inversible, pues el proceso de cifrado y descifrado puede ser visto como una función que es inversible.

En efecto, sean $\mathscr{O}$ el conjunto de todos los mensajes que pueden enviarse desde el emisor, y $\mathscr{M}$ el conjunto de todos los mensajes posibles que se pueden enviar al receptor. El esquema de cifrado de clave pública asigna a cada mensaje del conjunto $\mathscr{O}$ un único mensaje cifrado en $\mathscr{M}$; por lo tanto, existe una función $\kappa\colon \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M}$ tal que si x es el mensaje original, $y = \kappa(x)$ es el mensaje cifrado.

Ahora bien, para obtener nuevamente el mensaje original, y no otro, no es posible que dos mensajes diferentes, x_1 y x_2, tengan el mismo mensaje cifrado; por lo tanto, la función κ es una función inyectiva, existe la función inversa κ^{-1} de $\operatorname{rec}(\kappa)$ sobre $\mathscr{O}$.

Si la función κ no fuera inversible, no sería posible recuperar el mensaje original a partir del cifrado.

La definición de la función κ está contenida en el procedimiento que sigue el emisor para cifrar el mensaje; la inversa κ^{-1} está definida a través del procedimiento que sigue el receptor para descifrar el mensaje recibido.

2.1 Bloque de Funciones y Números

Los conceptos fundamentales de la matemática son, en general, los más difíciles de aprender. Y este es el caso del concepto de función. Por ello su estudio y asimilación se planifican para lograrse a lo largo de los tres años del bachillerato. En cada año, hay tres tipos de contenidos en los que se estudian las funciones:

1. *Características generales de cualquier función*: concepto, dominio, recorrido, evaluación, representaciones, monotonía, simetría (paridad). Estas se estudian al inicio de cada año.
2. *Funciones elementales*, un par o trío cada año. Para cada una de éstas, se estudian las características generales.
3. *Problemas* que pueden ser modelados mediante alguna función.

Solo de esta manera es posible que, al final del bachillerato, se logre una comprensión del concepto de función.

Por lo expuesto, se insiste en que tanto en segundo como en tercer año, al inicio, se revisen nuevamente las características generales de las funciones, pero que ya se incorporen en los ejemplos las funciones que fueron estudiadas los años anteriores. Para el caso del tercero de bachillerato, la revisión de las características generales se hará con funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales y trigonométricas.

Al repaso de las características generales hay que añadir el método para determinar las propiedades de una función particular a partir de las propiedades de una función "madre" que es sometida a traslaciones y homotecias hasta obtenerse la función objeto de análisis.

En este año, se deben estudiar las funciones *exponenciales*, *logarítmicas* y *sucesiones*.

Exponenciales. El problema de reproducción de una pareja de conejos (que en cada generación procrean dos crías) puede servir al docente para trabajar con datos discretos que, al graficarlos, sugieran una función distinta a las estudiadas en años anteriores, pues el dibujo obtenido no corresponde ni a una recta, ni a una parábola, ni a ninguna curva trigonométrica, etcétera.

La función exponencial sirve de herramienta para describir fenómenos de crecimiento o bien rápido o bien lento. Dos ejemplos importantes son:

- Crecimiento poblacional exponencial: tomando datos de censos recientes, se puede modelar la población del Ecuador, con el objeto de predecir la población en las siguientes décadas.
- Decaimiento de una sustancia radioactiva como, por ejemplo, el carbono 14 y la datación de objetos arqueológicos. En el 2005, se utilizó este método para datar los restos arqueológicos de la cultura La Tolita. El docente puede proveer de datos relevantes y de interés a sus estudiantes, y pedir que se los grafique. Las gráficas deben sugerir generalizaciones sobre la monotonía y comportamiento asintótico de las funciones exponenciales.

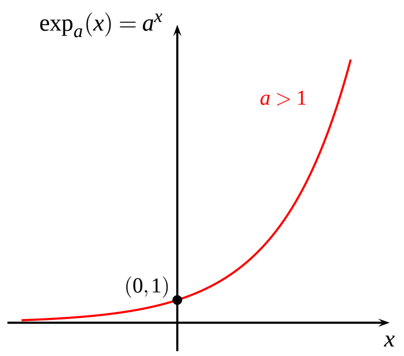
A través de estos problemas, se **integran conocimientos** de otros campos de estudio, como la historia, la química, con la matemática.

A este nivel no es posible presentar una definición de a^x cuando $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$, por lo que se recomienda que, para ofrecer una "definición provisional" (hasta que en los estudios universitarios se acceda a una definición en el sentido estricto de la palabra), se parta de las propiedades de las potencias de números enteros, que ya han sido estudiadas en la EGB, para aceptar la existencia de una función $\exp_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las mismas propiedades de las potencias de números enteros, y que para cada $x \in \mathbb{R}$, en lugar de escribir $\exp_a(x)$ se escribe a^x.

Aunque no se tenga una definición formal de a^x, es importante hacer notar por qué está función no se define para $a \leq 0$. El siguiente ejemplo, ayuda en la cuestión: ¿a qué sería igual $(-2)^x$? Si x fuera un número racional de la forma $\frac{1}{n}$ con n un número par, sería imposible asignar un valor a $(-2)^x$ compatible con las otras propiedades de las exponenciales. Más aún, para cualquier número racional x, expresado en forma canónica (fracción irreducible) y con denominador un número par, no sería posible definir $(-2)^x$.

Con la ayuda de la tecnología, los estudiantes pueden obtener las características generales de la función como dominio, imagen, monotonía, paridad, la gráfica, y los comportamientos al infinito.

En particular, pueden concluir que la gráfica de a^x cuando $a > 1$ es



y que la función tiene las siguientes características:

- el dominio es $\mathbb{R}$;
- el recorrido es $\mathbb{R}^+$;
- es una función creciente;
- crece ilimitadamente a valores positivos si x es positivo y grande;
- pasa por el punto $(0,1)$; es decir, corta el eje vertical en 1; y
- se acerca a 0 si x es negativo y grande; es decir, el eje horizontal es una asíntota.

Mediante traslaciones, homotecias y reflexiones, se pueden determinar todas las características de funciones obtenidas por composición de funciones exponenciales y lineales:

$$x \mapsto ka^{\lambda x+\mu} + m$$

a partir de la función “madre” $x \mapsto a^x$. Cabe recalcar que para realizar este estudio no se requiere siquiera de la tecnología; basta con conocer las propiedades de a^x y los efectos de las traslaciones y homotecias.

Veamos un ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuya ley de asignación es

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} + \frac{3}{4}.$$

En este caso, tenemos

$$k = -2, \quad a = \frac{1}{4}, \quad \lambda = 2, \quad \mu = 1 \quad \text{y} \quad m = \frac{3}{4}.$$

En primer lugar, al aplicar las propiedades básicas de los exponentes, podemos escribir la ley de asignación de f de las siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} + \frac{3}{4} \\ &= (-2)(4^{-1})^{2x}(4^{-1}) + \frac{3}{4} \\ &= -2^{-1}(4^{-2})^x + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x + \frac{3}{4}.$$

Sin recurrir siquiera a una calculadora gráfica (o un software para graficar), el estudiante puede realizar a mano alzada un gráfico bastante aproximado de la función f, a partir del gráfico de la función g definida por

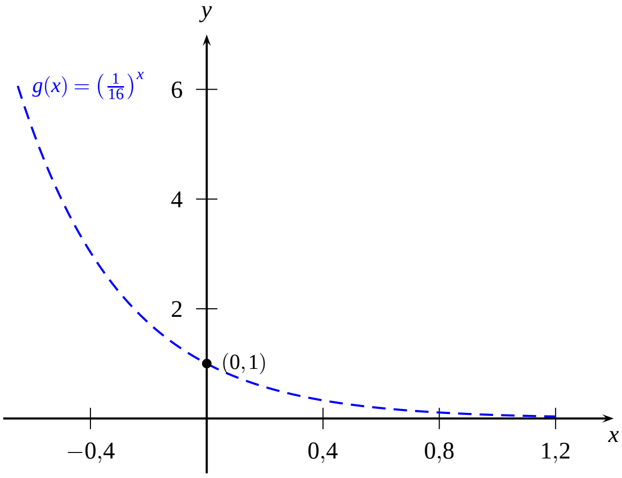
$$g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

mediante la aplicación de traslaciones, homotecias y reflexiones.

En efecto, como la base de g es un número menor que 1, podemos decir lo siguiente sobre g:

1. su dominio es $\mathbb{R}$;
2. su recorrido es $\mathbb{R}^+$; es decir, $g(x)$ siempre toma valores mayores que 0;
3. es una función decreciente;
4. crece ilimitadamente a valores positivos si x es negativo y grande;
5. pasa por el punto $(0,1)$; es decir, corta el eje vertical en 1; y
6. se acerca a 0 si x es positivo y grande; es decir, el eje horizontal es una asíntota de la gráfica de g.

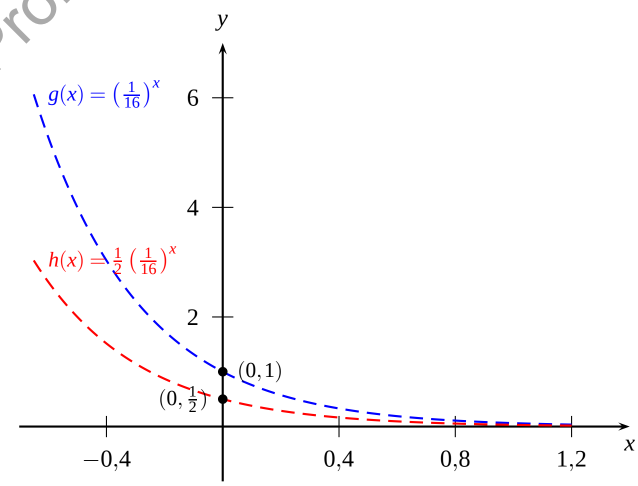
Con esta información, se puede esbozar el siguiente dibujo:



A continuación, vamos a graficar la función h definida por

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x = \frac{1}{2}g(x).$$

La gráfica de h es una contracción (a la mitad) de la de g; esto significa que las características de h son las mismas que las de g, salvo que no pasa por el punto $(0,1)$, sino por el punto $(0,\frac{1}{2})$. En otras palabras, el dominio de h es $\mathbb{R}$, su recorrido, $\mathbb{R}^+$, es una función decreciente, crece ilimitadamente a valores positivos si x es negativo y grande, etcétera. Los estudiantes pueden esbozar, a mano alzada, la gráfica de h a partir de la de g:

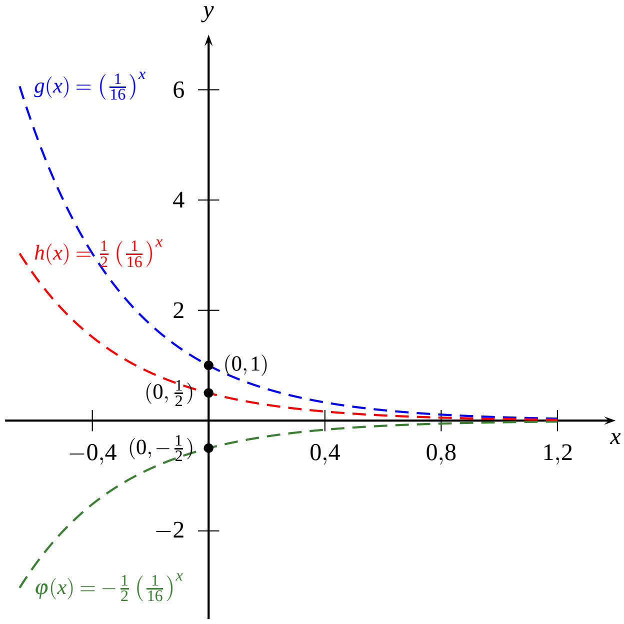


El siguiente paso es dibujar la gráfica de la función φ definida por

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x = -h(x) = -\frac{1}{2}g(x).$$

La gráfica de φ es el reflejo de la de h respecto al eje horizontal. De allí podemos colegir las propiedades de φ: igual dominio que h; el recorrido es ahora $\mathbb{R}^-$; es una función creciente; crece ilimitadamente a valores negativos cuando x es negativo y grande; pasa por el punto $(0,-\frac{1}{2})$; etcétera.

Una vez más, los estudiantes pueden dibujar la gráfica de φ sin recurrir a la tecnología:



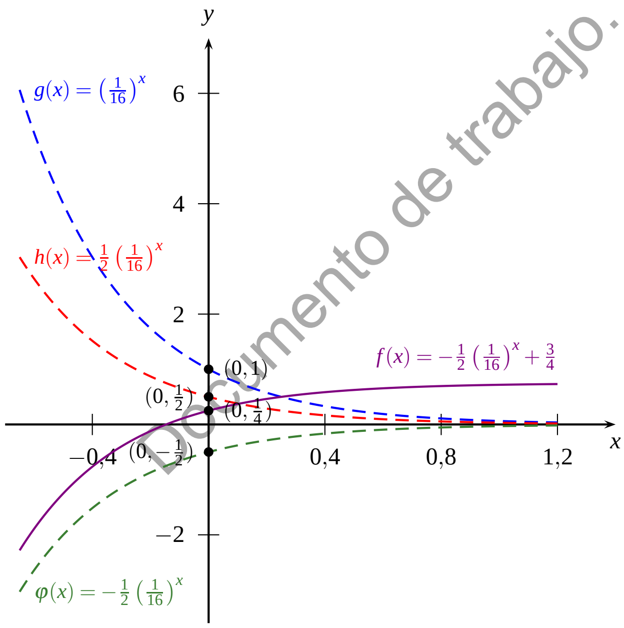
Finalmente, ya podemos obtener la gráfica de f y sus características a partir de las de la función φ, pues

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x + \frac{3}{4} = \varphi(x) + \frac{3}{4}.$$

La gráfica de f será la traslación vertical hacia arriba de la gráfica de φ en $\frac{3}{4}$. De aquí se obtienen las características de f:

- el dominio es $\mathbb{R}$;
- el recorrido es $]-\infty, \frac{1}{4}[$;
- la recta $y = \frac{1}{4}$ es una asíntota horizontal;

y otras más.



El docente debe resumir el proceso de elaboración del gráfico de f a partir del de g mediante la homotecia, reflexión y traslación vertical; las siguientes igualdades sintetizan el proceso:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{3}{4} = -h(x) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{3}{4}.$$

También debe utilizar estos ejercicios para **generalizar** y dar significado a cada uno de los parámetros que aparecen en

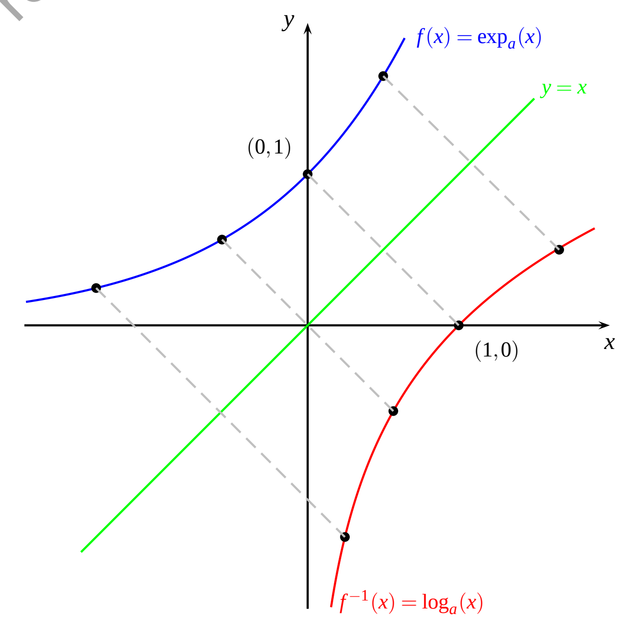
$$x \mapsto ka^{\lambda x + \mu} + m;$$

por ejemplo, k contrae o dilata a la gráfica (homotecia), m traslada verticalmente, etcétera.

Hay otros problemas que pueden utilizarse para ser modelados mediante funciones exponenciales, y que permiten mostrar la relación de la Matemática con otras ciencias. Por ejemplo, con la ecología, la sociología y la economía, el problema de crecimiento poblacional (modelos de Malthus y de Verhulst); con la física, la ley de enfriamiento de Newton; con la farmacología, la ley de Fick que trata sobre cómo cambia la concentración de una droga en un cuerpo; otra vez la ecología, con el estudio de los niveles de ruido, lo que da paso a tratar el tema de la contaminación por ruido.

Logarítmicas. Aunque históricamente los logaritmos no surgieron como el problema inverso de la función exponencial, en la actualidad, la función logaritmo se puede definir como la función inversa de la función exponencial. En el año anterior, los estudiantes aprendieron la inversión de funciones para definir las funciones trigonométricas inversas. Con la oportunidad de definir la función logaritmo, y estudiar sus propiedades, se debe enfatizar nuevamente en el concepto de función inversa y las condiciones que una función debe satisfacer para ser inversible. También hay que trabajar en las propiedades que hereda una función inversa de la función original, pues, de este modo, se obtienen de una manera sencilla las propiedades de la función logaritmo a partir de las propiedades de la función exponencial. Veamos un ejemplo.

Del curso anterior, se sabe que la gráfica de la función inversa se obtiene por una reflexión de la gráfica de la función en la recta de ecuación $y = x$. De manera más precisa, si f es la función en cuestión y f^{-1} su inversa, entonces, el simétrico de cada punto de la gráfica de f^{-1} es un punto en la gráfica de f. Así, la simétrica de la gráfica de a^x es la gráfica de $\log_a x$, como se muestra a continuación para el caso en que $a > 1$:



Se puede obtener, entonces, de manera similar la gráfica de $\log_a x$ cuando $0 < a < 1$.

En el establecimiento de las propiedades de las funciones logarítmicas, el docente tiene una gran oportunidad de trabajar el tema de la **deducción**. En efecto, a partir de las propiedades de las funciones exponenciales, y de la definición de inversa, se pueden deducir de un modo sencillo las propiedades de las funciones logarítmicas. Por ejemplo, puesto que $a^0 = 1$, y de la relación

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y,$$

obtenemos que $\log_a 1 = 0$; de $a^{x+y} = a^x a^y$, la igualdad $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$, etcétera. La relación entre la función exponencial y la logarítmica permite un aprendizaje deductivo y no memorístico; además, así se estimula también el calculo mental sin uso de calculadoras.

El docente debe dedicar atención especial a tratar sobre el número *e*, la base de los logaritmos naturales. Una definición en el sentido estricto no es posible a este nivel, por lo que conviene recurrir a la historia para hablar de él. Por otro lado, en el estudio de las sucesiones, mediante la calculadora, se puede ilustrar que el número *e* es el límite de la sucesión de término general

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Es altamente recomendable que se ubique históricamente el papel de los logaritmos, su origen y la prostaféresis[1]. En este punto el docente tiene mucho material que liga la matemática con la Astronomía, y también integra dos temas de la matemática; la historia se ve, una vez, relacionada con las matemáticas (o la revés).

Los problemas modelados para la función exponencial también sirven para la función logaritmo, porque muchos de los cálculos en estos problemas se podrán realizar únicamente a través de la función logaritmo. El tema de la escala logarítmica es muy apropiado para ver la utilidad de la matemática.

Sucesiones. Los problemas de la Matemática Financiera proveen situaciones adecuadas para introducir el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas, casos particulares de las sucesiones.

Aproveche este tema para trabajar la **generalización**. En efecto, a partir de las situaciones que ofrece la Matemática Financiera, se llegan fácilmente a resolver diversos problemas. De estos hay que **conjeturar** y obtener fórmulas generales, que no podrán ser **demostradas** en este nivel, pues la mayoría de las veces, el método adecuado para realizar estas demostraciones es la inducción matemática, método que se estudia en el curso de Matemáticas Superiores; sin embargo, el docente deberá insistir en el hecho de que la verdad de una proposición no se prueba a partir de un ejemplo.

Para la introducción de las funciones recursivas, se puede utilizar la sucesión de Fibonacci, sucesión estudiada por el matemático italiano del siglo XIII Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, y famoso por ser quien difundió el sistema de numeración arábiga en Europa. La sucesión en cuestión surge del siguiente problema publicado en su libro *Liber Abaci (Libro del ábaco)*:

> *En una granja hay, al principio del año, una pareja de conejos que acaban de nacer. Al cabo de dos meses, esta pareja está preparada para reproducirse. Produce cada mes una pareja de conejos que, al cabo de dos meses, está a su vez preparada para empezar a reproducirse, dando otra pareja cada mes. ¿Cuál es el número de parejas de conejos en la granja el día quince de cada mes del año?*

El docente pide a los estudiantes que calculen el número de parejas de conejos cada vez y elaboren una tabla con los resultados. Los guía a establecer que el número de parejas en un mes, a partir del tercero, siempre es la suma del número de parejas de los dos meses inmediatamente anteriores. Pasa luego a introducir la notación correspondiente y a formular la igualdad

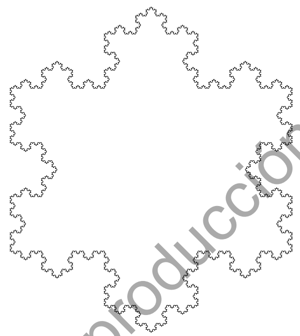
$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Es importante que el docente recalque que en una definición recursiva intervienen dos elementos: la base de la recursión y el paso recursivo.

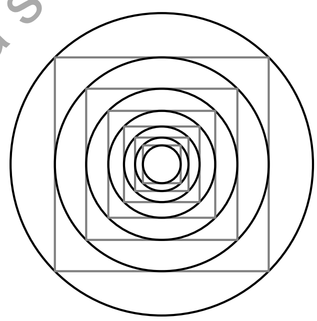
Nótese como en el último ejemplo están presentes varios de los ejes del aprendizaje: **abstracción**, **generalización**, etcétera. Y aún puede servir para mostrar los elementos culturales y sociales de la Matemática.

En efecto, la introducción del sistema arábigo en Europa modifica el modo de llevar la contabilidad comercial, de calcular los intereses, de convertir los pesos y las medidas, cambiar unas moneda por otra, etcétera.

Las definiciones recursivas pueden ser utilizadas para resolver problemas como el cálculo del perímetro del copo de nieve de Koch



y otros de carácter geométrico como calcular la suma de las áreas de los primeros 20 cuadrados en la figura



2.2 Bloque de Álgebra y Geometría

Para este año, el único tema de estudio en este bloque es el de las cónicas. Hay varias maneras de presentar su estudio, pero se recomienda que se lo inicie con una presentación de carácter puramente geométrico, y luego se complemente desde el punto de vista algebraico de la geometría analítica, que es, quizás, el que mayor utilidad tendrá en la formación de los estudiantes.

Geométricamente hay, a su vez, dos posibilidades para presentar las cónicas. La primera, e históricamente la primera debida a Menecmo y a Apolonio, es ver a las cónicas como secciones de un cono circular recto (doble para la hipérbola) , es decir, las curvas producidas al cortar con un plano un cono circular recto. Esta presentación ofrece algunas actividades para la clase: elaborar conos con cartulina (o el material adecuado que facilite los cortes y dobleces) y cortarlos para obtener las cónicas, utilizar software para realizar lo mismo que se hizo manualmente. Se recomienda empezar el tema con esta presentación.

A continuación, se puede presentar el segundo punto de vista geométrico[2]. Los estudiantes ya conocen el círculo: saben que esta figura geométrica está constituida por todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado. De hecho, no necesitan ningún dispositivo especial como un compás para dibujar uno; les bastará con disponer de una piola, un hilo o una cuerda, y de dos lápices.

[1] Método para facilitar los cálculos aproximados de multiplicaciones o divisiones de números, que utiliza las propiedades de las razones trigonométricas. Fue utilizado entre los siglos XVI y VII, antes de la introducción del logaritmo en 1614.

[2] Una de las razones para una segunda presentación es que la definición de Apolonio no es fácil de aplicar.

Se recomienda que e incorpore esta actividad en la clase: dibujar un círculo con un cordón de zapatos y dos lápices.

De esta práctica no resulta extraño pasar a la noción de lugar geométrico: es decir, una figura geométrica constituida por todos los puntos que satisfacen una cierta propiedad o condición. Así se pueden introducir las otras tres cónicas. Se puede iniciar con la elipse: el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Una vez más, una cuerda y tres lápices nos permiten dibujar elipses sin recurrir a ningún otro tipo de dispositivo; se recomienda también incorporar esta actividad en la clase.

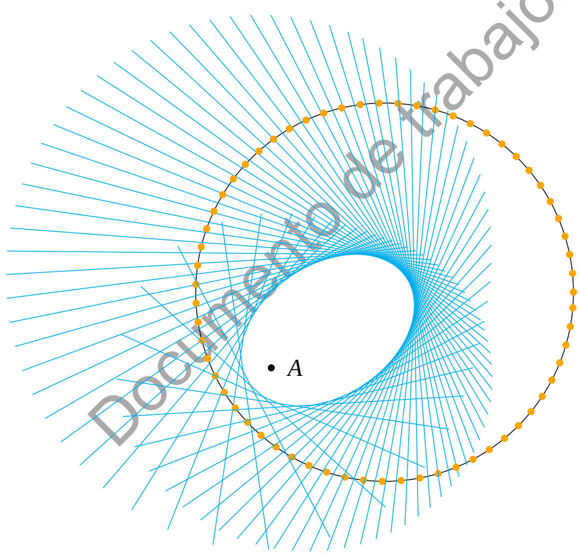
De manera similar, se introducen la parábola y la hipérbola como lugares geométricos.

Se pueden realizar otras actividades de tipo "manual" para dibujar u obtener algunas cónicas. Por ejemplo, utilizando la papiroflexia, se puede obtener una elipse a partir de un círculo y un punto interior a él, dibujando todas las mediatrices a los segmentos cuyos extremos son el punto interior y puntos del círculo, como se muestra más adelante. También se puede utilizar software que permiten realizar este tipo de construcciones.

También se puede dibujar una parábola utilizando únicamente su definición: dada una recta (*directriz*) y un punto (*foco*) en el mismo plano, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta y del punto dados. Para construir a mano una parábola, se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Se toma un punto cualquiera en la directriz: A.
2. Se traza la mediatriz del segmento que une el foco con A.
3. El punto P, intersección de la mediatriz trazada y la perpendicular a la directriz levantada en A, pertenece a la parábola.
4. Se repite el proceso con más puntos en la directriz; por ejemplo, se pueden colocar puntos a cada centímetro.

Este proceso puede ser realizado también mediando el plegado de papel.



No desestime el valor que tiene la elaboración de los gráficos a mano, sin perjuicio de utilizar también cualquier tecnología de la que disponga para obtener los mismos.

Una vez introducidas las cónicas desde los puntos de vista geométrico, a partir del círculo, el docente puede introducir la versión algebraica de las cónicas. En efecto, si se dibuja un círculo en un sistema de coordenadas, centrado en el origen, mediante el teorema de Pitágoras, es fácil determinar la ecuación algebraica de segundo grado que satisfacen todos los puntos del círculo. Apoyado en esta ecuación, el docente puede hacer ver a los estudiantes las ventajas de trabajar con las ecuaciones.

A continuación se deben presentar las versiones algebraicas de las otras cónicas, aunque se recomienda omitir su deducción. No debe olvidar el relacionar la versión actual de la parábola con la que el estudiante ya estudio en el primer año de bachillerato.

Alrededor de las cónicas, hay varios problemas que ayudan, por un lado, a la comprensión misma del concepto, y por otro, a relacionar este tema, y la Matemática en general, con otros campos del conocimiento.

Con la Astronomía y la Física: los planetas describen órbitas elípticas. Con la tecnología de comunicaciones: el uso de las antenas parabólicas; en este ejemplo, es sencillo, aprovechando lo estudiado en el primero de bachillerato sobre el vértice de la parábola, que todos los rayos que inciden paralelamente en una superficie parabólica (en su parte interna) se reflejan hacia el foco de la misma, propiedad por la cual se utiliza este tipo de antenas. Por la misma propiedad, se utilizan superficies parabólicas para plantas de energía solar y faros de automóviles.

Con el tema de las órbitas de los planetas, se puede vincular la Matemática con la apasionante historia de la conformación occidental del modelo del universo, y contraponer con la diferente cosmovisión del mundo andino.

2.3 Bloque de Matemáticas Discretas

El ejemplo con el que se inició la sección de precisiones para la enseñanza y el aprendizaje de tercer año de Bachillerato puede ser utilizado para iniciar el estudio de este bloque. Como se vio, el contenido matemático no es más que la aritmética modular, la misma que no requiere sino el uso de los conocimientos estudiados ya en la Educación General Básica.

Siguiendo con la línea de las aplicaciones a la información, los siguientes problemas son sencillos de abordar, incluso más que el que ya se presentó. Los *números para identificación* que se utilizan en cheques, tarjetas de crédito, tarjetas de identificación, la cédula de ciudadanía, etcétera, permiten identificar completa y rápidamente al dueño de la tarjeta o al emisor de la misma. Estos números contienen además información adicional para poder verificar que la identificación misma es válida. Por ejemplo, en el número de cédula de ciudadanía, el último dígito permite saber si los nueve números anteriores corresponden a un número válido para ser la identificación de una cédula. Otro ejemplo es el código de barras.

Para estudiar estos problemas, se utilizan sencillos algoritmos que involucran, a lo más, las cuatro operaciones básicas entre números naturales.

El docente debe aprovechar estos ejemplos que, aunque la matemática involucrada es básica, muestra a la Matemática en un contexto real.

2.4 Bloque de Probabilidades y Estadística

En este bloque, se estudiarán las distribuciones binomial y normal, y la regresión lineal.

Distribuciones. Para la introducción de la distribución binomial hay una gran variedad de ejemplos clásicos como el del lanzamiento de una moneda. Sin embargo, hay otras posibilidades, como se apuntó ya en el mismo bloque del segundo de bachillerato.

El docente plantea la siguiente pregunta a la clase:

> *¿Cuál es la proporción de estudiantes del colegio que son zurdos?*

Para responder la pregunta, el docente hace notar que podría realizarse un censo, y con ello se obtendría la proporción exacta buscada. Sin embargo, hace notar también, que podría llevar mucho tiempo hacerlo, mientras que existen maneras de obtener un valor bastante aproximado al real con menos esfuerzo. También hará notar que no siempre será posible realizar un censo, y que la técnica aprendida servirá igual en el caso del colegio como en otro que involucre un país entero.

Proponga, entonces, tomar una muestra de alumnos de todo el colegio (se deberá hacer, entonces, un repaso de los contenidos sobre muestras estudiado en el curso anterior). A cada persona de la muestra, se le deberá preguntar si es zurdo o no. Hay que contar, entonces, cuántas personas respondieron que sí. Ahora bien, la proporción encontrada no contesta la pregunta; enfatice en que probablemente si se tomara otra muestra, la proporción obtenida podría ser diferente. ¿Cómo saber qué tan veraz es la proporción obtenida con la muestra elegida?

El problema planteado nos sirve para presentar las nociones de *variable aleatoria discreta*, *distribución de la variable aleatoria*, *gráfica de la distribución binomial* (como una extensión del histograma ya conocido por los estudiantes) y, finalmente, de *parámetros de la distribución binomial*. Además, deberá introducir las nociones de variables aleatorias *continua* y la *distribución normal*; esta última se presentará en referencia a la estadística estudiada en los cursos anteriores.

Hacia el final, podría ilustrarse el hecho de que una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral y el conjunto de llegada es un conjunto de números reales.

Si el tiempo lo permite, se pueden utilizar las tablas y gráficas de distribución binomial y normal para responder preguntas sencillas de probabilidades, habiendo estandarizado los datos. Por ejemplo, si la distribución de notas de una clase es normal con media 86 (sobre 100) y desviación estándar 2, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante saque una nota mayor que 90?

Regresión Lineal. Todas las ciencias experimentales (Física, Química, Biología, etcétera) y varias de las ciencias sociales (Sicología, Sociología, Administración, etcétera) requieren de la toma de datos que relacionan variables. Por ejemplo, la velocidad de un objeto en el tiempo t, el volumen de un gas a una temperatura T, el número de bacterias en un cultivo luego de t horas, etcétera. Los resultados experimentales con frecuencia se grafican y se busca una recta que aproxime lo mejor posible a esos datos.

El profesor puede presentar un grupo de datos de cualquier experimento que sus estudiantes posiblemente hayan hecho en el laboratorio de física, química o biología (si el tiempo lo permite, podrían realizar una toma de datos en la clase) y utilizarlo para proponer la búsqueda de una recta que se aproxime de mejor manera a los datos. Aunque no se recomienda deducir las fórmulas de la regresión lineal en este tema, el docente debe aprovechar para enfatizar en la diferencia entre los modelos de tipo determinista y probabilista (aleatorios o estocásticos). En el primer caso, la recta de regresión lineal es simplemente $y = b_0 + b_1x$; en el segundo, tiene la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$, donde e es la componente aleatoria del error. El carácter aleatorio del modelo de regresión lineal se refleja en el hecho de cómo contestar a la pregunta: "¿Qué tan bien se ajusta la recta a los datos?"

La respuesta a esa pregunta consiste en determinar intervalos de confianza para los coeficientes β_0 y β_1, en estimar el valor esperado de y para un valor dado de x, en predecir un valor particular de y para un valor dado de x.

Todos los procedimientos y fórmulas a utilizarse para responder a las preguntas anteriores no podrán ser deducidos en este nivel, por lo que el docente deberá hacer énfasis en el significado de estos y en su utilización para resolver problemas bastante cercanos a los que aparecen en la realidad.

Bajo la misma línea de trabajo de los dos temas de este bloque, podría incluirse el tratamiento de las pruebas de hipótesis, lo que daría un valor más práctico a la resolución de los problemas.

3 Indicadores esenciales de evaluación

1. **Determina el dominio, recorrido, monotonía, paridad, periodicidad (donde es pertinente) y comportamiento al infinito de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, trigonométricas, y definidas a trozos mediante funciones de los tipos anteriores.**
2. **Determina el dominio, recorrido, monotonía y comportamiento al infinito de funciones exponenciales a partir de la base.**
3. **Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de** a^x **mediante traslaciones, homotecias y reflexiones.**
4. Reconoce las funciones logarítmicas como las funciones inversas de las exponenciales.
5. Determina las características de una función logarítmica a partir de las características de la función exponencial inversa (aquella cuya inversa es la función logarítmica en cuestión).
6. **Evalúa una función logarítmica mediante la función exponencial inversa.**
7. Evalúa funciones exponenciales y cuadráticas a trozos.
8. Representa datos en escala logarítmica.
9. Grafica funciones exponenciales y cuadráticas a trozos.
10. **Resuelve ecuaciones que exponenciales y logarítmicas.**
11. Resuelve sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
12. **Reconoce si una progresión es aritmética o geométrica.**
13. Determina una de los parámetros de una progresión aritmética o geométrica dados los otros.
14. **Calcula la suma de los términos de una progresión aritmética o geométrica.**
15. **Resuelve problemas sencillos de matemática financiera.**
16. **Reconoce si una sucesión está definida recursivamente.**
17. Resuelve ecuaciones recursivas lineales de primer orden.
18. **Reconoce las cónicas como conjuntos de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación cuadrática.**
19. **Grafica una cónica dada su ecuación cartesiana.**
20. Dibuja las cónicas aplicando su definición como lugar geométrico.
21. Identifica una cónica a partir de su gráfico.
22. **Determina la ecuación de una cónica a partir de sus parámetros.**
23. **Representa un número natural en base** 10 **en sistema binario.**
24. Obtiene el número natural en base 10 a partir de su representación binaria.
25. Suma dos números representados en sistema binario.
26. **Realiza operaciones en aritmética modular.**
27. Codifica (cifra) y decodifica (descifra) mensajes cortos mediante algunos métodos: Sumas de verificación de paridad, códigos binarios, criptografía (algoritmo RSA de clave pública), compresión de datos.
28. **Conoce sistemas comunes de identificación como código de barras, ISBN, cédula de ciudadanía.**
29. **Identifica si un experimento es binomial.**
30. **Conoce la ley de probabilidad, las fórmulas de la media, la varianza y la desviación estándar de una distribución binomial.**
31. Conoce la ley de probabilidad, las fórmulas de la media, la varianza y la desviación estándar de una distribución normal.
32. Utiliza tablas o TIC's para calcular los valores de la distribución normal.
33. **Determina la recta de regresión lineal entre dos variables a partir de una muestra dada.**
34. Calcula el coeficiente de correlación de una regresión.

PROYECCIÓN CURRICULAR

MATERIA OPTATIVA:

MATEMÁTICA SUPERIOR

Objetivos educativos de la materia Optativa Matemática “Superior”

1. Conocer las bases del cálculo diferencial para analizar funciones y resolver problemas de la matemática y de otras ciencias.
2. Entender los vectores como herramientas para representar magnitudes físicas en el espacio tridimensional.
3. Comprender la geometría del espacio.
4. Reconocer y utilizar métodos de demostración, en particular la inducción matemática,
5. Comprender el sistema de números complejos, sus representaciones, operaciones, su aplicación en la resolución de ecuaciones algebraicas y a la geometría.

Planificación por bloques curriculares

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeños
1. **Números y funciones**	• Utilizar las fórmulas definidas por recurrencia. **(C,P)** • Utilizar **la inducción matemática** para demostrar proposiciones acerca de números naturales. **(P)** • Calcular **los coeficientes de un binomio de Newton** dado. **(P)** • Realizar operaciones combinadas de **módulo, suma, conjugado, producto, división y potencias** con **números complejos**. **(P)** • Calcular **raíces de números complejos** mediante la fórmula de Moivre. **(P)** • Expresar **un número complejo** por medio de vectores en el plano y coordenadas polares. **(C,P)** • Resolver **problemas de geometría plana** utilizando números complejos. **(P)** • Calcular **los límites de funciones elementales** mediante el uso de las propiedades algebraicas de los límites. **(P)** • Determinar **la continuidad de una función elemental** en un punto y en un intervalo. **(P)** • Aproximar **una función no lineal** a través de una función lineal. **(C,P)** • Calcular **la derivada de una función** utilizando la definición de límite. • Calcular **la derivada de una función** utilizando el álgebra de derivadas. **(P)** • Determinar **la monotonía, concavidad y extremos de una función** utilizando las propiedades de las derivadas y de las funciones derivables. **(P)** • Obtener **la gráfica de una función con base en el estudio de la monotonía, concavidad y extremos de la función. . (P)** • Resolver **problemas sencillos** de optimización mediante la utilización de la derivada. **(P,M)** • Resolver **problemas de aplicación de la derivada** utilizando las TIC's**. (P,M)**
2. **Algebra y Geometría**	• Representar **puntos en el espacio tridimensional** a partir de sus coordenadas. **(P)** • Calcular **la distancia entre puntos en el espacio** a partir de las coordenadas de los puntos. **(P)** • Reconocer **vectores ortogonales, coplanares o colineales** a partir de sus coordenadas. **(P)** • Determinar **la ecuación vectorial de una recta** a partir de dos puntos que pertenecen a la recta o de un punto y del vector director de la recta. **(P)**

	• Determinar **la ecuación vectorial de un plano** a partir de tres puntos no colineales dados o de un punto y dos vectores linealmente independientes. **(P)**
3. **Matemáticas Discretas**	• NO TIENE
4. **Probabilidad y Estadística**	• NO TIENE

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de “Matemáticas discretas”.

2 Matemática Superior

Este curso contiene únicamente los bloques de “Números y Funciones” y “Álgebra y Geometría”. El primero organiza sus contenidos en tres temas: *Inducción matemática*, *Números complejos* y *Cálculo diferencial*. El bloque de “Algebra y Geometría” trabaja solamente un tema: *Vectores en el espacio*, lo que incluye las versiones vectoriales de rectas y planos.

El mayor peso para este curso está en el Cálculo diferencial; representa la mitad de los contenidos a estudiarse, y de los diversos aspectos que pueden ser trabajados, hay que destacar dos que el docente deberá enfatizar.

El primer aspecto tiene que ver con la *aproximación lineal* de funciones. Los problemas más sencillos matemáticamente son aquellos que tienen que ver con modelos lineales. Históricamente, la necesidad de calcular numéricamente expresiones funcionales llevo a determinar métodos de cálculo sencillos como, por ejemplo, la *interpolación lineal*. El problema principal del cálculo diferencial es el de encontrar una recta tangente a una curva en un punto dado. Este problema corresponde, desde el punto de vista funcional, a determinar una función lineal que aproxime a la función no lineal dada. La ventaja de la función lineal es su sencillez. Las computadoras y calculadoras utilizan una extensión de este procedimiento: para hallar el valor de una función no polinomial, utilizan una aproximación polinomial; por ejemplo, en lugar de evaluar e^x, evalúan el polinomio de Taylor

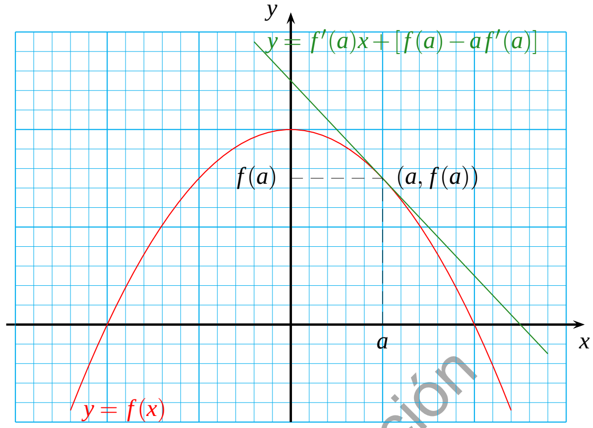
$$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Para un valor de x que está cerca de 0.

El concepto de derivada es una herramienta que sirve para aproximar una función linealmente. De manera más precisa, si f es una función derivable en el punto a y $f'(a)$ es la derivada de f en a, entonces $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$; más aún, la ecuación de esa recta tangente es

$$y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)].$$

En el siguiente dibujo, se ilustra la situación.

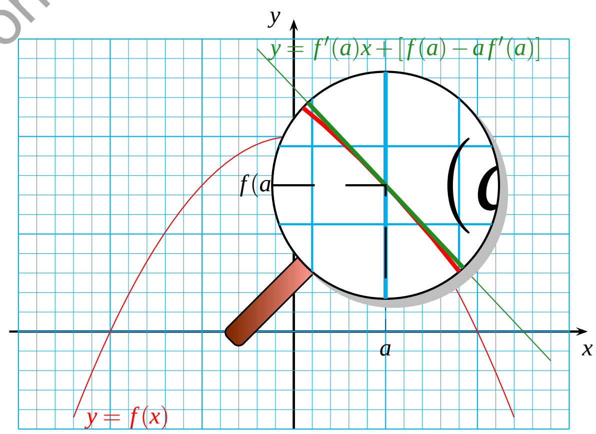


La propiedad más importante de esta recta es que *aproxima linealmente* a la función f para valores cercanos al punto a. De manera más precisa, si h es un número pequeño, el número $a+h$ es un valor cercano al número a; entonces, para cada valor de $h \approx 0$,

$$f'(a)(a+h) + [f(a) - af'(a)] = f(a) + f'(a)h$$

es una *aproximación lineal* de $f(a+h)$.

En el dibujo que se muestra a continuación, se ha ampliado la imagen en cuatro veces alrededor del punto de coordenadas $(a, f(a))$. Se puede observar lo cerca que están entre sí la tangente y la curva.



El otro aspecto que el docente deberá enfatizar es que una de las principales aplicaciones de la derivada consiste en utilizarla para resolver problemas de optimización. En esta introducción a las precisiones de este año, vamos a presentar una sugerencia de cómo puede ser presentada el tema de la aproximación lineal de funciones y, al mismo tiempo, el concepto de derivada; en las precisiones del bloque de “Número y funciones”, presentaremos algunas sugerencias para el tratamiento de la optimización.

El concepto de derivada y su definición formal son altamente abstractos, razón por la cual el profesor debe planificar algunas sesiones para estudiarlo y cimentar su entendimiento. El énfasis en este concepto debe estar en su interpretación como:

- *Pendiente de la recta tangente a una curva*: El docente debe presentar varios gráficos de funciones y rectas tangentes en diferentes puntos de las gráficas. De manera que se visualice claramente la diferencia entre recta tangente y secante. Debe, además, asegurarse de que sus estudiantes recuerden que para obtener la ecuación de la recta, se requieren o dos puntos, o la pendiente y un punto.

- *Tasa o razón instantánea de cambio de la función respecto a la variable*: El docente debe dar ejemplos de tasas instantáneas de cambio. Entre otros, los siguientes son importantes ejemplos, pues se presentan en aplicaciones en otras áreas del conocimiento: *la velocidad* es la razón de cambio instantánea con respecto al tiempo de la posición de un objeto que se mueve en linea recta; la *tasa de natalidad* (o *mortalidad*) es la razón de cambio de la población con respecto al tiempo; la *ganancia marginal* es la razón de cambio de la ganancia respecto al precio, etcétera.

* * *

Una de las posibilidades para motivar el estudio del concepto de derivada es el plantear el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado de esa curva. Los estudiantes aprendieron en años anteriores a dibujar la tangente a una circunferencia. Ahora **generalizamos** el problema: en el caso de una curva cualquiera, ¿cómo obtener la recta tangente en cualquiera de sus puntos?

Pasos metodológicos recomendados para presentar el concepto de derivada de una función f en el punto $x = a$.

1. Con una función de segundo grado, obtener las ecuaciones de algunas rectas secantes con uno de sus puntos el de coordenadas $(a, f(a))$.
2. Conjeturar la ecuación general de la recta secante que pase por los puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$ donde x es valor genérico del dominio de f.
3. Realizar una conjetura sobre la pendiente de la recta tangente.
4. Revisar el problema realizado numéricamente y abstraerlo para obtener una fórmula para la razón promedio de cambio (o para la pendiente de la recta secante) pero para una función cualquiera.
5. Introducir la noción de "x arbitrariamente cercano al número a" y la notación de límite $x \to a$.
6. Utilizar las gráficas de las rectas tangentes en valores de x cercanos al número a para conjeturar que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$.
7. Introducir la definición formal de derivada a través de la fórmula:
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
El *número derivada* $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$.
8. Con la misma función del ejemplo, realizar un trabajo similar al primer paso, pero expresando x como $a + h$ con $h \approx 0$ cuando x está cerca de a. Realizar una tabla de valores para encontrar la ecuación de la recta secante que pase por los puntos $(a+h, f(a+h))$ y $(a, f(a))$ con algunos valores pequeños de h.
9. Generalizar la fórmula obtenida para el caso general en donde h es arbitrario, y conjeturar que el valor de la pendiente de la recta tangente debe darse cuando $h = 0$.
10. Presentar la siguiente igualdad como una definición equivalente a la anterior:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

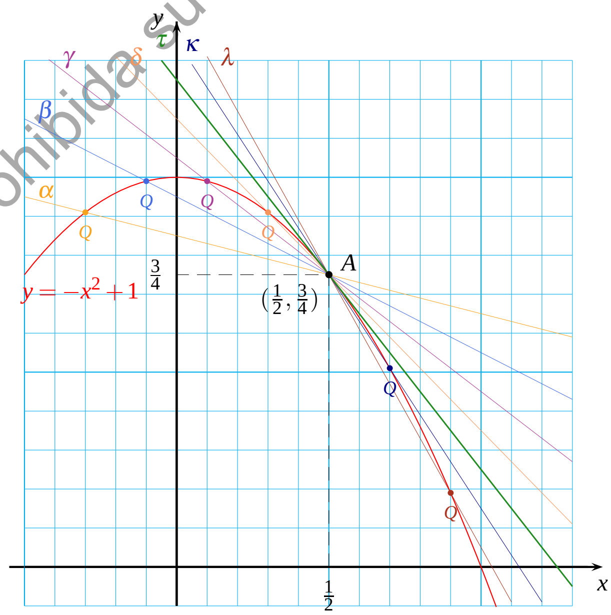
En el problema 1, se ejemplifican estos pasos.

Problema 1 (La tangente a una parábola)**.** *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola de ecuación*
$$y = -x^2 + 1$$
en el punto $(0{,}5,\ 0{,}75)$.

Proponga a los estudiantes que grafiquen la parábola y que identifiquen el punto de coordenadas $(0{,}5,\ 0{,}75)$. Según las necesidades del grupo, el dibujo de la parábola podrá ser hecho "a mano" o mediante tecnología; por ejemplo, se procedería como el primer caso si se detectaran deficiencias para la realización de la gráfica a partir de los parámetros que definen la parábola. Tome en cuenta que esta actividad es una oportunidad de relacionar unos conocimientos con otros.

A continuación, el profesor pedirá a los estudiantes que dibujen y obtengan las ecuaciones de varias rectas *secantes* a la parábola; uno de los puntos de intersección de estas rectas con la parábola deberá ser el de coordenadas $A = (0{,}5,\ 0{,}75)$ y otro punto Q, para cada recta, uno cada vez "más cercano" al punto A. La idea que el docente propondrá a los estudiantes es la de determinar la pendiente de las rectas secantes a medida que el punto Q se "mueve" hacia el punto A, pues así se obtiene que las rectas secantes se "muevan" hacia la recta tangente.

La actividad busca obtener dibujos como los del siguiente ejemplo:



Para obtener este dibujo, el docente facilitará a los estudiantes una tabla en la que registrarán los resultados de obtener las ecuaciones de las rectas secantes (el dibujo de la tangente será solo aproximado, pues los estudiantes aún no conocen la ecuación de esta recta):

x	Q	Secante	Pendiente
$-0{,}3$	$(-0{,}3, 0{,}91)$	$\alpha: y = -0{,}2x + 0{,}85$	$-0{,}2$
$-0{,}1$	$(-0{,}1, 0{,}99)$	$\beta: y = -0{,}4x + 0{,}95$	$-0{,}4$
$0{,}1$	$(0{,}1, 0{,}99)$	$\gamma: y = -0{,}6x + 1{,}05$	$-0{,}6$
$0{,}3$	$(0{,}1, 0{,}91)$	$\delta: y = -0{,}8x + 1{,}15$	$-0{,}8$
…	…	…	…
…	…	…	…
$0{,}6$	$(0{,}6, 0{,}64)$	$y = -1{,}1x + 1{,}45$	$-1{,}1$
$0{,}7$	$(0{,}7, 0{,}51)$	$\lambda: y = -1{,}2x + 1{,}35$	$-1{,}2$
$0{,}8$	$(0{,}8, 0{,}36)$	$y = -1{,}3x + 1{,}4$	$-1{,}3$
$0{,}9$	$(0{,}9, 0{,}19)$	$\lambda: y = -1{,}4x + 1{,}45$	$-1{,}4$

Como se puede observar, los puntos Q elegidos son tales que se "acercan" al punto A tanto desde la izquierda como de la derecha.

Con ayuda de una calculadora común, esta tabla puede ser ampliada con el cálculo de la pendiente de otras rectas secantes que pasen por un punto Q cuya abscisa esté más cerca de 0,5; por ejemplo, podría obtenerse valores para la pendiente con $x = 0{,}4$, $x = 0{,}45$, $x = 0{,}475$, $x = 0{,}55$, $x = 0{,}575$, etcétera. Esta tarea tiene una ventaja adicional. Los estudiantes deben obtener una fórmula general para la pendiente de cualquier secante que pase por el punto A, que es conocido, y un punto cualquiera de la parábola, que tiene la forma $(x, -x^2 + 1)$. Llegarán, entonces, a la conclusión de que esa pendiente es:

$$-\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Como resultado de estos últimos cálculos y la obtención de los dibujos, el docente guía a los estudiantes a que **conjeturen** que la pendiente de la recta tangente sea igual a -1.

El docente entonces propone abstraer lo realizado hasta este punto. Obtiene así una fórmula para la *razón promedio de cambio* (o para la *pendiente de la recta secante*), pero para una función cualquiera φ:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a},$$

e introduce la noción de "x arbitrariamente cercano al punto a" y la notación de límite $x \to a$. Con la ayuda de las gráficas de la rectas secantes en puntos x cercanos al punto a, guíe a que los estudiantes conjeturen que la pendiente de la recta secante se "aproxima" a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$, y propone[1] la definición formal de derivada de f en a, notada por $f'(a)$, y que será, justamente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, mediante la fórmula:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En el caso particular, de la función $f(x) = x^2$, la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ será

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(-x^2 + 1) - \left(-\frac{1}{4} - 1\right)}{x - \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \to \frac{1}{2}} -\left(x + \frac{1}{2}\right) = -1. \end{aligned}$$

A continuación, proponga la siguiente actividad a los alumnos.

1. Llenen la siguiente tabla notando que la última columna corresponde a la pendiente de la recta secante:

h	$f\left(\frac{1}{2} + h\right)$	$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$
$-0{,}1$	$0{,}84$	$-0{,}9$
$-0{,}01$	$0{,}7599$	$-0{,}99$
$0{,}1$	$0{,}64$	$-1{,}1$
$0{,}01$	$0{,}7399$	$-1{,}01$
$0{,}001$	$0{,}748999$	$-1{,}001$

2. Tomen un punto Q cuya abscisa esté a una distancia h a la izquierda de la abscisa del punto A; les pide que obtengan las coordenadas de Q:
$$\left(\frac{1}{2} - h, -\left(\frac{1}{2} - h\right)^2 + 1\right) = \left(\frac{1}{2} - h, \frac{3}{4} + h - h^2\right).$$
3. Calculen la pendiente de la recta secante que pasa por Q y A:
$$\frac{\frac{3}{4} + h - h^2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - h - \frac{1}{2}} = \frac{h - h^2}{-h} = -1 + h. \tag{1}$$
4. Guíe a los estudiantes para que concluyan que el "movimiento" de Q hacia A equivale a que h se haga un número cada vez más cercano a 0; y que si Q llegará a A, lo que se obtendría es la recta tangente y que su pendiente se calcularía a partir de (1) cuando $h = 0$:
$$-1 + h = -1 - 0 = -1.$$

El siguiente paso consiste en **generalizar** este procedimiento para el caso de una función cualquiera f, hasta llegar a que la pendiente de una recta secante que pase por el punto $A = (a, f(a))$ —por el cual pasa la tangente buscada— y un punto cuya abscisa está a una distancia h, a la izquierda o a la derecha, de la abscisa de A, es decir, de a, se obtiene a través del cociente

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente se obtendrá como el límite de este cociente cuando $h \to 0$. De esta manera, se establece que una manera alternativa de calcular el número $f'(a)$ es a través de la fórmula

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Se recomienda utilizar solamente una noción intuitiva de límite, que hacia el final del curso, será precisada un poco más. Se dice "un poco más", pues el concepto de límite, aunque tiene una interpretación geométrica bastante sencilla, su formulación teórica es altamente compleja, razón por la cual en modo alguno deberá ser tratada formalmente en el Bachillerato. En el bloque de "Números y funciones", se harán mayores precisiones de cómo trabajar la noción de límite, las derivadas y sus aplicaciones.

2.1 Bloque Números y funciones

Como se indicó en la introducción, en este bloque se estudian tres temas: *Inducción matemática*, *Números complejos* y *Cálculo diferencial*. Empezaremos las precisiones y recomendaciones con este último tema.

Cálculo diferencial. La introducción de la derivada, como se ha visto, no necesita más que de una noción intuitiva (geométrica y numérica) de límite. Una vez presentado el concepto de derivada, se pueden calcular mediante la definición las derivadas de funciones polinómicas y racionales; por ejemplo, la función $v\colon [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$v(x) = x^3 - 25x^2 + 150x.$$

Esta función modela el volumen de una caja obtenida al recortar cuadrados de las cuatro esquinas de una pieza de cartón de forma rectangular. Otro ejemplo es la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

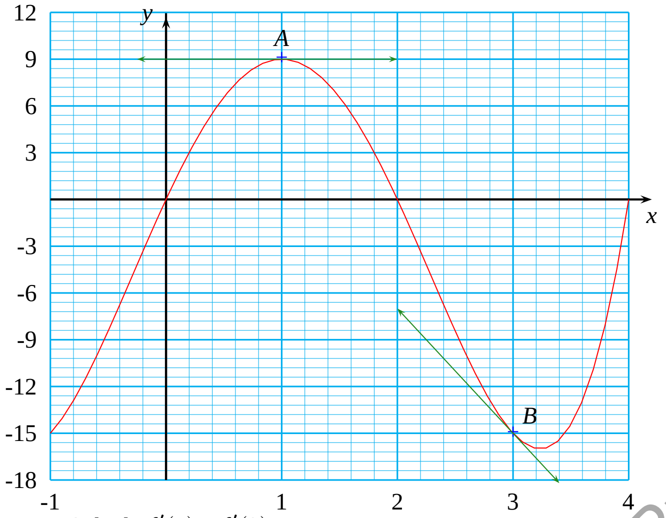
[1] En sentido estricto, debería demostrarse que la conjetura es correcta. Dicho de otro modo —y es algo que no se hará en la clase— debería demostrarse que la recta con pendiente $f'(a)$ y que pasa por el punto $(a, f(a))$ es, efectivamente, la tangente a la parábola; es decir, se debería probar que la recta no tiene ningún otro punto en común con la parábola y que todos los puntos de la parábola están en un mismo lado de la recta. En lugar de eso, lo que se hace es generalizar al definir la recta tangente como aquella que tiene como pendiente, precisamente, $f'(a)$ y que pasa por $(a, f(a))$. El docente juzgará si el nivel e interés de sus estudiantes es adecuado para hablar del hecho de que la conjetura no ha sido ni aceptada ni rechazada.

Es importante que antes de pedirles a los estudiantes que realicen el cálculo de $f'(x)$ para cualquier x en el dominio de f, se les haga calcular el número $f'(a)$ con valores concretos para a; por ejemplo, $f'(0)$, $f'(3)$, etcétera.

Por otro lado, hay que evitar el centrar este tema en el cálculo de la derivada utilizando su definición a través del límite de la razón de cambio y, más bien, dirigir la atención de los estudiantes al significado geométrico (pendiente de la tangente) y numérico (aproximación lineal).

Para trabajar el *significado geométrico*, entre otros, puede proponer a los estudiantes problemas como el siguiente.

Problema 2 (Lectura gráfica de la derivada)**.** *La curva de ecuación $y = f(x)$ es el gráfico de la función f. En los puntos A y B se han dibujado las tangentes a la curva.*



Calcule $f'(1)$ y $f'(3)$.

Como dijimos al inicio, uno de los motivos para estudiar la derivada es la *aproximación lineal*; para trabajar este tema, entre otros, proponga un problema como el que sigue.

Problema 3 (Aproximación lineal)**.** *Determine la aproximación lineal de $\sqrt{9+h}$ para $h \approx 0$ y calcule un valor aproximado para $\sqrt{8{,}4}$ y $\sqrt{9{,}6}$. Compare estos resultados con los obtenidos mediante una calculadora.*

Entre los motivos de estudiar el concepto de derivada está el de poder determinar las siguientes características de una función: monotonía, extremos y concavidad. Tanto con ayuda de calculadoras gráficas como de la misma definición de derivada, es fácil establecer los criterios necesarios y suficientes para que una función sea creciente o decreciente dependiendo del signo de la derivada.

Antes de emprender con el estudio de las aplicaciones de la derivada, se recomiendan presentar las reglas de las derivadas de funciones elementales. Se recomienda que en aquellas, como en las trigonométricas, se utilice la definición para obtener las fórmulas correspondientes. También deben desarrollarse de una vez las reglas para la derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones. Para las cuatro primeras, las demostraciones de estas fórmulas son sencillas, por lo que se debe aprovechar para trabajar los ejes **deducción** y **lenguaje**.

Una vez más, se recomienda no concentrar demasiado tiempo ni esfuerzo en el aspecto operativo del cálculo de las derivadas, y dirigir siempre la atención al significado geométrico y la utilización de la misma en la solución de problemas.

Sin el estudio de los límites infinitos y al infinito, no es posible trabajar con asíntotas, así que la elaboración de gráficas con comportamientos asintóticos tendrá que posponerse hasta el final de este tema.

Una de las aplicaciones más significativas de la derivada es la de ser una herramienta adecuada para la elaboración de modelos en problemas de optimización. Hay una gran variedad de ellos con temas que pasan por la Física, la Economía, dentro de la misma matemática, en la Geometría. Como siempre, en este tema, uno de los elementos más importantes es el proceso de elaboración del modelo, en el cual se deberá enfatizar la necesidad de comprender los conceptos y saber utilizarlos adecuadamente para lograr obtener el modelo, y luego resolver el problema modelado.

Finalmente, este tema terminará con el estudio de la noción de límite. Como se mencionó, se recomienda no pasar a una definición formal, sino mantenerse en el manejo intuitivo, apoyándose con el software adecuado para ilustrar el concepto. En el tratamiento de los límites infinitos y al infinito, se trabajará el concepto de asíntota, y ya se podrán dibujar funciones con comportamientos asintóticos.

Inducción matemática. En el bloque de "Números y funciones" del tercer año de Bachillerato, se realiza una breve introducción a las sucesiones y las funciones recursivas. Sin embargo, allí se obtienen generalizaciones que no se pueden probar porque la prueba requiere de la inducción matemática. En este tema, se presentará el método de demostración, y podrá ser utilizado para la demostración de fórmulas que son obtenidas en los problemas que se resuelven en el bloque correspondiente del tercer año de bachillerato.

En este bloque se aprovechará también para estudiar el binomio de Newton. La propia fórmula como el concepto de coeficiente binomial son adecuados para trabajar la definición por recurrencia como el método de inducción.

Números complejos. Su introducción puede ser motivada por la imposibilidad de resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

en el conjunto de los números reales; es decir, la no existencia de un número real x que satisface esta igualdad.

Esta es una buena oportunidad para hacer un recorrido del proceso de ampliación de los conjuntos de números a través de la imposibilidad de resolver una ecuación (aunque históricamente no se haya dado así exactamente). Así, empezando con la existencia únicamente de los números naturales, la imposibilidad de resolver en dicho conjunto la ecuación

$$x + 1 = 0$$

conduce a la introducción de un nuevo conjunto de número: los enteros. La imposibilidad de resolver en los racionales la ecuación

$$2x + 1 = 0$$

motiva el aparecimiento de los racionales. El paso a los números reales es más complejo, pero se puede utilizar la ecuación

$$x^2 - 2 = 0.$$

Para justificar el paso a un nuevo conjunto de números, es necesario saber por qué $\sqrt{2}$ no es un número racional. Su demostración es un excelente ejercicio de razonamiento, a la vez que se repasan las propiedades de los números pares e impares y de la divisibilidad.

Una vez que se ha introducido el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ y que se conozcan ya sus operaciones, se estudiará la representación geométrica, lo que no ofrecerá ninguna dificultad, puesto que los estudiantes, en este año, conocen de sobra los vectores en el plano.

A continuación se trabajará la representación polar o trigonométrica, mostrando las bondades de dicha representación. Se llegará hasta el teorema de Moivre y la radicación. Esta última se utiliza para calcular las raíces de la unidad. Este punto debe ser aprovechado para hablar del teorema fundamental de la Aritmética. En este tema se utiliza ampliamente la trigonometría, de lo que el docente debe valerse para que dicho tema se consolide.

Entre las aplicaciones de los números complejos a la Geometría, el estudio de la "inversión" —transformación del plano en el plano— que preserva rectas y circunferencias.

2.2 Bloque Geometría

En primer lugar, en este bloque se estudiarán los vectores en el espacio. De manera similar a cómo se procedió en el segundo año del Bachillerato, se inicia con el estudio de los vectores representados geométricamente y luego se los identifica con $\mathbb{R}^3$. En general, hay que aprovechar todo lo realizado en $\mathbb{R}^2$ y el plano para extender a $\mathbb{R}^3$ y el espacio.

3 Indicadores esenciales de evaluación

1. **Calcula el número derivada de una función en un punto mediante la definición.**
2. **Obtiene la ecuación de la recta tangente a un punto de la gráfica de una función.**
3. **Obtiene aproximaciones numéricas de números reales mediante la aproximación lineal de una función.**
4. **Calcula la derivada de una función que puede ser expresada bajo la forma de suma, producto, cociente o composición de dos funciones cuyas derivadas conoce.**
5. Establece los intervalos de monotonía de una función mediante el análisis del signo de la derivada.
6. Encuentra los extremos de una función mediante el estudio de los puntos críticos y del signo de la derivada.
7. **Realiza la gráfica de una función a partir de sus características obtenidas mediante el análisis de su derivada.**
8. Resuelve problemas de optimización mediante la elaboración de un modelo que utilice funciones derivables.
9. **Calcula límites infinitos y al infinito.**
10. Determina las asíntotas de la gráfica de una función mediante el cálculo de límites infinitos y al infinito.
11. **Realiza demostraciones de proposiciones sencillas mediante el método de inducción matemática.**
12. Calcula el término n-ésimo para valores particulares de n de una sucesión definida recursivamente.
13. Calcula los términos de una sucesión definida recursivamente mediante el gráfico que de la función utilizada para la definición y la recta de ecuación $y = x$.
14. **Opera con las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) de números complejos representados en sus distintas formas: algebraica, trigonométrica y geométrica.**
15. Transforma una ecuación cartesiana de una recta en el espacio en ecuaciones paramétricas y viceversa.
16. Con base en las ecuaciones paramétricas, reconoce rectas paralelas y perpendiculares en el espacio.
17. **Reconoce un plano a través de las ecuaciones paramétricas que lo definen.**

Referencias

[FAPP2008] COMAP. *For All Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*. Eigth Edition. W. H. Freeman Publisher. USA. 2008.

[Declic1] Beltramone, Brun, Felloneau, Misset, Talamoni. *Mathématiques, Déclic 1*. HACHETTE Education. Paris. 2005.

[Declic2] Misset, Turner, Lotz. *Mathématiques, Déclic 2*. HACHETTE Education. Paris. 2004.

[Fmc] Connally, Hughes-Hallet, Gleason, et al. *Functions Modeling Change, A preparation for Calculus*. John Wiley & Sons, Inc. USA. 2000.

[Eba] Araujo, Muñoz. *Estadística Básica con Aplicaciones*. Editorial Ecuador. Quito. 2010.

[Mem] Lima, Pinto, Wagner, Morgado. *La Matemática de la Enseñanza Media*. Tres Volúmenes. IMCA. Perú. 2000.

Mapa de conocimientos de Matemática

Adquirir conceptos e instrumentos matemáticos que desarrollen el pensamiento lógico, matemático y crítico para resolver problemas mediante la elaboración de modelos

Abstracción, generalización, conjetura y demostración; integración de conocimientos; comunicación de las ideas matemáticas; y el uso de las tecnologías en la solución de los problemas

Contenidos

PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	MATEMÁTICA SUPERIOR
BLOQUE DE NÚMEROS Y FUNCIONES			
Funciones • Concepto • Evaluación • Representaciones • Monotonía y simetría **Función lineal** • Ecuación de una recta • Pendiente • Ceros de la función • Intersecciones de rectas • Sistemas de dos ecuaciones e inecuaciones lineales • Función valor absoluto • Modelos lineales **Función cuadrática** • Monotonía, simetría, máximos y mínimos • Ceros y ecuación cuadrática • Inecuaciones cuadráticas	**Funciones** • Repaso del concepto: evaluación, representaciones, monotonía, simetría • Ejemplos de funciones lineales y cuadráticas • Funciones definidas por partes **Funciones polinomiales** • Operaciones entre funciones (suma producto y cociente) • Polinomios: operaciones, algoritmo de Euclides, teorema del residuo, ceros, monotonía con el uso de calculadora gráfica **Funciones racionales** • Dominio • Operaciones • Ceros, variación y asíntotas	**Funciones** • Repaso del concepto: evaluación, representaciones, monotonía, simetría • Ejemplos de funciones polinomiales, racionales, trigonométricas • Funciones definidas por partes **Función exponencial** • Dominio y recorrido • Monotonía • Comportamiento al infinito • Propiedades fundamentales de los exponentes • Modelos de crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, etcétera **Función logarítmica** • Función logaritmo como	**Inducción matemática** • Definición por recurrencia. • Binomio de Newton. **Números complejos** • Operaciones, módulo, conjugado. • Representaciones: algebraicaa, trigonométrica y geométrica • Teorema de Moivre: raíces de n-ésimas • Aplicaciones a la geometría **Calculo diferencial** • Aproximación lineal de funciones • La derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto • Derivadas de funciones elementales

• Modelos cuadráticos	con el uso de calculadora gráfica • Modelos **Funciones trigonométricas** • Definición usando el círculo trigonométrico • Dominio y recorrido • Ceros, monotonía, paridad • Identidades trigonométricas básicas • Funciones trigonométricas inversas • Ecuaciones trigonométricas • Función compuesta • Función trigonométrica compuesta • Modelos	inversa de la exponencial • Dominio y recorrido, ceros, monotonía • Bases • Propiedades fundamentales de los logaritmos • Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas. **Sucesiones** • Funciones de N en R • Funciones recursivas. • Monotonía • Pogresiones aritméticas • Progresions geométricas • Modelos de matemáticas financieras	• Algebra de derivadas • Regla de la cadena • Estudio del comportamiento de una función: monotonía, concavidad, extremos • Aplicaciones a optimización • Límites de sucesiones • Limites de funciones • Diferenciabilidad y continuidad
BLOQUE DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA			
Vectores geométricos en el plano • Longitud y dirección • Operaciones • Aplicaciones a la geometría **El espacio R^2** • Operaciones algebraicas • Identificación con vectores geométricos • Longitud de un vector y distancia entre dos puntos	**Ecuación vectorial de la recta** • Ortogonalidad. • Ecuación vectorial de la recta • Rectas paralelas y perpendiculares **Matrices** • Operaciones • Determinantes • Sistemas de ecuaciones lineales **Transformaciones en el plano** • Traslaciones	**Cónicas** • Definiciones como corte de un plano con un cono, lugar geométrico y ecuación algebraica • Círculos • Elipses • Parábolas • Hipérbola	**Espacio R^3** • Operaciones algebraicas • Longitud de un vector • Distancia entre dos puntos • Ortogonalidad. • Vectores coplanares y colineales • Ecuaciones vectoriales de las rectas y planos

	• Rotaciones • Simetrías • Homotecias • Aplicaciones con TICs. **Círculos**		
BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS			
Programación lineal • Función objetivo • Restricciones • Conjunto factible • Método gráfico para obtener el valor que produce el óptimo	**Grafos** • Vértices • Aristas • Caminos • Circuitos de Euler • Valencia de un vértice • Grafos conectados **Aplicaciones** • Planeación de tareas	**Teoría de juegos** • Juegos entre dos personas en conflicto total • Juegos de conflicto parcial **Teoría de números** • Representación binaria • Suma y resta con números en representación binaria • Aritmética modular • Aplicaciones a la codificación de información	
BLOQUE DE PROBABILIDAD Y ESTADÍTICA			
Probabilidad • Medidas de tendencia central y dispersión • Diagramas estadísticos: tallo y hoja, polígonos de frecuencia, histogramas • Técnicas de conteo • Probabilidad de eventos simples y compuestos • Espacios de probabilidad finitos	**Probabilidad condicionada** • Eventos independientes • Teorema de Bayes **Estadística** • Muestreo: números aleatorios, técnicas de muestreo • Aplicaciones	**Probabilidad** • Distribuciones • Variables aleatorias: esperanza y desviación estándar • Distribuciones: binomial y normal **Estadística** • Regresión lineal.	