

ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO

DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA

CARRERA DE INGENIERÍA EN
ELECTRÓNICA, AUTOMATIZACIÓN Y
CONTROL

PROYECTO DE GRADO PARA LA
OBTENCIÓN DEL TÍTULO EN INGENIERÍA

DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS
MEDIANTE REALIMENTACIÓN DINAMICA
DE LA SALIDA CON ESPECIFICACIONES DE
DESEMPEÑO MULTI-OBJETIVO

AUTOR
JOSE ALFREDO DIAZ HIDALGO

SANGOLQUI – ECUADOR

2007

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue realizado en su totalidad por el Sr. José Alfredo Díaz Hidalgo, como requerimiento parcial para la obtención del título en Ingeniería Electrónica, Automatización y Control.

Fecha _____

ING. VICTOR PROAÑO
DIRECTOR

ING. EDWIN AGUILAR
CODIRECTOR

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por la vida y la fuerza que me dio para terminar mis estudios universitarios, dándome la oportunidad de aprender, mejorar y crecer junto a mi familia.

Agradecimiento muy especial para mi Director de Proyecto, Ing Víctor Proaño, por su amistad, su paciencia y su constante apoyo durante el desarrollo de esta tesis de grado.

A todos los docentes de la Facultad de Eléctrica y Electrónica por sus enseñanzas de bien que siempre las tendré presente en mi vida personal y laboral.

A mis padres y mi hermana Ximenita por tener la paciencia de esperarme con tanto esmero, de apoyarme y darme el aliento que muchas veces necesite.

A mis amigos por compartir tantos años de angustias y éxitos, a todos ellos muchas gracias.

A todos muchas gracias, José

DEDICATORIA

No puedo ser egoísta con lo que siento al terminar la etapa más importante de mi vida hasta este momento. Dedico todo este logro a mi mamá Glorita por las fuerzas que me dio para lograrlo, las expresiones de cariño que solo tú pudiste darme mamá.

Y a mi padre, porque todo lo bueno que soy y quiero llegar a ser, por el sacrificio de darme la educación, los valores y el ejemplo de ante todo ser un señor y tener la paciencia para entenderme y darme los consejos que siempre los necesito y necesitaré.

A ellos les dedicó esto, Los quiero mucho.

PROLOGO

Abarcando las diferentes aplicaciones en la industria y las instituciones académicas, el Matlab se ha convertido en una herramienta muy poderosa para el cálculo y la simulación técnica.

Gracias a la gran versatilidad que nos ofrece el Matlab, el presente trabajo tienen por cumplir un objetivo específico: Diseño de Controladores Robustos mediante realimentación de la salida.

Para esto, se utilizará una gran herramienta que esta incluida en el Matlab como es: LMI Control Toolbox.

LMI Control Toolbox en este trabajo se enfocó en los siguientes temas

- Normas de señales y sistemas
- Teoría de Lyapunov
- Desigualdades Matriciales Lineales,
- Técnica de realimentación de estados,
- Y como tema principal la realimentación dinámica de la salida.

El diseño de los controladores resolvió problemas de estabilidad, seguimiento y robustez de dos sistemas de control.

INDICE

CAPITULO I	1
1 . INTRODUCCION.....	1
1.1 ANTECEDENTES.	1
1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA.....	2
1.3 ALCANCE DEL PROYECTO	3
CAPITULO II	5
2 . TEORIA DE CONTROL ROBUSTO.....	5
2.1 NORMAS DE SEÑALES Y SISTEMAS.	5
2.1.1 Norma para Señales.	5
2.1.1.1 Norma 2.	6
2.1.1.2 Norma ∞	6
2.1.2 Normas para Sistemas.....	7
2.1.2.1 Norma 2.	7
2.1.2.2 Norma ∞	7
2.1.3 Calculo de las normas H2 y H ∞ en el Espacio de Estados.....	8
2.1.3.1 Norma 2.	9
2.1.3.2 Norma ∞ (Algoritmo de Bisección).	10
2.1.4 Ejemplo de cálculo de las normas H2 y H ∞ por definición y por comandos de Matlab.	12
2.1.4.1 Resultados.....	13
2.2 TEORÍA DE LYAPUNOV: ESTABILIDAD Y DESEMPEÑO NOMINAL	16
2.2.1 Mikhailovich de Lyapunov.	16
2.2.2 Definiciones de Estabilidad.	17
2.2.3 Teoría de Lyapunov.	17
2.2.4 Limitación del teorema de Lyapunov.	18
2.2.5 La estabilidad global asintótica para el Teorema de Lyapunov.....	19

2.3 DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMI).....	20
2.3.1 Definición (Desigualdad Matricial Lineal).....	21
2.3.2 Sistemas para LMI's.	21
2.3.3 Utilidad de las LMI's.	22
2.4 RELACIÓN ENTRE EL DISEÑO DE CONTROL CLÁSICO CON EL DISEÑO DE CONTROL ROBUSTO.....	24
2.4.1 Teoría y diseño del Control Clásico.....	24
2.4.2 Teoría y diseño de Control Robusto.	30
2.4.3 Formulación de dos puertos para el diseño de controles robustos, Transformaciones Fraccionales Lineales (LFT).	36
2.4.3.1 Definiciones.....	36
2.4.3.2 Ejemplo de uso de las transformaciones fraccionales lineal (LFT).....	40
2.4.4 Incertidumbre.	42
2.4.4.1 Análisis de la incertidumbre.	43
2.4.4.2 Tipos de incertidumbre.	45
a) Incertidumbres Paramétricas.	45
b) Incertidumbre dinámica.....	49
2.4.4.3 Modelamiento de la incertidumbre.	51
a) Incertidumbre aditiva.....	51
b) Incertidumbre Multiplicativa.....	53
2.5 APLICACIÓN DE LMI A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTABILIDAD.- SISTEMA DOBLE INTEGRADOR.	56
2.5.1 Optimización de la norma H_2	56
2.5.2 Sistema de Control H_2/H_∞	60
CAPITULO III	64
3 . REALIMENTACIÓN DINÁMICA DE LA SALIDA.....	64
3.1 FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE SÍNTESIS DE CONTROLADORES H_∞ MEDIANTE DESIGUALDADES MATRICIALES.....	64
3.1.1 Formulación LMI.....	66
3.1.2 La función h_{∞} mix.	73

CAPITULO IV	75
4 . DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS MEDIANTE REALIMENTACIÓN DINÁMICA DE LA SALIDA CON ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO MULTI-OBJETIVO.....	75
4.1 EL PROBLEMA DE LA VIGA Y BOLA.....	75
4.1.1 Con referencia.....	76
4.1.1.1 Ubicación de polos.....	80
4.1.1.2 Control H_2	81
4.1.1.3 Control H_∞	82
4.1.2 Con referencia, perturbación en el controlador y ruido en la medición.....	84
4.2 SISTEMA DE LEVITADOR MAGNÉTICO.	96
4.2.1 Caso 1: Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida.....	99
a) Realimentando todas la variables de estado, minimización norma H_2	99
b) Realimentando las variables de estado: altura x_1 y corriente x_3 , minimización norma H_2	103
c) Realimentando todas la variables de estado, minimización norma H_∞	106
4.2.2 Caso 2: Diseño del controlador con compromiso H_2 / H_∞ utilizando realimentación de la salida más control integral.....	110
 CAPITULO V	 116
5 . CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	116
 ANEXOS.....	 118

CAPITULO I

1. INTRODUCCION

1.1 ANTECEDENTES.

La investigación en los diferentes campos técnicos produce como resultado a mediano y largo plazo el desarrollo de un país. Se puede citar como ejemplos a muchos países que actualmente gozan del poder económico en el mundo como los países europeos, Estados Unidos, Japón, China, Brasil. Los países en vías de desarrollo deberían incursionar en los temas de investigación para lograr riqueza y bienestar de sus pueblos.

El desarrollo histórico de la teoría de control tiene su comienzo con la llegada de la Segunda Guerra Mundial. En 1940 H.W. Bode usó las gráficas de respuesta frecuencial de magnitud y fase e investigó la estabilidad en lazo cerrado usando las nociones de margen de ganancia y fase. En 1942 H. Harris en su trabajo "The analysis and design of servomechanics", introduce el uso de funciones de transferencia en el análisis de un sistema realimentado general. En 1943 Albert C. Hall mostró que tratando los bloques en un diagrama de bloques como funciones de transferencia (usó la transformada de Laplace), el centro de transferencia de un sistema podía ser dibujado y el criterio de Nyquist para la estabilidad podía ser usado. Así en 1951 en la conferencia "Automatic Control" en Inglaterra fue la primera gran conferencia internacional en control automático. Se inició la transición hacia la teoría de control moderno. De ahí en adelante se han hecho muchos estudios acerca de la teoría de control moderno.

La teoría de las Desigualdades Matriciales Lineales (LMI) aplicadas a control es nueva. Aparece en la década de los 90. Aquí, en la ESPE existen ya algunos trabajos que han venido realizándose y que tienen por objeto vincular a la comunidad politécnica con las nuevas teorías de este campo. Se han realizado dos proyectos de grado al

respecto de LMI en donde se realiza el diseño de controladores utilizando la realimentación de estados.

El problema de la técnica de realimentación de estados radica en que en la mayoría de procesos el acceso a todas las variables de estado no es posible. Como solución a este problema existen los estimadores de estado o “sensores virtuales”, lo que permite realizar el diseño de realimentación de estados utilizando un componente extra que constituye el observador de estado, lo cual hace complejo al controlador. Frente a este problema surge la posibilidad de diseñar un solo bloque controlador en el cual se utilicen únicamente aquellas señales que son posibles de ser medidas que pasan a constituirse como entradas del bloque de realimentación. Esto se conoce como realimentación de la salida. El bloque de realimentación en este caso ya no es un simple amplificador sino un sistema dinámico.

Las técnicas de control clásico tienen limitaciones. Una de ellas es que no permite abordar en la fase de diseño las posibles perturbaciones al sistema, así como las incertidumbres en el modelado. Las perturbaciones son inherentes al mundo real en el que trabajan los procesos, la incertidumbre en el modelado surge del hecho que es imposible conocer con exactitud el modelo de un sistema. Así, el modelo con el que se diseña el controlador (nominal) es una aproximación al verdadero sistema sobre el cual este actuaría.

El problema de diseño de controladores con perturbaciones e incertidumbres en el modelado puede ser tratado dentro del campo de las LMI. En este contexto, los criterios de desempeño que se buscan del sistema realimentado son expresados en términos de medidas de las señales o de los sistemas. Estas medidas se conocen como normas y las más comunes son la norma H_2 y la norma H infinito.

1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA.

El Departamento de Eléctrica y Electrónica tiene como una de sus tareas el desarrollo de investigación. El presente proyecto se enmarca dentro de la línea de investigación de tecnologías de Control, específicamente en el campo de Control Robusto. El diseño de controladores robustos considera las perturbaciones del ambiente y la presencia de incertidumbre en el modelamiento de los procesos.

El proyecto, permitirá la mejor difusión y uso de las nuevas herramientas para el diseño de controladores que se disponen en el LMI Control Toolbox de Matlab. Se tendrá un documento de fácil acceso para el estudio de la temática de realimentación dinámica de la salida, de las normas de señales y sistemas, y de ejemplos de diseño de controladores robustos. El documento generado como resultado del proyecto se constituirá en una valiosa herramienta para que los alumnos se involucren con el campo de control robusto y podrá ser utilizado como un texto guía para el estudio de la asignatura de Control robusto que está considerada como parte del “Rediseño Curricular alineado al Modelo Educativo por Competencias con Enfoque Sistémico Prospectivo” de la carrera de Ingeniería en Electrónica, Automatización y Control en el Departamento de Eléctrica y Electrónica de la ESPE.

Las especificaciones de desempeño se definen mediante múltiples objetivos como la ubicación de los polos del sistema de lazo cerrado, los valores deseados de los índices de desempeño H_2 o Infinito de funciones de transferencia que se plantean en la estructura de bloques del sistema a diseñarse. De allí el nombre de “desempeño multi-objetivo”.

1.3 ALCANCE DEL PROYECTO.

Se realizará la investigación y se presentará como resultado un texto que describa las teorías que se involucran en el diseño de Controladores Robustos como son: Normas de señales y sistemas, Teoría de Lyapunov, Desigualdades Matriciales Lineales, técnica de realimentación de estados, y realimentación dinámica de la salida.

Se relacionará la filosofía de diseño de control clásico que utiliza modelos simples de los procesos con la filosofía de diseño de control robusto que utiliza modelos complejos de los procesos. Se utilizará la formulación de dos puertos para plantear los problemas de diseño de controles robustos y finalmente se trasladará el problema al campo de las LMI.

Se evaluarán algunos ejemplos de sistemas de control realimentado mediante los índices de desempeño de los mismos utilizando las funciones de Matlab, específicamente aquellas del LMI Control Toolbox.

Se aplicará las Desigualdades Matriciales lineales (LMI) para resolver problemas de estabilidad, seguimiento y robustez de algunos ejemplos típicos de sistemas de control. Se realizarán tres casos de estudio, para cada uno de ellos se realizarán el diseño de controladores por realimentación de salida utilizando como medidas de desempeño la ubicación de los polos, la norma H2 y la norma H infinito.

CAPITULO II

2. TEORIA DE CONTROL ROBUSTO

2.1 NORMAS DE SEÑALES Y SISTEMAS.

Una [JBA90] forma de describir el desempeño de un sistema de control es en términos del tamaño de ciertas señales de interés. Por ejemplo, el desempeño de un sistema de rastreo debería ser medido por el tamaño de la señal de error. Existen varias formas de definir el tamaño de una señal, por ejemplo las diferentes normas para señales.

2.1.1 Norma para Señales.

Consideraremos señales mapeadas $(-\infty, \infty)$ para \mathfrak{R} . Por supuesto, una señal puede ser cero para $t < 0$ (por ejemplo, esta puede empezar en tiempo $t=0$).

Vamos a introducir diferentes normas para tales señales. Primero, recordaremos que una norma debe tener las siguientes cuatro propiedades, donde V es un espacio vectorial.

$$(i) \|v\| \succ 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$

$$(ii) \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(iii) \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, v \in V$$

$$(iv) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

La última propiedad es la desigualdad triangular.

2.1.1.1 Norma 2.

La norma 2 de $\mu(t)$ es

$$\|u\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

Por ejemplo, suponiendo que μ es la corriente a través de una resistencia de 1Ω .

Entonces la potencia instantánea es igual a $\mu(t)^2$ y la energía total es igual a la integral de esta, es decir $\|u\|_2^2$. Debemos generalizar esta interpretación: La potencia instantánea de una señal $\mu(t)$ es definida como $\mu(t)^2$ y la energía es definida como la raíz cuadrada de norma 2.

2.1.1.2 Norma ∞ .

La Norma ∞ de una señal es el límite inferior-superior del valor absoluto:

$$\|u\|_{\infty} := \sup_t |u(t)|$$

Por ejemplo, la norma ∞ de

$$(1 - e^{-t})1(t)$$

es igual a 1. Aquí $1(t)$ es la función Paso.

2.1.2 Normas para Sistemas.

Para sistemas que son lineales, invariantes en el tiempo, causales, y dimensión (usualmente) finita. En el dominio del tiempo un modelo entrada-salida para este sistema tiene la forma de una ecuación de convolución.

$$y = g * u$$

tal que,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Casual significa que $g(t) = 0$ para $t < 0$. Entonces $G(s)$ nombra la función de transferencia, la transformada de Laplace de g . Entonces G es racional (dimensionalmente finito) con coeficiente real. Decimos que G es estable si no tiene polos en el plano derecho ($\text{Re} \geq 0$), propio si $G(j\infty)$ es finito (grado del denominador \geq grado del numerador), estrictamente propio si $G(j\infty) = 0$ (grado del denominador $>$ grado del numerador), y bipropio si G y G^{-1} son propios (grado del denominador = grado de numerador).

Introduciremos dos normas para la función de transferencia G .

2.1.2.1 Norma 2.

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(jw)|^2 dw \right)^{1/2}$$

2.1.2.2 Norma ∞ .

$$\|G\|_{\infty} = \sup_w |G(jw)|$$

Note que si G es estable, entonces por el teorema de Parseval decimos que:

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(jw)|^2 dw \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

la norma ∞ de G es igual a la distancia en el plano complejo del origen al punto mas lejano en el diagrama de Nyquist de G . Esto también aparece para el valor máximo en el diagrama de magnitud de Bode para G . Una propiedad importante de la norma ∞ es que esta es submultiplicable:

$$\|GH\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|H\|_{\infty}$$

Esto es fácil decir cuando estas dos normas son finitas.

2.1.3 Calculo de las normas H_2 y H_{∞} en el Espacio de Estados.

Considerando un modelo de espacio de estados de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

donde $u(t)$ es la señal de entrada y $y(t)$ la señal de salida, la representación de la función de transferencia es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B.$$

Esta función de transferencia es estrictamente propia. Ahora vamos a calcular $\|G\|_2$ y $\|G\|_{\infty}$ con los datos (A,B,C) .

2.1.3.1 Norma 2.

Considerando la matriz de transferencia

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

con A estable. Entonces tenemos (El simbolo (*) significa transpuesta):

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}(B^*QB) = \text{trace}(CPC^*)$$

donde Q y P son los Gramianos de Observabilidad y Controlabilidad que puede ser obtenidos de la siguiente ecuación de Lyapunov [JBA90]:

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$A^*Q + QA + C^*C = 0$$

Demostración Con G estable, tenemos

$$g(t) = L^{-1}(G) = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \text{trace}\{g^*(t)g(t)\}dt = \int_0^{\infty} \text{trace}\{g(t)g^*(t)\}dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{trace}\{B^*e^{A^*t}C^*Ce^{At}B\}dt = \int_0^{\infty} \text{trace}\{Ce^{At}BB^*e^{A^*t}C\}dt \end{aligned}$$

La expresión formula el hecho que el Gramiano de controlabilidad de (A, B) y el Gramiano de observabilidad de (C, A) puede ser representados como

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^*t}C^*Ce^{At}dt, \quad P = \int_0^{\infty} e^{At}BB^*e^{A^*t}dt,$$

El cual puede ser obtenido de

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$A^*Q + QA + C^*C = 0$$

2.1.3.2 Norma ∞ (Algoritmo de Bisección).

Sea $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ y [CP1999] reiterando que la norma H_∞ de una función de transferencia matricial racional G es definida por

$$\|G\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}\{G(jw)\}$$

El calculo de la norma H_∞ de G es complicada y requiere una investigación. Una interpretación en la ingeniería de control de una norma infinito de una función de transferencia escalar G es la distancia en el plano complejo del origen al punto más lejano en el diagrama de Nyquist de G , además esto también aparece en los valores máximos del diagrama de magnitud de Bode de $|G(jw)|$.

De la norma ∞ de la función de transferencia puede, en principio, ser obtenido gráficamente.

Para conseguir un estimado, definimos un conjunto de puntos en frecuencia:

$$\{w_1, \dots, w_N\}$$

Entonces un estimado para $\|G\|_\infty$ es

$$\max_{1 \leq k \leq N} \bar{\sigma}\{G(jw_k)\}$$

Este valor es usualmente obtenido de un diagrama de Bode. La norma H_∞ también puede ser obtenida en espacio de estados.

Conclusión:

Sea $\gamma > 0$ y

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{RH}_\infty$$

Entonces $\|G\|_\infty < \gamma$ si y solo si $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ y la matriz Hamiltoniana H no tiene valores singulares en el eje imaginario donde

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix}$$

y $R = \gamma^2 I - D^*D$.

El algoritmo de bisección sugiere la siguiente forma de calcular una Norma ∞ :

Seleccione un límite superior γ_u y un límite inferior γ_l tal que $\gamma_l \leq \|G\|_\infty \leq \gamma_u$;

Pruebe $\|G\|_\infty < \gamma$ (i.e, si $\|\gamma^{-1}G\|_\infty < 1$) para calcular los valores propios de la matriz aproximada; incrementando o decrementando γ . Una bisección es un método bastante eficaz: Consigue el límite superior e inferior de $\|G\|_\infty$; obtenga la medida de γ entre estos límites.

2.1.4 Ejemplo de cálculo de las normas H2 y H ∞ por definición y por comandos de Matlab.

Considere un sistema masa/resorte/amortiguador como demuestra la Figura 1.1

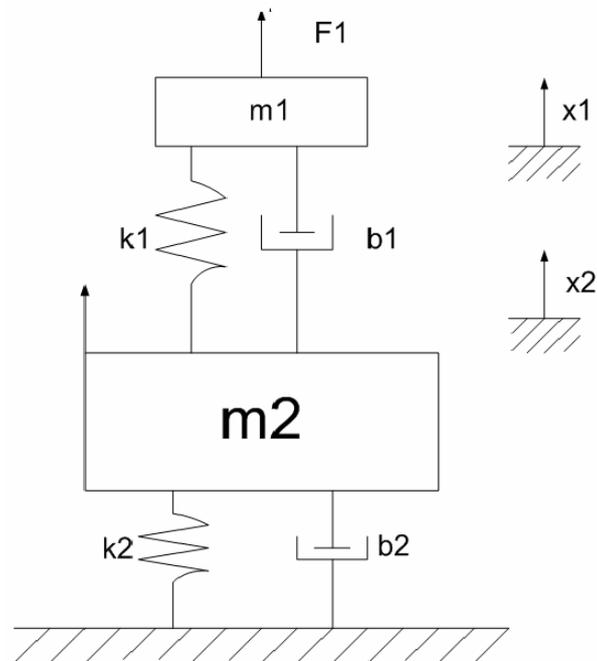


Figura 2-1 Un sistema masa/resorte/amortiguador

El sistema puede ser descrito por la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $G(s)$ es una matriz de transferencia de (F_1, F_2) para (x_1, x_2) ; esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y suponiendo $k_1=1$, $k_2=4$, $b_1=0.2$, $b_2=0.1$, $m_1=1$, y $m_2=2$ con sus apropiadas unidades. Los siguientes comandos de MATLAB calculan la norma H_2 y H_∞ y generan el diagrama de Bode del valor singular del sistema como se muestra en la Figura 1.2.

Programa: [ANEXOS2 - Calculo Norma 2 y Norma ∞]

2.1.4.1 Resultados.

Después de la ejecución del programa en MATLAB, se obtienen los siguientes resultados:

Matrices de Espacio de Estados del sistema de la Figura 2-1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -0.2 & 0.2 \\ 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gramianos para el Calculo de la Norma 2

$$P = \begin{bmatrix} 5.8937 & 1.5672 & -0.0000 & -0.1840 \\ 1.5672 & 0.6605 & 0.1840 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.1840 & 4.3633 & 0.9435 \\ -0.1840 & -0.0000 & 0.9435 & 0.8492 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4.4265 & 1.7500 & 0.8653 & 0.7306 \\ 1.7500 & 3.6509 & -1.0765 & -0.2306 \\ 0.8653 & -1.0765 & 5.8937 & 3.1343 \\ 0.7306 & -0.2306 & 3.1343 & 2.6418 \end{bmatrix}$$

Matriz de Lyapunov utilizando el comando “lyap”.

$$P1 = \begin{bmatrix} 5.8937 & 1.5672 & -0.0000 & -0.1840 \\ 1.5672 & 0.6605 & 0.1840 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.1840 & 4.3633 & 0.9435 \\ -0.1840 & -0.0000 & 0.9435 & 0.8492 \end{bmatrix}$$

Comprobación para las ecuaciones de Lyapunov de la forma $AP + PA^* + BB^* = C1 = 0$ y $A^*Q + QA + C^*C = C2 = 0$. C1 y C2 tienden a cero.

$$C1 = 1.0e - 013 * \begin{bmatrix} -0.0372 & -0.0264 & 0.1066 & -0.0244 \\ -0.0264 & -0.0099 & 0.0155 & -0.0089 \\ 0.1066 & 0.0155 & 0.0466 & 0.0122 \\ -0.0244 & -0.0089 & 0.0122 & -0.0033 \end{bmatrix}$$

$$C2 = 1.0e - 014 * \begin{bmatrix} -0.2665 & 0.1443 & 0.1776 & -0.1998 \\ 0.1443 & 0.0222 & -0.1776 & -0.0444 \\ 0.1776 & -0.1776 & 0.1887 & -0.0222 \\ -0.1998 & -0.0444 & -0.0222 & 0.1221 \end{bmatrix}$$

Utilizando el concepto teórico del calculo de la norma H2,

$\|G\|_2^2 = \text{trace}(B^*QB) = \text{trace}(CPC^*)$, se obtiene los siguientes resultados

$$H2 = \text{trace}(B^*QB) = 2.5601$$

$$H2a = \text{trace}(CPC^*) = 2.5601$$

Utilizando el comando “h2norm” en Matlab se obtiene la Norma H2.

$$H2b = 2.5601$$

Cálculo de la norma H_∞ en Matlab mediante el algoritmo bisección

$$\text{NormHinfBis} = 11.4700$$

Cálculo de la norma H_∞ utilizando el comando “hinfnorm” en Matlab.

$$\text{NormHinf} = 11.4704$$

Gráfico de la respuesta en frecuencia del sistema de la figura 2-1.

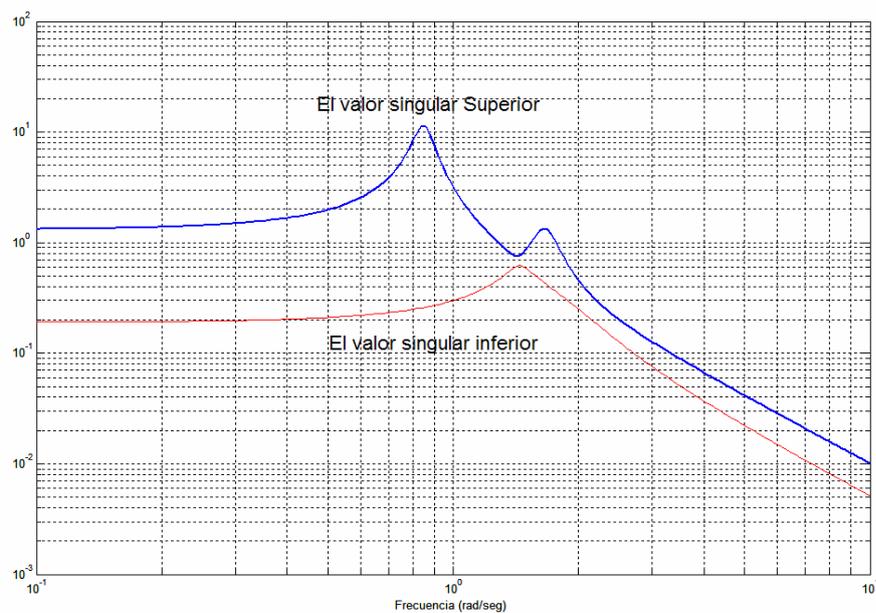


Figura 2-2 $\|G\|_\infty$ es el pico del valor singular superior de $G(j\omega)$

2.2 TEORÍA DE LYAPUNOV: ESTABILIDAD Y DESEMPEÑO NOMINAL

2.2.1 Mikhailovich de Lyapunov.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov [CS1999] estudio fenómenos de restricción y expansión de los movimientos de un sistema mecánico alrededor de un sistema en equilibrio. En otras palabras, el estudio de la estabilidad de Lyapunov se orienta al comportamiento aproximado del estado de un sistema dinámico autónomo. La contribución principal de Lyapunov ha sido definir el concepto de la estabilidad y la inestabilidad asintótica de dichos sistemas y dar un método de verificación de estos conceptos en términos de existencia de funciones, llamada las funciones de Lyapunov. Su definición y su método de verificación se caracterizan, de una manera práctica, en las propiedades de estabilidad de un sistema dinámico autónomo. Desafortunadamente, por la clase general de sistemas no lineales no hay procedimientos sistemáticos para encontrar las funciones de Lyapunov. Sin embargo, veremos que para los sistemas lineales el problema de encontrar las funciones de Lyapunov puede ser resuelto adecuadamente con prueba de factibilidad de una desigualdad matricial lineal.

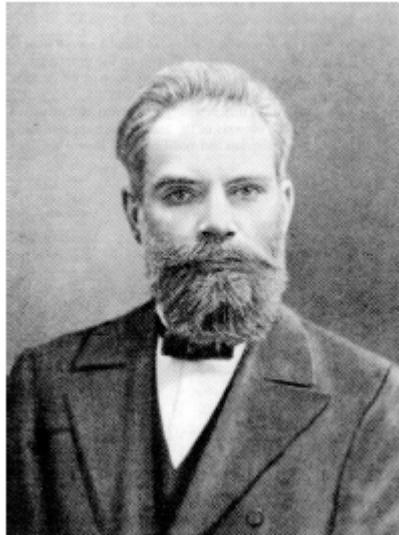


Figura 2-3 Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

2.2.2 Definiciones de Estabilidad.

Considerando un sistema no lineal invariante en el tiempo $\dot{x} = f(x)$, donde $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ un punto $x_e \in \mathfrak{R}^n$ es un punto en equilibrio del sistema si $f(x_e) = 0$.

x_e es un punto en equilibrio $\Leftrightarrow x(t) = x_e$ es una trayectoria suponiendo que x_e es un punto de equilibrio.

- El sistema es (G.A.S) globalmente asintóticamente estable si para cada trayectoria $x(t)$, tenemos $x(t) \rightarrow x_e$ para $t \rightarrow \infty$ (implícito x_e es el único punto de equilibrio).
- El sistema es (L.A.S) localmente asintóticamente estable (cerca o a x_e) si hay un $R > 0$ tal que $\|x(0) - x_e\| \leq R \Rightarrow x(t) \rightarrow x_e$ para $t \rightarrow \infty$.
- Con frecuencia cambiamos las coordenada para que $x_e = 0$ (es decir, usamos $\tilde{x} = x - x_e$).
- Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ es G.A.S (con $x_e = 0$) $\Leftrightarrow \Re \lambda_i(A) < 0, i = 1, \dots, n$ (así para los sistemas lineales, L.A.S \Leftrightarrow G.A.S.).
- Hay muchas otras variantes en estabilidad (ejemplo: estabilidad, estabilidad uniforme, estabilidad exponencial, etc).
- Cuando f es no lineal, establecer alguna clase de estabilidad es usualmente muy difícil.

2.2.3 Teoría de Lyapunov.

La teoría de Lyapunov es usada para obtener soluciones acerca de trayectorias de un sistema $\dot{x} = f(x)$ (e.g., G.A.S.) sin encontrar las trayectorias (es decir, sin resolver la ecuación diferencial).

Un teorema de Lyapunov representativo tiene la forma:

- Si existe una función $V : R^n \rightarrow R^n$ que satisface algunas condiciones de V y \dot{V} .
- Entonces, la trayectoria del sistema satisface alguna propiedad.

Si dicha función V existe, es llamada una función de Lyapunov (esto demuestra que la propiedad se cumple para las trayectorias).

La función de Lyapunov V puede ser descrita como la función de energía generalizada del sistema.

2.2.4 Limitación del teorema de Lyapunov.

Suponiendo hay una función V que satisface

- Todo los sub-niveles del sistema V están limitados.
- $\dot{V}(z) \leq 0$ para todo z .

Entonces, todas las trayectorias son limitadas, i.e., para cada trayectoria x hay una R tal que $\|x(t)\| \leq R$ para todo $t \geq 0$.

En este caso, V es llamado una función de Lyapunov (para el sistema= que demuestra que la trayectoria es limitada.

Para probar esto, señalaremos que para cualquier trayectoria x

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))d\tau \leq V(x(0))$$

así que la trayectoria entera queda en $\{z \mid V(z) \leq V(x(0))\}$, que se limitan también las muestras : cada sub-nivel del sistema $\{z \mid V(z) \leq a\}$ es invariante.

2.2.5 La estabilidad global asintótica para el Teorema de Lyapunov.

Suponiendo que hay una función V y una constante $\alpha > 0$ tal que

- $V(z) \geq 0$ para todo z , y $V(z) = 0$ si y solo si $z = 0$.
- Todos los subniveles del sistema V son limitados.
- $\dot{V}(z) \leq -\alpha V(z)$ para todo z .

Entonces, cada trayectoria de $\dot{x} = f(x)$ converge a cero para $t \rightarrow \infty$ (i.e., el sistema es globalmente asintóticamente estable).

Idea: $\dot{V} \leq -\alpha V$ garantiza la proporción de dispersión mínima para generalizar la energía V .

2.3 DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMI).

Una Desigualdad Matricial Lineal [CS1999] es una expresión de la forma:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \prec 0 \quad (2.3.1)$$

Donde

- $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un vector de n números reales llamada las variables de decisión.
- F_0, \dots, F_n son matrices reales simétricas, i.e., $F_j = F_j^T$, para $j=0, \dots, n$.
- La desigualdad ' $\prec 0$ ' en (2.3.1) significa 'negativo definido'. Esto es, $u^T F(x) u \prec 0$ para todos los vectores reales u diferentes de cero. Por todos los valores propios de una matriz real simétrica son reales, (2.3.1) es equivalente a decir que dos los valores propios de $\lambda(F(x))$ son negativos. Equivalentemente, el máximo valor propio $\lambda_{\max}(F(x)) \prec 0$.

Es conveniente introducir algunas definiciones para matrices simétricas y Hermitianas¹. Una matriz A es Hermitiana si es cuadrada y $A = A^* = A^{-T}$ donde A^* denota la conjugada compleja de cada entrada de A . Si A es real entonces puede decirse que $A = A^T$ y llamamos a la matriz A simétrica. El sistema de todas las matrices $m \times m$ simétricas y Hermitianas serían denotadas \mathbf{H}^m y \mathbf{S}^m , respectivamente, y omitiremos el exponente m si la dimensión no es relevante para el contexto.

2.3.1 Definición (Desigualdad Matricial Lineal).

Un Desigualdad Matricial Lineal (LMI) es una desigualdad:

$$F(x) \prec 0 \quad (2.3.2)$$

Donde F es una función afín² que mapea un vector de espacio x dimensionalmente finito a \mathbf{H} o al \mathbf{S} .

2.3.2 Sistemas para LMI's.

Las desigualdades matriciales lineales (2.3.2) definen una restricción convexa en x . Esto es, el sistema:

$$s = \{x | F(x) \prec 0\}$$

de soluciones del LMI $F(x) \prec 0$ en x tiene algo especial. Resulta que muchos sistemas convexos se pueden representar de esta manera y que estos sistemas tienen características más atractivas que los sistemas convexos generales. En esta subdivisión discutimos algunas características aparentemente triviales de las desigualdades lineales matriciales que resultan ser de ayuda para reducir múltiples restricciones en una variable desconocida a una restricción equivalente que implica una simple desigualdad matricial lineal.

Sistemas para LMI' s

Un sistema de desigualdades matriciales lineales es un sistema finito de desigualdades matriciales lineales

$$F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0. \quad (2.3.3)$$

21_____

² Definición de función afín. Ver Anexo 1.

Por las combinaciones convexas³ deducimos que la intersección de los sistemas factibles de cada uno de las desigualdades (2.3.3) es convexa. Es decir, el sistema de todo el x que satisface (2.3.3) es convexo. La pregunta que ahora se presenta es de que si este sistema se puede o no representar como un sistema factible de otra LMI. La respuesta es sí. De hecho, $F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0$ si y solamente si

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(x) \end{pmatrix} \prec 0$$

La última desigualdad ciertamente da sentido que $F(x)$ es simétrica (o Hermitian) para cualquier x . Además, puesto que el sistema de valores propios de $F(x)$ es simplemente la unión de los valores propios de $F_1(x) \prec 0, \dots, F_k(x) \prec 0$, cualquier x que satisface $F(x) \prec 0$ también satisface al sistema de LMI's (2.3.3) y viceversa. Concluyendo que las múltiples restricciones LMI pueden siempre ser convertidas en una simple restricción LMI.

Una segunda propiedad importante abarca la incorporación de la *constricción affine* en desigualdad matricial lineal. Para esto, diremos que la *constricción combinada* (en una x desconocida) de la forma

$$\begin{cases} F(x) \prec 0 \\ Ax = a \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} F(x) \prec 0 \\ x = Bu + b \text{ para cualquier } u \end{cases}$$

2.3.3 Utilidad de las LMI's.

Muchos problemas de optimización en control, identificación y procesamiento de señal puede ser formulada (o se reformula) con desigualdades matriciales lineales. Claramente, se proyectan estos problemas en términos de LMI si estas desigualdades se pueden solucionar eficientemente y en una forma confiable. La desigualdad matricial lineal

$F(x) < 0$ define una restricción convexa en la variable x , problemas de la optimización involucrando la minimización (o la maximización) de una función de desempeño $f : s \rightarrow \mathfrak{R}$ con $s = \{x \mid F(x) < 0\}$ perteneciente a la clase de los problemas de optimización convexa.

Suponiendo que $F : X \rightarrow S$ es afín, hay dos problemas genéricos relacionados con el estudio de las desigualdades matriciales lineales:

- (a) **Factibilidad:** La pregunta de que existen o no elementos $x \in X$ tales que $F(x) < 0$ es llamado un problema de factibilidad. La LMI $F(x) < 0$ es llamado factible si existe la tal x , de lo contrario es llamada no factible.
- (b) **Optimización:** Poniendo una función objetiva $f : s \rightarrow \mathfrak{R}$ donde $s = \{x \mid F(x) < 0\}$. El problema por determinarse

$$V_{opt} = \inf_{x \in s} f(x)$$

es llamada un problema de optimización con una restricción de tipo LMI. Este problema implica la determinación de V_{opt} , el cálculo de una solución casi óptima de x (es decir, para un x arbitrario el cálculo de una $x \in s$ tal que $V_{opt} \leq f(x) \leq V_{opt} + \varepsilon$, o el cálculo de una solución opcional x_{opt} (elementos de $x_{opt} \in s$ tal que $V_{opt} = f(x_{opt})$).

2.4 RELACIÓN ENTRE EL DISEÑO DE CONTROL CLÁSICO CON EL DISEÑO DE CONTROL ROBUSTO.

2.4.1 Teoría y diseño del Control Clásico.

Los campos [JC2005] del control automático emergieron a los mediados de los años cuarenta cuando fue observado que era una estructura común para los problemas asociados con el control realimentado de un amplio rango de campos tales como telecomunicación, los procesos industriales, los vehículos, los sistemas de energía, etc. Un componente esencial vino de las telecomunicaciones donde un problema dominante había sido diseñar amplificadores confiables exactos de componentes con características variables.

Desde la teoría clásica de control, considerando el caso más sencillo de un sistema lineal de una entrada y una salida, la dinámica se puede representar como en la figura 2.4. En esta figura se representa el bloque etiquetado como “Proceso” o “Planta”, que es el sistema que se desea controlar. A este sistema le llegan dos señales, una etiquetada como “Entrada de control” que será la señal que genera el controlador que se ha de diseñar y la señal etiquetada como “Entrada incierta” que puede representar cualquier señal indeseable externa al sistema y que se conoce también como “perturbación” o “ruido”. Finalmente la señal de “Salida” que será la señal que se desea que se comporte de una forma determinada. La señal de salida también se conoce como señal controlada.

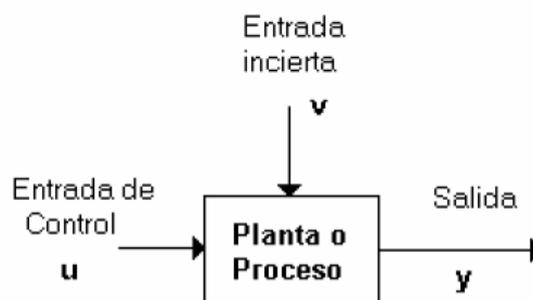


Figura 2-4 Representación de bloques de un sistema

La función de transferencia, expresada como una relación de dos polinomios puede ser representado en forma general como se muestra en la ecuación (2.4.1)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_0(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} \quad (2.4.1)$$

La presentación anterior puede ser un poco más general si se hace uso de la teoría de control moderna, en donde la representación matemática utiliza el concepto denominado estado del sistema. Su representación más general se muestra en la figura 2.5. De la planta ahora se observa una señal adicional denominada “Estado⁴” x del sistema, que es la señal que nos proporcionará información más completa de la planta.

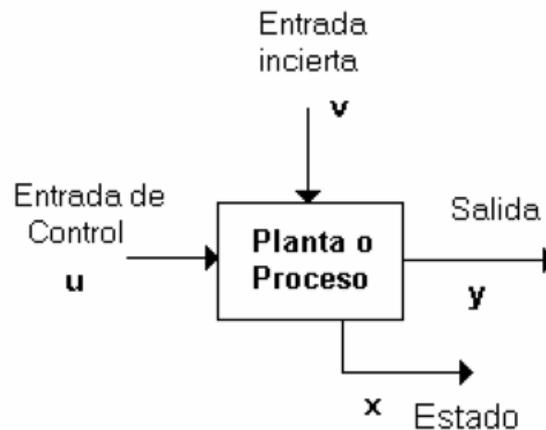


Figura 2-5 Diagrama de un sistema dinámico.

La ecuación matemática desde el punto de vista de la teoría moderna de control se puede expresar mediante la relación de la ecuación (2.4.2)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v) \quad (2.4.2)$$

Partiendo de cualquiera de estas representaciones matemáticas, se utiliza el concepto de control retroalimentado que en forma de diagrama de bloques tiene la estructura mostrada en la figura 2.6. Este es el esquema más común para el control automático.

⁴ El “Estado” de un sistema dinámico es un conjunto mínimo de parámetros (variables de estado) que determina el comportamiento de un pasado, presente y futuro de un sistema.

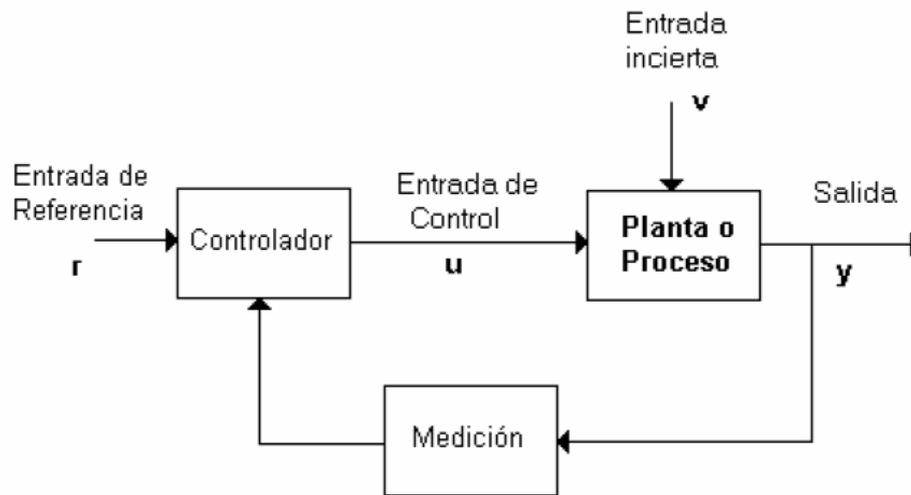


Figura 2-6 Esquema de un sistema retroalimentado de control.

El problema de control se restringe, una vez que ha sido seleccionado el mejor sistema de medición y que también es representado mediante ecuaciones, al diseño del controlador que busca determinar la relación funcional más adecuada para generar la entrada u (Entrada de Control) de manera que el modelo del sistema, sujeto a entradas de comando (Entrada de referencia) y posiblemente entradas inciertas, genere una respuesta de estado $x(t)$ o una respuesta en la señal de salida $y(t)$ con propiedades específicas o comportamiento aceptable⁵.

En algunas aplicaciones, el controlador puede generar la misma señal de comando (Entrada de Referencia según se ilustra en la figura 2.6), $u=r(t)$. La señal de comando es una señal externa al controlador y es, como su nombre lo expresa, la señal que comandará al sistema de control; esta función de comando $r(t)$ debe ser conocida para propósitos de diseño. En otras aplicaciones el controlador podrá ser una función de la señal de comando y también del tiempo, $u = u[r(t), t]$. Estos dos tipos de relaciones funcionales para el controlador corresponden a los sistemas denominados de lazo abierto que no se esquematizan aquí. La relación funcional para el controlador puede ser una función de la entrada de comando y de la salida del sistema $u = u[r(t), y]$; a este tipo de sistemas se les conoce como control en lazo cerrado o control retroalimentado.

En este esquema, la entrada incierta v generalmente es desconocida e independiente del controlador.

Los esquemas de control realimentado se pueden clasificar en dos. Aquellos esquemas que retroalimentan propiamente la señal de salida, como el mostrado en la figura 2.6 y que se denomina como retroalimentación de la señal de salida y es el esquema utilizado en la teoría de control clásico. La otra forma es retroalimentar el estado, conocido el esquema como retroalimentación de las variables de estado y cuya función se puede expresar como $u = u[r(t), x]$. Al usar estos esquemas de retroalimentación de las variables de estado, se pueden obtener también dos formas diferentes de hacerlo, una denominada directa en donde las variables de estado se retroalimentan directamente al controlador y cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 2.7, Es indispensable en este esquema que se retroalimente todas la variables de estado.

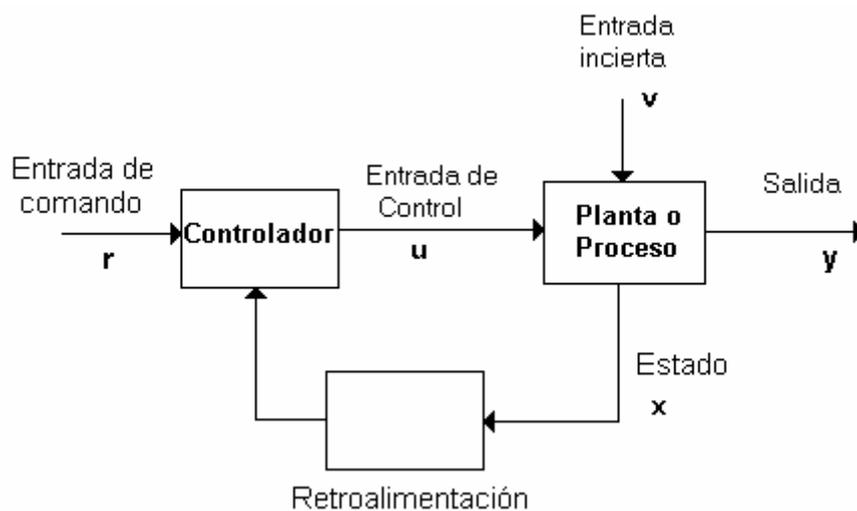


Figura 2-7 Retroalimentación directa de estado.

Para el caso en que no se puede tener acceso a los estados del sistema y sólo se tenga un conjunto de variables de salida, entonces se usa el esquema de la figura 2.8

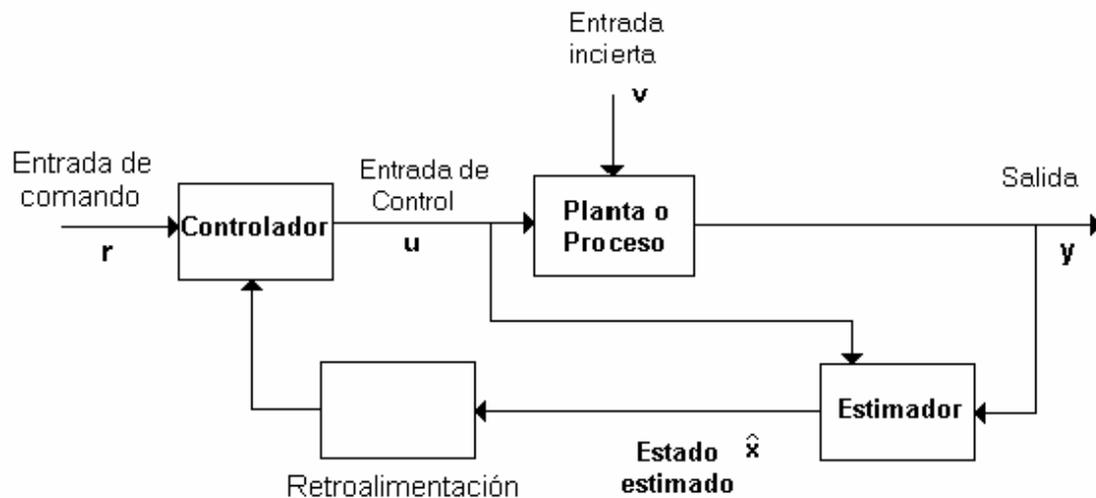


Figura 2-8 Retroalimentación de estado usando estimador.

Para poder aplicar este esquema es necesario diseñar un elemento denominado estimador⁶ que, alimentado por la información de la salida y la entrada disponibles del sistema, pueda reconstruir el estado x del sistema. En general un estimador requerirá como entradas tanto la salida del sistema como la entrada de control u , como se aprecia en el esquema de la figura 2.8.

El problema fundamental de control está asociado con la transferencia del estado del sistema $x(t)$ a un conjunto destino determinado en el espacio de estados o cerca de ese destino. (Cambiar o moverse de un estado a otro). Si el conjunto destino es un conjunto constante (usualmente un punto fijo) en el espacio de estados, el problema de control se conoce como problema de control de regulación. Si el conjunto destino es variante con el tiempo, especificado mediante una entrada de comando que depende del tiempo, entonces el problema se conoce como problema de control de seguimiento.

Asociados a estas características, aparecen otros dos conceptos fundamentales en la teoría del control y que son abordados normalmente por la teoría de control moderna, estos conceptos son la controlabilidad y la observabilidad.

⁶ Un estimador o un observador es un sistema alimentado por las salidas y entradas disponibles de un sistema original con objeto de reconstruir el vector de estado de este sistema.

El tema de controlabilidad está relacionado con una entrada de control que se supone como existente y que llevará al estado del sistema a un destino determinado.

Un requerimiento primordial en el diseño de un sistema de control automático es contar con sistemas controlables.

El objetivo es que la salida $y(t)$ se aproxime o siga a la entrada de comando $r(t)$. La tarea del controlador es llevar al sistema a la condición de operación deseada. Si el sistema es controlable, el objetivo de diseño corresponde a hacer que el sistema global sea estable alrededor del punto de operación.

El tema de observabilidad se enfoca en el problema de determinar el estado $x(t)$ a partir de mediciones $y(t)$. Frecuentemente las mediciones contienen solamente algunos de los estados. Se dice que un sistema es observable si es posible inferir el estado inicial $x(0)$, a partir de un conjunto de mediciones de la salida $y(t)$ sobre un intervalo finito de tiempo $[0, T]$.

Todos estos conceptos se tratan en la teoría clásica y moderna del control y normalmente se realizan a través de procesos matemáticos complejos. Mientras más complejo es el sistema, el procedimiento se vuelve también complejo. También se han establecido procedimientos empíricos para determinar las características o parámetros del controlador sin pasar por toda la herramienta matemática, sin embargo los resultados no siempre son los mejores.

Cuando se desea obtener comportamientos realmente satisfactorios y apegados lo más fielmente posible a las especificaciones de diseño, entonces las técnicas de control óptimo resultan ser las más convenientes, estas técnicas buscan mediante procedimientos matemáticos de optimización, generar los mejores parámetros de control, considerando algunos criterios de optimización.

Aparece luego el concepto de control adaptativo, que se puede considerar como inicio de las técnicas de control inteligente. En el caso de que el sistema contenga múltiples entrada y salidas, aparece la teoría de control multi-variable. Y para sistemas en donde aparecen fenómenos aleatorios se utiliza la teoría de control estocástico.

2.4.2 Teoría y diseño de Control Robusto.

La teoría de control [JC2005] convencional ha permitido al hombre controlar y automatizar su ambiente por siglos. Las técnicas modernas de control han permitido a los ingenieros optimizar los sistemas de control que construyen por costo y desempeño.

Sin embargo, los algoritmos óptimos de control no son siempre tolerantes a los cambios en el sistema de control o el ambiente. La teoría de control robusta es un método para medir los cambios de funcionamiento y desempeño de un sistema de control con parámetros del sistema que cambian. El uso de esta técnica es importante para obtener sistemas confiables. La meta es permitir la exploración del espacio del diseño para alternativas que son insensibles a los cambios en el sistema y pueden mantener su estabilidad y desempeño. Un resultado deseable se encuentran en los sistemas que exhiben la degradación agraciada en presencia de cambios o de averías parciales del sistema.

Definición de Control Robusto: Para Chandraseken “el control robusto se refiere al control de plantas desconocidas con dinámicas desconocidas conforme a disturbios desconocidos”. Claramente, la cuestión clave con los sistemas de control robustos es la incertidumbre y cómo el sistema de control puede ocuparse de este problema. La figura 2.9 muestra una vista ampliada del lazo de control simple. La incertidumbre muestra que se incorpora al sistema en tres lugares. Hay incertidumbre en el modelo de la planta. Hay los disturbios que ocurren en el sistema de la planta. También hay el ruido que se lee en las entradas del sensor. Cada una de estas incertidumbres puede tener un añadido o un componente multiplicativo.

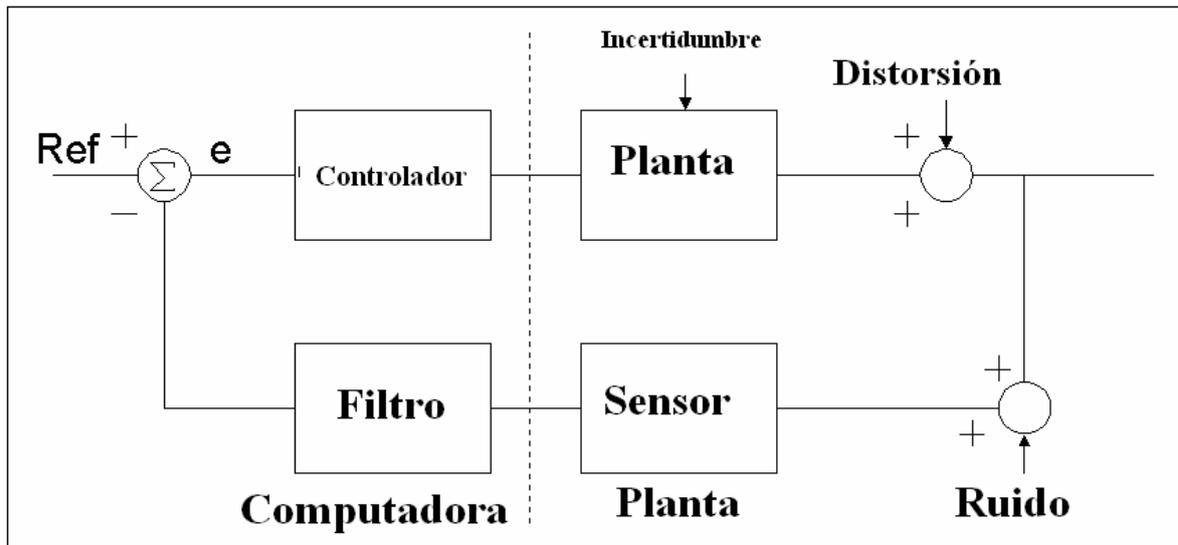


Figura 2-9 Lazo de la Planta de Control con Incertidumbre.

La figura de arriba también muestra la separación de la computadora del sistema de control de computadora con el de la planta. Es importante entender que el diseñador de sistema de control tiene poco control de la incertidumbre en la planta. El diseñador crea un sistema de control que se basa en un modelo de la planta. Sin embargo, el sistema de control puesto en ejecución debe obrar recíprocamente con la planta real, no el modelo teórico de la planta.

Efectos de Incertidumbre

Los ingenieros de control se concentran con tres principales tópicos: observabilidad, controlabilidad y estabilidad. La observabilidad es la capacidad de observar todos los parámetros o variables del estado en el sistema. La controlabilidad es la capacidad de mover un sistema desde cualquier estado dado a cualquier estado deseado. La estabilidad se expresa a menudo como la respuesta limitada del sistema a cualquier entrada limitada. Cualquier sistema de control acertado tendrá y mantendrá tres de estas características. La incertidumbre presenta un desafío al técnico de control que intenta mantener estas características usando la información limitada.

Un método a ocuparse de la incertidumbre en el pasado era el control estocástico. En control estocástico, las incertidumbres en el sistema se modelan como distribuciones de la probabilidad. Estas distribuciones se combinan para proporcionar la ley del control. Este método se ocupa del valor previsto del control. Las situaciones anormales pueden entregar los resultados que no están necesariamente cerca del valor previsto. Esto puede no ser aceptable para los sistemas de control que tienen implicaciones de seguridad.

Los métodos de control robusto buscarían limitar la incertidumbre que lo expresa en la forma de distribución. Dado un límite en la incertidumbre, el control puede entregar los resultados que resuelven los requisitos del sistema de control en todos los casos. Por lo tanto la teoría de control robusta se puede indicar como un método del análisis del peor caso que un método típico de todos los casos. Debe ser reconocido que para cierto desempeño se puede sacrificar la ganancia para que el sistema resuelve ciertos requisitos. Sin embargo, esto parece ser un tema común cuando se realiza con seguridad crítica para los sistemas.

Modelamiento

Una de las partes más dificultosas para diseñar un sistema de control optimo es modelando el comportamiento de la planta. Hay un variedad de razones de porque modelar es dificultoso.

- **Datos de la planta imperfectos:** Frecuentemente, pocos datos importantes no son disponibles en la planta. Muchos sistemas de control son diseñados coincidentemente con la planta. Aunque existen similares plantas en existencias, cada plante es levemente diferente debido a las tolerancias asociadas con componente individuales.
- **Tiempo que varía en las plantas:** La dinámica de algunas plantas varían con el tiempo. Un modelo de control fijo no puede siempre desempeñarse de la misma forma en la planta todo el tiempo.

- **Dinámica de orden alta:** algunas plantas tienen frecuencias altas dinámicas que es frecuente se descuide en el modelo nominal de la planta. Por ejemplo, la vibración puede causar efectos indeseables en frecuencias altas. Algunas veces este dinámico en las frecuencias es desconocido y se no hace caso a veces deliberadamente para simplificar el modelo.
- **No-linealidad:** Muchos sistemas de control son diseñados asumiendo sistemas lineales invariantes en el tiempo. Este es realizado para simplificar el análisis del sistema Sin embargo, todos los sistemas encontrados en el mundo real tienen ciertos componentes no lineales. Así el modelo será siempre una aproximación del comportamiento del mundo real.
- **Complejidad:** Los sistemas mecánicos y eléctricos son intrínsecamente complejos al modelar. Incluso un sistema simple requiere ecuaciones diferenciales complejas para describir su comportamiento.
- **Habilidades:** el modelar requiere una variedad de habilidades. Los fenómenos físicos tales como traspaso térmico requieren modelos de comportamiento físico además de poder medir este comportamiento. Los sistemas que implican cuerpos o los actuadores rígidos requieren a ingenieros industriales. La conversión de parámetros físicos en las señales que se pueden supervisar por un sistema de control requiere a ingenieros eléctricos. Los algoritmos para controlar la planta requieren matemáticas aplicadas. La puesta en práctica de los algoritmos del control en sistemas digitales puede requerir a ingenieros informáticos.

Una técnica para manejar el modelamiento de la incertidumbre que ocurre a menudo en alta frecuencia es balancear el desempeño y robustez del sistema a través de una ganancia programada. Una alta ganancia significa que el sistema responderá rápidamente a las diferencias entre el estado deseado y el estado real de la planta. En las frecuencias bajas, esta alta ganancia (cerca de 1) da lugar al alto rendimiento del sistema. Esta región de la operación se llamada grupo de desempeño. A alta frecuencia donde la planta no se modela exactamente, el aumento es más bajo. Un aumento bajo a alta frecuencia da lugar a un término más grande del error entre la salida medida y la señal de la referencia. Esta región

se llama banda de la robustez. En esta región la realimentación de la salida es esencialmente ignorada. El método para cambiar la ganancia a través de diferentes frecuencias es a través de la función de transferencia. Esto implica el fijar de los polos y los ceros de la transferencia funcionan conseguir un filtro. Entre estas dos regiones, desempeño y robustez, hay una región de transición. En esta región el controlador no puede funcionar bien. La región de transición no se puede hacer arbitrariamente pequeña porque depende del número de polos y ceros de la función de transferencia. La suma de términos a la función de transferencia aumenta la complejidad del sistema de control. Así, hay una compensación entre la simplicidad del modelo y el tamaño mínimo de la banda de transición.

Herramientas, técnicas y métodos disponibles.

Hay una variedad de técnicas que se han desarrollado para el control robusto. Estas técnicas son difíciles de entender y dificultoso poner en ejecución. Las descripciones de estas técnicas en papeles y libros tienden a centrarse en los detalles de las matemáticas y no de el concepto en si. Esta sección se procura catalogar los principales detalles y describir brevemente el concepto básico detrás de cada técnica. Una comprensión detallada de una técnica particular requiere estudio extenso.

Control Adaptativo: Un sistema de control adaptativo coloca observadores para cada significativa variable de estado en el sistema. El sistema puede ajustar cada observador para explicar los parámetros que varían en el tiempo en el sistema. En un sistema adaptativo, hay siempre un rol dual del sistema de control. La salida sigue a la entrada deseada mientras que, al mismo tiempo, el sistema continúa aprendiendo sobre cambios en los parámetros del sistema. Este método sufre a veces de problemas en la convergencia para los parámetros del sistema.

H₂ e H_{infinity}: Las normas de Hankel se utilizan para medir características de los sistemas de control. Una norma es una abstracción del concepto de la longitud. Ambas técnicas son técnicas del dominio de la frecuencia. El control H₂ intenta limitar el aumento de la potencia del sistema mientras que el control de H_{infinity} intenta limitar el aumento de la

energía del sistema. Los aumentos de potencia o energía en el sistema indican la operación del sistema cerca de un polo en la función de transferencia.

Estimación de parámetro: Las técnicas de estimación de parámetro establecen límites en el dominio de la frecuencia que no se puede omitir para mantener la estabilidad. Estos límites son evaluados por vectores dados de la incertidumbre. Esta técnica es gráfica. El adelanto de esta técnica se basa en simplificaciones computacionales evaluando si las múltiples incertidumbres hacen que el sistema llegue a su límite de estabilidad. Estas técnicas demandan entregar pistas en como cambiar el sistema para hacerlo más insensible a las incertidumbres.

Lyapunov: Esta es reclamada a ser la única técnica universal para determinar sistemas no lineales. La técnica se enfoca en la estabilidad. Las funciones de Lyapunov se construyen, describiéndose como funciones que requieren energía, modelando el comportamiento de sistemas reales, no ideales. Estas funciones se evalúan a lo largo de la trayectoria del sistema para considerar si el primer derivado es siempre disipante en energía. Cualquier aumento en energía representa que el sistema está operando cerca de un polo y por lo tanto será inestable.

Control difuso: El control difuso se basa sobre la construcción de sistemas difusos para describir la incertidumbre inherente en todas las variables y un método de combinar estas variables es llamada lógica difusa. El control difuso es aplicable al control robusto porque es un método que incluye la incertidumbre en el modelamiento de los sistemas. El control difuso es un tema polémico. Sus autores demandan la habilidad de controlar sin el requerimiento de modelos con matemática compleja. Esto puede tener aplicaciones donde hay una gran cantidad de variables que se controlarán y es intuitivamente obvio (pero no matemáticamente) cómo controlar el sistema. Un ejemplo es el control requerido para parquear un coche.

2.4.3 Formulación de dos puertos para el diseño de controles robustos, Transformaciones Fraccionales Lineales (LFT).

Muchos problemas [CP1999] interesantes de control pueden ser formulados con la teoría de una LFT y de esta manera pueden ser tratados usando esta mismas técnica.

Transformaciones Fraccionales Lineales.

Esta es también conocida de la teoría de la función compleja-variable para un mapeo $F : C \rightarrow C$ de la forma

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds}$$

con a, b, c y $d \in C$ (constantes complejas) es llamado una *transformación fraccional lineal*. En particular, si $c \neq 0$ entonces $F(s)$ puede también ser escrito como

$$F(s) = \alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1}$$

para α, β y $\gamma \in C$. La transformación fraccional lineal descrita anteriormente para escalares puede ser generalizada para casos matriciales.

2.4.3.1 Definiciones.

Definición 1.

Sea M una matriz compleja particionada como

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{(p1+p2) \times (q1+q2)},$$

y sea $\Delta_l \in C^{q2 \times p2}$ y $\Delta_u \in C^{q1 \times p1}$ otras dos matrices complejas. Entonces podemos formalmente definir una LFT *inferior* con respecto a Δ_l como el mapeo

$$F_l(M, \bullet) : C^{q2 \times p2} \mapsto C^{p1 \times q1}$$

con

$$F_l(M, \Delta_l) := M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21}$$

procurando que la inversa $(I - M_{22} \Delta_l)^{-1}$ exista. Podemos también definir una LFT *superior* con respecto a Δ_u como

$$F_u(M, \bullet) : C^{q1 \times p1} \mapsto C^{p2 \times q2}$$

con

$$F_u(M, \Delta_u) := M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12}$$

procurando que la inversa $(I - M_{11} \Delta_u)^{-1}$ exista.

La matriz M en el precedente LFTs es llamado el *coeficiente de la matriz*. La motivación para la terminología de LFTs *inferior* y *superior* debería se aclara mediante el siguiente diagrama de representación de $F_l(M, \Delta_l)$ y $F_u(M, \Delta_u)$:

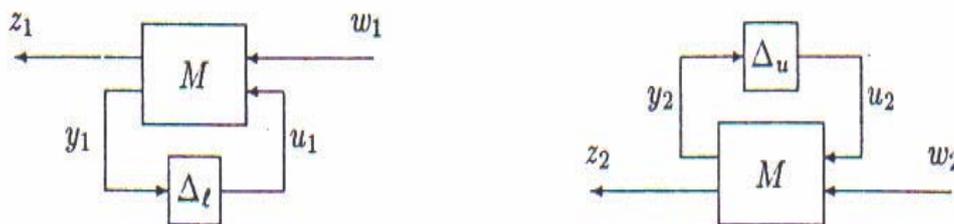


Figura 2-10 Diagrama de representación de $F_l(M, \Delta_l)$ y $F_u(M, \Delta_u)$.

El diagrama de la izquierda representa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \Delta_l y_1$$

mientras el diagrama de la derecha representa

$$\begin{bmatrix} z \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \Delta_u y_2.$$

Es fácil verificar que el mapeo definido en el diagrama de la izquierda es igual a $F_l(M, \Delta_l)$ y el mapeo definido en el diagrama de la derecha es igual a $F_u(M, \Delta_u)$. Así del diagrama anterior, $F_l(M, \Delta_l)$ es una transformación obtenida del lazo *inferior* en el diagrama de la izquierda; similarmente, $F_u(M, \Delta_u)$ es una transformación obtenida de cerrar el lazo *superior* del diagrama de la derecha. En la mayoría de casos, debemos usar generalmente el termino LFT en referencia a ambos *superior* e *inferior* LFTs y asumir que el contexto distinguirá las situaciones ya que una puede usar también estas notaciones para expresar un objeto dado. De hecho, es claro que $F_u(N, \Delta) = F_l(m, \Delta)$

$$\text{con } N = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{bmatrix}.$$

No es importante que expresión puede ser usada. Sin embargo, es frecuente el caso que una expresión es mas conveniente que la otra para problemas dados. Debería también ser claro que utilizar $F_l(M, \Delta)$ o $F_u(M, \Delta)$ implicaría que Δ tiene dimensiones compatibles.

Una interpretación útil para una LFT [e.g., $F_l(M, \Delta)$] es que $F_l(M, \Delta)$ tenga un

mapeo nominal, M_{11} , y sea perturbado por Δ , mientras M_{12} , M_{21} , y M_{22} reflejan un desconocimiento anterior de cómo la perturbación afecta el mapeo nominal, M_{11} . Una similar interpretación puede ser aplicada para $F_u(M, \Delta)$. Esto es porque las LFT son usadas en el estudio de las perturbaciones.

Este significado físico de la LFT en la ciencia de control es obvio si tenemos a M como una matriz de transferencia propia. En este caso, las LFTs definidas previamente son simplemente matrices de transferencia con lazo cerrado de $w_1 \mapsto z_1$, respectivamente; esto es,

$$T_{zw1} = F_l(M, \Delta_l), \quad T_{zw2} = F_u(M, \Delta_u)$$

donde M puede ser la planta controlada y Δ puede ser también el sistema modelado de incertidumbre o el controlador.

Definición 2.

Una LFT, $F_l(M, \Delta)$, es llamada a ser *bien-definida* (o *bien-propuesta*) si $(I - M_{22}\Delta)$ es invertible.

Note que esta definición es consistente con la definición de *bien propuesta* del sistema realimentado, el cual requiere que la correspondiente matriz de transferencia sea invertible en $R_p(s)$. Es claro que el estudio de una LFT que no es bien definida no tiene sentido. Cuando una LTF sea invocada, asumiremos implícitamente que está bien definida. Es también claro de esta definición, para cualquier M , $F_l(M, 0)$ es bien definida; además cualquier función que no es bien definida como la original no puede ser expresada como un LFT en términos de estas variables. Por ejemplo $f(\delta) = 1/\delta$ no es una LFT de δ .

En algunas literaturas, LFT es usada para referirse a las siguientes funciones matriciales:

$$(A + BQ)(C + DQ)^{-1} \quad \text{o} \quad (C + QD)^{-1} (A + QB)$$

donde C es usualmente asumido invertible para consideraciones de práctica.

2.4.3.2 Ejemplo de uso de las transformaciones fraccionales lineal (LFT).

Un sistema realimentado con el siguiente diagrama de bloque

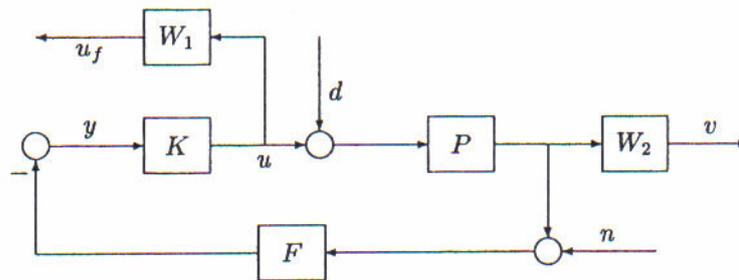


Figura 2-11 Diagrama de bloques de un sistema realimentado.

puede ser redefinido como una LFT:

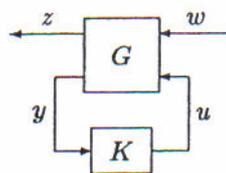


Figura 2-12 Formulación de dos puertos del sistema realimentado.

Con

$$w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} v \\ u_f \end{pmatrix}, \quad G = \left[\begin{array}{cc|cc} W_2P & 0 & W_2P & \\ 0 & 0 & W_1 & \\ \hline -FP & -F & -FP & \end{array} \right],$$

Una realización de estados de la planta generalizada G puede ser obtenida directamente realizando la matriz de transferencia G usando cualquier técnica de realización standard multivariable. Sin embargo, la realización directa aproximada es usualmente complicada. Aquí debemos demostrar otra forma de obtener la realización de G basado en la realización de cada componente. Para simplificar la expresión, debemos asumir que la planta P es estrictamente propia y P, F, W₁, y W₂ tiene, respectivamente, los siguientes espacios de estados:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right], \quad F = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right], \quad W_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right], \quad W_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_v & B_v \\ \hline C_v & D_v \end{array} \right].$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p (d + u), & y_p &= C_p x_p, \\ \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f (y_p + n), & -y &= C_f x_f + D(y_p + n), \\ \dot{x}_u &= A_u x_u + B_u u, & u_f &= C_u x_u + D_u u, \\ \dot{x}_v &= A_v x_v + B_v y_p, & v &= C_v x_v + D_v y_p, \end{aligned}$$

Ahora definimos un nuevo vector de estados

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_f \\ x_u \\ x_v \end{bmatrix}$$

y eliminando la variable y_p conseguimos la realización de G como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_{2u} u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ B_f C_p & A_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_u & 0 \\ B_v C_p & 0 & 0 & A_v \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_f \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ B_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} D_v C_p & 0 & 0 & C_v \\ 0 & 0 & C_u & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_u \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [-D_f C_p \quad -C_f \quad 0 \quad 0], \quad D_{21} = [0 \quad -D_f], \quad D_{22} = 0.$$

2.4.4 Incertidumbre.

Un diagrama de bloques general de un sistema de control de una planta con incertidumbre queda representado en la Figura 2-13, donde E representa los errores de modelado existentes en la planta.

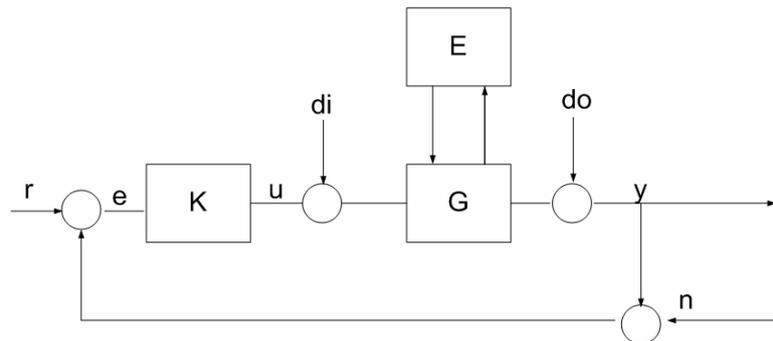


Figura 2-13 Sistema de Control con incertidumbre en la Planta

De las posibles formas de representar el conocimiento impreciso que se tiene en el caso de un proceso escalar (incertidumbre tipo aditivo, multiplicativo, etc), cuando se trata de un sistema multivariable hay que considerar algunos otros factores; pues habrá que tener en cuenta su situación en el lazo de control. Así por ejemplo, la incertidumbre de tipo multiplicativo podrá estar a la entrada o a las salida, o incluso podrán coexistir ambas simultáneamente. En cada caso habrá que analizar el sistema en concreto y tratar de plasmar los errores de modelado de la forma más conveniente.

2.4.4.1 Análisis de la incertidumbre.

Se desea controlar [JH2007] un sistema amortiguador/resorte/masa de la Figura 2.14,

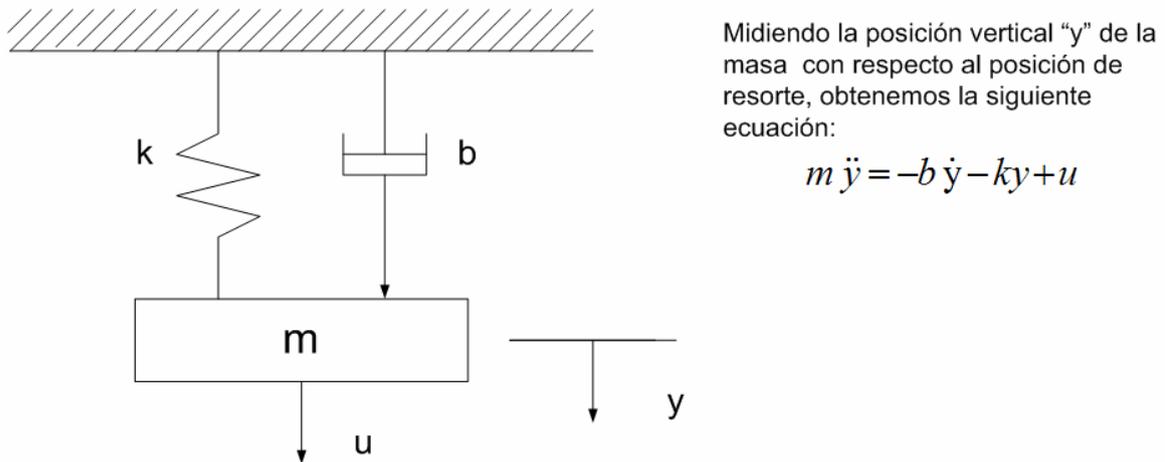


Figura 2-14 Sistema Resorte/masa/amortiguador

el cual tiene la siguiente función de transferencia de la aplicación de la fuerza u a la posición del muelle y .

$$P(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k};$$

Típicamente, la masa m , el coeficiente de fricción b , y la constante de amortiguamiento k podrían ser medidos experimentalmente (o tomados de algunas hojas de especificaciones) condicionando a valores confiables para estos parámetros y no solo a valores simple:

$$m \in [m_0 - \delta_1, m_0 + \delta_1],$$

$$b \in [b_0 - \delta_2, b_0 + \delta_2],$$

$$k \in [k_0 - \delta_3, k_0 + \delta_3],$$

El valor con subíndice 0 son llamados los *valores nominales* de los parámetros y la δ ; son llamados las *derivaciones máximas* del valor nominal.

En la práctica, esto significa que hay *muchas funciones de transferencia admisibles* para los procesos- uno por cada posible combinación de m , b y k in los intervalos dados. La Figura 2.15 muestra el diagrama de bode de $[-1,1]$ de diferentes valores de los parámetros m , b y k .

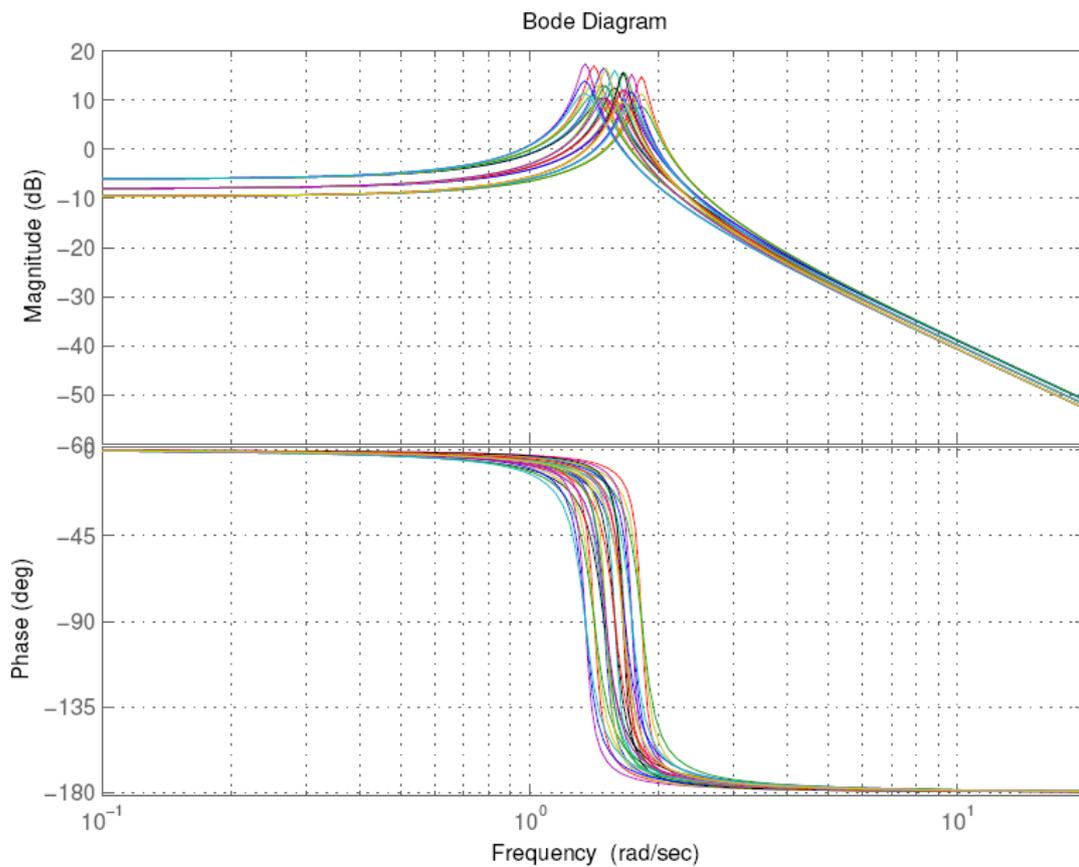


Figura 2-15 Diagrama de Bode de $P(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$ para diferentes valores de $m \in [0.9, 1.1]$, $b \in [0.1, 0.2]$ y $k \in [2, 3]$.

La idea detrás el control robusto es diseñar un controlador simple que alcance el desempeño aceptable (o al menos estabilidad) para cada función de transferencia admisible procesada.

2.4.4.2 Tipos de incertidumbre.

Las incertidumbres [CP1999] que pueden ser obtenidas con la teoría desarrollada para incertidumbres paramétricas y LTI dinámicas. Incertidumbre paramétrica esta relacionadas a variaciones en parámetros reales (masa, humedad, etc....) de la planta, mientras las incertidumbres dinámicas de la planta deberían capturar sistemas no-modelado dinámicos.

a) Incertidumbres Paramétricas.

Proponiendo a

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x = u, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

y suponiendo que solo conocemos la constante de humedad

$$c_1 < c < c_2$$

para algunos números reales $0 < c_1 < c_2$. Vamos a elegir como el valor nominal

$c_0 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ e introducimos la escala de error

$$\Delta = \frac{c - c_0}{c_2 - c_0}$$

Esto implica

$$c = c_0 + W\Delta \text{ con } W = c_2 - c_0$$

Con la clase de incertidumbre

$$\Delta = \{\Delta \in \mathfrak{R} \mid -1 < \Delta < 1\},$$

el sistema incierto es entonces definido vía la descripción del dominio de la frecuencia como

$$G_{\Delta}(s) = \frac{1}{s^2 + (c_0 + W\Delta)s + 1}.$$

Note que tenemos actualmente definido un sistema completo G_{Δ} fijo que es parametrizado con Δ que varía en Δ . En suma, Tenemos transformado el parámetro original $c \in (c_1, c_2)$ en el nuevo parámetro $\Delta \in (-1, 1)$ para usar un valor nominal c_0 y un peso W .

Ejemplo: Incertidumbre Paramétrica: Un sistema masa, resorte, amortiguador.

Un tipo natural de incertidumbre es el desconocimiento de los coeficientes en un modelo espacio de estados. Para motivar esta descripción, deberíamos comenzar con un sistema mecánico familiar. Demostrado en la Figura 2.16

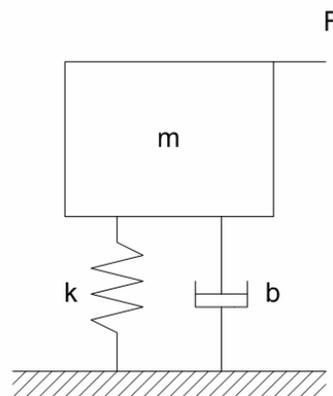


Figura 2-16 Un sistema masa/resorte/amortiguador

La ecuación dinámica del sistema de movimiento puede ser descrita por:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}.$$

Suponiendo que los tres parámetros físicos m , c y k no son conocidos exactamente, pero se creen estar situados en intervalos conocidos. La actual masa m esta dentro 10% de la masa nominal, \tilde{m} , el actual valor de amortiguamiento c se encuentra dentro del 20% del valor

nominal, \tilde{c} , y constante de resorte esta dentro del 30% de su valor nominal \tilde{k} . Ahora introduciremos perturbaciones δ_m, δ_c y δ_k , que son asumidos como desconocidos pero se encuentran situados en el intervalo $[-1, 1]$, el diagrama de bloques del sistema dinámico es presentado en la Figura 2.17.

Es fácil chequear que $\frac{1}{m}$ puede ser representado como una LFT en δ_m :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\tilde{m}(1 + 0.1\delta_m)} = \frac{1}{\tilde{m}} - \frac{0.1}{\tilde{m}}\delta_m(1 + 0.1\delta_m)^{-1} = F_l(M_1, \delta_m)$$

con $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ \tilde{m} & \tilde{m} \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$. Suponiendo que las señales de entrada del sistema dinámico son

seleccionadas como $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, F , y las señal de salida son seleccionadas como \dot{x}_1 y \dot{x}_2 . Para representar el modelo del sistema como una LFT de la incertidumbre natural paramétrica δ_m, δ_c y δ_k deberíamos primero aislar la incertidumbre paramétrica y denotar las entradas y salidas de δ_m, δ_c y δ_k como y_m, y_c, y_k y u_m, u_c, u_k , respectivamente con se muestra en la Figura 2.18

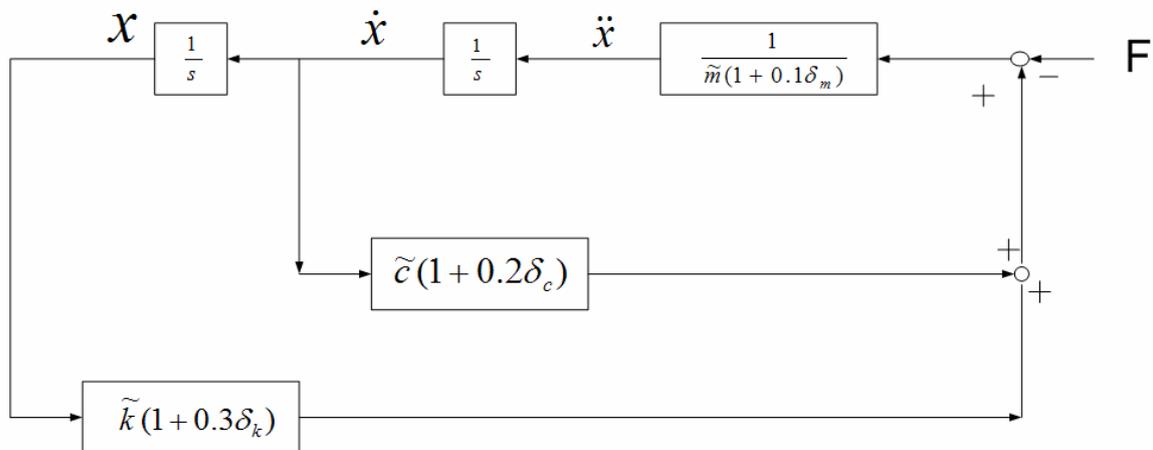


Figura 2-17 Diagrama de Bloques de la ecuación masa/resorte/amortiguador.

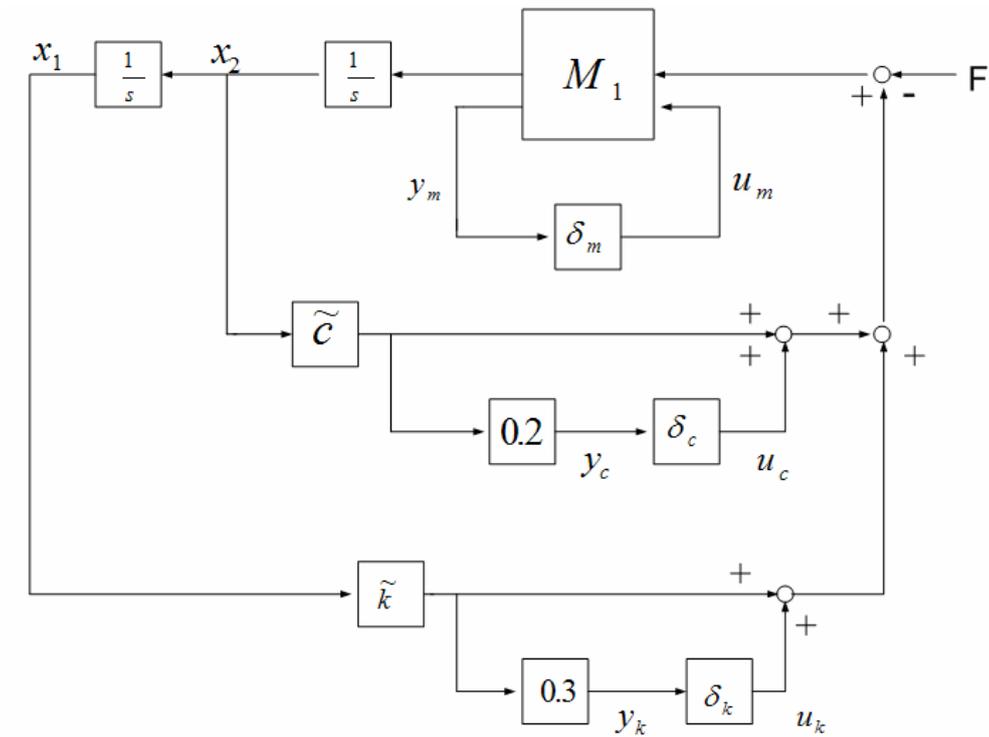


Figura 2-18 Un diagrama de bloque para el sistema masa/resorte/amortiguador con incertidumbre paramétrica.

Entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_k \\ y_c \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & -\frac{0.1}{\bar{m}} \\ 0.3\bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{k} & -\bar{c} & 1 & -1 & -1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F \\ u_k \\ u_c \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_k \\ u_c \\ u_m \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} y_k \\ y_c \\ y_m \end{bmatrix}$$

Esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = F_l(M, \Delta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F \end{bmatrix}$$

Donde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & -\frac{0.1}{\bar{m}} \\ 0.3\bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{k} & -\bar{c} & 1 & -1 & -1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_m \end{bmatrix}$$

b) Incertidumbre dinámica.

Uno puede evaluar la respuesta en frecuencia de una planta SISO real estable introduciendo una señal sinusoidal. Si realizando mediciones a una sola frecuencia, uno normalmente no obtiene solo un número complejo que podría tomarse como un estimado para la respuesta en frecuencia de la planta, sino, es un completo sistema de números complejos que es denotado por $H(w)$. Así un experimento nos llevaría a la conclusión que cualquier $H(s)$ propio y estable que satisfice

$$H(iw) \in H(w)$$

es un modelo apropiado para la planta fundamental. Así uno puede solo llevar a cabo un finito número de dimensionamientos, $H(w)$ normalmente está solo disponible a muchas frecuencias finitas y por consiguiente para muchos puntos finitos. Debido a la falta de una buena descripción, este sistema no es apropiado para la teoría a ser desarrollada.

Ahora trataremos de *cubrir* $H(w)$ con un sistema que admite una descripción más apropiada. Esto significa

$$H(w) \subset G(iw) + W(iw)\Delta_c \quad \text{para todo } w \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\},$$

donde

- $G(s)$ es una matriz real racional propia de transferencia.
- Δ_c es un disco unitario abierto alrededor de 0: $\Delta_c = \{\Delta_c \in \mathbb{C} \mid |\Delta_c| < 1\}$.
- $W(s)$ es una función real racional de peso.

A cada frecuencia ahora tenemos que intersecar el sistema no-estructurado $H(w)$ con el disco

$$G(iw) + W(iw)\Delta_c \quad (2.5.2.1)$$

cuyo centro es $G(iw)$ y cuyo radio es $|W(iw)|$. En esta descripción, G admite la interpretación de un sistema nominal. La desviación de $G(iw)$ es dado por el circulo $W(iw)\Delta_c$ cuyo radio $|W(iw)|$ varía con la frecuencia. Además, la función de peso W toma el tamaño de las incertidumbres dependientes en la frecuencia. Esto permite tomar en consideración que los modelos no son, usualmente, muy exactos a altas frecuencia; típicamente, W es un filtro pasa-altos.

Note que procedemos similarmente con en el caso paramétrico: a frecuencia w , representamos la desviación de un valor nominal $G(iw)$ y de una $W(iw)$ versión de peso en un disco unitario abierto.

El actual sistema de incertidumbres es entonces definido como

$$\Delta = \{\Delta(s) \in RH_\infty \mid \Delta(iw) \in \Delta_c \text{ para todo } w \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\}\}, \quad (2.5.2.2)$$

el sistema de todas las funciones de transferencias propias y estables que toman sus valores a lo largo del eje imaginario en el disco unitario abierto.

Finalmente, el sistema de incertidumbre es descrito por:

$$G_{\Delta} = G + W\Delta \quad \text{con } \Delta \in \Delta$$

Par incertidumbres reales, hemos obtenido un complejo sistema fijo que es ahora parametrizado por la incertidumbre dinámica $\Delta \in \Delta$.

Comentario

El sistema de valores Δ_c no de necesariamente ser un círculo para nuestros resultados de aplicación. Puede ser un sistema arbitrario que contiene 0. La desviación del sistema.

$$W(i\omega)\Delta_c \tag{2.5.2.4}$$

es entonces obtenida por encogimiento/estiramiento Δ_c con factor $|W(i\omega)|$, y por rotación acorde a la fase de $H(i\omega)$.

Podríamos ser más generales aún y simplemente permitir sistemas de valores dependientes de frecuencia $\Delta_c(\omega)$ que no son necesariamente descritos en (2.5.4). Entonces podemos incorporar mayor precisión a la información de la fase sobre la incertidumbre.

2.4.4.1 Modelamiento de la incertidumbre.

a) Incertidumbre aditiva.

En control robusto [JH2007] uno empieza por definir las incertidumbres en intervalos de la respuesta en frecuencia.

Para este efecto uno selecciona una *función de transferencia nominal procesada* $P_0(s)$, para cada función de transferencia admisible procesada $P(s)$, una definición:

$$\Delta_a(s) = P(s) - P_0(s), \quad (2.5.3.1)$$

la cual mide cuando $P(s)$ se desvía $P_0(s)$. Esto nos permite expresar cualquier función de transferencia admisible $P(s)$ como en la Figura 2.19. Motivado por el diagrama en la Figura 2.19, $\Delta_a(s)$ es llamado un *bloque de incertidumbre aditiva*. $P_0(s)$ debería responder a la “muy probable” función de transferencia. Entonces el bloque de la incertidumbre aditiva debe ser tan pequeña como sea posible. En el ejemplo dado, uno debería elegir

$$P_0(s) = \frac{1}{m_0s^2 + b_0s + k_0}.$$

Obteniendo una caracterización de la incertidumbre *puramente en el dominio de la frecuencia*, uno necesita especificar cuan grande $\Delta_a(j\omega)$ puede ser por cada frecuencia ω - Esto es hecha para determinar una

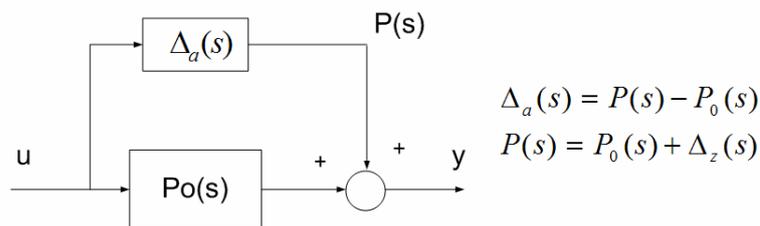


Figura 2-19 Incertidumbre Aditiva.

función $l_a(\omega)$ suficientemente grande para que por cada función de transferencia admisible procesada $P(s)$, tengamos

$$|\Delta_a(j\omega)| = |P(j\omega) - P_0(j\omega)| \leq l_a(\omega), \quad \forall \omega.$$

En donde se tienen disponibles todas las $P(s)$ admisibles (o un conjunto representativo de ellos- tal como en la Figura 2.15), uno puede determinar $l_a(w)$ por simple gráfico $|P(jw) - P_0(jw)|$ vs. w . Ya que en general no es factible todo el diagrama $|P(jw) - P_0(jw)|$, uno debería proporcionar algún “seguro-amortiguador” cuando se seleccione $l_a(w)$. La Figura 2.20 muestra $l_a(w)$ para el diagrama de bode en la Figura 2.15.

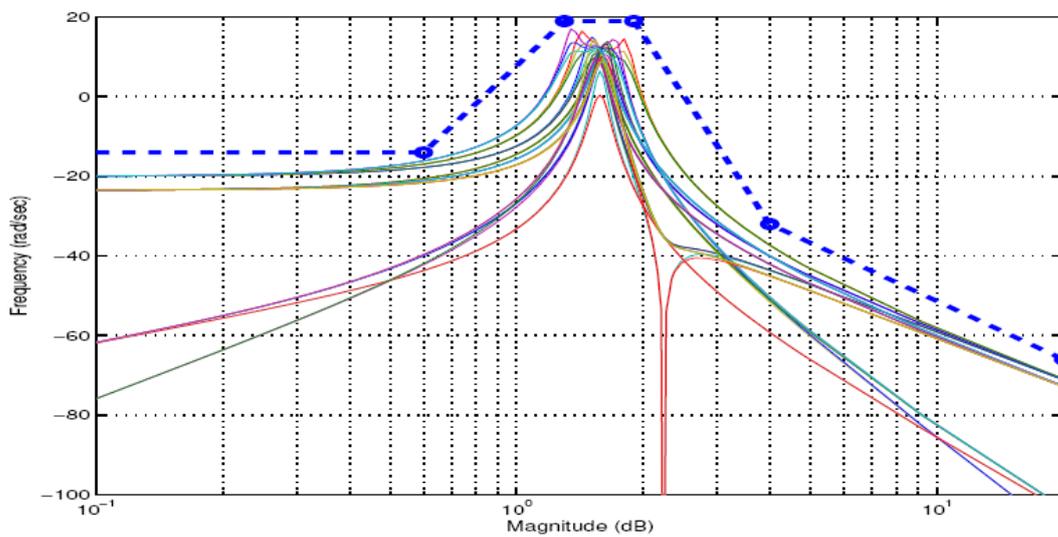


Figura 2-20 Los limites de la incertidumbre aditiva de los diagramas de Bode en la Figura 2.5.2 con $P_0(s) = \frac{1}{m_0s^2 + b_0s + k_0}$, $m_0=1$, $b_0=1.5$, $k_0=2.5$. Las líneas sólidas representas diagramas posibles de $|P(jw) - P_0(jw)|$ y la entre punteada representa el limite $l_a(w)$.

b) Incertidumbre Multiplicativa

La incertidumbre multiplicativa en (2.5.3.1) mide la diferencia entra $P(s)$ y $P_0(s)$ en términos absolutos y puede verse engañosamente grande cuando ambos $P(s)$ y $P_0(s)$ son grandes- esto es, a bajas frecuencias cuando el proceso tiene un polo en el origen. Superado esta dificultad uno a menudo define

$$\Delta_m(s) = \frac{P(s) - P_0(s)}{P_0(s)}, \quad (2.5.3.2)$$

el cual mide cuanto $P(s)$ se desvía de $P_0(s)$, relativa a el tamaño de $P_0(s)$. Podemos ahora expresar cualquier función de transferencia admisible $P(s)$ con en la Figura 2.21, por tal motivo llamando $\Delta_m(s)$ un *bloque de incertidumbre multiplicativa*.

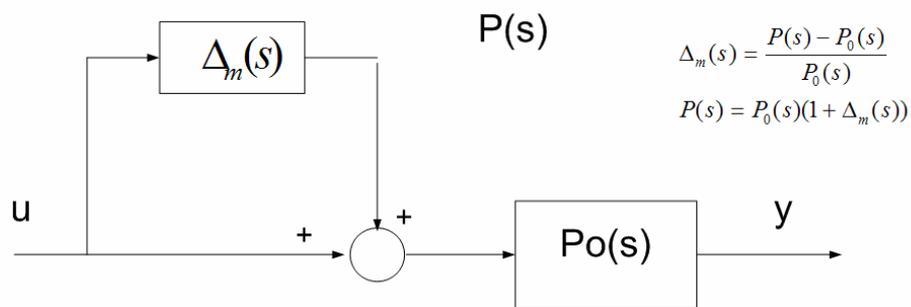


Figura 2-21 Incertidumbre Multiplicativa

Para caracterizar una incertidumbre multiplicativa uno determina una función $l_m(w)$ suficientemente grande para que por cada función de transferencia admisible $P(s)$ tengamos

$$|\Delta_m(jw)| = \frac{|P(s) - P_0(s)|}{|P_0(s)|} \leq l_m(w), \quad \forall w.$$

Uno puede determinar $l_m(w)$ graficando $\frac{|P(s) - P_0(s)|}{|P_0(s)|}$ vs. w para todo $P(s)$ admisible (o un sistema representativo de ellos) y eligiendo $l_m(w)$ siendo mas grande que todos los diagramas. La Figura 2.22 muestra $l_m(w)$ para el diagrama de Bode en la Figura 2.15.

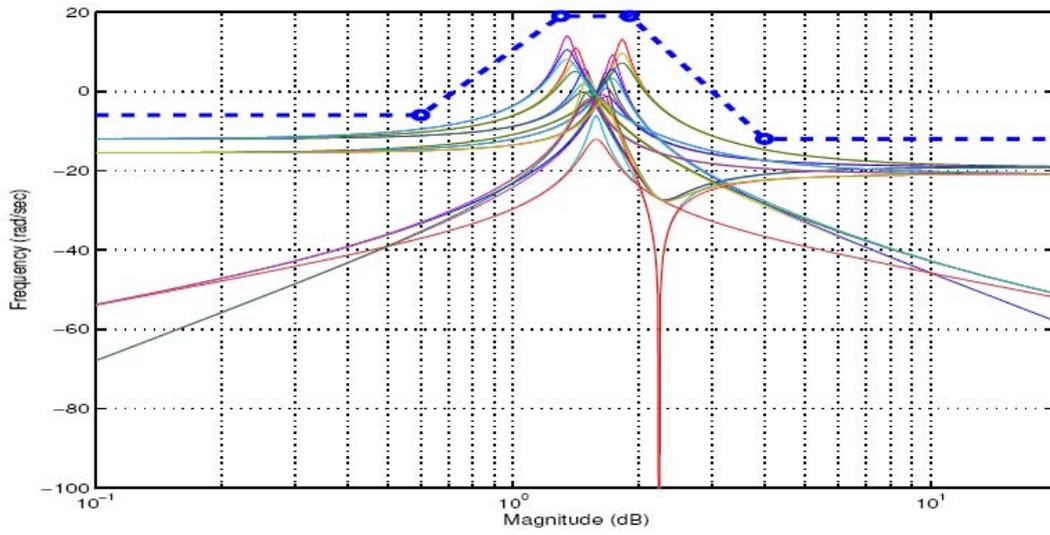


Figura 2-22 Los limites de las incertidumbre multiplicativa para el diagrama de Bode en la Figura 2.5.2 con $P_0(s) = \frac{1}{m_0s^2 + b_0s + k_0}$, $m_0=1$, $b_0=1.5$, $k_0=2.5$. Las líneas sólidas representas diagramas posibles

de $\frac{|P(s) - P_0(s)|}{|P_0(s)|}$ y la entre punteada representa el limite de la incertidumbre $l_m(w)$.

2.5 Aplicación de LMI a la solución de problemas de estabilidad.- Sistema doble integrador.

2.5.1 Optimización de la norma H_2 .

El problema de equilibrar [PA2006] una bola sobre la superficie de una viga es representativo de una gran clase de sistemas de aplicaciones industriales y militares. El objetivo es controlar la posición de una bola que es libre de moverse a lo largo de una viga rígida sostenida en su punto central. El trabajo del controlador es rotar la viga para compensar el movimiento de la bola. La figura 2.23 muestra el esquema de este problema. La posición de la bola es p , el ángulo de la viga es θ , el torque de entrada a la viga es f , la inercia de la viga es J y la masa de la bola es m .

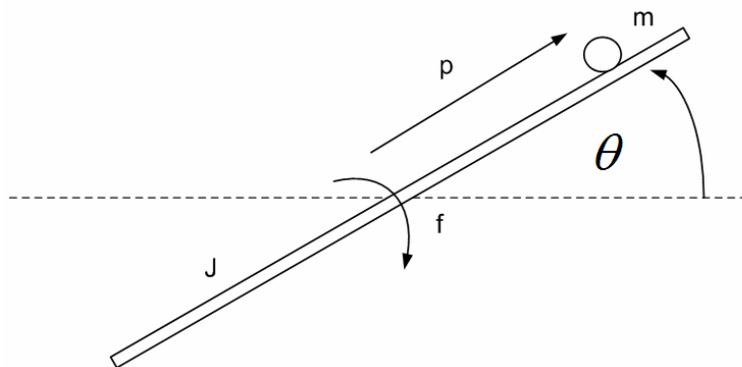


Figura 2-23 Esquema del problema de equilibrio de una bola en una viga

Un modelo simplificado de este proyecto es:

$$\frac{p(s)}{\theta(s)} = K * \frac{1}{s^2}$$

Para el análisis de este proyecto se ha utilizado la función de transferencia normalizada:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

El nombre de sistema doble integrador resulta precisamente de esta última descripción pues como se sabe el término s^{-1} corresponde en el dominio del tiempo a una integración. Para este ejemplo se plantea encontrar las ganancias de realimentación de estado que minimicen la norma $\|H\|_2$ de los estados y de la señal de control.

La estructura de control para el diseño de un controlador vía LMI's está basado en la realimentación de estado.

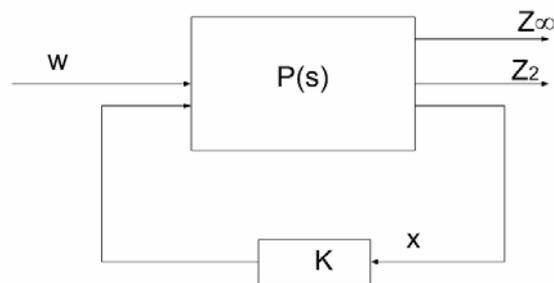


Figura 2-24 Control por realimentación de estados.

La estructura, dada la realización de espacio de estado:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$z_\infty = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

Donde $u = kx$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

La salida a optimizar se plantea como $z_2[x_1 \ x_2 \ u]^T$. Se busca por lo tanto minimizar la respuesta transitoria de los estados y de la señal de control en respuesta a entradas conocidas o condiciones iniciales.

Para obtener las LMI se plantea las ecuaciones de estado de acuerdo al diagrama de control de la Figura 2.25.

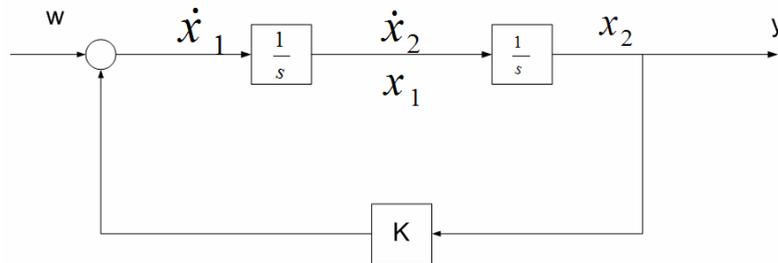


Figura 2-25 Diagrama de Control para el sistema doble integrador.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 * k + w \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

Obtenidas las ecuaciones de estado y planteado la salida a optimizar, se plantea el modelo de espacio de estados para la síntesis de realimentación de estados:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

El problema se resuelve mediante la función `msfsyn` de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Optimización de la norma H_2 , Función `msfsyn`]

El valor de ganancia de realimentación resulta ser $K = [-1.7 \ -1.01]$. La norma mínima H_2 que se obtiene es 1.73.

De la planta P, el sistema en lazo cerrado está dado en la forma de espacio de estado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z_2 &= (C_2 + D_{22} K)x + D_{21} w\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}Ak &= A + B_2 K \\ Bk &= B_1 \\ Ck &= C_2 + D_{22} K \\ Dk &= D_{21}\end{aligned}$$

La Figura 2.26 muestra la respuesta impulsiva de los estados y de la señal de control obtenidos

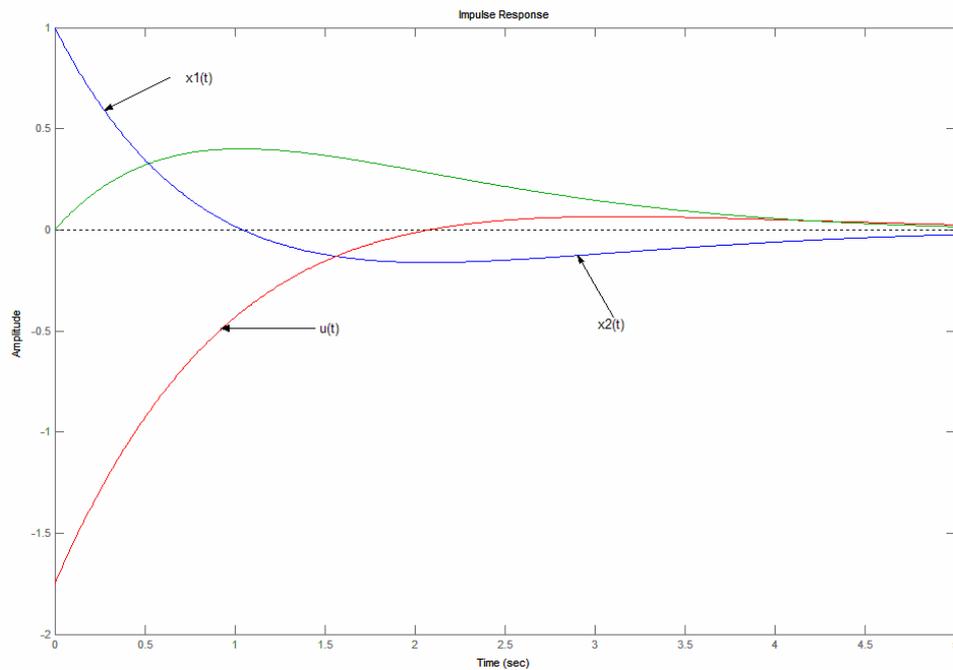


Figura 2-26 Respuesta impulsiva para sistema doble integrador.

2.5.2 Sistema de Control H_2/H_∞ .

En este ejemplo se busca cumplir dos objetivos: primero que el sistema tenga como en el ejemplo anterior una respuesta transitoria adecuada de los estados y de la señal de control y segundo, minimizar el efecto de las perturbaciones en la salida. El segundo objetivo corresponde a minimizar la norma H_∞ de la función de transferencia e perturbación a la entrada $w(t)$ en la salida $y(t)$. Es decir:

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 * w + 0 * u$$

Esto significa resolver las LMI correspondientes a cada problema de desempeño.

De acuerdo a la Figura 2.25 y dada la siguiente realización de estados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_\infty &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z_\infty &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] w + [0] u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= [0 \quad 1]; D_{11} = [0]; D_{12} = [0] \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

De la planta P, el sistema en lazo cerrado está dado en la forma de espacio de estado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z_\infty &= (C_1 + D_{12} K)x + D_{11} w \\ z_2 &= (C_2 + D_{22} K)x + D_{21} w\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}Ak &= A + B_2 K \\ Bk &= B_1 \\ Ck &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} K \\ C_2 + D_{22} K \end{bmatrix} \\ Dk &= \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Programa: [ANEXOS2 – Sistema de Control H_2/H_∞ , Función msfsyn]

El proceso [GNLC5] inicia encontrando el rango de variación de la norma H_∞ . Luego se calcula par aun conjunto de normas H_∞ predefinidas, el mejor desempeño posible de la norma H_2 . Como resultado se obtiene una gráfica como de la figura 2.27 que permite determinar el mejor desempeño deseado.

Por inspección de la Figura 2.28 se determina que el valor de ganacia K obtenido para cuando $g=0.1$, produce un adecuado compromiso de desempeño puesto que en este caso los valores obtenidos son: norma $H_2 = 3.57$; norma $H_\infty = 0.096$. Para este caso se tiene que el valor de $K = [-4.68 \ -10.45]$ produce las respuestas impulsivas de la Figura 2.5.6.

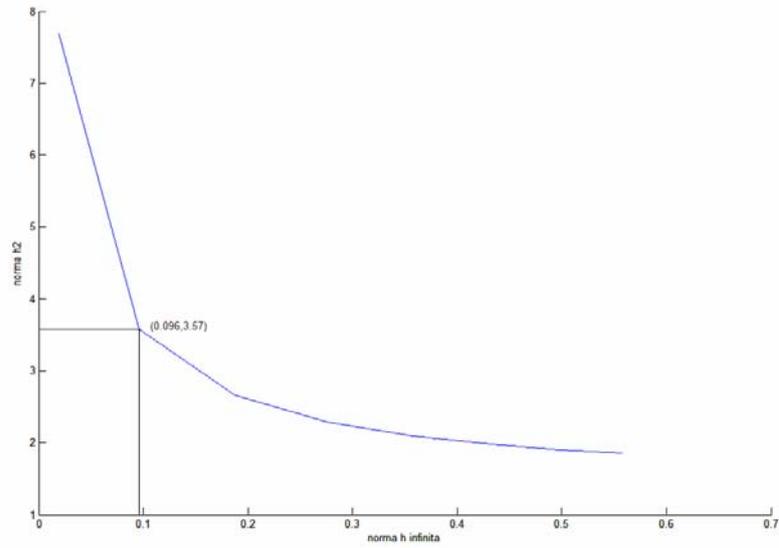


Figura 2-27 Compromiso entre los desempeños H_2 y H_∞ .

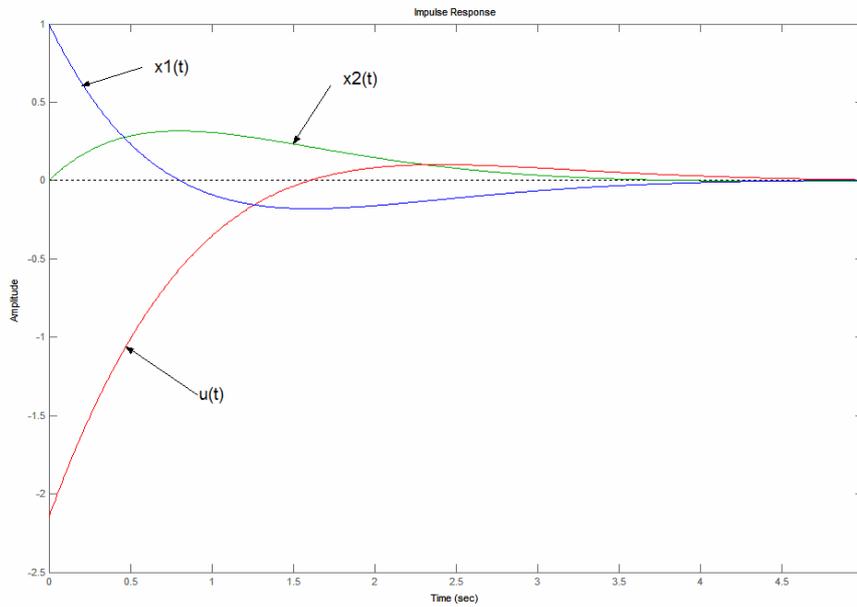


Figura 2-28 Respuesta Impulsiva

CAPITULO III

3. REALIMENTACIÓN DINÁMICA DE LA SALIDA

3.1 Formulación de los problemas de síntesis de controladores H infinito mediante desigualdades matriciales.

En muchas aplicaciones del mundo real [GNLC5], la síntesis estándar H_∞ no puede capturar adecuadamente todas las especificaciones del diseño. Por ejemplo, la atenuación del ruido o la regulación contra disturbios randómicos son más naturalmente expresadas en términos de LQG⁷.

Así mismo, la síntesis pura de H_∞ hace cumplir solamente estabilidad en lazo cerrado y no permite la colocación directa de los polos en lazo cerrado en más regiones específicas del plano izquierdo. Puesto que la localización de polos se relaciona con la respuesta en el tiempo y el comportamiento transitorio del sistema realimentado, es a menudo deseable adicionalmente amortiguarlos y restringirlos en lazos cerrados dinámicos. Esto hace que la síntesis multi-objetiva sea altamente deseable en la práctica, y la teoría de LMI ofrece las herramientas de gran alcance para atacar tales problemas.

La síntesis mezclada de H_2/H_∞ con la colocación regional del polo es un ejemplo de diseño multi-objetivo tratado por la LMI Control Toolbox. El problema de control es esquematizado en la Figura 3.1. La salida del canal z_∞ se asocia al desempeño de H_∞ mientras que el canal z_2 se asocia con los aspectos de desempeño H_2 .

Nombrando $T_\infty(s)$ y los T_2 como las funciones de transferencia a lazo cerrado de w para z_∞ y z_2 , respectivamente, consideramos el siguiente problema de síntesis multi-objetivo:

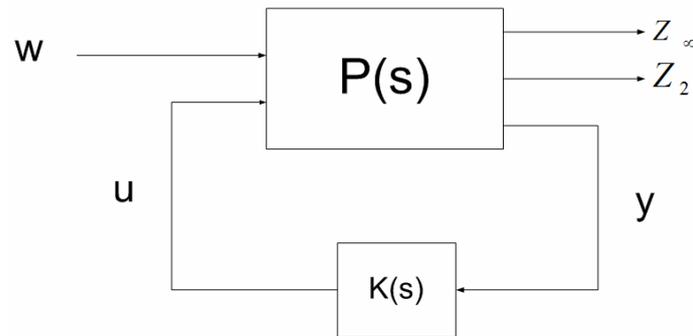


Figura 3-1 Síntesis H_∞ con desempeño Multi-Objetivo

Diseñar un controlador con salida realimentada $u = K(s)y$ que

- Mantenga la norma de H_∞ de $T_\infty(s)$ (ganancia RMS) debajo de un cierto valor prescrito $\gamma_0 > 0$.
- Mantenga la norma H_2 de T_2 (LQG cost) debajo de un cierto valor prescrito $\nu_0 > 0$.
- Minimizar un criterio compromiso (entre H_∞ y H_2) de la forma:

$$\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2$$

α y β constantes de ponderación

- Colocar los polos en lazo cerrado en alguna región prescrita LMI, recordando que las regiones de LMI son sub-regiones generales convexas del semi-plano abierto izquierdo.

Recordar que las regiones de LMI son sub-regiones generales convexas del semi-plano izquierdo.

3.1.1 Formulación LMI.

Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y &= C_y x + D_{y1} w\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_K \zeta + B_K y \\ u &= C_K \zeta + D_k y\end{aligned}$$

realizaciones de espacio de estados de la planta $P(s)$ y del controlador $K(s)$, respectivamente, y sea

$$\begin{aligned}\dot{x}_{cl} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z_\infty &= C_{cl1} x_{cl} + D_{cl1} w \\ z_2 &= C_{cl2} x_{cl} + D_{cl2} w\end{aligned}$$

la ecuación correspondiente de espacio de estados en lazo cerrado. ζ es el vector de variables de estado del controlador.

Nuestros tres objetivos de diseño puede ser expresados como:

- **Desempeño H_∞** : La ganancia RMS en lazo cerrado de w a z_∞ no excede γ si y solo si existe una matriz simétrica X_∞ tal que

$$\begin{pmatrix} A_{cl} X_{\infty} + X_{\infty} A_{cl}^T & B_{cl} & X_{\infty} C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -I & D_{cl}^T \\ C_{cl} X_{\infty} & D_{cl} & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \succ 0$$

$$X_{\infty} \succ 0$$

Calculo de los las matrices de estado del espacio de estados en lazo cerrado.

$$\dot{\zeta} = A_k \zeta + B_k (C_y x + D_{y1} w) = A_k \zeta + B_x C_y x + D_{y1} w$$

$$u = C_k \zeta + D(C_y x + D_{y1} w) = C_k \zeta + D_k C_y x + D_{y1} w$$

Obtención de A_{cl} y B_{cl}

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 C_k \zeta + B_2 D_k C_y x + B_2 D_k D_{y1} w$$

$$\dot{x} = (A + B_2 D_k C_y) x + B_2 C_k \zeta + (B_1 + D_k D_{y1}) w$$

$$\dot{\zeta} = (B_k C_y) x + A_k \zeta + (B_k D_{y1}) w$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_y & B_2 C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + D_k D_{y1} \\ B_k D_{y1} \end{bmatrix} w$$

$$\Rightarrow A_{cl} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 D_k C_y & B_2 C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + D_k D_{y1} \\ B_k D_{y1} \end{bmatrix}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k \\ B_k \end{bmatrix} D_{y1}$$

Obtención de C_{cl1} y D_{cl1}

$$z_\infty = C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u$$

$$z_\infty = C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} (C_k \zeta + D_k C_y x + D_{y1} w)$$

$$z_\infty = C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} C_k \zeta + D_{\infty 2} D_k C_y x + D_{\infty 2} D_{y1} w$$

$$z_\infty = (C_\infty + D_{\infty 2} D_k C_y) x + D_{\infty 2} C_k \zeta + (D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} D_{y1} w)$$

$$z_\infty = \begin{bmatrix} C_\infty + D_{\infty 2} D_k C_y & D_{\infty 2} C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + [D_{\infty 1} + D_{\infty 2} D_{y1}] w$$

$$C_{cl1} = \begin{bmatrix} C_\infty + D_{\infty 2} D_k C_y & D_{\infty 2} C_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D_{cl1} = [D_{\infty 1} + D_{\infty 2} D_{y1}].$$

Obtención de C_{cl2} y D_{cl2} .

$$z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

$$z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} (C_k \zeta + D_k C_y x + D_{y1} w)$$

$$z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} C_k \zeta + D_{22} D_k C_y x + D_{22} D_{y1} w$$

$$z_2 = (C_2 + D_{22} D_k C_y) x + D_{22} C_k \zeta + (D_{21} w + D_{22} D_{y1} w)$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} C_2 + D_{22} D_k C_y & C_k D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + [D_{21} + D_{22} D_{y1}] w$$

$$C_{cl2} = \begin{bmatrix} C_2 + D_{22} D_k C_y & C_k D_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D_{cl2} = [D_{21} + D_{22} D_{y1}].$$

Para el caso de realimentación a la salida con H_∞ , uno puede de combinar las condiciones LMI para la estabilidad en las regiones LMI, pero ahora es mucho más difícil. En este caso el parámetro de control es mucho más complicado de encontrar. Para esto tomamos como resultados y referencias los artículos de Chilali y Gahinet [CG1996]. Para esto, es necesario suponer $D_{22} = 0$, lo cual no es una restricción. Entonces el controlador viene dado por:

$$K = \left(\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right)$$

Asumiendo que el controlador es de orden n . Ahora definimos un controlador parametrizado en términos de estas matrices y la matriz de Lyapunov desconocida X . Suponiendo que X y su inversa son definidas en la forma

$$Z = \begin{pmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & I \end{pmatrix}, \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} Y & -YX_2 \\ -X_2^T Y & X_2^T Y X_2 + I \end{pmatrix}, \quad X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

Con $Y_2 = -YX_2$ se define las nuevas variables del controlador como

$$\tilde{B}_k = Y_2 B_k + Y B_2 D_k$$

$$\tilde{C}_k = C_k X_2^T + D_k C_2 X$$

$$\tilde{A}_k = Y_2 A_k X_2^T + Y_2 B_k C_2 X + Y B_2 C_k X_2^T + Y(A + B_2 D_k C_2)X$$

En el siguiente teorema, las siguientes matrices son usadas como abreviación:

$$\phi = \begin{pmatrix} AX + B_2 C_k & A + B_2 D_k C_2 \\ \tilde{A}_k & YA + \tilde{B}_k C_2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{11} = \begin{pmatrix} AX + XA^T + B_2 \tilde{C}_k + \tilde{C}_k^T B_2 & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ (B_1 + B_2 D_k D_{21})^T & -\gamma I \end{pmatrix}$$

$$\psi_{21} = \begin{pmatrix} \tilde{A} + (A + B_2 D_k C_2)^T & YB_1 + \tilde{B}_k D_{21} \\ C_1 X + D_{12} \tilde{C}_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{22} = \begin{pmatrix} A^T Y + YA + \tilde{B}_k C_2 + C_2^T \tilde{B}_k^T & (C_1 + D_{12} D_k C_2)^T \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & -\gamma I \end{pmatrix}$$

Al igual que antes, A_c es la matriz A del sistema realimentado.

Teorema

Es posible encontrar un controlador \mathbf{K} de la forma $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_k \end{pmatrix}$ tal que:

$$\mathbf{A}_c \text{ esta en una región D estable y } \|\mathbf{F}_{zw}\|_{\infty} < \gamma$$

si y solo si hay matrices $\tilde{\mathbf{A}}_k, \tilde{\mathbf{B}}_k, \tilde{\mathbf{C}}_k, \mathbf{D}_k$ y matrices simétricas \mathbf{X} y \mathbf{Y} de orden $n \times n$ tal que el siguiente sistema de LMI demuestre que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \succ 0$$

$$\left(\lambda_{kl} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mu_{kl} \phi + \mu_{kl} \phi^T \right) \prec 0$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{21}^T \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} \prec 0$$

Síntesis

Si las matrices del anterior teorema son encontradas, un controlador puede ser calculado como se describe a continuación. Note que $\mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1} = 0$

Paso 1.- Calcular vía descomposición de valor singular una factorización

$$\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^T = \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1}$$

con una matriz cuadrada (e invertible) \mathbf{X}_2 y definiendo $\mathbf{Y}_2 = -\mathbf{Y} \mathbf{X}_2$.

Paso 2.- Resolver los sistemas

$$\tilde{\mathbf{B}}_k = \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_k + \mathbf{Y} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_k$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{X}_2^T + \mathbf{D}_k \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}_k \mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_k \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{Y} \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_k \mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_k \mathbf{C}_2) \mathbf{X}_2$$

para encontrar $\mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{A}_k$.

Observación.

1. Con esta aproximación, es también posible sintetizar un controlador con región D-estable con especificación de desempeño H_∞ / H_2 .
2. Esta clase de síntesis H_∞ esta implementada en LMI Control Toolbox de Matlab.

- **Desempeño H_2 :** La norma H_2 de la función de transferencia en lazo cerrado de w a z_∞ no exceda v si y solo si $D_{cl2}=0$ y existe dos matrices simétricas X_2 y Q tal que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{cl}X_2 + X_2A_{cl}^T & B_{cl} \\ B_{cl}^T & -I \end{pmatrix} \prec 0 \\ & \begin{pmatrix} Q & C_{cl2}X_2 \\ X_2C_{cl2}^T & X_2 \end{pmatrix} \succ 0 \\ & \text{Trace}(Q) \prec v^2 \end{aligned}$$

- **Ubicación de polos :** los polos en lazo cerrado se encuentran en la región LMI

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} \prec 0\}$$

Con $L = L^T = \{\lambda_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ y $M = [u_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ si y solo si existe una matriz simétrica X_{pol} satisfaciendo

$$\begin{aligned} & [\lambda_{ij}X_{pol} + u_{ij}A_{cl}X_{pol} + u_{ij}X_{pol}A_{cl}^T]_{1 \leq i, j \leq m} \prec 0 \\ & X_{pol} \succ 0 \end{aligned}$$

Por tratabilidad en la estructura LMI, debemos buscar una matriz simple de Lyapunov

$$x := X_\infty = X_2 = X_{pol}$$

esto hace cumplir los tres sistemas de restricción. Factorizando x como

$$x = x_1 x_2^{-1}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ I & N^T \end{pmatrix}$$

e introduciendo los cambio en las variables del controlador :

$$\begin{aligned}\tilde{B}_K &= NB_K + SB_2D_K \\ \tilde{C}_K &= C_KM^T + D_KC_yR \\ \tilde{A}_K &= NA_KM^T + NB_KC_yR + SB_2C_KM^T + S(A + B_2D_KC_y)R,\end{aligned}$$

las desigualdades de restricción sobre x son convertidas inmediatamente en restricciones LMI en las variables $R, S, Q, A_k, B_k, C_k,$ y D_k . Esto conduce a la siguiente formulación sub-optimia LMI de nuestro problema de síntesis multi-objetivo:

Minimizar $\alpha\gamma^2 + \beta \text{Trace}(Q)$ sobre $R, S, Q, A_K, B_K, C_K, D_K$ y γ^2 con las condiciones:

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T+B_2C_K+C_K^TB_2^T & A_K^T+A+B_2D_KC_y & B_1+B_2D_KD_{y1} & H \\ H & A^TS+SA+B_KC_y+C_y^TB_K^T & SB_1+B_KD_{y1} & H \\ H & H & -I & H \\ C_\infty R+D_{\infty 2}C_K & C_\infty+D_{\infty 2}D_KC_y & D_{\infty 1}+D_{\infty 2}D_KD_{y1} & -\gamma^2I \end{pmatrix} \prec 0$$

$$\begin{pmatrix} Q & C_2R+D_{22}C_K & C_2+D_{22}D_KC_y \\ H & R & I \\ H & I & S \end{pmatrix} \succ 0$$

$$\left[\lambda_{ij} \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} + u_{ij} \begin{pmatrix} AR+B_2C_K & A+B_2D_KC_y \\ A_K & SA+B_KC_y \end{pmatrix} \right] +$$

$$u_{ji} \begin{pmatrix} RA^T+C_K^TB_2^T & A_K^T \\ (A+B_2D_KC_y)^T & A^TS+C_y^TB_K^T \end{pmatrix} \Big|_{1 \leq i, j \leq m} \prec 0$$

$$\begin{aligned} \text{Trace}Q &< v_0^2 \\ \gamma^2 &< y_0^2 \\ D_{21} + D_{22}D_K D_{y1} &= 0 \end{aligned}$$

Dadas las soluciones óptimas γ^*, Q^* de estos problemas LMI, los desempeños en lazo cerrado H_∞ y H_2 son limitados por:

$$\|T_\infty\|_\infty \leq \gamma^*, \quad \|T_2\|_2 \leq \sqrt{\text{Trace}(Q^*)}$$

3.1.2 La función hinfmix.

La función hinfmix [GNLC5] lleva a cabo la solución de las LMIs que definen la síntesis de H_2 / H_∞ con la ubicación de polos regional descrita anteriormente. Su sintaxis es:

[gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix (P, r, obj, region)

Donde con entradas de la función tenemos:

- P es la matriz del sistema de la Planta LTI P(s).
- r es un vector de tres entradas que enlista las longitudes de z_2 , γ y u.
- obj = $[\gamma_0, v_0, \alpha, \beta]$ es un vector de cuatro entradas que especifican las restricción y criterios H_2 / H_∞ .
- region : especifica la region LMI para la ubicación de polos, siendo predefinido el plano abierto izquierdo. Use lmireg para interactivamente generar la región matriz.

Y como salidas tenemos:

- gopt resultado del limite la ganancia RMS de w (pertubaciones) para zinf en lazo cerrado.
- h2opt resultado la horma H2 de w(pertubaciones) a z2 en lazo cerrado.
- K controlador optimo para el sistema realimentado.
- S, R soluciones de las condiciones LMI.

Con el parámetro obj se puede especificar las condiciones de diseños para el controlador, de acuerdo a las especificaciones de desempeño que se desea obtener en el sistema:

obj	Diseño correspondiente
[0 0 0 0]	Solo ubicación de polos
[0 0 1 0]	Diseño H_∞ optimo
[0 0 0 1]	Diseño H_2 optimo
[g 0 0 1]	Minimice $\ T_2\ _2$ sujeto a $\ T_\infty\ _\infty < g$
[0 h 1 0]	Minimice $\ T_\infty\ _\infty$ sujeto a $\ T_2\ _2 < h$
[0 0 a b]	Minimice $a\ T_\infty\ _\infty^2 + b\ T_2\ _2^2$
[g h a b]	Problemas mas generales

Donde g y h son los coeficiente de relación de compromiso entre las normas H_2 y H_∞ .

CAPITULO IV

4. DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS MEDIANTE REALIMENTACIÓN DINÁMICA DE LA SALIDA CON ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO MULTI-OBJETIVO

4.1 El problema de la viga y bola.

El problema de equilibrar una bola sobre la superficie de una viga es representativo de una gran clase de sistemas de aplicaciones industriales y militares. El objetivo es controlar la posición de una bola que es libre de moverse a lo largo de una viga rígida sostenida en su punto central. El trabajo del controlador es rotar la viga para compensar el movimiento de la bola. La figura 4.1 muestra el esquema de este problema. La posición de la bola es p , el ángulo de la viga es θ , el torque de entrada a la viga es f , la inercia de la viga es J y la masa de la bola es m .

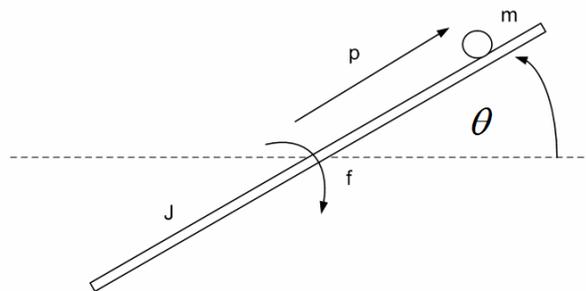


Figura 4-1 Esquema del problema de equilibrio de una bola en un viga

Un modelo simplificado de este proyecto es:

$$\frac{p(s)}{\theta(s)} = K * \frac{1}{s^2}$$

Para el análisis de este proyecto se ha utilizado la función de transferencia normalizada:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

El nombre de sistema doble integrador resulta precisamente de esta última descripción pues como se sabe el término s^{-1} corresponde en el dominio del tiempo a una integración [PA2006].

4.1.1 Con referencia.

La figura 4.2 es el diagrama de bloques del sistema doble integrador con realimentación a la salida.

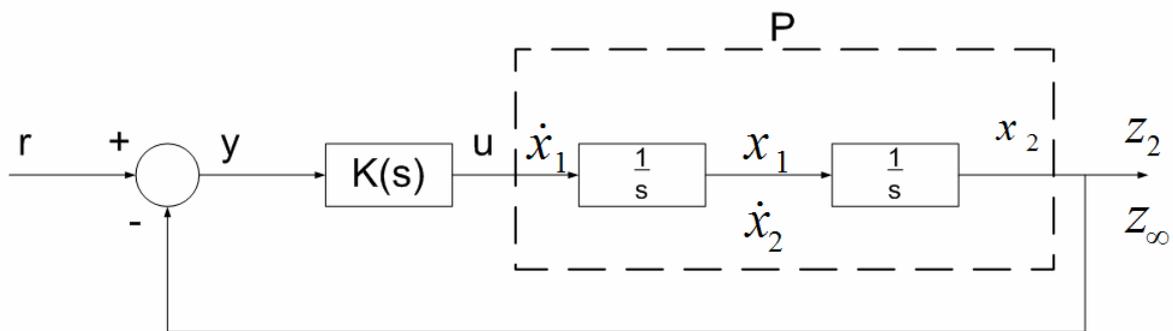


Figura 4-2 Esquema del sistema de control.

En el sistema $K(s)$ representa el controlador, P es la planta y r es la señal de referencia.

Se desea diseñar el controlador $K(s)$ de tal forma que se cumplan varios objetivos:

1. Ubicar los polos del sistema de lazo cerrado en posiciones especificadas en la etapa de diseño.
2. Limitar la ganancia rms desde la entrada de referencia hacia la salida.
3. Limitar la energía presente en los estados y en la señal de control.

y se obtiene el modelo de espacio de estados del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z_\infty &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_\infty &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}; D_{\infty 2} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_y &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}; D_y = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

El problema se resuelve mediante la función `hinfmix` de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Control h2-hinf y ubicación de polos, problema viga y la bola. Función `hinfmix`].

Los parámetros que se definen en la función `hinfmix` son:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, \text{r}, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$\text{P} = \text{ltsys}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$
 $\text{r} = [\text{z}_2 \text{ y } \text{u}] = [3 \ 1 \ 1]$;
 $\text{obj} = [0 \ 0 \ \text{a} \ \text{b}]$, donde a y b varían para especificaciones de desempeño.
 $\text{region} = \text{lmireg}$,

Con *lmireg* se plantea una región lmi de tipo half plane y se tomará 3 distintos valores de sigma σ ; -0.1 , -1 , -10 para las simulación de resultados.

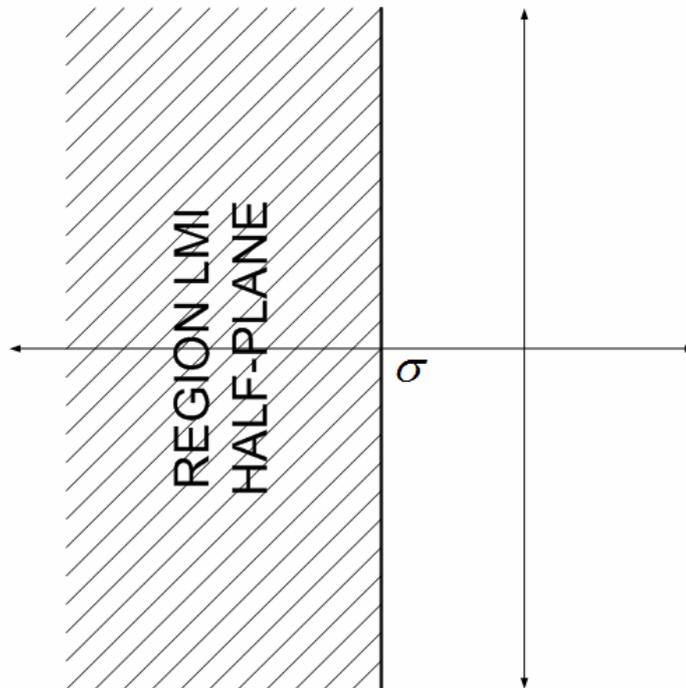


Figura 4-4 Región LMI tipo Half-Plane

Los resultados se evalúan usando simulink:

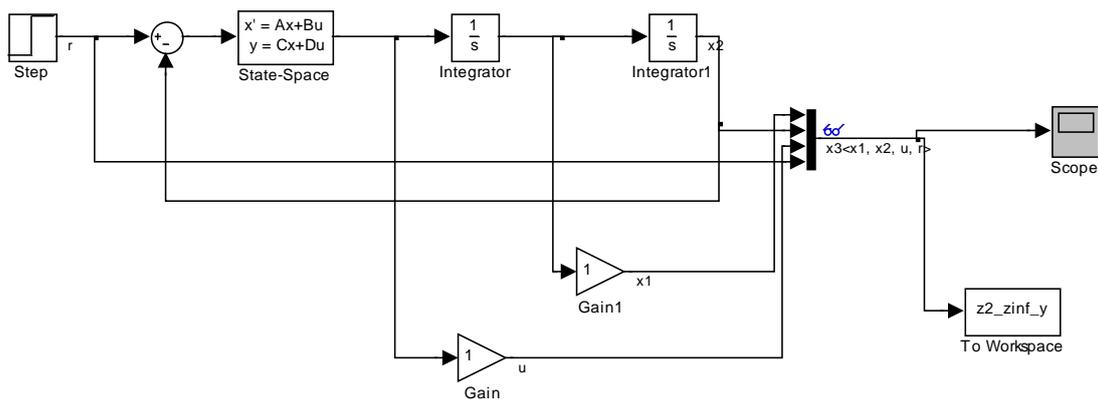


Figura 4-5 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.5, la salida del controlador (u) y el estado x_1 son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales.

Casos de Estudio

Se presentan tres casos de estudio:

- Ubicación de polos
- Control H_2 .
- Control H_∞ .

4.1.1.1 Ubicación de polos.

El vector obj de la función hinfmix es colocado en $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ para este objetivo. Se resuelve aquí el problema de ubicación de polos para una región lmi de tipo half plane y se simula para 3 distintos valores de sigma σ ; -0.1 , -1 , -10 . La figura 4.6 muestra las respuestas obtenidas para $\sigma = -0.1$ y para $\sigma = -1$. Allí se muestra la mejor respuesta obtenida para el estado x_2 que es la salida tanto en tiempo de respuesta, así como en el sobrepico, que pasa de 1.8 a 1.6. Sin embargo, esta situación tiene un efecto contrapuesto ya que la señal de control que tiene un valor pico en el primer caso de aproximadamente 1 crece en el segundo caso a un pico de aproximadamente 3.8. Igual sucede con el estado x_1 que en el primer caso tiene un valor pico de 1 mientras que en segundo caso es de 1.6.

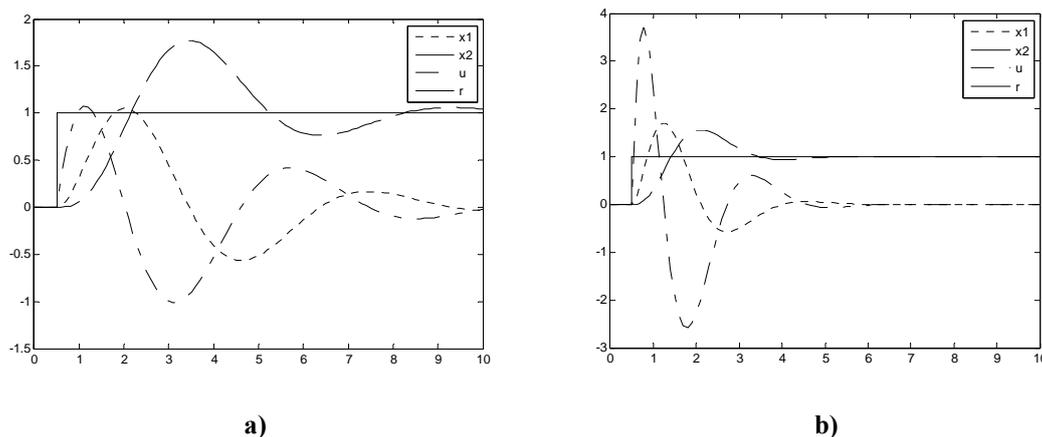


Figura 4-6 Respuesta del sistema en lazo cerrado a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$

La figura 4.7 muestra la evolución en el tiempo de la señal de referencia, los dos estados y la señal de control para $\sigma = -10$. Se observa allí que para el valor pico del estado x_2 es 1.5, el valor pico del estado x_1 es aproximadamente 14, mientras que el pico de la señal de control es de un valor aproximado de 300.

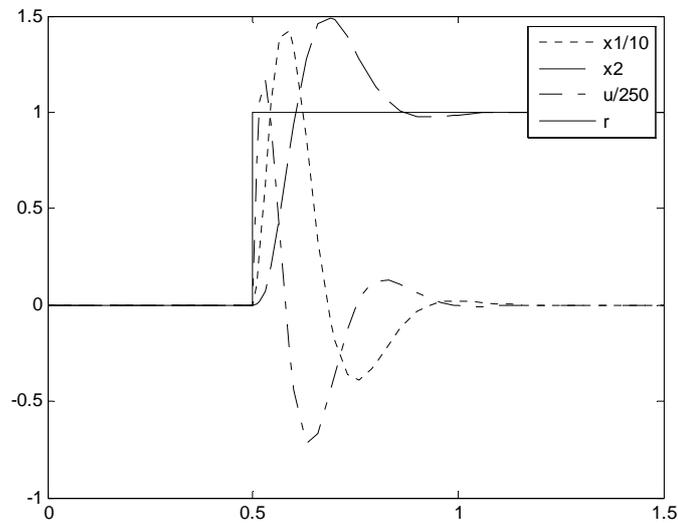


Figura 4-7 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$

4.1.1.2 Control H_2 .

El vector obj de la función hinfmix es colocado en $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ para este objetivo. Se resuelve aquí el problema de ubicación de polos para una región lmi de tipo half plane y se simula para 3 distintos valores de sigma σ ; -0.1, -1, -10. Se minimiza la norma H_2 de los estados y de la señal de control.

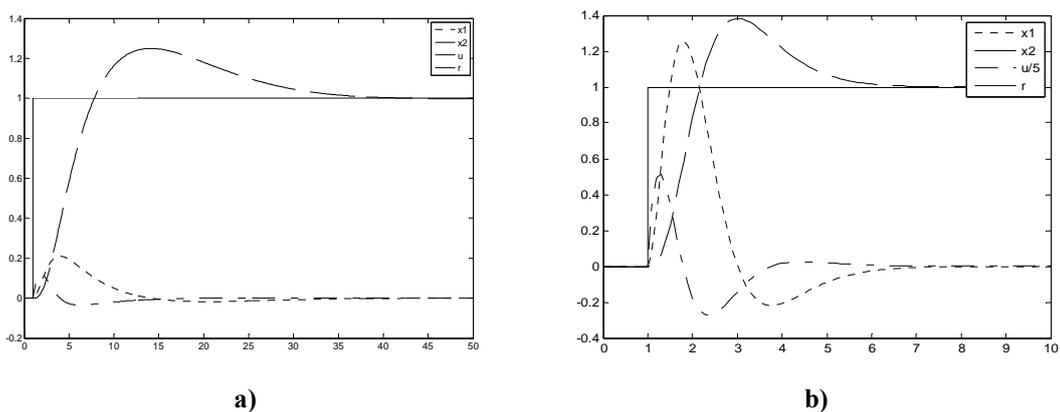


Figura 4-8 Respuesta del sistema para a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$.

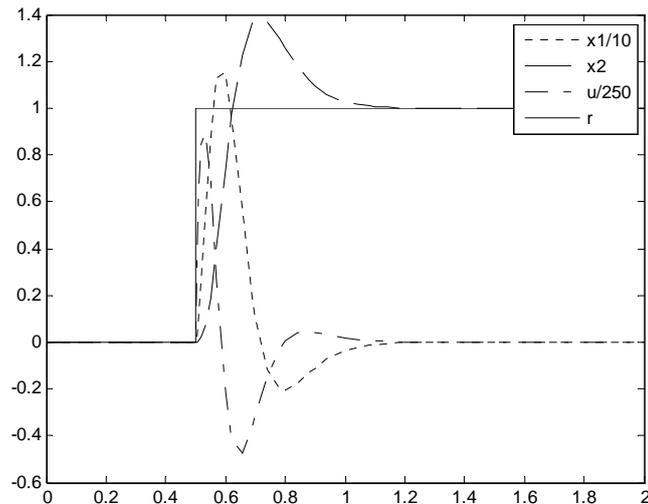


Figura 4-9 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$.

La figura 4.9 se muestra que para $\sigma = -10$ la señal de control tiene un pico de aproximadamente 225 mientras que el estado de control x_1 alcanza un valor pico de aproximadamente 12. Estos valores en comparación de los valores obtenidos con la simple ubicación de polos son menores.

4.1.1.3 Control H_∞ .

El vector obj de la función hinfmix es colocado en $[0 \ 0 \ 1 \ 0]$ para este objetivo. En la figura 4.10 se observa el resultado de la respuesta del sistema cuando se especifica como objetivo la minimización de la norma ∞ de la función de transferencia desde la entrada de referencia r hacia la salida $z_\infty = x_2$. Los resultados se evalúan para $\sigma = -0.1$ y para $\sigma = -1$.

Se observa que la señal sufre un incremento extremadamente grande para optimizar la norma H_∞ , puesto que, como se observa el valor pico alcanza un valor de 30.000.

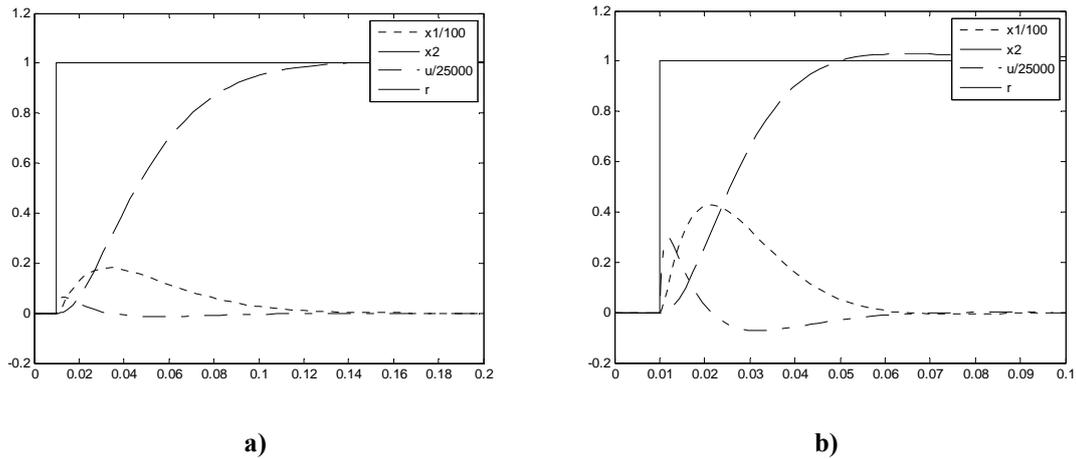


Figura 4-10 Respuesta del sistema para a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$.

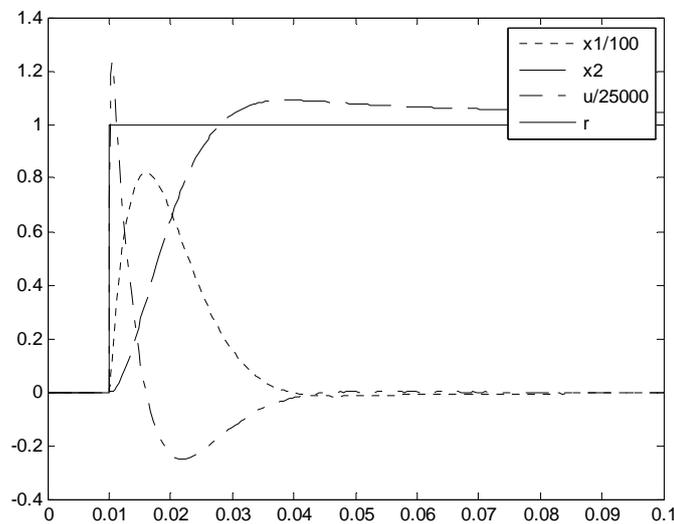


Figura 4-11 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$.

La figura 4.11 se muestra que para $\sigma = -10$ la señal de control tiene un pico de aproximadamente 30.000, el estado de control x_1 alcanza un valor pico de aproximadamente 800 y el estado de control x_2 alcanza un pico de 1.2.

4.1.2 Con referencia, perturbación en el controlador y ruido en la medición.

La figura 4.12 es el diagrama de bloques del sistema doble integrador con realimentación a la salida

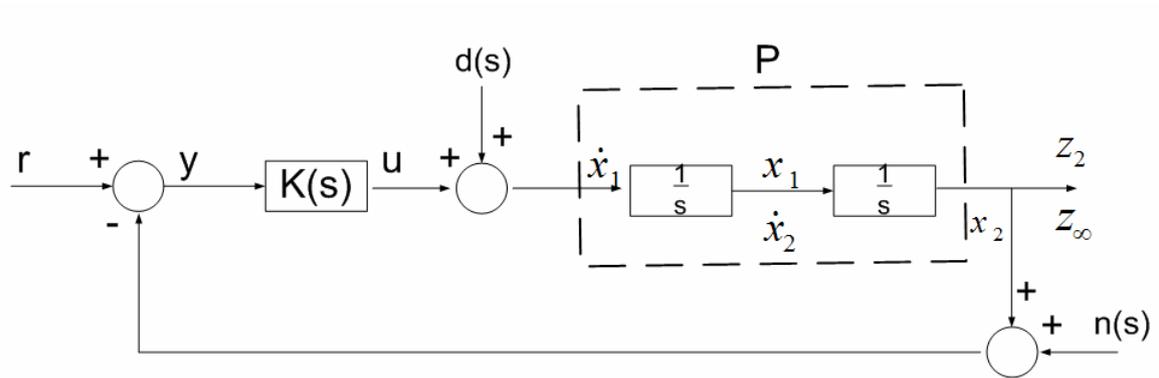


Figura 4-12 Esquema del sistema de control.

En el sistema $K(s)$ representa el controlador, P es la planta, $d(s)$ son las perturbaciones en el controlador, $n(s)$ representa el ruido de la medición y r es la señal de referencia.

Se desea diseñar el controlador $K(s)$ de tal forma que se cumplan el objetivo de limitar la ganancia rms de la entrada de referencia, disturbios y ruidos hacia la salida y limitar la energía presente en los estados y en la señal de control.

La formulación de dos puertos para el planteamiento del problema es:

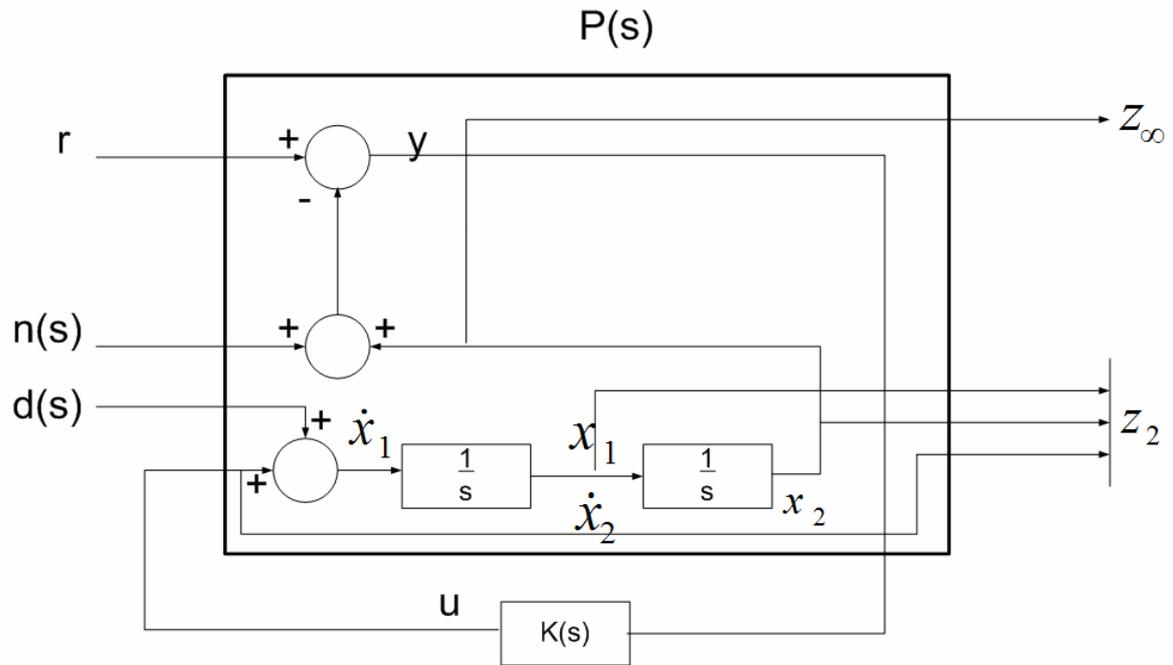


Figura 4-13 Formulación de dos puertos para el planteamiento de sistema doble integrador

De acuerdo a la Figura 4.13 y dada la siguiente realización de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad \text{donde } w = \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix} \\ y &= C_y x + D_{y1} w \end{aligned}$$

Se plantean las ecuaciones de estado del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= d + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ z_\infty &= x_2 \\ z_2 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \\ y &= r - n - x_2 \end{aligned}$$

y se obtiene el modelo de espacio de estados del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z_\infty &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_\infty &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{\infty 2} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_y &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}; D_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

El problema se resuelve mediante la función hinfmix de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Sistema de control H_2/H_∞ , problema viga y la bola. Función hinfmix].

Los parámetros que se definen en la función hinfmix son:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, \text{r}, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$$\begin{aligned}\text{P} &= \text{ltisys}(A, B, C, D) \\ \text{r} &= [\text{z}_2 \text{ y } u] = [3 \ 1 \ 1]; \\ \text{obj} &= [\text{g} \ 0 \ 0 \ 1], \text{ donde } \text{g} \text{ minimiza } \|T_2\|_2 \text{ sujeto a } \|T_\infty\|_\infty \\ \text{region} &= \text{lmireg},\end{aligned}$$

Con lmireg se plantea una región lmi de tipo half plane y se tomará un valor de sigma $\sigma = -1$ para la simulación de resultados, como se muestra en la figura 4.14.

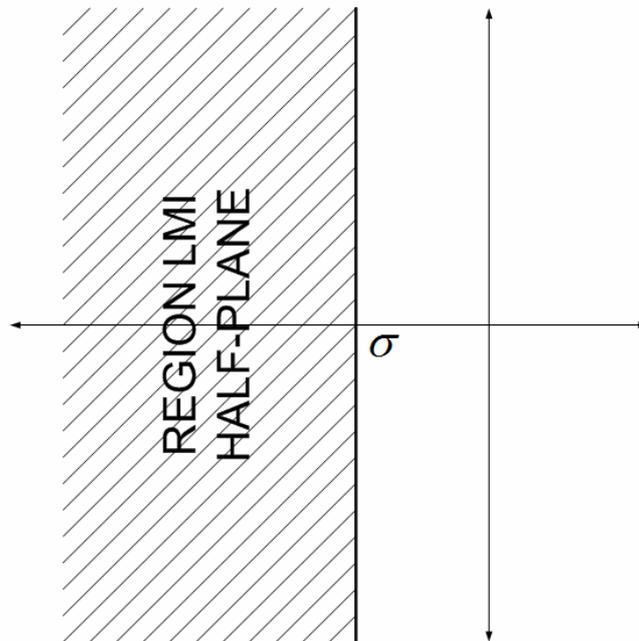


Figura 4-14 Región LMI tipo Half-Plane

Los resultados se evalúan usando simulink:

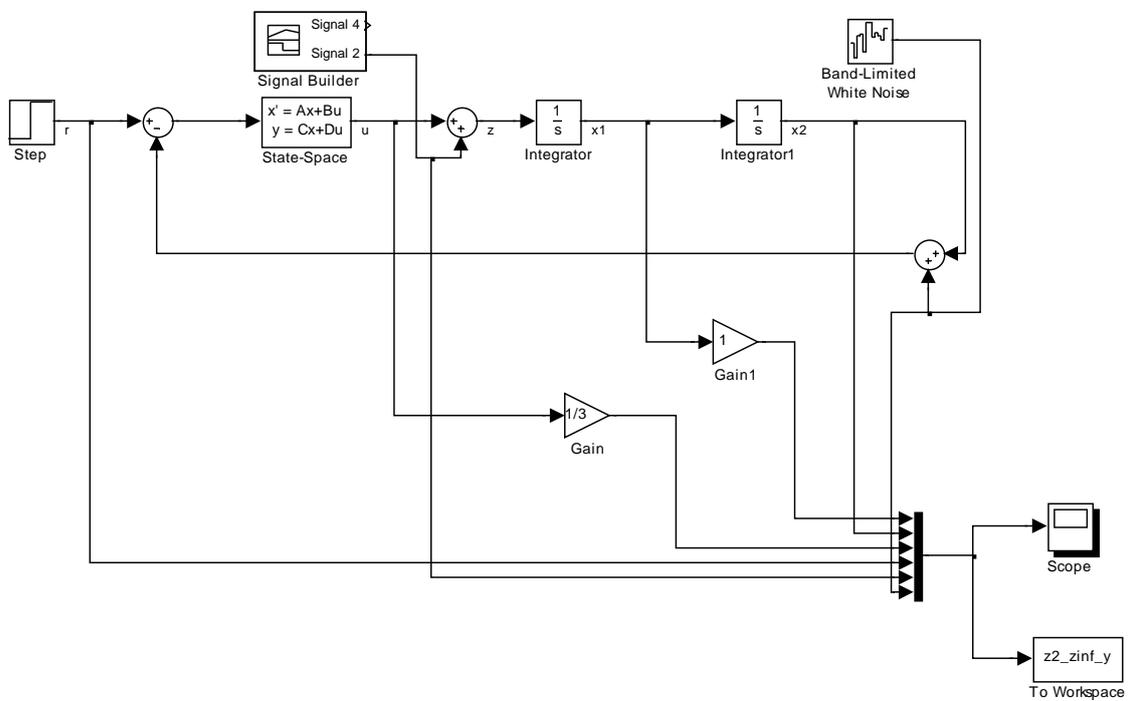


Figura 4-15 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.15, la salida del controlador (u) y el estado x_1 son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales. Además se incluirán simulaciones de ruido en la medición y perturbaciones en el controlador.

Sistema de control H_2/H_∞ .

Para este caso, se busca cumplir dos objetivos:

1. Obtener una respuesta transitoria adecuada de los estados y de la señal de control.
2. Minimizar el efecto de las perturbaciones en el controlador y ruidos en la medición

El proceso se inicia encontrando el rango de variación de la norma H_∞ . Luego se calcula para un conjunto de normas H_∞ predefinidas y se obtiene el mejor desempeño posible de la norma H_2 . Se encontró que para las especificaciones planteadas, el rango de H_∞ esta descrito en el intervalo de 2 a 9. Esto se encontró a partir del algoritmo del programa en Matlab [Sistema de control H_2/H_∞ , problema viga y la bola. Función `hinfmix`].

Como resultado se obtiene la Figura 4.16 que permite determinar el mejor desempeño deseado.

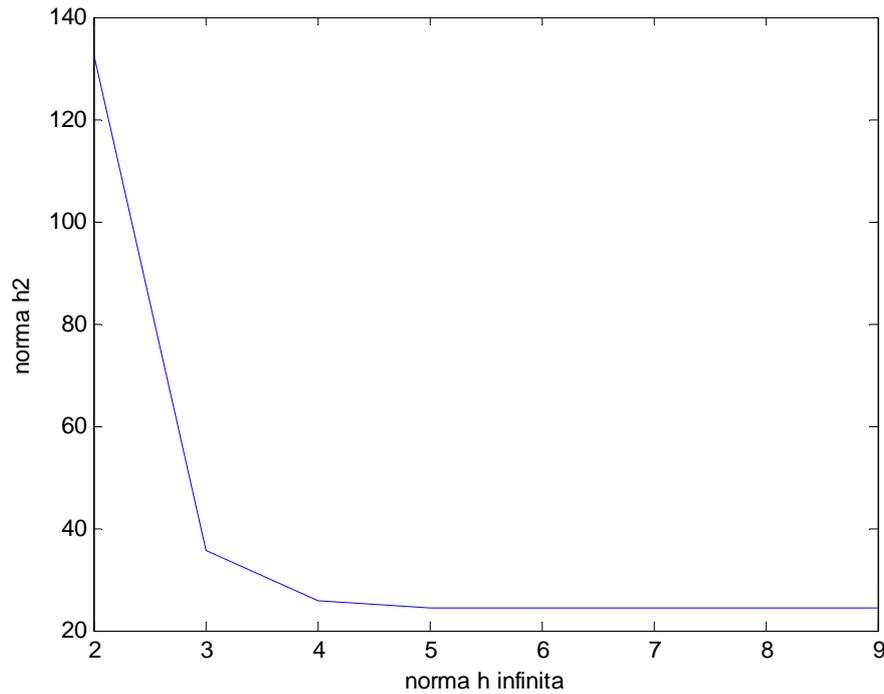


Figura 4-16 Compromiso entre los desempeños H_2 y H_∞ .

Por inspección de la Figura 4.16 se determina que el controlador $K(s)$ obtenido para cuando $g=3$, produce un adecuado compromiso de desempeño puesto que en este caso los valores obtenidos son: norma $H_2=34.74$; norma $H_\infty=3$. Para este caso el valor de K es

$$K(s) = \begin{bmatrix} -0.3747 & 3.1527 & -0.0643 & 2 \\ -1.8853 & -3.2806 & -0.6862 & 0 \\ -0.6439 & -10.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Inf \end{bmatrix}$$

Para comprobar y verificar el desempeño del controlador

1. Se propone el controlador encontrado anteriormente con objetivo ubicación de polos del sistema de lazo cerrado para una región lmi tipo Half plane con $\sigma = -1$ de la Figura 4.6 y se simula con el diagrama del simulink de la Figura 4.15, obteniendo el siguiente resultado planteado en la Figura 4.17:

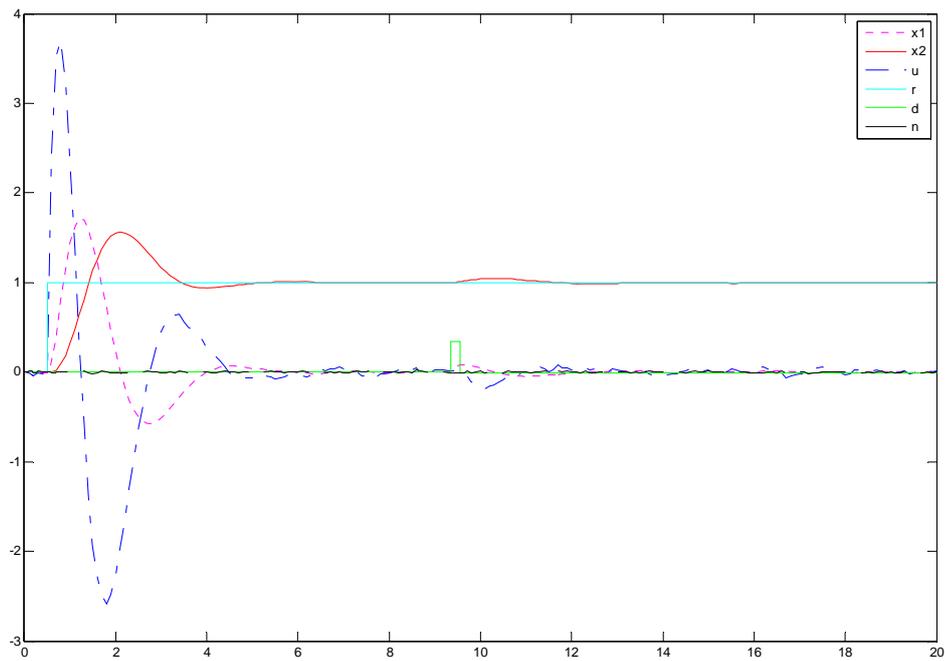


Figura 4-17 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con objetivo ubicación de polos.

2. Se encuentra la respuesta del sistema con el controlador obtenido por la inspección de la Figura 4.15 en donde las norma son $H_2=34.74$ y $H_\infty=3$ y se procede a la simulación para obtener los resultados de la Figura 4.2.7.

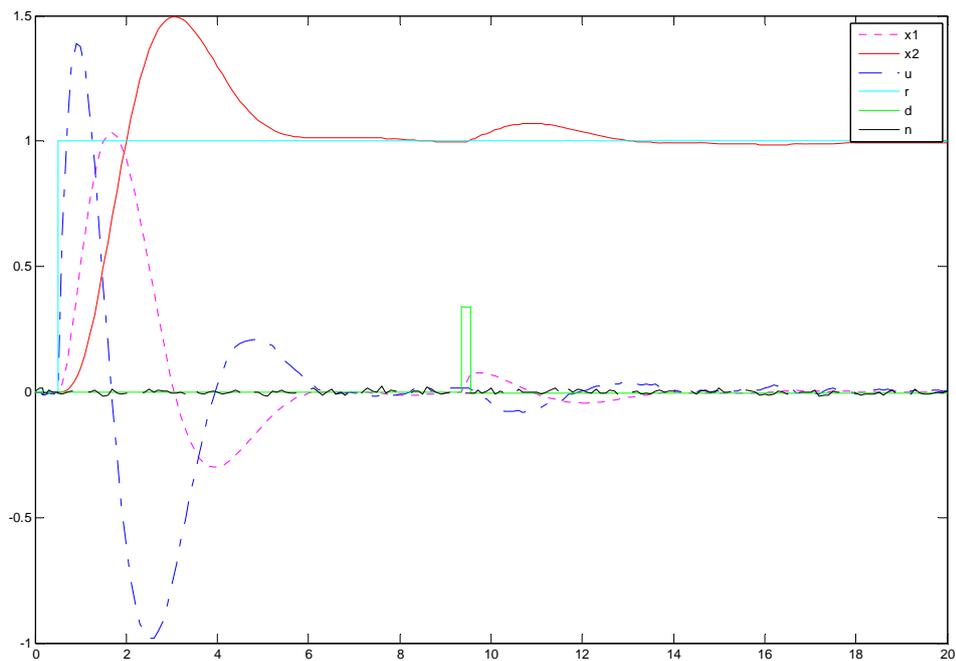


Figura 4-18 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con compromiso de desempeño H_2 y H_∞ .

Comparando las Figuras 4.17 y Figura 4.18 se aprecia claramente que la respuesta obtenida para el estado x_2 que es la salida tanto en tiempo de respuesta, así como en el sobrepico, es claramente muy parecida, sin embargo con el controlador diseñado para cumplir las especificaciones de minimiza la energía de los estados se observa que el efecto en la señal de control que tiene un valor pico en el primer caso de aproximadamente 3.8 disminuye en el segundo caso a un pico de aproximadamente 1.4. Igual sucede con el estado x_1 que en el primer caso tiene un valor pico de 1.5 aproximadamente, mientras que en segundo caso es de 1.

Finalmente veremos las respuestas en frecuencia de cada una de las entradas del sistema

$$w = \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \end{bmatrix}, \text{ con respecto a la salida } x_2.$$

Planteamos cada una de las funciones de transferencia con respecto a la salida.

- 1) Con respecto a la perturbación en el controlador.

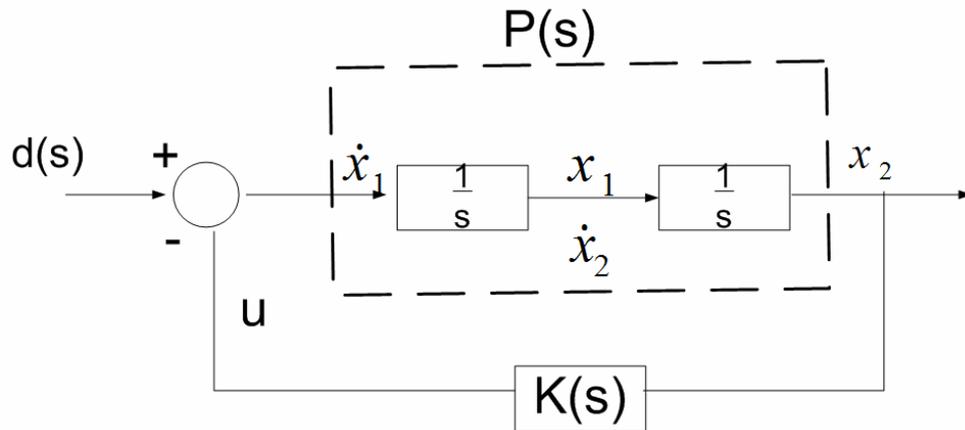


Figura 4-19 Diagrama de control x_2 respecto a $d(s)$

La ecuación de transferencia viene dada por:

$$x_2 = T_{dx_2} \cdot d(s) ;$$

$$T_{dx_2} = \frac{P(s)}{1 + K(s)P(s)}$$

de donde (esos parámetros son obtenidos a partir del programa).

$$P(s) = \frac{1}{s^2} ;$$

$$K(s) = \frac{7.37s + 2.979}{s^2 + 3.655s + 7.173} \quad y$$

$$T_{dx_2} = \frac{s^2 + 3.655s + 7.173}{s^4 + 3.655s^3 + 7.173s^2 + 7.37s + 2.979}$$

2) Con respecto al ruido en la medición.

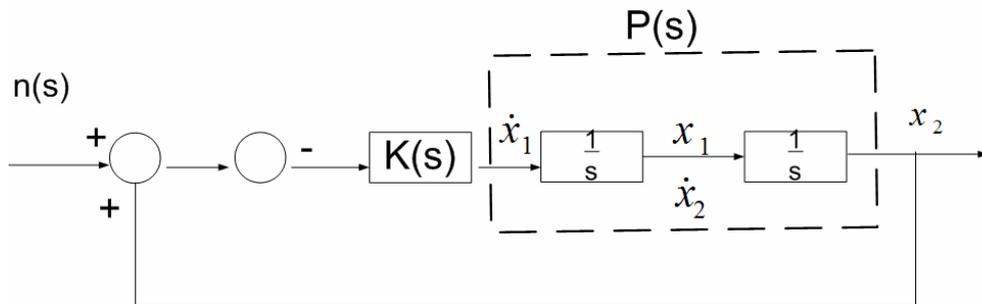


Figura 4-20 Diagrama de Control de x_2 con respecto a $n(s)$.

La ecuación de transferencia viene dada por:

$$x_2 = T_{nx_2} \cdot n(s) ;$$

$$T_{nx_2} = \frac{-K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)}$$

Por lo tanto

$$T_{nx_2} = \frac{-7.37s - 2.979}{s^4 + 3.655s^3 + 7.173s^2 + 7.37s + 2.979}$$

3) Con respecto a la referencia.

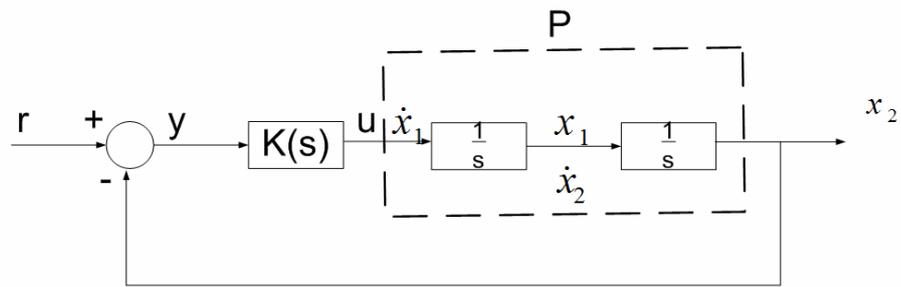


Figura 4-21 Diagrama de Control x_2 respecto a r

La ecuación de transferencia viene dada por:

$$x_2 = T_{rx_2} \cdot r ;$$

$$T_{rx_2} = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)}$$

Por lo tanto

$$T_{rx_2} = \frac{7.37s + 2.979}{s^4 + 3.655s^3 + 7.173s^2 + 7.37s + 2.979}$$

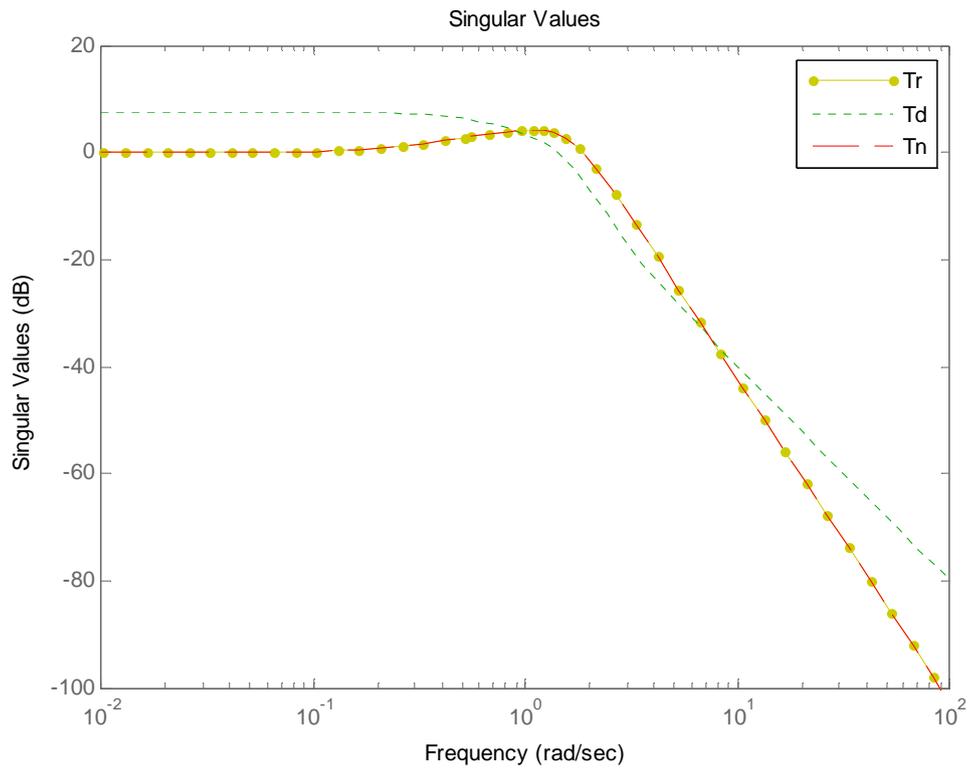


Figura 4-22 Respuesta de frecuencia de las funciones de transferencia de la salida x_2 con respecto al ruido, perturbación y referencia.

4.2 Sistema de levitador magnético.

Un sistema de suspensión magnética tiene como principio fundamental el que una bola de material magnético se suspende mediante un electroimán de corriente controlada por realimentación a través de una medición óptica de la posición de la bola. Este sistema tienen los ingredientes básicos de sistemas para levitación de masas usados en giroscopios, acelerómetros y trenes de alta velocidad [AW 97]. Las ecuaciones del sistema están dadas por:

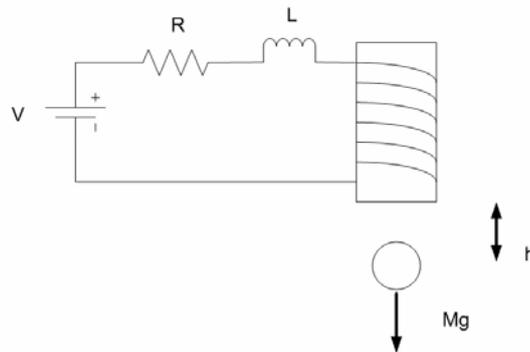


Figura 4-23 Sistema de suspensión magnética.

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} = M \cdot g - \frac{K \cdot i^2}{h}$$
$$V = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i$$

Donde:

h = posición vertical de la bola [m].

i = corriente en el electromagneto [Amp].

V = tensión aplicada [V].

M = masa de la bola [Kg].

g = gravedad [m/seg²].

L = inductancia [H].

R = resistencia [Ω].

K = coeficiente que determina la fuerza magnética ejercida a la bola [adimensional].

Dentro del sistema cabe destacar que se van a considerar los parámetros como constantes, esto es: $M=0.05$ Kg, $L=0.01$ H, $R= 1 \Omega$, $K=0.0001$ y $g= 9.8$ m/seg². Puesto que el sistema es de tipo no lineal a continuación procedemos a linealizar el sistema. Para ello diremos que el sistema se encuentra en equilibrio (la bola está suspendida en el aire) siempre que $h = \frac{K.i^2}{M.g}$, (y en este punto $\frac{dh}{dt} = 0$). Se linearizarán las ecuaciones alrededor

del punto $h=0.01$ m (usando $i = \sqrt{\frac{h.M.g}{K}}$; con lo que finalmente se obtiene la siguiente representación en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= h(t); & f_1 &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_1 &= \frac{dh(t)}{dt} = x_2; & f_2 &= \dot{x}_2 = g - \frac{0.0001/M}{x_1} \cdot x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{d^2h(t)}{dt^2}; & f_3 &= \dot{x}_3 = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} \cdot x_3 \\ x_3 &= i \end{aligned}$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1 &= h_0 = 0.01m; \\ x_2 &= \frac{dh}{dt} = 0; \\ x_3 &= \sqrt{\frac{h_0.M.g}{K}} = \sqrt{\frac{0.01*0.05*9.8}{0.0001}} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{0.0001*(x_3)^2}{M*(x_1)^2} = \frac{0.0001*7^2}{0.05*0.01^2} = 980 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= -2*\frac{x_3*0.0001}{x_1} = -2*\frac{\sqrt{h_0*M*g}*0.0001}{x_1*M} = -2*\frac{\sqrt{0.01*M*9.8*0.0001}}{\sqrt{0.0001*0.01*M}} = -\frac{0.626}{\sqrt{M}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= -\frac{R}{L} \\ \frac{\partial f_3}{\partial V} &= \frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_1} = 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & \frac{-0.626}{\sqrt{M}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0];$$

Donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ es el conjunto de variables de estado del sistema, u es la tensión de

entrada V y la salida Y es la altura h.

A partir de este momento entonces procedemos a diseñar el controlador via LMI's a través de criterios tales como la estabilidad y ubicación de polos. En primer lugar procedemos a analizar el sistema, para ver si este es estable o inestable. Las matrices correspondientes para este sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0];$$

Los polos del sistema se hallan a través de los valores propios de la matriz A, los cuales son:

$$\text{Polo1}=31.3050 ; \text{ polo2}= -31.3050 ; \text{ polo3}=-100.$$

Como [PA2006] se puede apreciar, uno de los polos se halla en el semiplano derecho, lo que significa que el sistema es inestable en lazo abierto.

Se puede entonces construir un controlador en especial, cuyos criterios de diseño sean:

Tiempo de establecimiento $t_s < 0.5\text{seg}$

Y un sobrepico $M_p < 5\%$

4.2.1 Caso 1: Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida.

El diseño a implementarse utilizará la ley de realimentación dinámica a la salida que presenta la Figura 4.24.

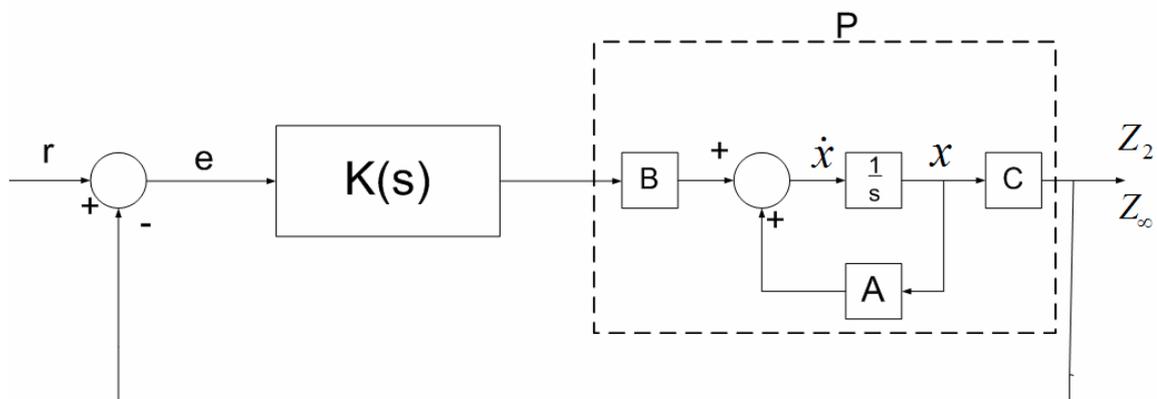


Figura 4-24 Diagrama de control con realimentación de la salida del levitador magnético.

a) Realimentando todas la variables de estado, minimización norma H2.

Dado el diagrama de control de la Figura 4-24, el sistema linealizado a lazo cerrado queda definido por las siguientes ecuaciones diferenciales, considerando que vamos a realimentar todas las variables de estado como son la altura x_1 , velocidad x_2 y corriente del sistema x_3 (esto se observa en el parámetro C_y).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [B]r + [B]u \\ z_\infty &= [C] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]r + [0]u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \\ C_\infty &= [1 \ 0 \ 0]; D_{\infty 1} = [0]; D_{\infty 2} = [0] \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El problema se resuelve mediante la función hinfmix de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Caso 1a Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida para todas las variables de estado.].

Los parámetros que se definen en la función hinfmix son:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix} (\text{P}, \text{r}, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$\text{P} = \text{ltisys}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$
 $\text{r} = [\text{z}_2 \text{ y u}] = [4 \ 3 \ 1]$
 $\text{obj} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, Diseño H_2 optimo
 $\text{region} = \text{lmireg}$,

Con lmireg se plantea una región lmi de tipo half plane y se tomará un valor de $\sigma = -1$ para la simulación de resultados, como se muestra en la figura 4.25.

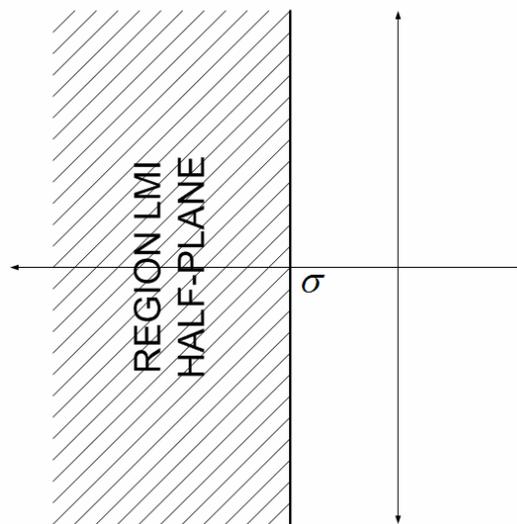


Figura 4-25 Región LMI tipo Half-Plane

Los resultados se evalúan usando simulink:

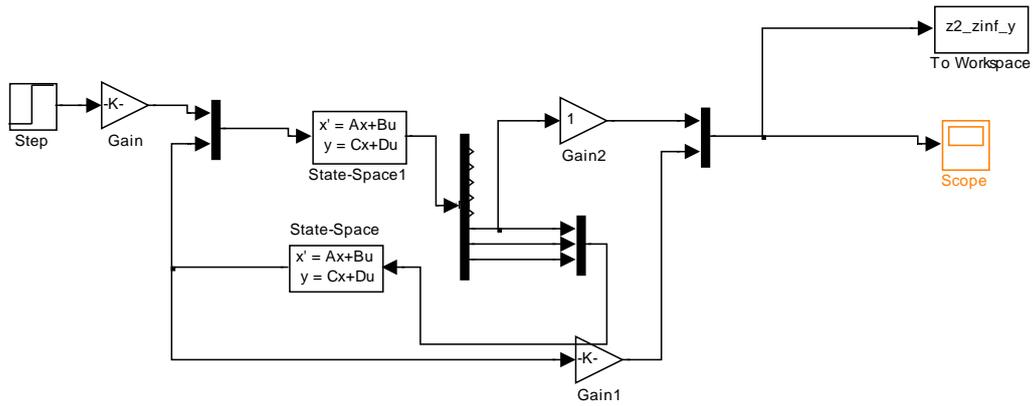


Figura 4-26 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.26, la salida del controlador (u) y el estado x son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales.

Encontrado el controlador, procedemos a la simulación del sistema con el controlador obtenido, consiguiendo la Figura 4.27.

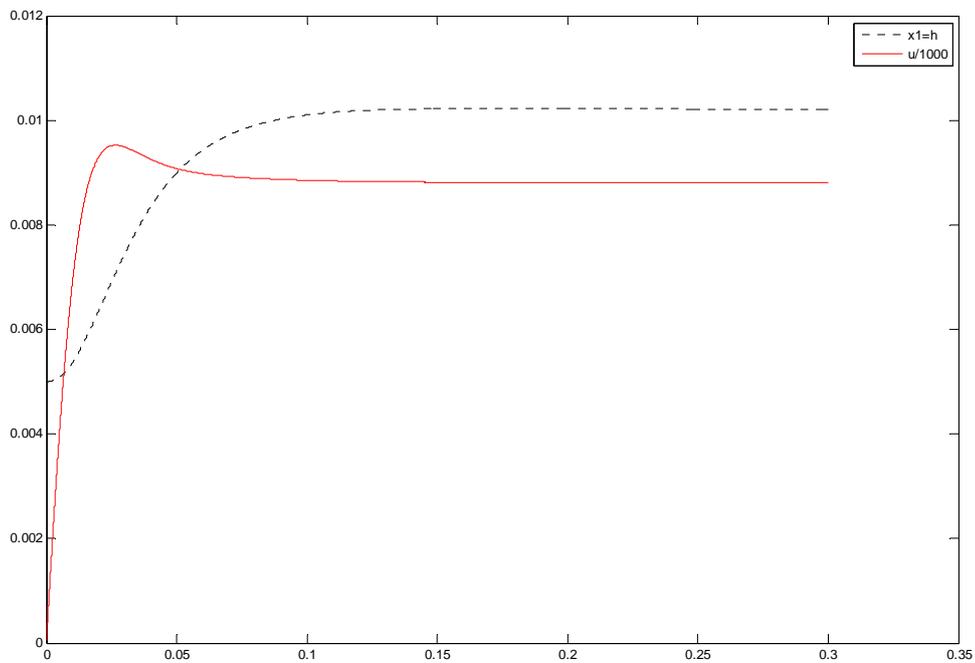


Figura 4-27 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con compromiso H2.

Se aprecia claramente que la respuesta obtenida para el estado x_1 (altura) deseado cumple con las especificaciones de desempeño, el tiempo de establecimiento de menor a 0.5 s y el sobrepico es $M_p < 5\%$, sin embargo se observa que el controlador diseñado genera mucha energía para cumplir las especificaciones de desempeño deseadas.

b) Realimentando las variables de estado: altura x_1 y corriente x_3 , minimización norma H2.

Dado el diagrama de control de la Figura 4-24, el sistema linealizado a lazo cerrado queda definido por las siguientes ecuaciones diferenciales, considerando que vamos solo a realimentar dos variables de estado como son la altura x_1 y corriente del sistema x_3 (esto se observa en el parámetro C_y).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [B]r + [B]u \\ z_\infty &= [C] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]r + [0]u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

de donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$C_\infty = [1 \ 0 \ 0]; D_{\infty 1} = [0]; D_{\infty 2} = [0]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El problema se resuelve mediante la función `hinfmix` de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Caso 1b Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida para las variables de estado altura y corriente].

Los parámetros que se definen en la función `hinfmix` son:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, \text{r}, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{P} &= \text{ltisys}(A, B, C, D) \\ \text{r} &= [z_2 \text{ y } u] = [4 \ 2 \ 1]; \\ \text{obj} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1], \text{ Diseño } H_2 \text{ optimo} \\ \text{region} &= \text{lmireg}, \end{aligned}$$

Con `lmireg` se plantea una región `lmi` de tipo half plane y se tomará un valor de sigma $\sigma = -1$ para la simulación de resultados, como se muestra en la figura 4.28.

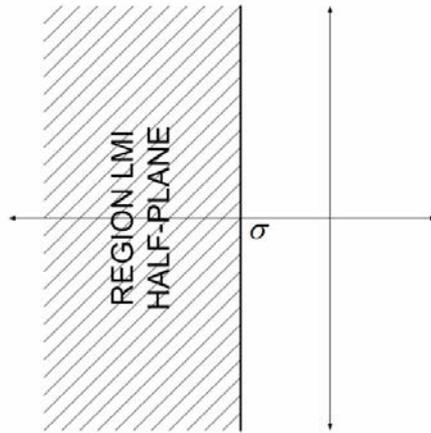


Figura 4-28 Región LMI tipo Half-Plane

Los resultados se evalúan usando simulink:

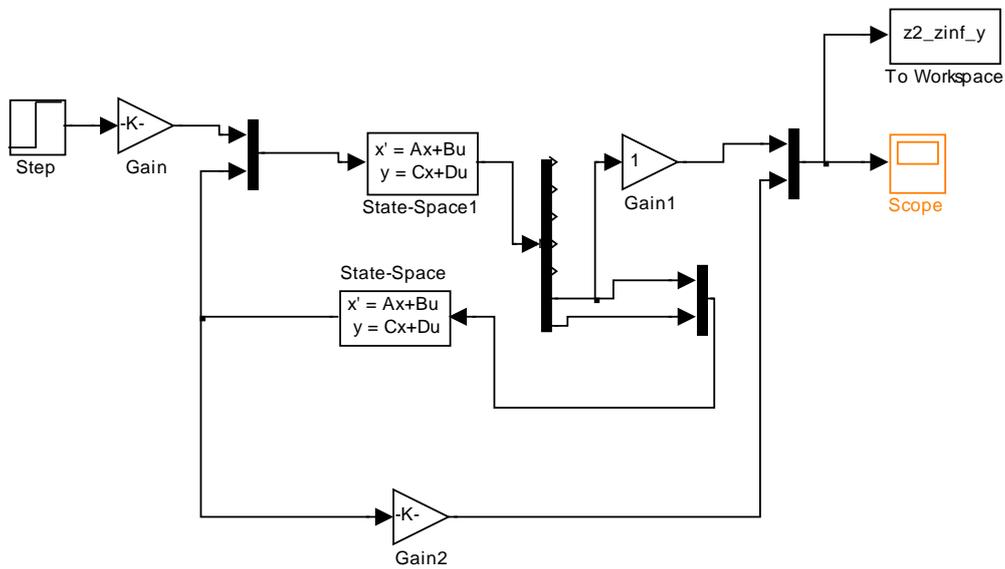


Figura 4-29 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.29, la salida del controlador (u) y el estado x son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales.

Encontrado el controlador, procedemos a la simulación del sistema con el controlador obtenido, consiguiendo la Figura 4.30.

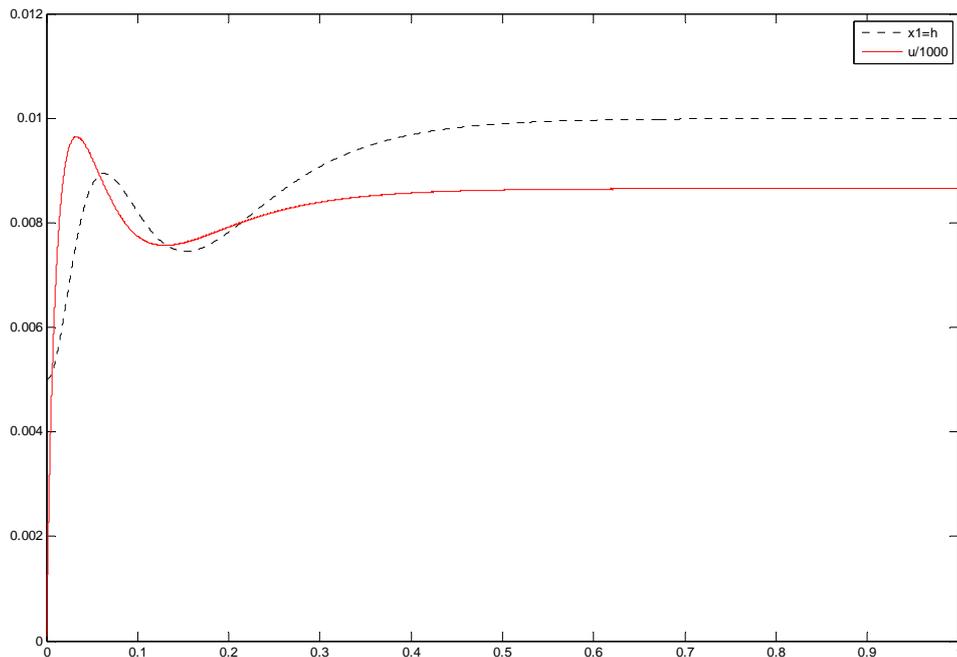


Figura 4-30 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con compromiso H2.

Se aprecia claramente que la respuesta obtenida para el estado x_1 (altura) deseado cumple con las especificaciones de desempeño, el tiempo de establecimiento de menor a 0.5 s y el sobrepico es $M_p < 5\%$ sin embargo se observa que el controlador diseñado genera mucha energía para cumplir las especificaciones de desempeño deseadas.

c) Realimentando todas la variables de estado, minimización norma H_∞ .

Dado el diagrama de control de la Figura 4-24, el sistema linealizado a lazo cerrado queda definido por las siguientes ecuaciones diferenciales, considerando que vamos a realimentar todas las variables de estado como son la altura x_1 , velocidad x_2 y corriente del sistema x_3 (esto se observa en el parámetro C_y).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [B]r + [B]u \\ z_\infty &= [C] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]r + [0]u \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \\ C_\infty &= [1 \ 0 \ 0]; D_{\infty 1} = [0]; D_{\infty 2} = [0] \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El problema se resuelve mediante la función hinfmix de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Caso 1a Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida para todas las variables de estado.].

Los parámetros que se definen en la función hinfmix son:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix} (\text{P}, \text{r}, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$\text{P} = \text{ltisys}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$
 $\text{r} = [\text{z}_2 \text{ y u}] = [4 \ 3 \ 1];$
 $\text{obj} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, Diseño H_∞ optimo
 $\text{region} = \text{lmireg},$

Con lmireg se plantea una región lmi de tipo half plane y se tomará un valor de sigma $\sigma = -1$ para la simulación de resultados, como se muestra en la figura 4.31.

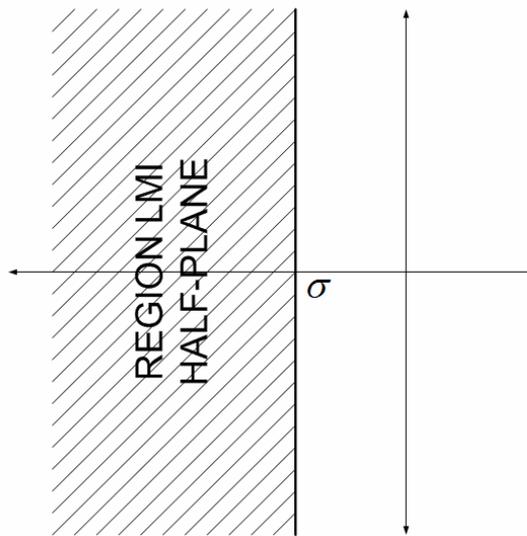


Figura 4-31 Región LMI tipo Half-Plane

Los resultados se evalúan usando simulink:

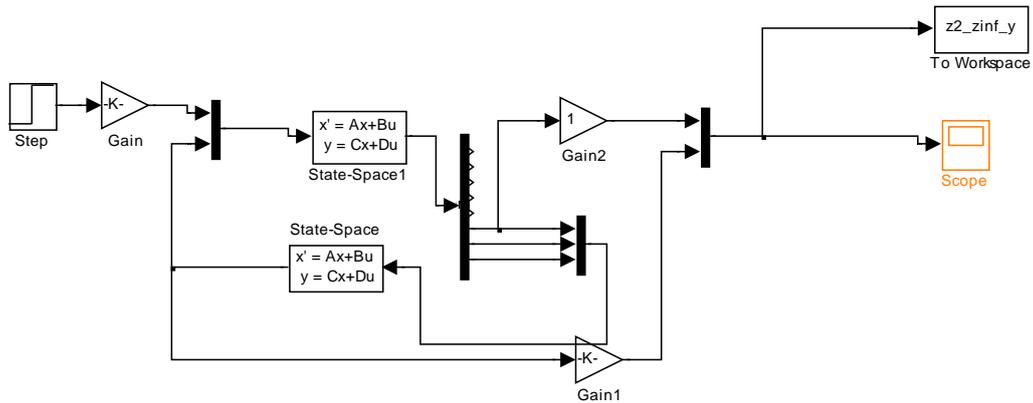


Figura 4-32 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.32, la salida del controlador (u) y el estado x son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales.

Encontrado el controlador, procedemos a la simulación del sistema con el controlador obtenido, consiguiendo la Figura 4.33.

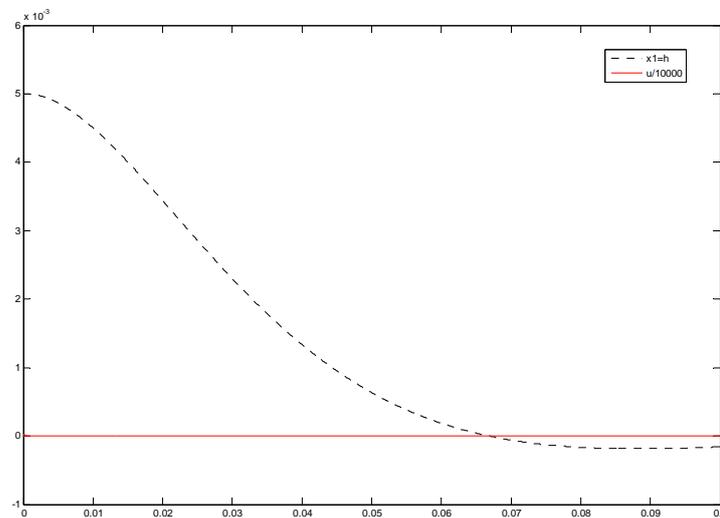


Figura 4-33 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con compromiso H_∞ .

Es muy apreciable en la figura 4-33 la pérdida en el seguimiento de la respuesta (altura de la bola). Para solucionar este problema se plantea la incorporación de un integrador que permitirá el seguimiento de la señal de referencia.

4.2.2 Caso 2: Diseño del controlador con compromiso H_2/H_∞ utilizando realimentación de la salida más control integral.

El diseño a implementarse utilizará la ley de realimentación dinámica a la salida más control integral que presenta la Figura 4.34.

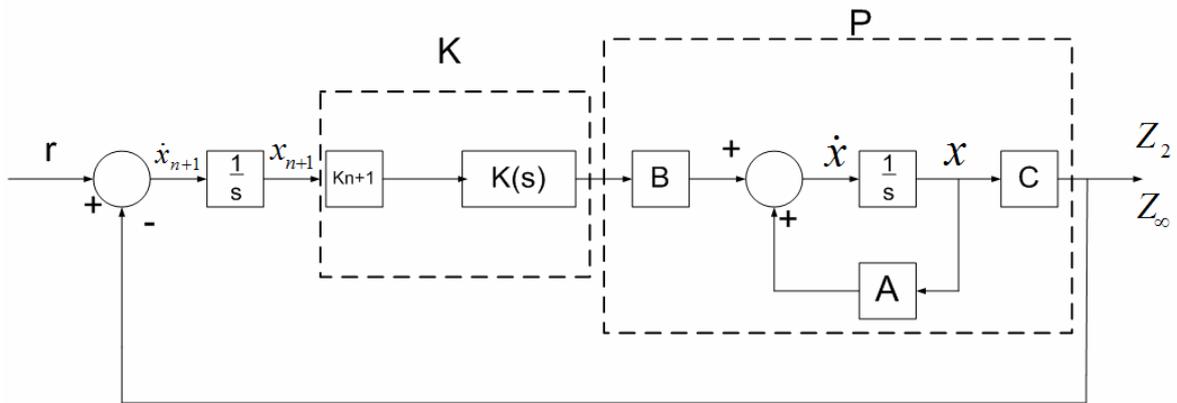


Figura 4-34 Diagrama de control con realimentación de la salida del levitador magnético.

Se plantea un nuevo vector de estados del sistema $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$ donde se observa los estados originales de la planta y un nuevo estado que resulta de la incorporación de un integrador asociado a la señal de error resultante de la diferencia entre la referencia y la salida del sistema, con lo que se pretende asegurar el seguimiento de la señal de referencia que permita eliminar el error del sistema.

Dado el diagrama de control de la Figura 4-34, el sistema linealizado a lazo cerrado queda definido por las siguientes ecuaciones diferenciales, considerando que vamos a realimentar todas las variables de estado como son la altura x_1 , velocidad x_2 y corriente del sistema x_3 y la variable del control integral x_{n+1} (esto se observa en el parámetro C_y).

$$\bar{\dot{x}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z_\infty = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + [0]r + [0]u$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

de donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_\infty = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; D_{\infty 1} = [0]; D_{\infty 2} = [0]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El problema se resuelve mediante la función `hinfmix` de MATLAB mediante el código que se encuentra en el ANEXO 2 [Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida mas control integral para las todas las variables de estado.].

Los parámetros que se definen en la función `hinfmix` son:

$$[gopt, h2opt, K] = \text{hinfmix}(P, r, \text{obj}, \text{reg})$$

de donde

$$P = \text{ltisys}(A, B, C, D)$$

$$r = [z_2 \text{ y } u] = [4 \ 3 \ 1];$$

$$\text{obj} = [g \ 0 \ 0 \ 1], \text{ Minimice } \|T_2\|_2 \text{ sujeto a } \|T_\infty\|_\infty < g$$

$$\text{region} = \text{lmireg},$$

Con `lmireg` se plantea una región lmi de tipo half plane y se tomará un valor de sigma $\sigma = -10$ para la simulación de resultados, como se muestra en la figura 4.35.

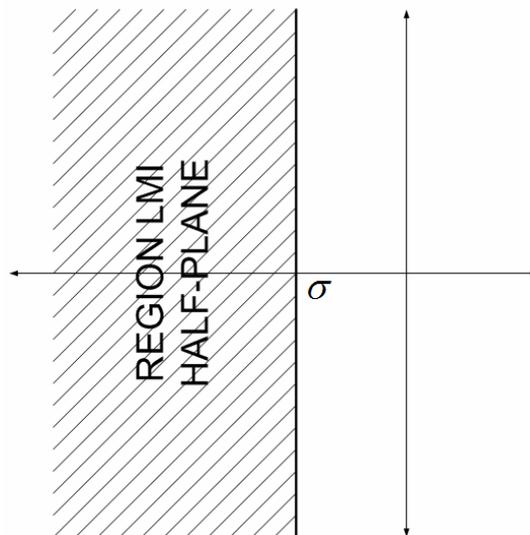


Figura 4-35 Región LMI tipo Half-Plane

A partir del algoritmo del programa en Matlab se encuentra el rango de variación de la norma H_∞ . Se calcula para un conjunto de normas H_∞ predefinidas todos los compromisos

H_2/H_∞ y se elige el mejor desempeño posible. Se encontró que para las especificaciones planteadas, el rango de H_∞ esta descrito en el intervalo de 2 a 9.

Por inspección y por mejor compromiso se escoge como Norma $H_2=2623$ y $H_\infty=3$ de acuerdo a las Figura 4-36.

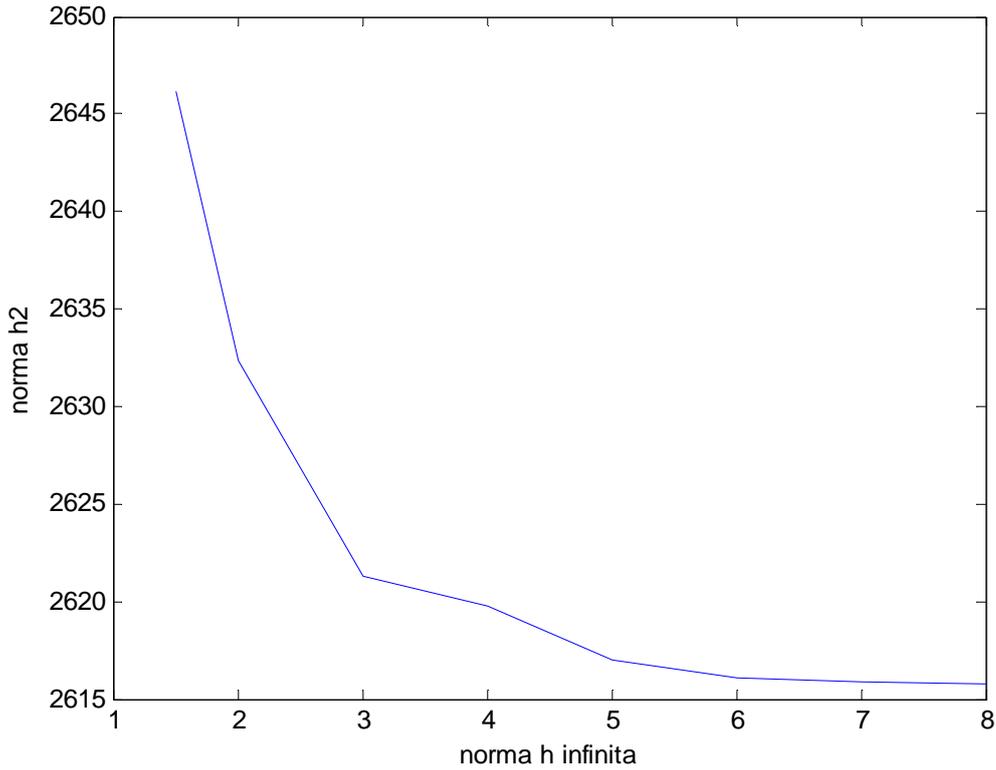


Figura 4-36 Compromiso H_2/H_∞ para el levitador magnético

Los resultados se evalúan usando simulink:

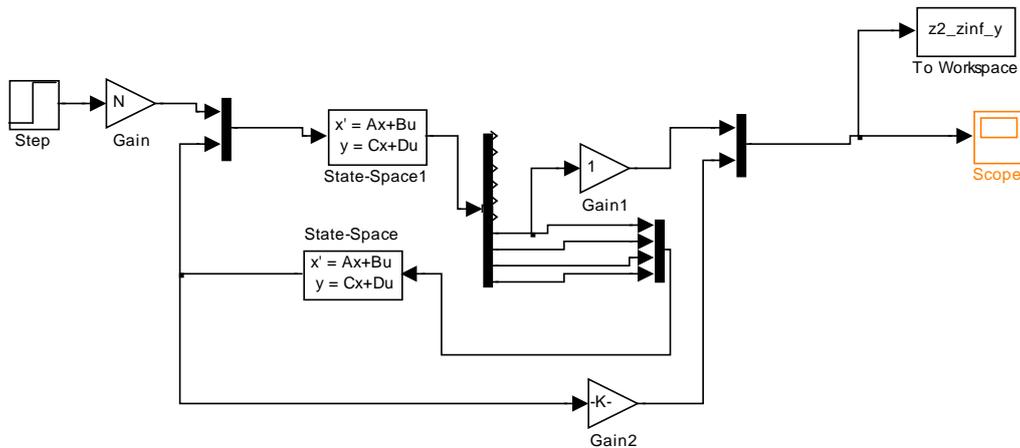


Figura 4-37 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.

Como se observa en la Figura 4.37, la salida del controlador (u) y el estado x son atenuadas según los casos de estudio para graficar en los mismos ejes todas las señales.

Encontrado el controlador, procedemos a la simulación del sistema con el controlador obtenido, consiguiendo la Figura 4.38.

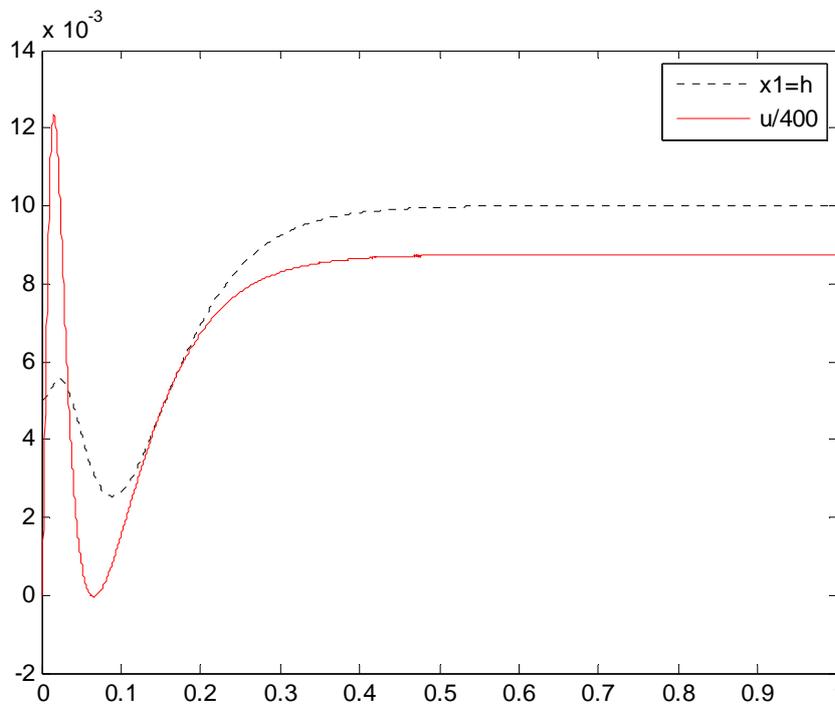


Figura 4-38 Respuesta del sistema con $\sigma = -10$ para compromiso H_2/ H_∞ del levitador magnético

Se aprecia claramente que la respuesta obtenida para el estado x_1 (altura) deseado cumple con las especificaciones de desempeño, el tiempo de establecimiento de menor a 0.5 s y el sobrepico es $M_p < 5\%$, sin embargo se observa que el controlador diseñado para cumplir las especificaciones de diseño es de amplitud muy grande además de sobrepicos pronunciados.

CAPITULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo, se muestra el método de diseño de controladores robustos mediante realimentación dinámica a la salida, que se basa en la utilización de herramientas, técnicas y métodos disponibles del control moderno como son las LMI (Desigualdades Matriciales Lineales), la normas H_2 y H_∞ , teoría de Lyapunov que puede ser llamada la única técnica universal que se enfoca en la estabilidad.

Como se evidencia en los problemas tratados en este trabajo, las especificaciones de desempeño que se desea obtener, se puede lograr especificando las regiones LMI para definir criterios de amortiguamiento y tiempos de respuesta, la norma H_2 para la energía de una Función de Transferencia de las señales de control y de los estado y la norma H_∞ para minimizar las ganancias rms de las perturbaciones.

El modelamiento matemático para obtener dichos controladores, requiere la descripción del sistema de control en el espacio de estados de sistema. Con el espacio de estados, se puede obtener matrices, que tiene toda la información relacionada como son las perturbaciones, ruido, referencia, etc. Mientras más información ingresemos para el modelamiento del controlador, obtendremos un controlador más óptimo.

El problema de realimentación de la salida se presenta como un problema mucho más complejo que el de control H_∞ mediante realimentación de estados. Sin embargo, la función `hinfmix` del Matlab hace que esta implicación se vuelva transparente para el usuario.

La formulación mediante LMI's del problema de control multi-objetivo mediante la realimentación de salida requiere la parametrización de un nuevo controlador en términos del controlador original.

Esta parametrización se hace necesaria debido a que en la formulación del problema multi-objetivo aparece la multiplicación de la matriz de Lyapunov por la matriz del controlador lo que constituye una desigualdad matricial no lineal.

La técnica de control multi-objetivo H_2 / H_∞ requiere establecer un compromiso entre la especificación H_2 y la especificación H_∞ puesto que cuando se mejora la una, se deteriora la otra. Se concluye también que al diseñar un controlador solamente con especificación H_∞ , genera señales de control bastante grandes lo que significa que se hace necesarios controladores de gran energía.

Con LMI CONTROL TOOLBOX de Matlab, se utilizó la función `hinfmix`, que permite llevar a cabo que las LMI se acerquen a las especificaciones de control H_2 / H_∞ con la ubicación de polos regional (Desempeño Multi-Objeto). Los parámetros ingresados en la función `hinfmix` son obtenidos de acuerdo espacio de estados del sistema y a los requerimientos que se desea en la respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[JBA90] John Doyle Bruce Francis Allen Tannenbaum. Feedback Control Theory. 1990.

[CS1999] Carsten Scherer Siep Weiland. Linear Matriz Inequalities in Control. 1999.

[JH2007] Joao P. Hespanha. Undergraduate Lecture Notes on Robust Control. 2007

[PA2006] Victor Proaño Edwin Aguilar. Aplicación de las LMI al Diseño de Controladores Robustos,.2006.

[GNLC5] P. Gahinet Arkkadi Nemorovski A. Laub M. Chilili. LMI Control Toolbox For use with Matlab. 1995.

[AW97] Addison-Wheley. Tutorial de Espacio de estados.
http://www.ib.cnea.gov.ar/~control2/Links/Tutorial_Matlab_esp/state.html.

[JC2005] José Bernardo Coterio Ochoa, Control Clásico y Control Inteligente. 2005.

[CP1999] Chen J. & Patton R. (1999). Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. Kluwer Academic Publishers.

[CG1996] M. Chilali and P. Gahinet H. Design with poles placement. LMI 1996

ANEXOS 1

1.- Definición de función afín:

Una función $f : s \rightarrow T$ es afine si:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Para todo $x_1, x_2 \in s$ y $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Si s y T son dimensionalmente finitos entonces cualquier función afine $f : s \rightarrow T$ puede ser representada como $f(x) = f_0 + T(x)$ donde $f_0 \in T$ y $T : s \rightarrow T$ es un mapa lineal. De hecho, fijando $f_0 = f(0)$ y $f(x) = f_0 + T(x)$ establecen esta representación.

En particular, $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ es afine si y solamente si existe $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ tal que $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0)$ donde T es una matriz de dimensión $m \times n$.

2.- Definición de Combinación Convexa

Sea s un subsistema de vector de espacio. El punto

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

es llamada una combinación convexa de $x_1, \dots, x_n \in s$ si $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Es fácil ver que el sistema de todas las combinaciones convexas de n puntos x_1, \dots, x_n en s es convexa, es decir, $C := \{x \mid x \text{ es una combinación convexa de } x_1, \dots, x_n\}$ es convexa.

ANEXOS 2

1.- Calculo Norma 2 y Norma ∞

% calculo de la norma h2 y h infinito por el método de bisección y con la

% función de Matlab hinfnorm y gráficamente.

format short

clc

% Constantes del Sistema

k1=1;

k2=4;

b1=0.2;

b2=0.1;

m1=1;

m2=2;

% Modelo en Espacio de Estados

a=[0 0 1 0; 0 0 0 1; -k1/m1 k1/m1 -b1/m1 b1/m1; k1/m2 -(k1+k2)/m2 b1/m2 -(b1+b2)/m2]

b=[0 0 ;0 0; 1/m1 0; 0 1/m2]

c= [1 0 0 0;0 1 0 0]

d=[0 0 ;0 0]

%%%

%Calculo de la Norma H2

p=gram(a,b);

q=gram(a',c');

p1=lyap(a,b*b')

%Comprobación

```
C1=a*p+p*a'+b*b'
```

```
C2=a'*q+q*a+c'*c
```

```
%Calculo por definicion
```

```
H2=sqrt(trace(b'*q*b))
```

```
H2a=sqrt(trace (c*p*c'))
```

```
%Calculo H2 por comando
```

```
G=pck(a,b,c,d);
```

```
H2b=h2norm(G)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Calculo de la Norma inf
```

```
%Algoritmo de Biseccion
```

```
for gama = 100 : -0.01: 1,
```

```
R=gama^2*eye(2)-d'*d;
```

```
H=[a+b*inv(R)*d*c b*inv(R)*b';-c'*(eye(2)+d*inv(R)*d)*c -(a+b*inv(R)*d*c)'];
```

```
V1=eig(H);
```

```
V1=real (V1);
```

```
V1=abs (V1);
```

```
V= V1(1);
```

```
if V<0.0001
```

```
    NormHinfBis = gama
```

```
    break
```

```
end
```

```
end
```

```
%Calculo Hinf por comandos
```

```
G=pck(a,b,c,d);
NormHinf=hinfnorm(G,0.0001)
```

```
%Grafico Hinf vs W
w=logspace (-1,1,200);
Gf=frsp(G,w);
[u,s,v]=svd(Gf);
vplot('liv,lm',s),grid
```

2.- Optimización de la norma H_2 , Función msfsyn.

```
clc
clear all
close all
```

```
%Planteamiento de las matrices de estado
```

```
A=[0 0;1 0]
```

```
B1=[1;0];
B2=[1;0];
B=[B1 B2]
```

```
C=[1 0 ; 0 1; 0 0]
```

```
D21=[0;0;0];
D22=[0;0;1];
D=[D21 D22]
P=ltisys(A,B,C,D)
```

```
% Solucion del problema de colocacion de polos
%obj=[0 0 1 0]; % Hinf diseño optimo
%obj=[0 0 0 1]; % H2 diseño optimo
%obj=[0.01 0 0 1]; % minimize  $\|G_{wy}\|_2$ , subject to  $\|G_{wz}\|_{\infty} < \text{gam}$ 
%obj=[0 0 0 0]; % solo colocacion de polo
```

```
%Funcion msfsyn
```

```
[gopt,h2opt,K,PCL,Gcc]=msfsyn(P,[3 1],obj);
```

```
%Matrices realimentadas
```

```
Ak=A+B2*K;
```

```
Bk=B1;  
Ck=C+D22*K;  
Dk=D21;
```

```
%Figura 2.25
```

```
sys1=ss(Ak,Bk,Ck(1,:),0);  
sys2=ss(Ak,Bk,Ck(2,:),0);  
sys3=ss(Ak,Bk,Ck(3,:),0);  
t=0:0.01:5;  
impulse(sys1,t);  
hold on  
impulse(sys2,t);  
impulse(sys3,t);
```

3.- Sistema de Control H_2/H_∞ . Función msfsyn.

```
clc  
clear all  
close all  
format short
```

```
%Matrices Planteadas
```

```
A=[0 0;1 0]
```

```
B1=[1;0];  
B2=[1;0];  
B=[B1 B2]
```

```
C1=[0 1];  
C2=[1 0 ; 0 1; 0 0];  
C=[C1;C2]
```

```
D11=[0];  
D12=[0];  
D21=[0;0;0];  
D22=[0;0;1];
```

```
D=[D11 D12;D21 D22]
```

```
%Cambio de una matrices de estados a un sistema LTI
```

```
P=ltisys(A,B,C,D)
```

%Constantes gam para especificaciones de desempeño.

```
g=[0.02 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7]'
```

```
figure(1)
```

```
for i=1:1:8
```

```
    [gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(P,[3 1],[g(i) 0 0 1]);
```

```
    g(i)
```

```
    K
```

% se extrae el subsistema del cual se esta optimizando la norma.Figura 2-26

```
sysinf=ssub(Pcl,1,1);
```

```
[ainf,binf,cinf,dinf]=ltiss(sysinf);
```

```
[numinf,deninf]=ss2tf(ainf,binf,cinf,dinf);
```

```
sysinf=tf(numinf,deninf);
```

```
ginf(i)=normhinf(sysinf)
```

```
At=A+B2*K;
```

```
Pl=lyap(At,B2*B2');
```

```
C2t=C2+D22*K;
```

```
g2(i)=trace(C2t*Pl*C2t')
```

```
hold on
```

```
end
```

```
plot(ginf,g2)
```

```
xlabel('norma h infinita')
```

```
ylabel('norma h2')
```

```
K=[-4.68 -10.45]
```

```
At=A+B2*K;
```

```
Pl=lyap(At,B2*B2');
```

```
C2t=C2+D22*K
```

%Figura 2-27

```
figure(2)
```

```
sys1=ss(At,B,C2t(1,:),0);
```

```
sys2=ss(At,B,C2t(2,:),0);
```

```
sys3=ss(At,B,C2t(3,:),0);
```

```
t=0:0.01:5;
```

```
impulse(sys1,t);
```

```
hold on
```

```
impulse(sys2,t);
```

```
impulse(sys3,t);
```

4.- Control h2-hinf y ubicación de polos, problema viga y la bola. Función hinfmix.

```
clc
```

```
%Matrices de estado.
```

```
A=[0 0;1 0];  
B1=[0;0];  
B2=[1;0];  
B=[B1 B2];
```

```
Cinf=[0 1];  
C2=[1 0;0 1;0 0];  
Cy=[0 -1];  
C=[Cinf;C2;Cy];
```

```
Dinf1=[0];  
Dinf2=[0];  
D21=[0;0;0];  
D22=[0;0;1];  
Dy1=[1];  
D=[Dinf1 Dinf2;D21 D22;Dy1 0];
```

```
%Cambio de matrices de estados a un sistema LTI
```

```
P1=ltisys(A,B,C,D);
```

```
%Parametros para la funcion hinfmix
```

```
r=[3 1 1];  
reg=lmireg;
```

```
% Solucion del problema de colocación de polos  
%obj=[0 0 0 0]; % solo colocación de polo  
%obj=[0 0 1 0]; % Hinf diseño optimo  
%obj=[0 0 0 1]; % H2 diseño optimo
```

```
[gopt,h2opt,K]=hinfmix(P1,r,obj,reg);
```

```
% Extrae la matriz de espacio de estados de un sistema LTI.(Controlador)
```

```
[ak,bk,ck,dk]=ltiss(K)
```

5.- Sistema de control H_2/H_∞ , problema viga y la bola. Función hinfmix .

```
clc
clear all
close all
format short

%Matrices de estado del problema

A=[0 0;1 0];
B1=[1 0 0;0 0 0];
B2=[1;0];
B=[B1 B2];

cinf=[0 1];
c2=[1 0 ; 0 1; 0 0];
cy=[0 -1]
C=[cinf;c2;cy];

dinf1=[0 0 0];
dinf2=[0];
d21=[0 0 0;0 0 0;0 0 0];
d22=[0;0;1];
dy1=[0 -1 1];
D=[d21 d22;dinf1 dinf2;dy1 0];

%Cambio de matrices de estados a un sistema LTI

P=ltisys(A,B,C,D);

reg=lmireg

g=[2 3 4 5 6 7 8 9]'

% Compromiso de los desempeños  $H_2 H_\infty$  . Figura 4-16

for i=1:1:8
    [gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix(P,[3 1 1],[g(i) 0 0 1],reg);

    g(i)
    Ninf(i)=gopt;
    N2(i)=h2opt;
end

N2
Ninf
```

```
figure(1)
plot(Ninf,N2)
xlabel('norma h infinita')
ylabel('norma h2')
```

% Se escoje el valor de 3 para obtener el mejor desempeño según la Figura 4.26

```
[gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix(P,[3 1 1],[3 0 0 1]);
```

% Extrae la matriz de espacio de estados de un sistema LTI.(Controlador)

```
[ak,bk,ck,dk]=ltiss(K)
```

% Planteo de las funciones de transferencia del sistema de Control.

```
n1=[1];
d1=[1 0 0];
T1=tf(n1,d1);
[n2,d2]=ss2tf(ak,bk,ck,dk);
T2=tf(n2,d2);
```

```
Gra=series(T1,T2);
```

%Funcion de transferencia con respecto a las perturbaciones.

```
Gd=feedback(T1,T2,-1)
```

%Funcion de transferencia con respecto al ruido.

```
Gn=-feedback(Gra,1)
```

%Funcion de transferencia con respecto a la referencia.

```
Gr=feedback(Gra,1)
```

% Respuesta de frecuencia de las funciones de transferencia de la salida x_2 con respecto al ruido, perturbación y referencia

```
figure(2)
```

```
hold on
sigma(Gr)
```

```
sigma(Gd)
```

```
sigma(Gn)
```

```
hold off
```

6.- Caso 1a Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida para todas las variables de estado.

%Matrices de estado del problema

```
A = [ 0 1.0000 0; 980.0000 0 -2.8000; 0 0 -100.0000]
B=[0;0;100]
C=[1 0 0];
```

```
B1=[0;0;100]; % w es r y al tercer estado se suma la referencia
B2=B; % solo el tercer estado es afectado por la entrada de control
Ci=[1 0 0];% solo interesa la salida del primer estado que es desplazamiento
Di1=[0]; % no se toma en cuenta la señal de referencia
Di2=[0]; % tampoco la señal de control
C2=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1;0 0 0]; % se desea minimizar la energia en los estados
D21=[0;0;0;0] % sin tomar en cuenta la señal de referencia
D22=[0;0;0;1] % pero si minimizar la energia de las señales de control
Cy=[1 0 0;0 1 0;0 0 1]; % se miden todos los estados
Dy1=[0;0;0]; Dy2=[0;0;0] % no se tiene informacion de las señales exogenas, ni de la señal de control
```

% El controlador tiene informacion de los estados y del error de la variable de proceso

```
Bt=[B1 B2]
Ct=[Ci;C2;Cy]
Dt=[Di1 Di2;D21 D22;Dy1 Dy2]
```

%Cambio de matrices de estados a un sistema LTI

```
P=ltisys(A,Bt,Ct,Dt)
```

%Especificaciones de la función hinfmix.

```
r=[4 3 1]
obj=[0 0 0 1];% [0 0 1 0] h infinito; [0 0 0 1] h2
% region =lmireg
region = [2.0000 + 1.0000i 1.0000]; % half plane sigma =-1
```

```
[gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix(P,r,obj,region)
```

%Controladores de Matrices de estados

```
[ak,bk,ck,dk]= ltiss(K)
```

%

```
N=1/(C*inv(A+B*dk(:,1:3))*B)
```

7.- Caso 1b Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida para las variables de estado altura y corriente.

% Problema de levitador magnetico

```
A = [ 0 1.0000 0; 980.0000 0 -2.8000; 0 0 -100.0000]
B=[0;0;100]
```

```
C=[1 0 0];
```

```
B1=[0;0;100]; % w es r y al tercer estado se suma la referencia
B2=B; % solo el tercer estado es afectado por la entrada de control
Ci=[1 0 0];% solo interesa la salida del primer estado que es desplazamiento
Di1=[0]; % no se toma en cuenta la señal de referencia
Di2=[0]; % tampoco la señal de control
C2=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1;0 0 0]; % se desea minimizar la energia en los estados
D21=[0;0;0;0] % sin tomar en cuenta la señal de referencia
D22=[0;0;0;1] % pero si minimizar la energia de las señales de control
Cy=[1 0 0;0 0 1]; % se miden todos los estados
Dy1=[0;0]; Dy2=[0;0] % no se tiene informacion de las señales exogenas, ni de la
señal de control
```

% El controlador tiene informacion de los estados y del error de la variable de proceso

```
Bt=[B1 B2]
Ct=[Ci;C2;Cy]
Dt=[Di1 Di2;D21 D22;Dy1 Dy2]
```

%Cambio de matrices de estados a un sistema LTI

```
P=ltisys(A,Bt,Ct,Dt)
```

%Especificaciones de la función hinfmix.

```
r=[4 2 1]
obj=[0 0 0 1];% [0 0 1 0] h infinito; [0 0 0 1] h2
% region =lmireg
region = [2.0000 + 1.0000i 1.0000]; % half plane sigma =-1
```

```
[gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix(P,r,obj,region)
```

%Controladores de Matrices de estados

```
[ak,bk,ck,dk]= ltiss(K)
```

%

```
Bdk1=[B*dk zeros(3,1)]
N=1/(C*inv(A+Bdk1)*B)
```

8.- Diseño del controlador utilizando realimentación de la salida mas control integral para las todas las variables de estado.

% Problema de levitador magnetico

```
A = [ 0 1.0000 0; 980.0000 0 -2.8000; 0 0 -100.0000]
B=[0;0;100]
C=[1 0 0];
```

```
B1=[0;0;100]; % w es r y al tercer estado se suma la referencia
B2=B; % solo el tercer estado es afectado por la entrada de control
Ci=[1 0 0];% solo interesa la salida del primer estado que es desplazamiento
Di1=[0]; % no se toma en cuenta la señal de referencia
Di2=[0]; % tampoco la señal de control
C2=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1;0 0 0]; % se desea minimizar la energia en los estados
D21=[0;0;0;0] % sin tomar en cuenta la señal de referencia
D22=[0;0;0;1] % pero si minimizar la energia de las señales de control
Cy=[1 0 0;0 1 0;0 0 1]; % se miden todos los estados
Dy1=[0;0;0]; Dy2=[0;0;0] % no se tiene informacion de las señales exogenas, ni de la señal de control
```

% El controlador tiene informacion de los estados y del error de la variable de proceso

```
Bt=[B1 B2]
Ct=[Ci;C2;Cy]
Dt=[Di1 Di2;D21 D22;Dy1 Dy2]
```

%Cambio de matrices de estados a un sistema LTI

```
P=ltisys(A,Bt,Ct,Dt)
```

%Controladores de Matrices de estados

```
r=[4 3 1]
obj=[0 0 0 1];% [0 0 1 0] h infinito; [0 0 0 1] h2
% region =lmireg
region = [2.0000 + 1.0000i 1.0000]; % half plane sigma =-1
[gopt,h2opt,K,R,S] = hinfmix(P,r,obj,region)
```

%Controladores de Matrices de estados

```
[ak,bk,ck,dk]= ltiss(K)
```

```
%
N=1/(C*inv(A+B*dk(:,1:3))*B)
```

INDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Un sistema masa/resorte/amortiguador.....	12
Figura 2-2 $\ G\ _{\infty}$ es el pico del valor singular superior de $G(j\omega)$	15
Figura 2-3 Aleksandr Mikhailovich Lyapunov	16
Figura 2-4 Representación de bloques de un sistema.....	24
Figura 2-5 Diagrama de un sistema dinámico.....	25
Figura 2-6 Esquema de un sistema retroalimentado de control.....	26
Figura 2-7 Retroalimentación directa de estado.....	27
Figura 2-8 Retroalimentación de estado usando estimados.....	28
Figura 2-9 Lazo de la Planta de Control con Incertidumbre.....	31
Figura 2-10 Diagrama de representación de $F_l(M, \Delta_l)$ y $F_u(M, \Delta_u)$	37
Figura 2-11 Diagrama de bloques de un sistema realimentado.....	40
Figura 2-12 Formulación de dos puertos del sistema realimentado.....	40
Figura 2-13 Sistema de Control con incertidumbre en la Planta.....	42
Figura 2-14 Sistema Resorte/masa/amortiguador	43
Figura 2-15 Diagrama de Bode de $P(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$ para diferentes valores de $m \in [0.9, 1.1]$, $b \in [0.1, 0.2]$ y $k \in [2, 3]$	44
Figura 2-16 Un sistema masa/resorte/amortiguador.....	46
Figura 2-17 Diagrama de Bloques de la ecuación masa/resorte/amortiguador.....	47
Figura 2-18 Un diagrama de bloque para el sistema masa/resorte/amortiguador con incertidumbre paramétrica.....	48
Figura 2-19 Incertidumbre Aditiva.....	52
Figura 2-20 Los límites de la incertidumbre aditiva de los diagramas de Bode en la Figura 2.5.2 con $P_0(s) = \frac{1}{m_0s^2 + b_0s + k_0}$, $m_0=1$, $b_0=1.5$, $k_0=2.5$. Las líneas sólidas representan diagramas posibles de $ P(j\omega) - P_0(j\omega) $ y la entre punteada representa el límite $l_a(\omega)$	53
Figura 2-21 Incertidumbre Multiplicativa	54
Figura 2-22 Los límites de la incertidumbre multiplicativa para el diagrama de Bode en la Figura 2.5.2 con $P_0(s) = \frac{1}{m_0s^2 + b_0s + k_0}$, $m_0=1$, $b_0=1.5$, $k_0=2.5$. Las líneas sólidas representan	54

diagramas posibles de $\frac{ P(s)-P_0(s) }{ P_0(s) }$ y la entre punteada representa el limite de la	
incertidumbre $l_m(w)$	55
Figura 2-23 Esquema del problema de equilibrio de una bola en un viga	56
Figura 2-24 Control por realimentación de estados.	57
Figura 2-25 Diagrama de Control para el sistema doble integrador.....	58
Figura 2-26 Respuesta impulsiva para sistema doble integrador.	60
Figura 2-27 Compromiso entre los desempeños H_2 y H_∞	63
Figura 2-28 Respuesta Impulsiva	63
Figura 3-1 Síntesis H_∞ con desempeño Multi-Objetivo	65
Figura 4-1 Esquema del problema de equilibrio de una bola en un viga	75
Figura 4-2 Esquema del sistema de control.....	76
Figura 4-3 Formulación de dos puertos para el planteamiento de sistema doble integrador	
.....	77
Figura 4-4 Región LMI tipo Half-Plane	79
Figura 4-5 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.	79
Figura 4-6 Respuesta del sistema en lazo cerrado a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$	80
Figura 4-7 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$	81
Figura 4-8 Respuesta del sistema para a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$	81
Figura 4-9 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$	82
Figura 4-10 Respuesta del sistema para a) $\sigma = -0.1$ y b) $\sigma = -1$	83
Figura 4-11 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$	83
Figura 4-12 Esquema del sistema de control.....	84
Figura 4-13 Formulación de dos puertos para el planteamiento de sistema doble integrador	
.....	85
Figura 4-14 Región LMI tipo Half-Plane	87
Figura 4-15 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.	87
Figura 4-16 Compromiso entre los desempeños H_2 y H_∞	89
Figura 4-17 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con objetivo ubicación de polos.....	90
Figura 4-18 Respuesta del sistema para $\sigma = -1$ con compromiso de desempeño H_2 y H_∞ .	
.....	91
Figura 4-19 Diagrama de control x_2 respecto a $d(s)$	92
Figura 4-20 Diagrama de Control de x_2 con respecto a $n(s)$	93
Figura 4-21 Diagrama de Control x_2 respecto a r	94

Figura 4-22 Respuesta de frecuencia de las funciones de transferencia de la salida x_2 con respecto al ruido, perturbación y referencia.....	95
Figura 4-23 Sistema de suspensión magnética.....	96
Figura 4-24 Diagrama de control con realimentación de la salida del levitador magnético.	99
Figura 4-25 Región LMI tipo Half-Plane.....	101
Figura 4-26 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.	102
Figura 4-27 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$ con compromiso H_∞	102
Figura 4-28 Región LMI tipo Half-Plane.....	105
Figura 4-29 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.	105
Figura 4-30 Respuesta del sistema para $\sigma = -10$ con compromiso H_∞	106
Figura 4-31 Diagrama de control con realimentación de la salida del levitador magnético.	110
Figura 4-32 Región LMI tipo Half-Plane.....	112
Figura 4-33 Compromiso H_2/H_∞ para el levitador magnético.....	113
Figura 4-34 Diagrama en Simulink del sistema realimentado.	114
Figura 4-35 Respuesta del sistema para compromiso H_2/ H_∞ del levitador magnético...	114

GLOSARIO

Modelo: representación en términos matemáticos de las relaciones entre ciertas entradas y salidas de un sistema físico, usualmente a través de ecuaciones diferenciales.

D.F.L.I.T.: dimensión finita, lineal e invariante en el tiempo. Conjunto de ecuaciones diferenciales que tienen un número finito de términos en derivadas, lineales en función de estos y con coeficientes constantes.

Modelo en variables de estado: Las ecuaciones D.F.L.I.T. admiten ser expresadas como una ecuación diferencial vectorial de primer orden (sólo la primer derivada), función del vector de estados $x(t)$ y los vectores de salidas $y(t)$ y entradas $u(t)$.

Función de Transferencia. Mediante el uso de la Transformada de Laplace es posible convertir una ecuación diferencial D.F.L.I.T. en una ecuación algebraica, función de una variable compleja s . Luego de esta transformación, al cociente entre salida $Y(s)$ y entrada $U(s)$ del modelo se lo denomina función de transferencia $G(s)$, i.e. $Y(s) = G(s)U(s)$.

Estabilidad. Se dice que un sistema es estable cuando para toda señal de entrada acotada en módulo (en energía), se obtiene una salida acotada en módulo (en energía). Para sistemas representados por modelos en variables de estado, es condición necesaria y suficiente de estabilidad, que los autovalores de la matriz de estados A tengan parte real estrictamente negativa de Laplace, las raíces del denominador (polos) de la función de transferencia $G(s)$ deben satisfacer la misma propiedad.

Valor singular. Los valores singulares de una matriz A son las raíces de los autovalores de la matriz por su transpuesta conjugada, esto es El máximo de ellos da una medida del "tamaño" (norma) de la matriz. El menor da una medida de la "singularidad" de la misma.

Estimador u observador: es un sistema alimentado por las salidas y entradas disponibles de un sistema original con objeto de reconstruir el vector de estado de este sistema.

CERTIFICADO DE ENTREGA DE PROYECTO

Fecha _____

ING. VICTOR PROAÑO
COORDINADOR DE CARRERA

SR. JOSE A. DIAZ HIDALGO
ALUMNO