

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**  
**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y**  
**TELECOMUNICACIONES**

**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL**  
**TÍTULO DE INGENIERÍA**

**ANÁLISIS DE FILTROS ADAPTATIVOS DE LA**  
**FAMILIA SM APLICADOS PARA EL DISEÑO DE UN**  
**CANCELADOR DE ECO ACÚSTICO**

**LISSETH NATHALY REYES CEDEÑO**

**SANGOLQUÍ – ECUADOR**

**AÑO 2013**

*Declaración de Responsabilidad*

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**  
**INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**  
**DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD**

LISSETH NATHALY REYES CEDEÑO

**DECLARO QUE:**

El proyecto de grado denominado “Análisis de filtros adaptativos de la familia SM aplicados para el diseño de un cancelador de eco acústico”, ha sido desarrollado con base a una investigación exhaustiva, respetando derechos intelectuales de terceros, conforme las citas que constan al pie, de las páginas correspondientes, cuyas fuentes se incorporan en la bibliografía.

Consecuentemente este trabajo es de mi autoría.

En virtud de esta declaración, me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance científico del proyecto de grado en mención.

Sangolquí, 18 de Abril de 2013

---

Lisseth Nathaly Reyes Cedeño

*Autorización de publicación*

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**  
**INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**AUTORIZACIÓN**

Yo, Lisseth Nathaly Reyes Cedeño

Autorizo a la Escuela Politécnica del Ejército la publicación, en la biblioteca virtual de la Institución del trabajo “Análisis de filtros adaptativos de la familia SM aplicados para el diseño de un cancelador de eco acústico”, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Sangolquí, 18 de Abril de 2013

---

Lisseth Nathaly Reyes Cedeño

*Certificado de tutoría*

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

**INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**CERTIFICADO**

Ing. Paúl Bernal  
Ing. Daniel Altamirano

**CERTIFICAN**

Que el trabajo titulado “Análisis de filtros adaptativos de la familia SM aplicados para el diseño de un cancelador de eco acústico”, realizado por Lisseth Nathaly Reyes Cedeño, ha sido guiado y revisado periódicamente y cumple normas estatutarias establecidas por la ESPE, en el Reglamento de Estudiantes de la Escuela Politécnica del Ejército.

Debido a que se trata de un trabajo de investigación recomiendan su publicación.

Sangolquí, 18 de Abril de 2013

---

Ing. Paúl Bernal

DIRECTOR

---

Ing. Daniel Altamirano

CODIRECTOR

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por darme la salud y la vida para culminar mi carrera con éxito y por regalarme como padres a personas tan maravillosas que día a día me apoyan y son la inspiración que necesito para seguir creciendo como persona y como profesional.

A mi hermana María José que ha sido mi fuerza y mi apoyo para lograr alcanzar una de mis metas.

A mis compañeros ya que más que amigos han sido otra familia para mí: Daniel, Katherine, Brian, Mario, Pablo, Yessenia y Vinicio.

A mi director Paúl Bernal y a mi codirector Daniel Altamirano que supieron guiarme para alcanzar este objetivo.

A todas aquellas personas que de una u otra manera han contribuido para que esto se haga realidad.

## **DEDICATORIA**

Dedico este logro a mi familia ya que siempre me han brindado su apoyo y en todo momento he podido contar con ellos y a todos los que hicieron posible que alcance esta meta.

## RESUMEN

En el presente proyecto se realizó el estudio del filtraje adaptativo donde se explica en qué consiste el filtro de Wiener y las utilidades del algoritmo *Steepest-Descent*, se revisaron las diferentes aplicaciones tales como la identificación de sistemas, ecualización del canal y la mejora de la señal, se analizó las características de los filtros LMS, RLS y AP. Posteriormente se comparó su desempeño y respuesta con la implementación de un cancelador de eco donde se verificó que el algoritmo RLS presenta mayor velocidad de convergencia y menor desajuste frente a los algoritmos LMS y AP, sin embargo presenta problemas de estabilidad y el costo computacional es mayor.

Realizado este análisis previo se estudiaron los algoritmos SM, se obtuvo la complejidad computacional de cada uno de los filtros pertenecientes a esta familia y para el desarrollo del cancelador de eco que propone este proyecto se partió de las características del filtro adaptativo *Simplified Set-Membership Affine Projection* ya que el filtro propuesto es una mejora en cuanto a velocidad de convergencia y desajuste. Se realizó la comparación de los filtros SM-NLMS, SIM SM AP, SM AP y SIM SM PUAP analizando sus características y las variaciones que sufren al aumentar el valor del factor de reutilización.

Finalmente se realizó el estudio del filtro adaptativo *Robust Set-Membership Affine-Projection* y el análisis tanto con umbral fijo (RSMAP1), como con umbral variable (RSMAP2), se estudiaron sus características, su desempeño y el costo computacional que representa su implementación. Se diseñó el cancelador de eco aplicando el filtro RSMAP1 y el filtro RSMAP2 y se analizaron los resultados en comparación con el filtro *Simplified*

*Set-Membership* demostrando que el algoritmo RSMAP conserva sus características de estabilidad y convergencia incluso cuando el canal es variable en el tiempo.

## PRÓLOGO

Para realizar el diseño de filtros digitales cuyos coeficientes sean fijos se requiere de un estudio bien definido y de especificaciones conocidas con anterioridad, sin embargo se presentan situaciones en las cuales las especificaciones no se encuentran disponibles, por lo tanto la solución a este inconveniente es utilizar un filtro digital con coeficientes adaptables conocidos como filtros adaptativos, los mismos que permiten realizar varias aplicaciones y dependiendo de la misma se determina la actualización de los coeficientes del filtro.

En el presente proyecto se realiza un estudio de los filtros adaptativos de la familia *Set Membership* (SM) los cuales emplean una función determinista relacionada con el error de restricción la cual limita la salida del filtro, de tal forma que las actualizaciones pertenecen a un conjunto de soluciones factibles. Se propone un algoritmo de adaptación SMAP que es robusto a los valores atípicos en el sentido de que su rendimiento permanece en gran medida insensible a los valores extremos producidos por ruido impulsivo. El rendimiento del algoritmo propuesto es probado en la aplicación del cancelador de eco acústico para diferentes niveles de ruido y órdenes de proyección, y se compara con la de algoritmos conocidos como AP y SMAP.

El filtrado utilizando el algoritmo SM es muy eficiente en la eliminación del ruido gracias a la actualización frecuente de sus coeficientes y en comparación con los algoritmos LMS y RLS los algoritmos de SM ofrecen una reducción de la complejidad computacional, debido principalmente a los datos selectivos de actualización.

El algoritmo *Robust Set-Membership Affine-Projection* (RSMAP) [11] permite reducir la complejidad computacional en el filtrado adaptativo puesto que, los coeficientes del filtro se actualizan sólo cuando el error de estimación de salida es mayor que el pre determinado por el límite superior.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD.....	II
AUTORIZACIÓN.....	III
CERTIFICADO .....	IV
AGRADECIMIENTO .....	V
DEDICATORIA .....	VI
RESUMEN.....	VII
PRÓLOGO .....	IX
ÍNDICE DE CONTENIDO .....	XI
ÍNDICE DE TABLAS.....	XIV
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XVI

### CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DEL FILTRAJE ADAPTATIVO.....	17
1.1 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA .....	17
1.2 ALCANCE DEL PROYECTO.....	21
1.3 OBJETIVOS .....	21
1.3.1 GENERAL .....	21
1.3.2 ESPECÍFICOS.....	22

### CAPÍTULO 2

FUNDAMENTO TEÓRICO Y CONCEPTUAL.....	23
2.1 FILTRAJE ADAPTATIVO.....	23
2.1.1 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES.....	26
2.1.1.1 SEÑALES CONTINUAS Y SEÑALES DISCRETAS .....	26
2.1.1.2 SEÑALES DETERMINISTICAS Y SEÑALES ALEATORIAS .....	27
2.1.2 MATRIZ DE CORRELACIÓN .....	27
2.1.3 FILTRO DE WIENER .....	28
2.1.4 ALGORITMO <i>STEEPEST-DESCENT</i> .....	33
2.1.5 APLICACIONES.....	36
2.1.5.1 IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA .....	36

2.1.5.2 ECUALIZACIÓN DE CANAL ..... 38

2.1.5.3 PREDICCIÓN DE LA SEÑAL ..... 38

2.1.5.4 MEJORA DE LA SEÑAL ..... 40

2.2 ALGORITMO LMS ..... 40

2.3 ALGORITMO RLS ..... 44

2.4 ALGORITMO AP..... 47

2.5 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS..... 50

**CAPÍTULO 3**

ANÁLISIS DEL ALGORITMO RSMAP ..... 52

3.1 FILTRO ADAPTATIVO SET-MEMBERSHIP ..... 52

3.1.1 DESCRIPCIÓN ..... 53

3.1.2 ESTUDIO ..... 57

3.1.2.1 ALGORITMO SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION ..... 58

3.1.2.2 SIMPLIFIED SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION ..... 67

3.2 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS..... 68

3.3 ROBUST SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION ..... 69

3.3.1 ALGORITMO RSMAP ..... 69

3.3.2 CARACTERÍSTICAS ..... 73

3.3.3 ANÁLISIS DEL ESTADO ESTACIONARIO DE ALGORITMO RSMAP ..... 77

3.3.4 COSTO COMPUTACIONAL..... 82

**CAPÍTULO 4**

ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL ALGORITMO RSMAP ..... 84

4.1 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS ALGORITMOS..... 84

4.2 DISEÑO DEL CANCELADOR DE ECO ..... 91

4.3 COMPARACIÓN DEL DISEÑO PROPUESTO DEL CANCELADOR DE ECO..... 94

4.3.1 ESTABILIDAD DEL ALGORITMO..... 96

4.3.2 VARIACIÓN EN EL TIEMPO ..... 98

4.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS ..... 98

---

## CAPÍTULO 5

<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>100</b>
<b>5.1 CONCLUSIONES.....</b>	<b>100</b>
<b>5.2 RECOMENDACIONES.....</b>	<b>101</b>
<b>GLOSARIO .....</b>	<b>102</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>103</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 2.1.</b>	<b>Algoritmo LMS .....</b>	<b>43</b>
<b>Tabla 2.2.</b>	<b>Algoritmo RLS Convencional.....</b>	<b>46</b>
<b>Tabla 2.3.</b>	<b>Algoritmo RLS Alternativo.....</b>	<b>47</b>
<b>Tabla 2.4.</b>	<b>Algoritmo AP.....</b>	<b>50</b>
<b>Tabla 3.1.</b>	<b>Complejidad computacional de los algoritmos SM .....</b>	<b>57</b>
<b>Tabla 3.2.</b>	<b>Algoritmo SM-AP .....</b>	<b>63</b>
<b>Tabla 3.3.</b>	<b>Algoritmo Simplified SM-AP.....</b>	<b>68</b>
<b>Tabla 3.4.</b>	<b>Comparación de algoritmos con diferentes valores de L .....</b>	<b>68</b>
<b>Tabla 4.1.</b>	<b>Coefficientes de m1 (k).....</b>	<b>87</b>
<b>Tabla 4.2.</b>	<b>Coefficientes de m2 (k).....</b>	<b>87</b>
<b>Tabla 4.3.</b>	<b>Coefficientes de m3 (k).....</b>	<b>87</b>
<b>Tabla 4.4.</b>	<b>Coefficientes de m4 (k).....</b>	<b>88</b>
<b>Tabla 4.5.</b>	<b>Factores de escala para Ki .....</b>	<b>88</b>
<b>Tabla 4.6.</b>	<b>Comparación de los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP con los diferentes modelos dados por la ITU G.168 .....</b>	<b>90</b>
<b>Tabla 4.7.</b>	<b>Comparación del MSE de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP. ....</b>	<b>91</b>
<b>Tabla 4.8.</b>	<b>Comparación del MSE en dB de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP. ....</b>	<b>91</b>
<b>Tabla 4.9.</b>	<b>Comparación de los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con los diferentes modelos dados por la ITU G.168 .....</b>	<b>92</b>
<b>Tabla 4.10.</b>	<b>Comparación del MSE de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2.....</b>	<b>93</b>
<b>Tabla 4.11.</b>	<b>Comparación del MSE dB de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2.....</b>	<b>93</b>
<b>Tabla 4.12.</b>	<b>Comparación del algoritmo RSMAP1 y RSMAP2 con diferentes valores de L aplicado a los modelos dados por la ITU G.168. ....</b>	<b>94</b>
<b>Tabla 4.13.</b>	<b>Comparación del MSE de los modelos dados por la ITU G.168 con diferentes valores de L para los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2. ....</b>	<b>95</b>

---

<b>Tabla 4.14.</b>	<b>Comparación del MSE en dB de los modelos dados por la ITU G.168 con diferentes valores de L para los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2. ....</b>	<b>96</b>
<b>Tabla 4.15.</b>	<b>Comparación del MSE antes de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.....</b>	<b>96</b>
<b>Tabla 4.16.</b>	<b>Comparación del MSE en dB antes de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.....</b>	<b>97</b>
<b>Tabla 4.17.</b>	<b>Comparación del MSE después de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.....</b>	<b>98</b>
<b>Tabla 4.18.</b>	<b>Comparación del MSE en dB después de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.....</b>	<b>98</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 2.1.</b>	<b>Configuración general del filtro adaptativo .....</b>	<b>24</b>
<b>Figura 2.2.</b>	<b>Combinador lineal .....</b>	<b>29</b>
<b>Figura 2.3.</b>	<b>Filtro Adaptativo FIR.....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 2.4.</b>	<b>Superficie de Error Cuadrático.....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 2.5.</b>	<b>Identificación del Sistema.....</b>	<b>37</b>
<b>Figura 2.6.</b>	<b>Ecualización del Canal .....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 2.7.</b>	<b>Predicción de la Señal.....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 2.8.</b>	<b>Mejora de la Señal .....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 2.9.</b>	<b>Filtro adaptativo LMS FIR.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 2.10.</b>	<b>Curva de Aprendizaje para MSE.....</b>	<b>51</b>
<b>Figura 2.11.</b>	<b>Curva de Aprendizaje para MSE ampliada.....</b>	<b>51</b>
<b>Figura 3.1.</b>	<b>Conjunto de restricciones en el plano <math>w</math> para un ejemplo en dos dimensiones.....</b>	<b>55</b>
<b>Figura 3.2.</b>	<b>Exact membership set, <math>\psi(k-1)</math> contenida en el conjunto de restricciones <math>\psi(k-1) \subseteq H(k)</math>.....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 3.3.</b>	<b>Exact membership set, <math>\psi(k-1)</math> no contenida en el conjunto de restricciones <math>\psi(k-1) \subseteq H(k)</math>.....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 3.4.</b>	<b>Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente.....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 3.5.</b>	<b>Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente sin error de cero a posteriori.....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 3.6.</b>	<b>Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente sin error de cero a posteriori.....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 4.1.</b>	<b>De dos hilos o cuatro hilos de conversión en las llamadas telefónicas de larga distancia .....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 4.2.</b>	<b>Cancelación del eco acústico .....</b>	<b>86</b>
<b>Figura 4.3.</b>	<b>Características CSS para una personal hablando .....</b>	<b>89</b>
<b>Figura 4.4.</b>	<b>Cancelador de eco con canal variable con M4 .....</b>	<b>97</b>

# **CAPÍTULO 1**

## **DESCRIPCIÓN DEL FILTRAJE ADAPTATIVO**

### **1.1 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA**

El estudio del campo de procesamiento de las señales se ha realizado durante varias décadas, pero en los años ochenta la investigación de sus aplicaciones tuvo mayor crecimiento, gracias a la aparición de nuevas herramientas de aplicación, donde los circuitos digitales han sido la clave para el desarrollo tecnológico.

Un ejemplo de un sistema de procesamiento digital de señales se conoce como filtro. El filtrado es una operación, cuyo objetivo es procesar una señal con el fin de manipular la información contenida en la misma. En otras palabras, un filtro es un dispositivo que asigna a la señal de entrada otra señal de salida para facilitar la extracción de la información deseada contenida en la señal de entrada. Un filtro digital procesa señales en tiempo discreto representadas en formato digital. Los filtros pueden ser invariantes en el tiempo donde los parámetros internos y su estructura son fijos, y si el filtro es lineal la señal de salida es una función lineal de la señal de entrada.

Otro tipo de filtro son los adaptativos usados cuando se desconocen las características estadísticas de la señal a filtrar o cuando se conocen y se sabe que son cambiantes con el tiempo, adicionalmente este tipo de filtros ofrecen las características de fiabilidad, precisión, pequeños tamaños físicos, flexibilidad y bajo costo.

Las familias de algoritmos de filtraje adaptativo conocidas hasta el momento presentan un equilibrio entre la velocidad de convergencia y el desajuste que sufren después de la

transición. Estas características son fácilmente observables en ambientes estacionarios, en general estos algoritmos convergen rápidamente pero tienden a ser dinámicos, por lo cual se pretende gobernar la actualización de los coeficientes de filtraje adaptativo donde se considera que el ruido es limitado y la envolvente es conocida o se puede estimar. La estrategia clave de la formulación es realizar un estudio para establecer un modelo de tal forma que el error sea mínimo.

Los filtros adaptativos *Set Membership* (SM) emplean una función determinista relacionada con el error de restricción la cual limita la salida del filtro, de tal manera que las actualizaciones pertenecen a un conjunto de soluciones factibles. Una clase importante de algoritmos adaptativos es la clase de algoritmos *Affine-Projection* (AP). Estos algoritmos ofrecen un rendimiento superior en relación con la convergencia del algoritmo *Least Mean Squares* (LMS), especialmente para las señales de entrada correlacionadas, a pesar de que tienen un incremento en el costo computacional.

El algoritmo básico de AP fue presentado en [1] y, posteriormente, diversas variantes de este algoritmo han sido desarrolladas por un número de investigadores en diferentes escenarios tales como el algoritmo de regularización de AP [2], el algoritmo de *Partial-Rank AP* [3], y el algoritmo *Simplified Set-Membership AP* (SSMAP) descrito en [4].

El algoritmo SM normaliza datos utilizando el algoritmo LMS en [5] la cual es una implementación alternativa del algoritmo SSMAP en [4] con una proyección de orden dos. El análisis de rendimiento de la AP y los algoritmos de SSMAP se presentan en [6] y [7], respectivamente. El análisis presentado en [6] muestra que la velocidad de convergencia del algoritmo de AP aumenta a medida que el número de proyecciones, también conocidos como el orden de proyección, se incrementa, a expensas de un aumento en estado estacionario. La misma conclusión se ha elaborado también por el algoritmo de SSMAP en [7]. Sin embargo, utilizando un tamaño de paso variable, el rendimiento del algoritmo SSMAP en estado estacionario reduce el desajuste con respecto al algoritmo AP para el mismo orden de proyección [4].

Algunas otras variantes del algoritmo SSMAP se describen en [8], [9], el algoritmo en [8] da una mejor velocidad de convergencia para aplicaciones de sistemas de identificación y el algoritmo de [9] produce una ligera mejora en estado estacionario, como falta de ajuste en comparación con el algoritmo SSMAP en [7].

El límite de error previamente especificado en el algoritmo SSMAP se elige generalmente como  $\sqrt{5}\sigma_v$ , donde  $\sigma_v^2$  es la varianza de la medición del ruido, con el fin de lograr un buen equilibrio entre la velocidad de convergencia y el esfuerzo computacional [4], [7] y [9]. En la práctica, puede que no sea posible especificar con exactitud el límite de error en el algoritmo SSMAP.

Además, como el algoritmo de AP, el rendimiento del algoritmo SSMAP se ve afectado por los valores extremos en las muestras de la señal de error que puede ser provocada por la interferencia de ruido impulsivo. Varios algoritmos recientes del LMS y las familias de mínimos cuadrados que son robustos con respecto a los valores atípicos se comparan en [10].

En este trabajo, se propone un algoritmo de adaptación SMAP que es robusto a los valores atípicos en el sentido de que su rendimiento permanece en gran medida insensible a los valores extremos producidos por ruido impulsivo.

El rendimiento del algoritmo propuesto es probado en aplicaciones de identificación del sistema y de cancelación de eco para diferentes niveles de ruido y órdenes de proyección, y se compara con la de algoritmos conocidos como AP y SMAP.

Los filtros adaptativos usando la familia de algoritmos SM son muy utilizados en los terminales móviles, redes de sensores y sistemas embebidos, juegan un papel muy importante en la eliminación de las señales de eco en las redes de comunicación y en el entorno de la comunicación utilizando manos libres.

El filtrado utilizando el algoritmo SM es muy eficiente en la eliminación del ruido gracias a la actualización frecuente de sus coeficientes y en comparación con los algoritmos LMS y *Recursive Least Squares* (RLS), los algoritmos de SM ofrecen una reducción de la complejidad computacional, debido principalmente a los datos selectivos de actualización.

El algoritmo *Robust Set-Membership Affine-Projection* (RSMAP) [11] permite reducir la complejidad computacional en el filtrado adaptativo puesto que, los coeficientes del filtro se actualizan sólo cuando el error de estimación de salida es mayor que el pre determinado por el límite superior.

Por lo general, los algoritmos SM pueden realizar actualizaciones con más frecuencia durante las primeras iteraciones en entornos fijos. Por lo tanto, si estos cambios implican una mayor complejidad computacional se debe optar por una solución alternativa.

Una posible estrategia para mantener un cierto control sobre la cantidad de recursos computacionales es adoptar una actualización parcial, donde se actualizan sólo un subconjunto de los coeficientes del filtro adaptativo en cada iteración. Los algoritmos resultantes se denominan *Partial-Update* (PU).

Una de las aplicaciones más importantes del filtraje adaptativo es sustraer el eco de una señal ruidosa, puesto que todas las conversaciones sufren de la presencia de este fenómeno e involucran un retardo. Si el retardo es corto, el eco es imperceptible pero si el retardo es grande torna difícil la comunicación, estadísticamente se puede suponer el umbral para el retardo de 25 mili segundos y el retardo supera dicho umbral el eco es perceptible por el oído humano.

Los canceladores de eco se utilizan también en la acústica, donde su tarea es modelar la función de transferencia del altavoz al micrófono en una habitación determinada. Esta aplicación es más difícil que la anterior ya que el trayecto del eco con respecto al impulso es mucho más largo. El cancelador debe estimar la forma característica del eco para adaptarse

rápidamente a sus variaciones por esta razón se realizará un estudio exhaustivo de los filtros y algoritmos adaptativos.

El nuevo algoritmo propone la mejora del filtro adaptativo SMAP, ofreciendo un rendimiento robusto con respecto al límite de error, el orden de proyección, la interferencia del ruido impulsivo y el seguimiento de los cambios bruscos en subsistemas adyacentes.

## 1.2 ALCANCE DEL PROYECTO

Se realizará un estudio y comparación de las características de cada uno de los algoritmos de filtraje adaptativo de la familia *Set Membership* para determinar sus limitaciones en un ambiente ruidoso.

Una de las aplicaciones de los filtros adaptativos son los canceladores de eco, este proyecto propone desarrollar un cancelador de eco acústico empleando el algoritmo de filtraje adaptativo *Robust Set-Membership Affine-Projection* para lo cual el software MATLAB® [12] será la principal herramienta de simulación.

Finalmente se realizará un análisis comparativo del desempeño del cancelador de eco del algoritmo RSMAP y SSMAP para determinar si el diseño cumple con los requerimientos propuestos.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 GENERAL

DISEÑAR E IMPLEMENTAR EN SOFTWARE UN CANCELADOR DE ECO EMPLEANDO EL ALGORITMO DE FILTRAJE ADAPTATIVO *ROBUST SET-MEMBERSHIPAFFINE-PROJECTION*.

### 1.3.2 ESPECÍFICOS

1. Realizar una introducción al Filtrado Adaptativo justificando su importancia y mostrando el alcance del proyecto.
2. Realizar un estudio de los diferentes tipos de algoritmos, características básicas, técnicas utilizadas, funcionamiento y la determinación del método idóneo que será utilizado para el posterior diseño del cancelador de eco.
3. Estudiar completamente la familia de algoritmos *Set-Membership Affine-Projection*, características, costo computacional, estabilidad y variación en el tiempo para tener una premisa para realizar el diseño del algoritmo *Robust Set-Membership*.
4. Analizar los resultados obtenidos del desempeño de los diferentes algoritmos estudiados para posteriormente proceder al diseño del cancelador de eco.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

#### 2.1 FILTRAJE ADAPTATIVO

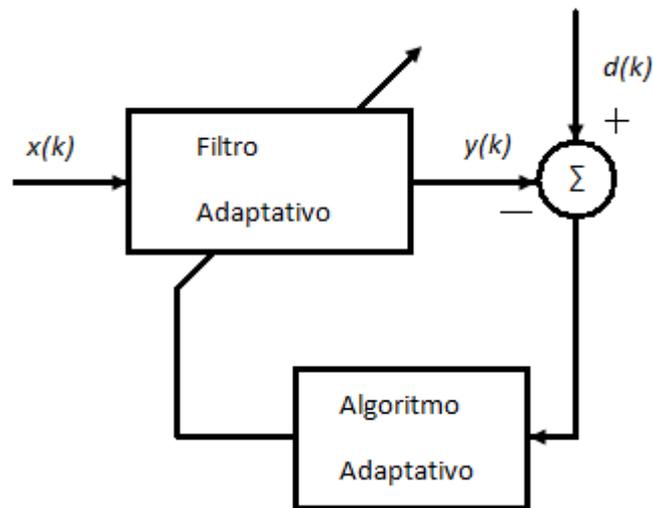
El diseño de filtros digitales con coeficientes fijos requiere un estudio bien definido de las especificaciones prescritas. Sin embargo, hay situaciones en las que las especificaciones no están disponibles, o son variables en el tiempo. La solución en estos casos es utilizar un filtro digital con coeficientes adaptables conocidos como filtros adaptativos.

Dado que no se dispone de especificaciones, el algoritmo adaptativo es el que determina la actualización de los coeficientes del filtro, se requiere información adicional que normalmente está dada en forma de una señal. Esta señal se denomina señal de referencia, cuya elección depende de la aplicación.

Los filtros adaptativos se consideran sistemas no lineales, por lo tanto, el análisis de su comportamiento es más complicado que la de los filtros fijos. Por otro lado, debido a que los filtros adaptativos son filtros diseñados, se pueden considerar menos complicados que en el caso de filtros digitales con coeficientes fijos.

En la figura 2.1 se puede observar la configuración general de un filtro adaptativo donde  $k$  es el número de iteraciones,  $x(k)$  denota la señal de entrada,  $y(k)$  es la señal de salida del filtro adaptativo y  $d(k)$  es la señal deseada. La señal de error  $e(k)$  es calculada como:  $d(k) - y(k)$ .

La señal de error se usa para formar una función de rendimiento (costo) que es requerida por el algoritmo de adaptación con el fin de determinar la actualización apropiada de los coeficientes del filtro para adaptar la señal de salida.



**Figura 2.1. Configuración general del filtro adaptativo**

La especificación completa de un sistema adaptativo consta de tres elementos:

**Aplicación:** El tipo de aplicación está definida por la elección de las señales adquiridas desde el medio ambiente es decir la señal de entrada y las señales de salida deseadas. El número de diferentes aplicaciones en los que las técnicas de adaptación están siendo utilizadas con éxito ha aumentado enormemente durante las últimas dos décadas. Algunos ejemplos son la cancelación de eco, ecualización de canal, identificación del sistema, mejora de la señal, *beamforming* adaptable y cancelación de ruido [13]-[19].

**Estructura del Filtro adaptativo:** El filtro adaptativo puede ser implementado en un número de estructuras diferentes. La elección de la estructura puede influir en la complejidad computacional del proceso y también en el número de iteraciones necesarias para alcanzar un nivel de rendimiento deseado. Básicamente, existen dos clases principales de estructuras de filtros digitales adaptativos, que se distinguen por la forma de la respuesta al impulso, es decir,

los filtros de respuesta al impulso finita *Finite Impulse Response* (FIR) y los de respuesta infinita *Infinite Impulse Response* (IIR). Los filtros FIR se implementan normalmente con estructuras no recursivas, mientras que los filtros IIR utilizan estructuras recursivas.

**Filtros Adaptativos FIR:** La estructura más utilizada del filtro adaptativo FIR es el filtro transversal, también llamada línea de retardo, que implementa una función de transferencia de todo ceros con una realización en forma canónica sin realimentación.

Para esta realización, la señal de salida  $y(k)$  es una combinación lineal de los coeficientes de filtro, que producen una función de error media cuadrática con una única solución óptima. Los filtros FIR también se utilizan con el fin de obtener mejoras en comparación con la estructura del filtro transversal, en términos de complejidad computacional y velocidad de convergencia.

**Filtros Adaptativos IIR:** La estructura más utilizada del filtro adaptativo IIR es la forma canónica directa, debido a su simple aplicación y fines de análisis. Sin embargo, hay algunos problemas inherentes relacionados con los filtros adaptativos recursivos y es que son dependientes de la estructura, es decir dependen del polo de estabilidad y son de baja velocidad de convergencia.

**Algoritmo:** El algoritmo es el procedimiento utilizado para ajustar los coeficientes del filtro adaptativo para minimizar un criterio prescrito. El algoritmo está determinado por la definición del método de búsqueda, la función objetivo, y la naturaleza de la señal de error. La elección del algoritmo determina algunos aspectos cruciales del proceso de adaptación general, como la existencia de probables soluciones óptimas, la solución óptima parcial y la complejidad computacional.

## **2.1.1 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES**

Para la comprensión del filtraje adaptativo se revisarán algunos conceptos relacionados tales como las señales deterministas y aleatorias. Para más detalles sobre las señales y procesamiento digital de señales que se refieren a [20] - [27].

### **2.1.1.1 SEÑALES CONTINUAS Y SEÑALES DISCRETAS**

Los valores de una señal continua o discreta en el dominio del tiempo pueden ser continuos o discretos. Si una señal toma todos los valores posibles en un rango finito o infinito, se dice que es una señal continua. Alternativamente, si la señal toma valores dentro de un conjunto finito de posibles valores, se dice que la señal es discreta. Normalmente, estos valores son equidistantes, y por tanto, pueden expresarse como un múltiplo entero de la distancia entre dos valores sucesivos. Una señal discreta en el tiempo que tiene un conjunto de valores discretos es una señal digital.

Para que una señal pueda ser procesada digitalmente, debe ser discreta en el tiempo y sus valores tienen que ser discretos (es decir, tiene que ser una señal digital). Si la señal que se va a procesar es una señal analógica, se convierte en una señal digital muestreándola en instantes de tiempo, obteniéndose así una señal discreta en el tiempo, y cuantificando a continuación sus valores en un conjunto de valores discretos.

El proceso de conversión de una señal continua en una señal discreta se denomina cuantificación, y es básicamente un proceso de aproximación. Puede realizarse de forma simple mediante redondeo o truncamiento. Por ejemplo si los valores permitidos de la señal digital son enteros como por ejemplo de 0 hasta 15, la señal de valores continuos se cuantifica empleando esos valores enteros. Por tanto, el valor de la señal 8.58 se aproximará al valor 8 si el proceso de cuantificación se realiza mediante truncamiento, o a 9 si el proceso de cuantificación se realiza por redondeo al entero más próximo.

### 2.1.1.2 SEÑALES DETERMINISTICAS Y SEÑALES ALEATORIAS

El procesamiento y análisis matemático de señales requiere disponer de una descripción matemática para la propia señal. Esta descripción matemática, a menudo denominada modelo de señal, lleva a otra importante clasificación de las señales. Cualquier señal que se puede describir unívocamente mediante una expresión matemática explícita, una tabla de datos o una regla bien definida se dice que es determinista. Este término se emplea para destacar el hecho de que todos los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen de forma precisa, sin incertidumbre.

Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas existen señales que o no se pueden describir con un grado razonable de precisión mediante fórmulas matemáticas o una descripción resulta demasiado compleja como para resultar práctica. La falta de una relación de este tipo implica que dichas señales evolucionan en el tiempo de manera no predecible. Decimos que este tipo de señales son aleatorias. La salida de un generador de ruido, la señal sísmica y la señal de voz son ejemplos de señales aleatorias.

El marco de trabajo matemático para llevar a cabo el análisis teórico de las señales aleatorias lo proporciona la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos. Se debe insistir en que la clasificación de una señal real como determinista o aleatoria no siempre es clara. En ocasiones, ambos enfoques llevan a resultados significativos que ayudan a clarificar el comportamiento de la señal. En otros casos, una clasificación errónea puede llevar a resultados erróneos, ya que algunas herramientas matemáticas sólo pueden aplicarse a señales deterministas.

### 2.1.2 MATRIZ DE CORRELACIÓN

La matriz de correlación se define como:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] \quad (2.1)$$

Donde  $\mathbf{x}^H(k)$  es el operador hermitiano de  $\mathbf{x}(k)$ , que significa transposición seguido por conjugación compleja. Como se observará, las características de la matriz de correlación jugarán un papel clave en la comprensión de las propiedades de la mayoría de los algoritmos de filtrado adaptativo. Como consecuencia, es importante examinar las principales propiedades de la matriz  $\mathbf{R}$ . Algunas propiedades de la matriz de correlación provienen de la naturaleza estadística del problema de filtraje adaptativo, mientras que otras propiedades se derivan de la teoría de álgebra lineal.

Las principales propiedades de la matriz  $\mathbf{R}$  se muestran a continuación:

1. La matriz  $\mathbf{R}$  es positiva semidefinida.

Por lo general, la matriz  $\mathbf{R}$  es definida positiva, a menos que las señales que componen el vector de entrada sean linealmente dependientes. Las señales lineales dependientes se encuentran raramente en la práctica.

2. La matriz  $\mathbf{R}$  es simétrica.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$$

$$\mathbf{R}^H = E\{[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]^H\} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{R},$$

3. Una matriz de Toeplitz es si los elementos de la diagonal principal y secundaria de cualquier diagonal son iguales en un proceso estocástico estacionario. Cuando el vector de señal de entrada se compone de versiones retardadas de la misma señal (es decir,  $x_i(k) = x_0(k - i)$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  tomado de un proceso WSS (*Wide-sense stationary*), matriz  $\mathbf{R}$  es Toeplitz.

### 2.1.3 FILTRO DE WIENER

Una de las funciones más ampliamente utilizada en el filtraje adaptativo es el error cuadrático medio (MSE *Mean-square error*), definido como:

$$F[e(k)] = \xi(k) = E[e^2(k)] = E[d^2(k) - 2d(k)y(k) + y^2(k)] \quad (2.2)$$

Donde  $d(k)$  es la señal de referencia.

Supongamos que el filtro adaptativo consiste en un combinador lineal, es decir, la señal de salida está compuesta por una combinación lineal de señales procedentes de una matriz tal como se representa en la figura. 2.2.

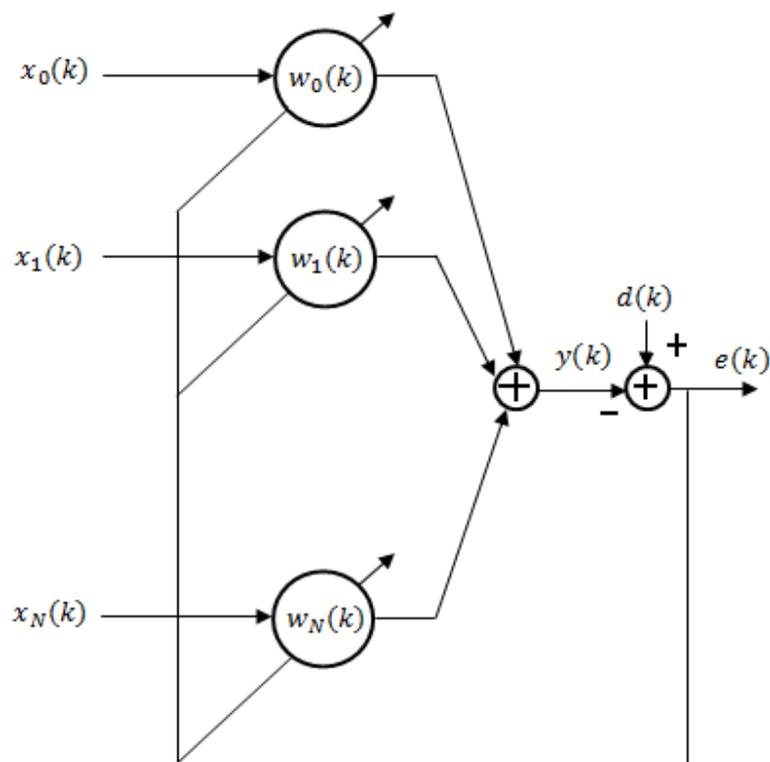


Figura 2.2. Combinador lineal

En este caso:

$$y(k) = \sum_{i=0}^N w_i(k)x_i(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k) \quad (2.3)$$

Donde:

$$\mathbf{x}(k) = [x_0(k) x_1(k) \dots x_N(k)]^T \quad (2.4)$$

y

$$\mathbf{w}(k) = [w_0(k) w_1(k) \dots w_N(k)]^T \quad (2.5)$$

Son la señal de entrada y los vectores de coeficientes de adaptación de filtro, respectivamente.

En muchas aplicaciones, cada elemento del vector de señal de entrada consta de una versión retardada de la misma señal, que es:  $x_0(k) = x(k)$ ,  $x_1(k) = x(k - 1)$ ,  $\dots$ ,  $x_N(k) = x(k - N)$ . Se debe tener en cuenta que en este caso la señal  $y(k)$  es el resultado de aplicar un filtro FIR a la señal de entrada  $\mathbf{x}(k)$ .

La realización más sencilla para el filtro adaptativo es a través de la estructura de forma directa FIR, como se ilustra en la figura. 2.3, con la salida dada por:

$$y(k) = \sum_{i=0}^N w_i(k) x(k - i) = \mathbf{w}^T(k) \mathbf{x}(k) \quad (2.6)$$

Donde  $\mathbf{x}(k) = [x(k) x(k - 1) \dots x(k - N)]^T$  es el vector de entrada que representa una línea de retardo con derivaciones, y  $\mathbf{w}(k) = [w_0(k) w_1(k) \dots w_N(k)]^T$  es el vector de toma de peso.

Tanto para los casos del combinador lineal y Filtros FIR, la función objetivo puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} E[e^2(k)] &= \xi(k) \\ &= E[d^2(k) - 2d(k)\mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)] \\ \xi(k) &= E[d^2(k) - 2E[d(k)\mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)] + E[\mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)]] \end{aligned} \quad (2.7)$$

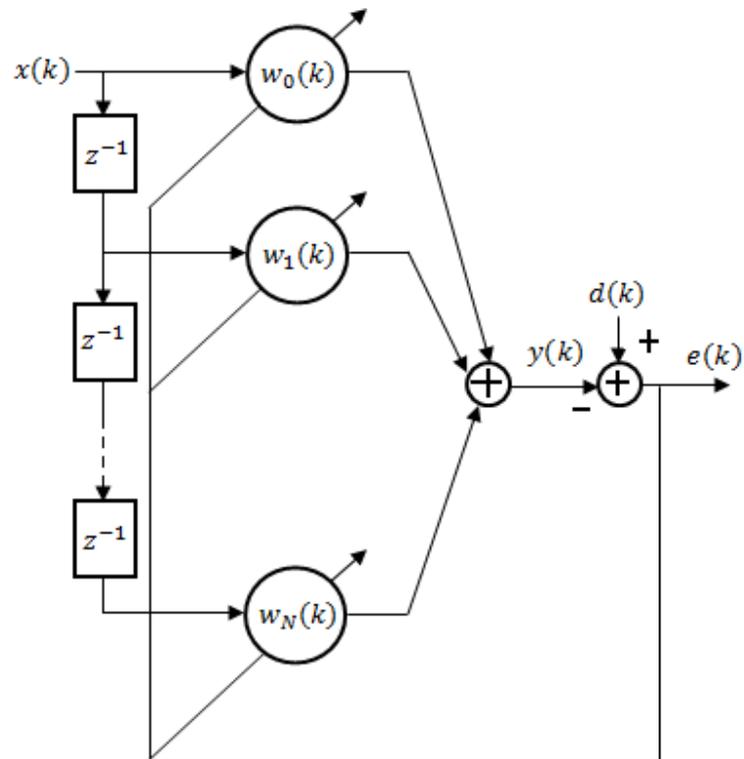


Figura 2.3. Filtro Adaptativo FIR

Para un filtro con coeficientes fijos, la función de MSE en un entorno estacionario viene dada por:

$$\begin{aligned} \xi &= E[d^2(k)] - 2\mathbf{w}^T E[d(k)\mathbf{x}(k)] + \mathbf{w}^T E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]\mathbf{w} \\ \xi &= E[d^2(k)] - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donde:

$$\mathbf{p} = E[d(k)\mathbf{x}(k)] \quad (2.9)$$

Es el vector de correlación cruzada entre las señales deseadas y la de entrada, la señal de entrada de la matriz de correlación definida por la ecuación 2.1. Como se puede observar, la función objetivo  $\xi$  es una función cuadrática de los coeficientes de ponderación de tomas que permitan una solución directa para  $\mathbf{w}$  que minimiza  $\xi$ , si el vector  $\mathbf{p}$  y la matriz  $\mathbf{R}$  son conocidos. Tenga en cuenta que la matriz  $\mathbf{R}$  corresponde a la matriz Hermitiana.

Si el filtro adaptativo está implementado a través de un filtro IIR, la función objetivo es una función no cuadrática de los parámetros del filtro, por lo tanto el problema de minimización es mucho más difícil.

Es probable que existan mínimos locales, haciendo que algunas de las soluciones obtenidas mediante algoritmos basados en gradiente sean inaceptables. A pesar de sus desventajas, adaptativas filtros IIR son necesarios en un número de aplicaciones en las que el orden de un filtro adecuado FIR es demasiado alta. Las aplicaciones típicas incluyen la ecualización de datos en los canales de comunicación y la cancelación de eco acústico.

El vector gradiente de la función MSE relacionada con los filtros de peso de tomas coeficientes esta dado por:

$$\mathbf{g}_w = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}} = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \cdots \frac{\partial \xi}{\partial w_N} \right]^T \quad (2.10)$$

Al igualar el vector gradiente a cero y asumiendo que  $\mathbf{R}$  es no singular, los valores óptimos para los coeficientes de ponderación de tomas que minimizan la función objetivo puede ser evaluada de la siguiente manera:

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.11)$$

### 2.1.4 ALGORITMO *STEEPEST-DESCENT*

Con el fin de conseguir una sensación práctica de un problema se debe emplear el algoritmo *steepest-descent*, se supone que el vector de coeficientes óptimo, es decir, la solución de Wiener, es  $\mathbf{w}_0$ , y que la señal de referencia no está corrompida por el ruido de medición.

Se estudiará la velocidad de convergencia, la estabilidad y el comportamiento en estado estable de un filtro adaptativo, cuyos coeficientes se actualizan mediante el algoritmo *steepest-descent*. Vale la pena mencionar que el método *steepest-descent* puede ser considerado como un eficiente algoritmo de tipo gradiente, en el sentido de que funciona con el vector gradiente verdadero, y no con una estimación de la misma. Cuando la función objetivo es el MSE, la difícil tarea de obtener la matriz  $\mathbf{R}$  y el vector  $\mathbf{p}$  perjudica el algoritmo. Su rendimiento, sin embargo, sirve como punto de referencia para los algoritmos basados en gradiente.

Entendiéndose la operación gradiente como el descenso sobre una curva de error mediante el paso de convergencia  $\mu$ . Esto se puede apreciar en la figura 2.4. Las actualizaciones de los coeficientes del algoritmo de *steepest-descent* están dados por:

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) - \mu \mathbf{g}_w(k) \quad (2.12)$$

Donde la expresión anterior es equivalente a la ecuación:

$$\theta(k + 1) = \theta(k) - \mu g_\theta\{F[e(k)]\} \quad (2.13)$$

Varios algoritmos alternativos disponibles basados en gradiente sustituyen  $\mathbf{g}_w(k)$  por una estimación  $\hat{\mathbf{g}}_w(k)$ , y difieren en la forma en que se calcula el vector gradiente. La expresión gradiente verdadero depende del vector  $\mathbf{p}$  y la matriz  $\mathbf{R}$ , que generalmente no están disponibles.

De esta manera sustituyendo  $\mathbf{g}_w(k) = 2\mathbf{R}_w(k) - 2\mathbf{p}$  en (2.12)

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) - 2\mu\mathbf{R}_w(k) + 2\mu\mathbf{p} \quad (2.14)$$

Ahora, algunas de las principales propiedades relacionadas con el comportamiento de convergencia del algoritmo *steepest-descent* en el entorno estacionario se describen. En primer lugar, se requiere un análisis para determinar la influencia del factor de convergencia ( $\mu$ ) en el comportamiento de convergencia del algoritmo *steepest-descent*.

El error en los coeficientes de adaptación de filtro cuando se compara con solución de Wiener se define como:

$$\Delta\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_o \quad (2.15)$$

El algoritmo *steepest-descent* puede también ser descrito como:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{w}(k + 1) &= \Delta\mathbf{w}(k) - 2\mu[\mathbf{R}\mathbf{w}(k) - \mathbf{R}\mathbf{w}_o] \\ &= \Delta\mathbf{w}(k) - 2\mu\mathbf{R}\Delta\mathbf{w}(k) \\ \Delta\mathbf{w}(k + 1) &= (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\Delta\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde la relación  $\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{w}_o$ . Se puede demostrar a partir de la ecuación anterior que:

$$\Delta\mathbf{w}(k + 1) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{k+1}\Delta\mathbf{w}(0)$$

o

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}_o + (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{k+1}[\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_o]$$

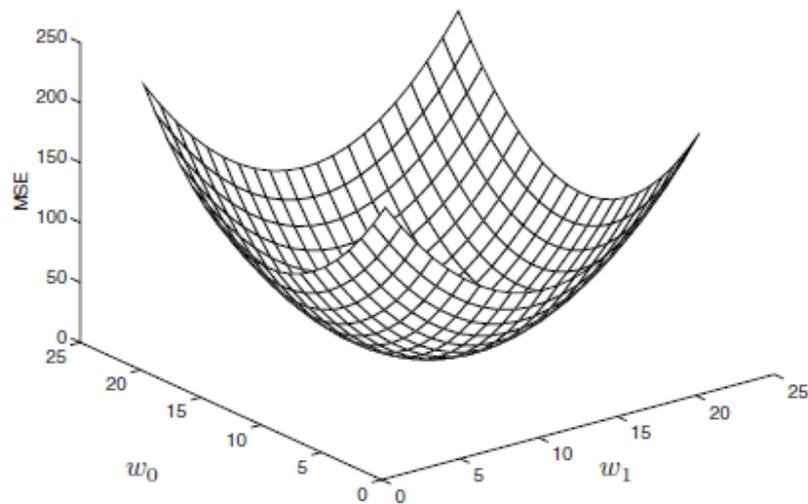


Figura 2.4. Superficie de Error Cuadrático

La ecuación (2.16) multiplicada por  $\mathbf{Q}^T$ , donde  $\mathbf{Q}$  es la matriz unitaria que diagonaliza  $\mathbf{R}$  a través de una transformación de semejanza:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{w}(k+1) &= (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{v}(k+1) \\ \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{w}(k+1) &= (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{v}(k)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Donde  $\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{w}(k+1)$  es el coeficiente de rotación del vector de error y esta ecuación puede reescribirse como:

$$\mathbf{v}(k+1) = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda})^{k+1} \mathbf{v}(0)\tag{2.18}$$

Con el fin de garantizar la convergencia de los coeficientes, cada elemento  $1 - 2\mu\lambda_i$  debe tener un valor absoluto menor que uno. Como consecuencia, el factor de convergencia del algoritmo *steepest-descent* debe ser elegido en el intervalo:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}$$

Donde  $\lambda_{max}$  es el mayor valor propio de  $\mathbf{R}$ .

### 2.1.5 APLICACIONES

Algunas de las aplicaciones clásicas del filtraje adaptativo son la identificación del sistema, ecualización de canales, la mejora de la señal, y la predicción.

La característica distintiva de cada aplicación es la forma se eligen la señal de entrada del filtro adaptativo y la señal deseada. Una vez que estas señales son determinadas, las propiedades de las mismas pueden ser usadas para entender el comportamiento esperado del filtro adaptativo cuando se intenta minimizar la función objetivo elegida pudiendo ser esta el MSE o el  $\xi$ .

#### 2.1.5.1 IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA

En la aplicación de identificación del sistema, la señal deseada es la salida del sistema desconocido cuando es excitada por una señal de banda ancha, en la mayoría de los casos una señal de ruido blanco. La señal de banda ancha también se utiliza como entrada para el filtro adaptativo como se ilustra en la figura. 2.5

Una señal de entrada común se aplica al sistema desconocido y al filtro adaptativo. Generalmente, la señal de entrada es una señal de banda ancha, con el fin de permitir que el filtro adaptativo converja a un buen modelo del sistema desconocido.

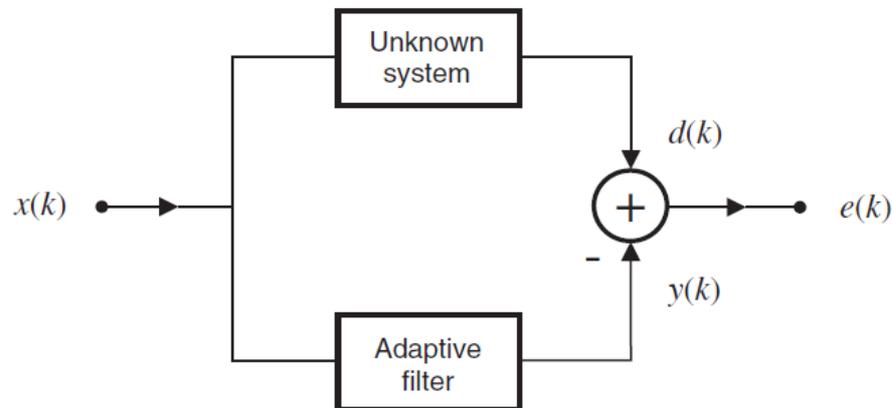


Figura 2.5. Identificación del Sistema

Si la señal de entrada es un ruido blanco, el mejor modelo para el sistema desconocido es un sistema cuya respuesta al impulso coincide con las  $N + 1$  primeras muestras de la respuesta de impulso del sistema desconocido. En los casos en que la respuesta de impulso del sistema desconocido es de longitud finita y el filtro adaptativo es de orden suficiente (es decir, que tiene un número suficiente de parámetros), el MSE se convierte en cero si no hay ruido en la medición (o el ruido del canal). En las aplicaciones prácticas de la medición del ruido es inevitable, y si no está correlacionada con la señal de entrada, el valor esperado de los coeficientes adaptables del filtro coincidirá con las muestras de respuesta del sistema desconocido.

El error de salida será por supuesto el ruido de medición. Se puede observar que el ruido de medición introduce una variación en las estimaciones de los parámetros de sistema desconocidos.

Algunas aplicaciones del mundo real del esquema de identificación del sistema incluyen el modelado de trayectoria de múltiples canales de comunicación [28], el control de los sistemas [29], la exploración sísmica [30], y la cancelación de eco causado por los híbridos en algunos sistemas de comunicación [31] - [35], sólo para mencionar unos pocos.

### 2.1.5.2 ECUALIZACIÓN DE CANAL

El sistema de ecualización de canal consiste en transmitir la señal originalmente distorsionada por el canal más el ruido ambiente como la señal de entrada a un filtro adaptativo, mientras que la señal deseada es una versión retardada de la señal original como se representa en la figura. 2.6. Esta versión retardada de la señal de entrada está en general disponible en el receptor en forma de una señal de instrucción estándar.

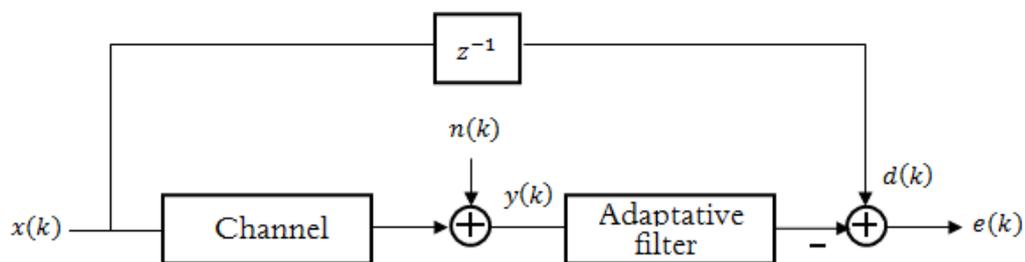


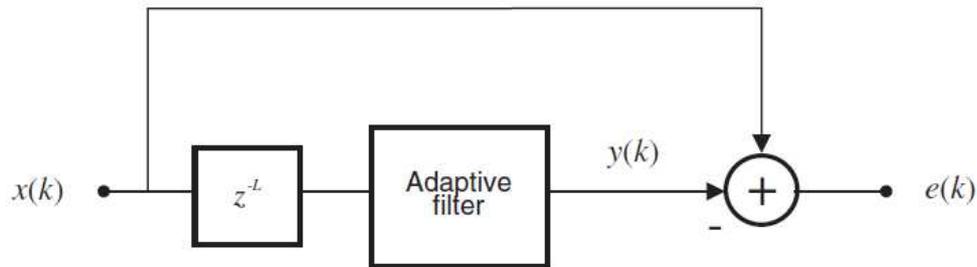
Figura 2.6. Ecualización del Canal

Como se puede ver en la figura. 2.6, la ecualización de canal o el filtrado inverso consiste en estimar una función de transferencia para compensar la distorsión lineal causada por el canal. Desde otro punto de vista, el objetivo es forzar un comportamiento dinámico prescrito para el canal (sistema desconocido) y el filtro adaptativo, determinado por la señal de entrada. La primera interpretación es más apropiada en las comunicaciones, donde la información se transmite a través de canales dispersivos. La segunda interpretación es adecuada para aplicaciones de control, donde el sistema de filtrado inverso genera señales de control para ser utilizado en el sistema desconocido [29].

### 2.1.5.3 PREDICCIÓN DE LA SEÑAL

Finalmente, la predicción de la señal es una versión retardada de la entrada del filtro adaptativo como se puede apreciar en la figura 2.7. Después de la convergencia, el filtro

adaptativo representa un modelo para la señal de entrada. Y se puede utilizar como un modelo de predicción para la señal de entrada.



**Figura 2.7. Predicción de la Señal**

Una aplicación típica de la predicción de la señal es la codificación de predicción lineal de señales de voz [36], donde la tarea del pronosticador es estimar los parámetros de voz. Estos parámetros son parte de la codificación de la información que se transmite o se almacena junto con otra información inherente a las características de la voz, como el periodo de tono, entre otros.

El predictor adaptativo de señal también se utiliza para la mejora de la línea de adaptación (ALE), en donde la señal de entrada es una señal de banda estrecha (predecible) a una señal de banda ancha. Después de la convergencia, el predictor de salida será una versión mejorada de la señal de banda estrecha. Sin embargo, otra aplicación de la señal de predictor es la supresión de interferencia de banda estrecha en una señal de banda ancha.

La señal de entrada, en este caso, tiene las mismas características generales de la ALE. Sin embargo, ahora estamos interesados en la eliminación de la interferencia de banda estrecha. Para tal aplicación, la señal de salida de interés es la señal de error de [37].

### 2.1.5.4 MEJORA DE LA SEÑAL

En la aplicación de mejora de la señal, la señal de referencia se compone de una señal deseada  $x(k)$  que está dañado debido a un ruido aditivo  $n_1(k)$ . La señal de entrada del filtro adaptativo es una señal de ruido  $n_2(k)$  que se correlaciona con la interferencia de la señal  $n_1(k)$ , pero no correlacionada con  $x(k)$ . La figura. 2.8 ilustra la configuración de la aplicación de mejora de la señal. En la práctica, esta configuración se encuentra en la cancelación de eco acústico para auditorios [37], audífonos, cancelación de ruido en hidrófonos [38], la cancelación de interferencia de línea de potencia en electrocardiografía [29], y en otras aplicaciones.

La cancelación de eco provocado por el híbrido en algunos sistemas de comunicación también puede ser considerada como mejora de la señal [29].

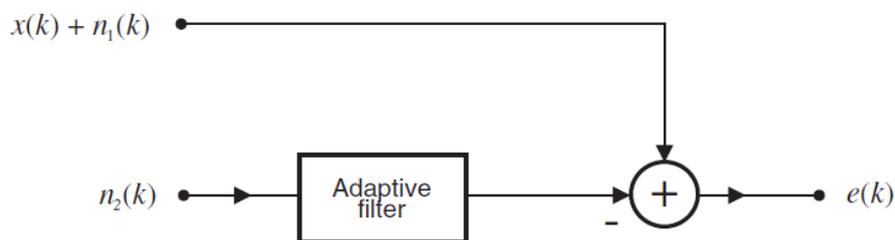


Figura 2.8. Mejora de la Señal

## 2.2 ALGORITMO LMS

El *Least-Mean-Square* (LMS) es un algoritmo de búsqueda en el que se realiza una simplificación del cálculo del vector gradiente posible modificando apropiadamente la función objetivo. El algoritmo LMS, así como otros relacionados con él, se usa ampliamente en diversas aplicaciones de filtrado adaptativo, debido a su simplicidad computacional. Las características de convergencia del algoritmo LMS se examinan con el fin de establecer un rango para el factor de convergencia que garantice la estabilidad.

El algoritmo LMS es ampliamente utilizado en el filtraje adaptativo por varias razones, la principal es la baja complejidad computacional, la prueba de convergencia en entorno estacionario, la convergencia imparcial en la media para la solución de Wiener, y el comportamiento estable cuando se implementa con la aritmética de precisión finita.

Con anterioridad se derivó la solución óptima para los parámetros del filtro adaptativo implementado a través de un combinador lineal, que corresponde al caso de múltiples señales de entrada. Esta solución conduce al mínimo error cuadrático medio en la estimación de la señal de referencia  $d(k)$ . La óptima solución de Wiener viene dada por la ecuación 2.11

Si se tiene disponible una buena estimación de la matriz  $\mathbf{R}$ , denotada por  $\mathbf{R}(k)$ , y del vector  $\mathbf{p}$ , denotada por  $\mathbf{p}(k)$ , se puede utilizar el algoritmo *steepest-descent-based* para buscar la solución de la ecuación de Wiener,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mu \hat{\mathbf{g}}_w(k) \\ \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) + 2\mu(\hat{\mathbf{p}}(k) - \hat{\mathbf{R}}(k)\mathbf{w}(k))\end{aligned}\quad (2.19)$$

Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $\hat{\mathbf{g}}_w(k)$  representa un estimado del vector gradiente de la función objetivo con respecto a los coeficientes del filtro.

Una solución posible es calcular el vector gradiente mediante el empleo de las estimaciones instantáneas para  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{p}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}(k) &= \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) \\ \hat{\mathbf{p}}(k) &= d(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

La estimación gradiente resultante viene dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{w}}(k) &= -2d(k)\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k) \\
&= -2\mathbf{x}(k)(-d(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)) \\
\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{w}}(k) &= -2e(k)\mathbf{x}(k)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Tenga en cuenta que si la función objetivo se sustituye por el cuadrado instantáneo del error  $e^2(k)$ , en lugar de MSE, la estimación gradiente anterior representa el vector gradiente verdadero desde:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e^2(k)}{\partial \mathbf{w}} &= \left[ 2e^2(k) \frac{\partial e(k)}{\partial w_0(k)} \quad 2e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial w_1(k)} \quad \dots \quad 2e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial w_N(k)} \right]^T \\
&= 2e(k)\mathbf{x}(k) \\
&= \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{w}}(k)
\end{aligned}$$

El gradiente resultante basado en el algoritmo se conoce como algoritmo LMS, cuya ecuación de actualización es:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + 2\mu e(k)\mathbf{x}(k) \tag{2.21}$$

Donde el factor de convergencia  $\mu$  debe ser elegido dentro de un rango para garantizar la convergencia.

La figura. 2.9 representa la realización del algoritmo LMS para una entrada de línea de retardo de  $\mathbf{x}(k)$ . Típicamente, una iteración de los LMS requiere  $n + 2$  multiplicaciones para el coeficiente de filtro de actualización y  $n + 1$  multiplicaciones para la generación de errores. La descripción detallada del algoritmo LMS se muestra en la tabla 2.1.

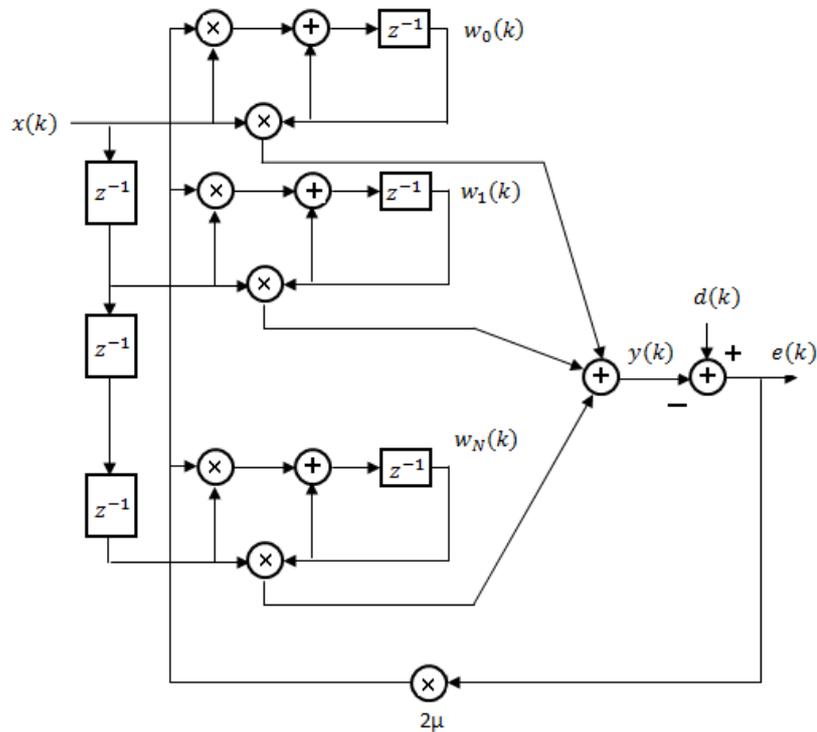


Figura 2.9. Filtro adaptativo LMS FIR

Cabe señalar que la inicialización no se realiza necesariamente como se describe en el algoritmo de la tabla 2.1, donde los coeficientes del filtro adaptativo se inicializan con ceros. Por ejemplo, si una idea aproximada del valor del coeficiente óptimo es conocido, estos valores pueden ser utilizados para formar  $\mathbf{w}_0$  que conduce a una reducción en el número de iteraciones necesarias para llegar a la zona de  $\mathbf{w}_0$ .

Tabla 2.1. Algoritmo LMS

ALGORITMO LMS
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> $\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ <p>Hacer para <math>k \geq 0</math></p> $e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)$ $\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + 2\mu e(k)\mathbf{x}(k)$

### 2.3 ALGORITMO RLS

El objetivo de los algoritmos de mínimos cuadrados es la minimización de la suma de los cuadrados entre la señal deseada y la señal del modelo del filtro [39] - [40]. Cuando nuevas muestras de las señales entrantes que se reciben en cada iteración, la solución para el problema de mínimos cuadrados puede ser calculado en forma recursiva.

Los algoritmos *Recursive Least Squares* (RLS) son conocidos por su rápida convergencia, incluso cuando la difusión de valores propios de la matriz de correlación de la señal de entrada es grande. Estos algoritmos tienen un rendimiento excelente cuando se trabaja en diferentes entornos de tiempo. Todas estas ventajas vienen con el coste de un aumento de la complejidad computacional y algunos problemas de estabilidad, que no son tan críticas en algoritmos LMS [41] - [42].

El objetivo aquí es elegir los coeficientes del filtro adaptativo de tal manera que la señal de salida  $y(k)$  durante el período de observación se ajuste a la señal deseada en la mayor medida posible. El proceso de minimización requiere la información disponible de la señal de entrada. Además, la función objetivo que se busca minimizar es determinista.

El genérico FIR filtro adaptativo realizado en forma directa se muestra en la figura 2.3. La señal de entrada vector de información en un instante dado  $k$  está definida por la ecuación 2.4.

Los coeficientes  $w_j$  para  $j = 0, 1 \dots N$ , donde  $N$  es el orden del filtro, se adaptan para minimizar la función objetivo dada. En el caso de los algoritmos de mínimos cuadrados, la función objetivo es determinista y está dada por:

$$\begin{aligned} \xi^d(k) &= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \xi^2(i) \\ \xi^d(k) &= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} [d(i) - \mathbf{x}^T(i)\mathbf{w}(k)]^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donde  $\mathbf{w}(k)$  es el coeficiente del vector del filtro adaptativo y se encuentra definida por la ecuación 2.5, y  $\epsilon(i)$  es la salida de error a posteriori, error en el instante  $i$ . El parámetro  $\lambda$  es un factor de ponderación exponencial que debe ser elegido en el rango de  $0 \ll \lambda < 1$ . Este parámetro también se conoce como factor de olvido ya que la información del pasado distante tiene un efecto cada vez más insignificante sobre el coeficiente de actualización.

Hay que hacer notar que en el desarrollo de los algoritmos LMS y LMS-based se ha utilizado el *error a priori*. En el algoritmo RLS  $\epsilon(k)$  representa el *error a posteriori* mientras que  $e(k)$  denota el error a priori. El error a posteriori será la primera opción en el desarrollo de los algoritmos basados en RLS.

Cada error consiste en la diferencia entre la señal deseada y la salida del filtro, utilizando los coeficientes más recientes  $\mathbf{w}(k)$ . Al diferenciar  $\xi^d(k)$  con respecto a  $\mathbf{w}(k)$ , se tiene:

$$\frac{\partial \xi^d(k)}{\partial \mathbf{w}(k)} = -2 \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) [d(i) - \mathbf{x}^T(i) \mathbf{w}(k)] \quad (2.23)$$

Al igualar el resultado a cero, es posible encontrar el vector óptimo  $\mathbf{w}(k)$ , que minimiza el error de mínimos cuadrados, a través de la siguiente relación:

$$-\sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \mathbf{w}(k) + \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{d}(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expresión resultante para el coeficiente óptimo del vector  $\mathbf{w}(k)$  viene dada por:

$$\mathbf{w}(k) = \left[ \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{d}(i)$$

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{R}_D^{-1}(k)\mathbf{p}_D(k) \quad (2.24)$$

Donde  $\mathbf{R}_D(k)$  es la matriz de correlación determinista de la señal de entrada y  $\mathbf{p}_D(k)$  es el vector de correlación cruzada entre la señal de entrada y las señales deseadas.

El algoritmo convencional de RLS se puede apreciar en la tabla 2.2.

Tabla 2.2. Algoritmo RLS Convencional

<b>ALGORITMO RLS CONVENCIONAL</b>
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> $\mathbf{S}_D(-1) = \delta \mathbf{I}$ <p>Donde <math>\delta</math> puede ser un valor estimado de la potencia de la señal de entrada</p> $\mathbf{p}_D(-1) = \mathbf{x}(-1) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ <p>Hacer para <math>k \geq 0</math></p> $\mathbf{S}_D(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{S}_D(k-1) - \frac{\mathbf{S}_D(k-1)\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k)\mathbf{S}_D(k-1)}{\lambda + \mathbf{X}^T(k)\mathbf{S}_D(k-1)\mathbf{X}(k)} \right]$ $\mathbf{p}_D(k) = \lambda \mathbf{p}_D(k-1) + d(k)\mathbf{X}(k)$ $\mathbf{w}(k) = \mathbf{S}_D(k)\mathbf{p}_D(k)$ <p>Si es necesario calcular:</p> $y(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$ $\epsilon(k) = d(k) - y(k)$

El algoritmo alternativo de RLS se puede apreciar en la tabla 2.3.

Tabla 2.3. Algoritmo RLS Alternativo

<b>ALGORITMO RLS ALTERNATIVO</b>
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> $\mathbf{S}_D(-1) = \delta \mathbf{I}$ <p>Donde <math>\delta</math> puede ser un valor estimado de la potencia de la señal de entrada</p> $\mathbf{x}(-1) = \mathbf{w}(-1) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ <p>Hacer <math>\text{par } k \geq 0</math></p> $e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T \mathbf{w}(k-1)$ $\boldsymbol{\psi}(k) = \mathbf{S}_D(k-1) \mathbf{x}(k)$ $\mathbf{S}_D(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{S}_D(k-1) - \frac{\boldsymbol{\psi}(k) \boldsymbol{\psi}^T(k)}{\lambda + \boldsymbol{\psi}^T(k) \mathbf{X}(k)} \right]$ $\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) + e(k) \mathbf{S}_D(k) \mathbf{x}(k)$ <p>Si es necesario calcular:</p> $y(k) = \mathbf{w}^T(k) \mathbf{x}(k)$ $\epsilon(k) = d(k) - y(k)$

## 2.4 ALGORITMO AP

Hay situaciones en las que es posible reutilizar la señal de datos antigua con el fin de mejorar la convergencia de los algoritmos de filtraje adaptativo. Los algoritmos *Data-reusing* [1], [4], [43]-[47] se consideran una alternativa para aumentar la velocidad de convergencia en situaciones en las que se correlaciona la señal de entrada. El único inconveniente de utilizar este tipo de algoritmos es que el desajuste se incrementa, y para lograr un equilibrio entre el desajuste final y la velocidad de convergencia se debe introducir un factor de convergencia.

Asumiendo que se puede mantener el último valor del vector de la señal de entrada  $L + 1$  en una matriz:

$$\mathbf{X}_{ap}(k) = \begin{bmatrix} x(k) & x(k-1) & x(k-L) \\ x(k-1) & x(k-2) & x(k-L-1) \\ x(k-N) & x(k-N-1) & x(k-L-N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{ap}(k) = [\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k-1) \dots \mathbf{x}(k-L)] \quad (2.25)$$

También podemos definir algunos vectores que representan los resultados de reutilización parciales en una iteración  $k$  dado, tal como la salida del filtro adaptativo, la señal deseada, y los vectores de error.

Estos vectores son:

$$\mathbf{y}_{ap}(k) = \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} y_{ap,0}(k) \\ y_{ap,1}(k) \\ y_{ap,L}(k) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{d}_{ap}(k) = \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k-1) \\ d(k-L) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{e}_{ap}(k) = \begin{bmatrix} e_{ap,0}(k) \\ e_{ap,1}(k) \\ e_{ap,L}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(k) - y_{ap,0}(k) \\ d(k-1) - y_{ap,1}(k) \\ d(k-L) - y_{ap,L}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{y}_{ap}(k) \quad (2.28)$$

El objetivo del algoritmo AP es minimizar

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2$$

$$\mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = 0 \quad (2.29)$$

El algoritmo AP mantiene el siguiente coeficiente del vector  $\mathbf{w}(k+1)$  lo más cerca posible al actual  $\mathbf{w}(k)$ , mientras que se fuerza el error a posteriori a ser cero.

Usando el método de los multiplicadores de *Lagrange* para realizar la minimización, la función no restringida a minimizar es:

$$F[\mathbf{w}(k+1)] = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 + \lambda_{ap}^T(k)[\mathbf{d}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k+1)] \quad (2.30)$$

Donde  $\lambda_{ap}^T$  es un vector multiplicador de Lagrange  $(L + 1) \times 1$ . Esta expresión puede ser rescrita como:

$$F[\mathbf{w}(k + 1)] = \frac{1}{2} [\mathbf{w}(k + 1) - \mathbf{w}(k)]^T [\mathbf{w}(k + 1) - \mathbf{w}(k)] + [\mathbf{d}^T(k) - \mathbf{w}^T(k + 1)\mathbf{X}_{ap}^T(k)]\lambda_{ap}^T \quad (2.31)$$

El gradiente de  $F[\mathbf{w}(k + 1)]$  con respecto a  $\mathbf{w}(k + 1)$  esta dado por:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{w}}\{F[\mathbf{w}(k + 1)]\} = \frac{1}{2}[2\mathbf{w}(k + 1) - 2\mathbf{w}(k)] - \mathbf{X}_{ap}(k)\lambda_{ap}(k) \quad (2.32)$$

Después de ajustar el gradiente de  $F[\mathbf{w}(k + 1)]$  con respecto a  $\mathbf{w}(k + 1)$  igual a cero, obtenemos:

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k)\lambda_{ap}(k) \quad (2.33)$$

Se debe tener en cuenta que cuando el ruido de medición está presente en el medio ambiente, la reducción a cero del error a posteriori no es una buena idea, ya que se tiene el filtro adaptativo para compensar el efecto de una señal de ruido que no esté correlacionada con la señal de entrada del filtro adaptativo. El resultado es un desajuste alto cuando el factor de convergencia es uno.

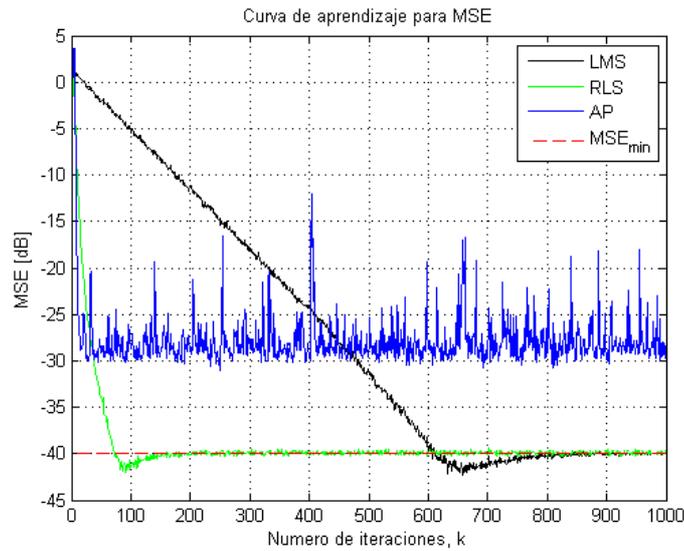
La descripción del algoritmo AP se da en el algoritmo de la tabla 2.4, donde una matriz identidad multiplicada por una constante pequeña se añadió a la matriz  $\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)$  con el fin de evitar problemas numéricos en la inversión de la matriz. El orden de la matriz a invertir depende del número de vectores de datos a ser reutilizada.

Tabla 2.4. Algoritmo AP

<b>ALGORITMO AFFINE PROJECTION (AP)</b>
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> <p><math>\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T</math></p> <p>Escoger <math>\mu</math> en el rango de <math>0 &lt; \mu \leq 2</math></p> <p><math>\gamma =</math> constante pequeña</p> <p>Hacer <math>k \geq 0</math></p> <p><math>\mathbf{e}_{ap}(k) = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k)</math></p> <p><math>\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) + \mu \mathbf{X}_{ap}^T(k) (\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k) + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{e}_{ap}(k)</math></p>

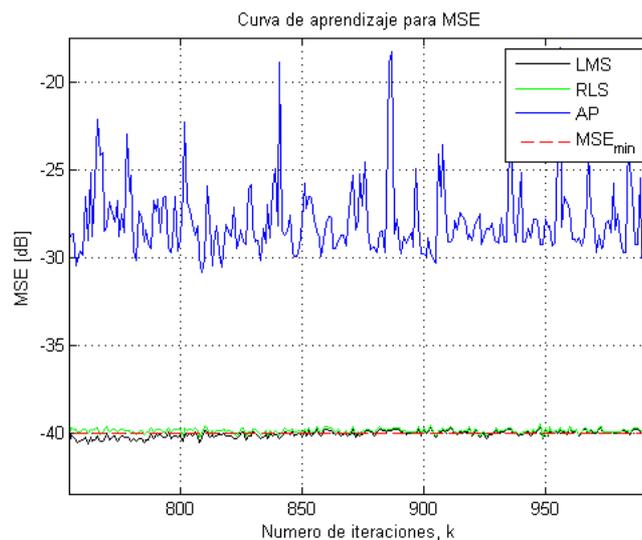
## 2.5 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS

En relación a la figura 2.10 se puede verificar lo antes expuesto, que el algoritmo de más rápida convergencia es el RLS versus LMS y AP; siendo que para el algoritmo AP empleamos  $L = 3$ , este valor puede mejorar el desempeño de la velocidad de convergencia del algoritmo en desmedro del valor del error cuadrático, el cual va a aumentar. La información referente al código en Matlab se encuentra en el ANEXO1.



**Figura 2.10. Curva de Aprendizaje para MSE**

En relación a la figura 2.11 se puede apreciar que el algoritmo AP tiene un mayor desajuste en comparación con los algoritmos RLS y LMS, es decir el error cuadrático es mayor, mientras que de los 3 algoritmos el LMS es el que converge más lentamente pero su error es mínimo a comparación de los otros algoritmos estudiados.



**Figura 2.11. Curva de Aprendizaje para MSE ampliada**

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISIS DEL ALGORITMO RSMAP

#### 3.1 FILTRO ADAPTATIVO SET-MEMBERSHIP

Las familias de algoritmos de filtraje adaptativo estudiadas hasta el momento presentan un equilibrio entre la velocidad de convergencia y el desajuste después de la etapa transitoria. Estas características son fácilmente observables en entornos estacionarios.

El filtro SM presenta una formulación alternativa para gobernar la actualización de los coeficientes del filtro adaptativo. El supuesto básico es que el ruido adicional se considera limitado, y la envolvente se conoce o se puede estimar [48]. La estrategia clave de la formulación es encontrar un conjunto de viabilidad de tal manera que la especificación de error acotado se cumpla para cualquier miembro de este conjunto. Como resultado, el filtrado SM trata de estimar la viabilidad fijada o un miembro de este grupo [49].

Como un subproducto, el SM permite la reducción de la complejidad computacional en el filtrado de adaptación, ya que los coeficientes del filtro se actualiza sólo cuando el error de estimación de salida es mayor que el predeterminado límite superior [49] - [50].

Los filtros adaptativos SM emplean una función objetivo determinista relacionada con una restricción de error limitado en la salida del filtro, de tal manera que las actualizaciones pertenecen a un conjunto de soluciones factibles. La función objetivo se asemeja a las especificaciones prescritas del diseño de filtros digitales. Para lo cual cualquier filtro cuya amplitud en algunas bandas de frecuencias sean más pequeños que los límites propuestos es una solución aceptable. Los algoritmos el LMS normalizado, AP, y los algoritmos RLS, los

algoritmos SM tienen una complejidad computacional reducida principalmente debido a los datos selectivos de actualizaciones.

Por lo general, los algoritmos SM realizan actualizaciones con más frecuencia durante las primeras iteraciones en entornos estacionarios, pero se debe optar por una solución alternativa si esto hace que su complejidad computacional aumente. Una posible estrategia para mantener cierto control sobre la cantidad de recursos computacionales es adoptar la actualización parcial, donde se actualizan sólo un subconjunto de los coeficientes en cada iteración.

### 3.1.1 DESCRIPCIÓN

El concepto de filtros SM puede ser aplicable a problemas de filtraje adaptativo que tengan parámetros lineales.

La salida del filtro adaptativo está dado por:

$$y(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) \quad (3.1)$$

Donde  $\mathbf{x}(k)$  y  $\mathbf{w}$  están dados por las ecuaciones 2.4 y 2.5 respectivamente.

Teniendo en cuenta que la estimación de error de la secuencia para una señal deseada  $d(k)$  y una entrada  $\mathbf{x}(k)$  para  $k = 0, 1, 2 \dots \infty$  está dada por:

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) \quad (3.2)$$

Los vectores  $\mathbf{x}(k)$  y  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N+1}$ , donde  $\mathbb{R}$  representa el conjunto de números reales, mientras que  $y(k)$  y  $e(k)$  representan la señal de salida del filtro adaptativo y la salida de error respectivamente. El objetivo del filtro SM es diseñar  $\mathbf{w}$  de tal forma que la magnitud de error de estimación de la salida superior esté delimitada por una cantidad prescrita  $\bar{\gamma}$ . Si el valor de  $\bar{\gamma}$  se encuentra correctamente elegido existen varias estimaciones válidas para  $\mathbf{w}$ , es

decir cualquier parámetro del filtro que conduzca a una magnitud de error de estimación de salida menor que un umbral determinista es una solución aceptable, pero si el valor de  $\bar{\gamma}$  es muy pequeño no puede existir ninguna solución.

Suponiendo que  $\bar{\mathcal{S}}$  denota el conjunto de todas las posibles entradas deseadas en pares de datos  $(\mathbf{x}, d)$ , es posible definir  $\Theta$  como el conjunto de todos los posibles vectores  $\mathbf{w}$  que conducen a errores de salida cuyas magnitudes están delimitadas por  $\bar{\gamma}$  y siempre que  $(\mathbf{x}, d) \in \bar{\mathcal{S}}$ . El conjunto  $\Theta$  llamado conjunto de viabilidad viene dado por:

$$\Theta = \bigcap_{(\mathbf{x}, d) \in \bar{\mathcal{S}}} \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N+1}: |d - \mathbf{w}^T \mathbf{x}| \leq \bar{\gamma}\} \quad (3.3)$$

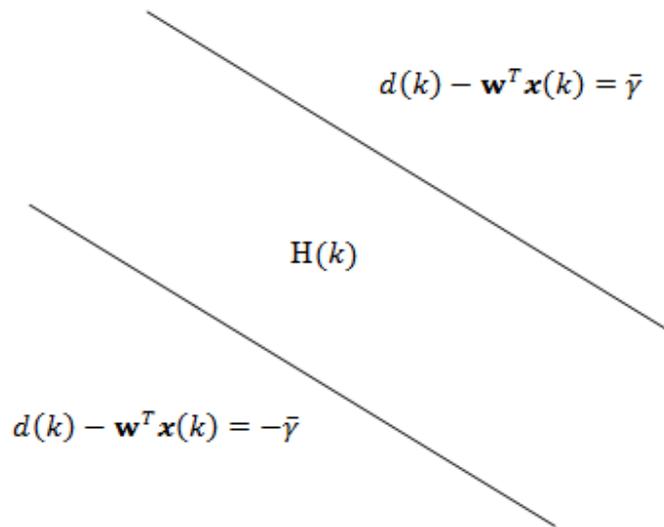
Ahora se tendrá el supuesto donde sólo se disponga de mediciones:

Dado un conjunto de pares de datos  $\{\mathbf{x}(i), d(i)\}$  para  $i = 0, 1, 2 \dots k$  se debe definir  $H(k)$  como el conjunto que contiene todos los vectores  $\mathbf{w}$  tal que el error de salida asociado al instante  $k$  se encuentre delimitado en magnitud por  $\bar{\gamma}$ .

$$H = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N+1}: |d - \mathbf{w}^T \mathbf{x}| \leq \bar{\gamma}\} \quad (3.4)$$

El conjunto de  $H(k)$  se refiere generalmente al conjunto de restricciones. Los límites de  $H(k)$  son hiperplanos.

Para el caso de dos dimensiones, donde el vector de coeficientes tiene dos elementos,  $H(k)$  comprende la región entre las líneas, donde  $d(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) = \pm \bar{\gamma}$  tal como se representa en la figura. 3.1. Para más dimensiones,  $H(k)$  representa la región entre dos hiperplanos paralelos en el espacio de parámetros  $\mathbf{w}$ .



**Figura 3.1.** Conjunto de restricciones en el plano  $w$  para un ejemplo en dos dimensiones

Dado que para cada par de datos hay un conjunto de restricción asociado, la intersección de la restricción fija sobre todos los instantes de tiempo disponibles  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , se llama *exact membership set*  $\psi(k)$ , definido como:

$$\psi(k) = \bigcap_{i=0}^k H(i) \quad (3.5)$$

El conjunto  $\psi(k)$  representa un polígono de parámetros en el espacio cuya ubicación es uno de los principales objetivos del filtro SM. Para un conjunto sustancial de pares de datos incluida la innovación, el polígono en  $w$ ,  $\psi(k)$ , debe hacerse pequeño.

Esta propiedad usualmente ocurre después de un gran número de iteraciones  $k$ , cuando más probable  $\psi(k) = \psi(k-1)$  está totalmente contenido en el conjunto de restricciones  $H(k)$  como se representa en la figura. 3.2. En este caso no es necesario actualizar los coeficientes de adaptación del filtro, porque el conjunto de miembros actual está totalmente dentro del conjunto de restricción. La actualización selectiva del filtro SM aporta disminuyendo el cálculo en dispositivos tales como terminales móviles. Por otra parte, en las

primeras iteraciones es muy posible que el conjunto de restricciones reduzca el tamaño del polígono de pertenencia como ilustra la figura. 3.3.

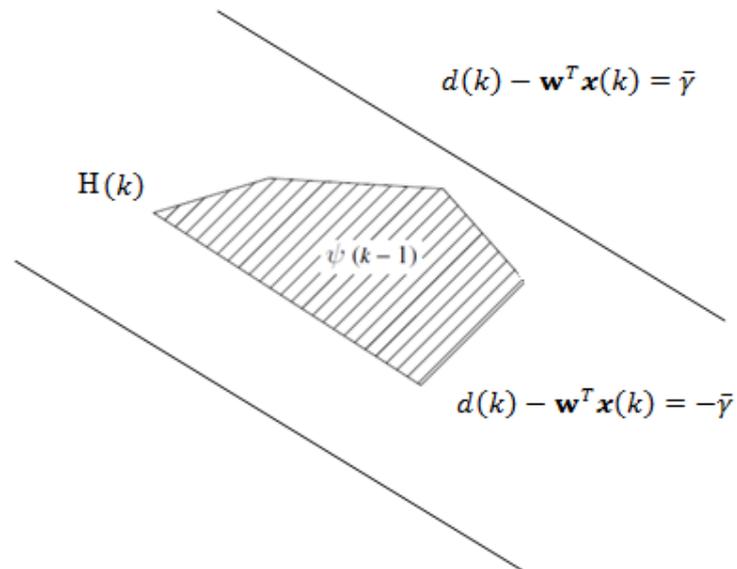


Figura 3.2. Exact membership set,  $\psi(k-1)$  contenida en el conjunto de restricciones  $\psi(k-1) \subseteq H(k)$ .

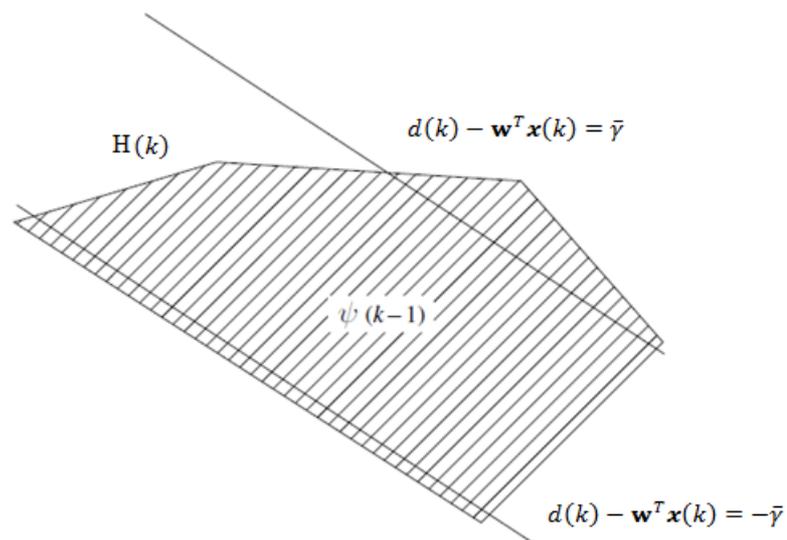


Figura 3.3. Exact membership set,  $\psi(k-1)$  no contenida en el conjunto de restricciones  $\psi(k-1) \not\subseteq H(k)$ .

### 3.1.2 ESTUDIO

Realizar una breve comparación de la complejidad computacional entre algunos algoritmos presentados anteriormente es apropiado en este punto. Para realizar una comparación de complejidad computacional se deben tomar en cuenta el número de multiplicaciones, adiciones y divisiones, donde se supone que la aplicación minimiza el número de divisiones, multiplicaciones y adiciones en ese orden. La Tabla 3.1 enumera la complejidad computacional para varios algoritmos, donde se puede observar que para el caso del algoritmo de SM-BNLMS 1 hay dos entradas, la complejidad de la actualización está relacionada con el número de pasos que se requiere para una actualización determinada. Dos pasos son necesarios si después del primer paso  $\mathbf{w}(k) \in H(k-1)$ . El algoritmo SM-BNLMS 2 aumenta la complejidad cada vez que se produce una actualización, mientras que para el algoritmo de SM-1 BNLMS la complejidad depende no sólo de cuando se produce una actualización, sino también la frecuencia con la que la segunda etapa se lleva a cabo. Como era de esperar las dos versiones del algoritmo SM-BNLMS dan lugar a un pequeño aumento en la complejidad computacional en comparación con el algoritmo de SM-NLMS. Por otro lado, los algoritmos anteriores requieren generalmente menos actualizaciones y convergen más rápido que el algoritmo SM-NLMS.

**Tabla 3.1. Complejidad computacional de los algoritmos SM**

Algoritmo	Multiplicación	Adición	División
LMS	$2N+1$	$2N+2$	0
NLMS	$2N+3$	$2N+5$	1
SM-NLMS	$2N+4$	$2N+6$	1
SM-SNLMS 1 (1 step)	$3N+4$	$3N+7$	1
SM-SNLMS 1 (2 step)	$5N+13$	$5N+16$	2
SM-BNLMS 2	$3N+11$	$3N+10$	1
RLS	$3N^2+11N+8$	$3N^2+7N+4$	1

La reducción de la complejidad computacional es esencial en aplicaciones en las cuales el orden del filtro es elevado y los recursos son limitados. Por lo tanto, se debe aprovechar las oportunidades de reducir la carga computacional, por ejemplo, suponiendo que el valor de  $\|\mathbf{x}(k-1)\|^2$  cuando la iteración  $k$  es desconocida.

Si  $\|\mathbf{x}(k-1)\|^2$  es conocida, se puede calcular  $\|\mathbf{x}(k)\|^2$  usando sólo dos multiplicaciones adicionales a través de  $\|\mathbf{x}(k)\|^2 = \|\mathbf{x}(k-1)\|^2 + \mathbf{x}^2(k) - \mathbf{x}^2(k-N)$ , también en caso de que el valor de  $\mathbf{x}^2(k-N)$  sea pre-almacenado entonces sólo se requiere de una multiplicación.

Esta estrategia ha tenido en cuenta los contadores de las multiplicaciones y las sumas de los algoritmos SM-BNLMS. Si la actualización se produce en dos instantes de tiempo sucesivos,  $\|\mathbf{x}(k-1)\|^2$  y  $\mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-2)$  ya han sido calculados en la actualización anterior, como resultado, el número de multiplicaciones y adiciones de tal actualizaciones pueden reducirse aún más, aproximadamente  $N+1$  para el algoritmo de SM-MCNL y  $2N+2$  para los algoritmos de SM-BNLMS 1 y 2, dependiendo de la aplicación. Por último, se debe tener en cuenta que si se calcula continuamente  $\|\mathbf{x}(k)\|^2$  y  $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k-1)$ , sin tener en cuenta si se necesita una actualización o no, el algoritmo SM-BNLMS 2 es siempre más eficiente que el algoritmo SM-BNLMS 1.

### 3.1.2.1 ALGORITMO SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION

*Exact membership set*  $\psi(k)$  se ha definido anteriormente en la ecuación (3.5), sugiere el uso de más conjuntos de restricción en la actualización [4]. En esta sección se generalizará el concepto de *set-membership* con el fin de obtener algoritmos cuyos cambios pertenecen al conjunto de las últimas restricciones  $L+1$ . Para lograr este objetivo debemos expresar  $\psi(k)$  como:

$$\psi(k) = \left(\bigcap_{i=0}^{k-L-1} H(i)\right) \left(\bigcap_{j=k-L}^k H(j)\right) = \psi^{k-L-1}(k) \cap \psi^{L+1}(k) \quad (3.6)$$

Donde  $\psi^{L+1}(k)$  representa la intersección del conjunto de la última restricción  $L + 1$ , mientras que  $\psi^{k-L-1}(k)$  es la intersección de los primeros conjuntos de restricción  $k - L$ . El objetivo de esta derivación es obtener un algoritmo cuyo coeficiente de actualización pertenezca a los últimos conjuntos de restricción  $L + 1$ . Es decir  $\mathbf{w}(k + 1) \in \psi^{L+1}(k)$ .

Al igual que en el algoritmo original *Affine Projection* se puede retener el último vector de señal de entrada  $L + 1$  en una matriz como se describe en la ecuación (2.25), donde  $\mathbf{X}_{ap}(k) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (L+1)}$  contiene las entradas retenidas correspondientes, con  $\mathbf{x}(k)$  expresado en la ecuación (2.4) empieza el vector de la señal de entrada.

Los vectores que representan los datos que se consideran en una iteración  $k$  dado, tal como la señal deseada y vectores de error están dados por las ecuaciones (2.27) y (2.28). Donde  $\mathbf{d}_{ap}(k) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$  contiene los resultados pasados de los últimos instantes  $L + 1$ .

Considerando que  $\mathcal{S}(k - i + 1)$  denota el hiperplano que contiene todos los vectores  $\mathbf{w}$  tal que  $\mathbf{d}(k - i + 1) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k - i + 1) = \bar{\gamma}_i(k)$  para  $i = 1, \dots, L + 1$ , donde el parámetro  $\bar{\gamma}_i(k)$  representa la restricción de límite que deben cumplir las magnitudes de error después del coeficiente de actualización.

Es decir, si todos  $\bar{\gamma}_i(k)$  se eligen de manera que  $|\bar{\gamma}_i(k)| \leq \bar{\gamma}$  entonces  $\mathcal{S}(k - i + 1) \in \mathcal{H}(k - i + 1)$  para  $i = 1, \dots, L + 1$ . El vector  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}(k) \in \mathbb{R}^{(L+1) \times 1}$  especifica el punto en  $\psi^{L+1}(k)$ , donde:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}(k) = [\bar{\gamma}_1(k) \bar{\gamma}_2(k) \dots \bar{\gamma}_{L+1}(k)]^T \quad (3.7)$$

La función objetivo que debe reducirse al mínimo en el algoritmo SMAP es  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}(k)$ , para lo cual se debe realizar una actualización de coeficientes siempre que  $\mathbf{w}(k) \in \psi^{L+1}(k)$  de tal forma que:

$$\min \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \quad (3.8)$$

Sujeto a:

$$\mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = \bar{\gamma}(k) \quad (3.9)$$

Donde la restricción puede ser reescrita como  $d(k-i+1) - \mathbf{x}^T(k-i+1)\mathbf{w}(k+1) = \bar{\gamma}_i(k)$ , para  $i = 1, \dots, L+1$ . La figura 3.3 ilustra una actualización del coeficiente típico relacionado con el algoritmo de SM-AP para el caso con dos coeficientes,  $L = 1$  y  $|\bar{\gamma}_i(k)| < |\bar{\gamma}|$ , tal que  $\mathbf{w}(k+1)$  no se coloca en la frontera de  $H(k)$ .

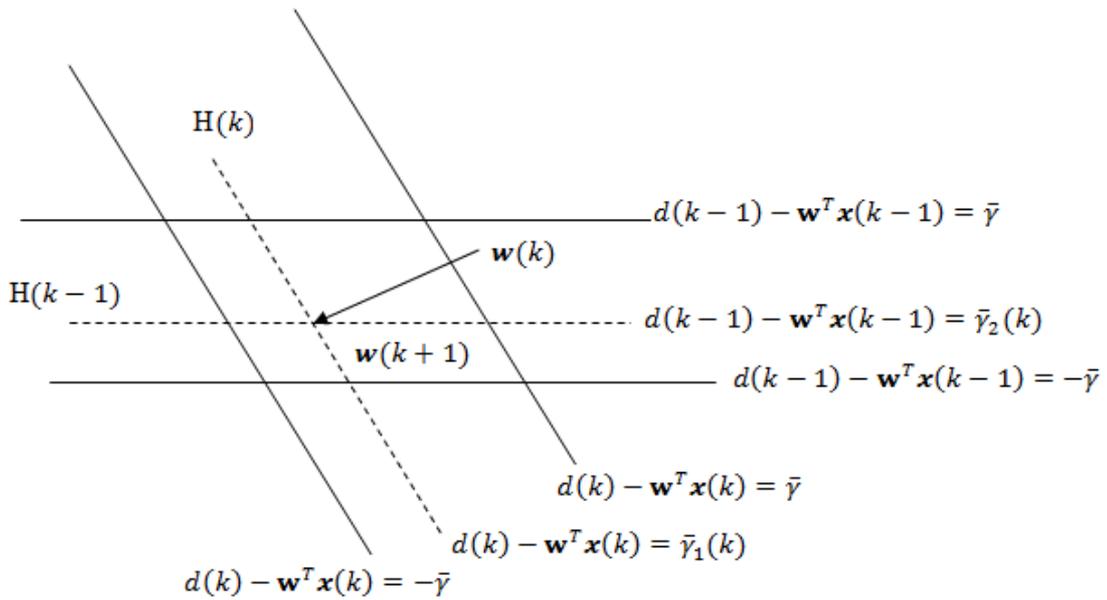


Figura 3.4. Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente

Usando el método de los multiplicadores de *Lagrange* [51], la función no restringida a minimizar es:

$$F[\mathbf{w}(k+1)] = \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 + \lambda_{ap}^T(k)[\mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k+1) - \bar{\gamma}(k)] \quad (3.10)$$

Donde el vector multiplicador de *Lagrange*,  $\boldsymbol{\lambda}_{ap}(k) \in \mathbb{R}^{(L+1) \times 1}$ , esta dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_{ap}(k) = [\boldsymbol{\lambda}_{ap,1}(k) \boldsymbol{\lambda}_{ap,2}(k) \dots \boldsymbol{\lambda}_{ap,L+1}(k)]^T \quad (3.11)$$

De tal manera que las restricciones pueden ser reescrita como:

$$\begin{aligned} F[\mathbf{w}(k+1)] &= \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{L+1} \boldsymbol{\lambda}_{ap,i}(k) [d(k-i+1) - \mathbf{x}^T(k-i+1)\mathbf{w}(k+1) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i(k)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se resuelve el problema de minimización de la ecuación (3.8) estableciendo primero el gradiente de la función  $F[\mathbf{w}(k+1)]$  con respecto a  $\mathbf{w}(k+1)$  igual a cero, con el fin de derivar la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) + \sum_{i=1}^{L+1} \frac{\boldsymbol{\lambda}_i(k)}{2} \mathbf{x}(k-i+1) \\ &= \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k) \frac{\boldsymbol{\lambda}_{ap}(k)}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $\mathbf{X}_{ap}^T(k)$  y utilizando las restricciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{d}_{ap}(k) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(k) \\ \mathbf{d}_{ap}(k) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(k) &= \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k) \frac{\boldsymbol{\lambda}_{ap}(k)}{2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

O alternativamente

$$d(k-i+1) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i(k) = \mathbf{x}^T(k-i+1)\mathbf{w}(k) + \sum_{j=1}^{L+1} \frac{\boldsymbol{\lambda}_j(k)}{2} \mathbf{x}^T(k-i+1)\mathbf{x}(k-j+1)$$

Para  $i = 1, \dots, L + 1$

La ecuación (3.14) puede ser rescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)\frac{\lambda_{ap}(k)}{2} &= \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k) - \bar{\mathbf{v}}(k) \\ &= \mathbf{e}_{ap}(k) - \bar{\mathbf{v}}(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Que conduce a:

$$\frac{\lambda_{ap}(k)}{2} = [\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}[\mathbf{e}_{ap}(k) - \bar{\mathbf{v}}(k)] \quad (3.16)$$

Ahora es posible derivar la ecuación de actualización partiendo de la ecuación (3.13) con  $\lambda_{ap}(k)$  que está dada por la ecuación (3.16), es decir:

$$\mathbf{w}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}[\mathbf{e}_{ap}(k) - \bar{\mathbf{v}}(k)] & \text{si } |e(k)| > \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{w}(k) & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.17)$$

Donde :

$$\mathbf{e}_{ap}(k) = [e(k)\varepsilon(k-1) \dots \varepsilon(k-L)]^T \quad (3.18)$$

Con  $\varepsilon(k-i) = d(k-i) - \mathbf{x}^T(k-i)\mathbf{w}(k)$  que denota el error a posteriori calculado con el par de datos de la iteración  $k-i$  usando los coeficientes de la iteración  $k$ . En la tabla 3.2 se describe en detalle la forma general del algoritmo SM AP.

Tabla 3.2. Algoritmo SM-AP

ALGORITMO SM AP
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> <p><math>\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T</math></p> <p>Escoger <math>\bar{\gamma}</math> alrededor de <math>\sqrt{5}\sigma_n</math></p> <p><math>\gamma = \text{constante pequeña}</math></p> <p>Hacer para <math>k \geq 0</math></p> <p><math>\mathbf{e}_{ap}(k) = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k)</math></p> <p><math>\mathbf{w}(k+1)</math></p> $= \begin{cases} \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}[\mathbf{e}_{ap}(k) - \bar{\gamma}(k)] & \text{si }  e(k)  > \bar{\gamma} \\ \mathbf{w}(k) & \text{otro caso} \end{cases}$

Varias propiedades relacionadas con el algoritmo de SM-AP son fáciles de deducir:

- Para el instante  $k < L + 1$ , es decir durante la inicialización, sólo podemos suponer el conocimiento de  $H(i)$  para  $i = 0, 1, \dots, k$ . Como resultado, si se necesita una actualización cuando  $k < L + 1$ , se utiliza el algoritmo con la única restricción de  $k + 1$  conjuntos disponibles.
- Con el fin de verificar si una actualización de  $\mathbf{w}(k + 1)$  es necesaria, sólo tenemos que comprobar si  $\mathbf{w}(k) \notin H(k)$ , ya que debido a las actualizaciones anteriores a  $\mathbf{w}(k) \in H(k - i + 1)$  se cumple para  $i = 2, \dots, L + 1$ .
- Al elegir la envolvente  $\bar{\gamma} = 0$ , es posible verificar que el algoritmo se convierte en el convencional AP con la unidad como tamaño de paso.

### Una opción trivial para escoger $\bar{\gamma}(k)$

En las especificaciones del parámetro  $\bar{\gamma}_i(k)$  se ha discutido que como requisito los coeficientes de adaptación del filtro deben estar en  $H(k - i + 1)$  lo que significa que  $|\bar{\gamma}_i(k)| < |\bar{\gamma}|$ . Existe un número infinito de posibles opciones para  $\bar{\gamma}_i(k)$ , cada una conduce a una actualización diferente.

La elección más trivial sería  $\bar{\gamma}(k) = 0$ , es decir, para obligar a los errores a posteriori a ser cero en los últimos instantes de tiempo  $L + 1$ .

Si se sustituye  $\bar{\gamma}(k) = 0$  en la ecuación (3.14) y resolviendo para  $\lambda_{ap}(k)$  se obtiene como resultado las siguientes recursiones:

$$\frac{\lambda_{ap}(k)}{2} = \left( \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \mathbf{e}_{ap}(k) \quad (3.19)$$

La actualización recursiva está dada por:

$$\mathbf{w}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k) \left( \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \mathbf{e}_{ap}(k) & \text{si } |e(k)| > \bar{\gamma} \\ \mathbf{w}(k) & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.20)$$

En la ecuación anterior la actualización es idéntica a la del algoritmo convencional AP con la unidad como tamaño de paso siempre que una actualización se lleva a cabo, es decir  $\mathbf{w}(k) \notin H(k)$ .

Sin embargo, debido a la selectividad de datos, el algoritmo de SM-AP conduce a una reducción considerable en la complejidad en comparación con el algoritmo convencional AP.

La figura 3.5 representa un coeficiente de actualización típico, donde para fines de ilustración  $\mathbf{w}(k)$  no está en el cero a posteriori del hiperplano que pertenece a  $H(k - 1)$ .

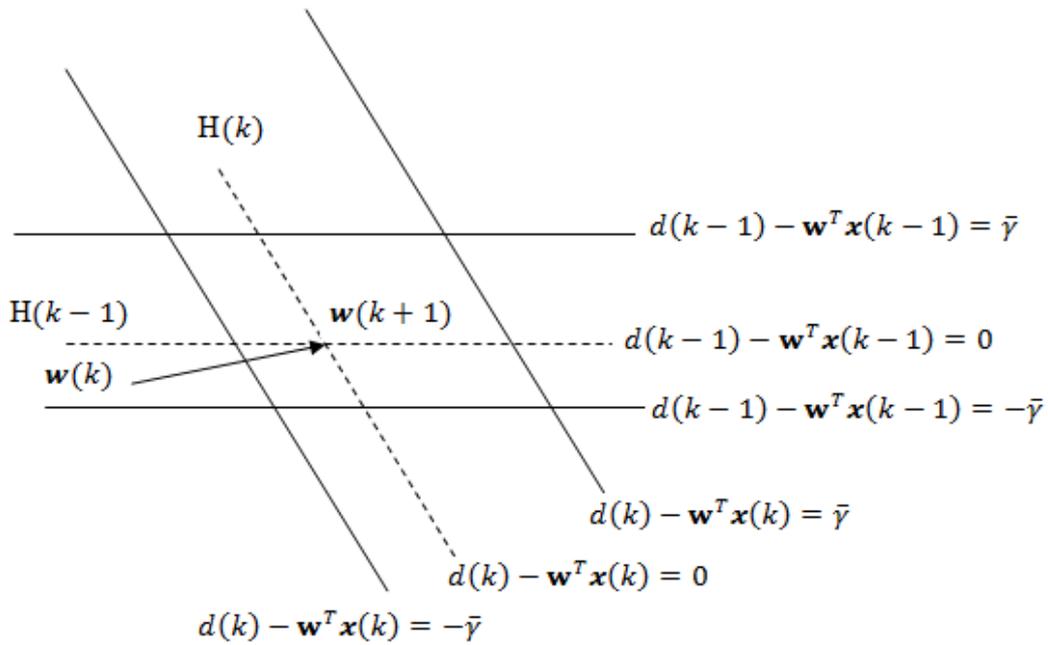


Figura 3.5. Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente sin error de cero a posteriori

### Un simple vector $\bar{\gamma}(k)$

Cualquier elección para  $\bar{\gamma}_i(k)$  es válida siempre que corresponda a los puntos representados por los coeficientes del filtro adaptativo que pertenezcan a  $H(k-i+1)$ , es decir  $|\bar{\gamma}_i(k)| < |\bar{\gamma}|$ . Se puede aprovechar esta libertad con el fin de hacer que el algoritmo resulte más adecuado para una aplicación específica.

Una versión particular del algoritmo SM-AP se obtiene si  $\bar{\gamma}_i(k)$  para  $i \neq 1$  corresponde a el error a posteriori  $\varepsilon(k-i+1) = d(k-i+1) - \mathbf{w}^T(k-i+1)\mathbf{x}(k-i+1)$  y  $\bar{\gamma}_1(k) = e(k)/|e(k)|$ .

Dado que los coeficientes se han actualizado teniendo en cuenta los pares de datos anteriores, entonces en este punto es cierto que  $\mathbf{w}(k) \in H(k-i+1)$  es decir  $|\varepsilon(k-i+1)| = |d(k-i+1) - \mathbf{w}^T(k-i+1)\mathbf{x}(k)| \leq \bar{\gamma}$ , para  $i = 2, \dots, L+1$ .

Por lo tanto al elegir  $\bar{\gamma}_i(k) = \varepsilon(k - i + 1)$ , para  $i \neq 1$ , todos los elementos en el lado derecho de la ecuación (3.14) se hacen cero, excepto para el primer elemento.

Solo queda escoger el valor de restricción de  $\bar{\gamma}_1(k)$ , que pueden ser seleccionados como en el algoritmo de SM-NLMS donde  $\bar{\gamma}_1(k)$  es tal que la solución se encuentra en el límite más próximo a  $H(k)$  es decir:

$$\bar{\gamma}_1(k) = \bar{\gamma} \frac{e(k)}{|e(k)|} \quad (3.21)$$

Si se utiliza la ecuación anterior en la ecuación (3.15) se tiene:

$$\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \frac{\lambda_{ap}(k)}{2} = \mu(k) e(k) \mathbf{u}_1 \quad (3.22)$$

Donde  $\mu(k) = 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(k)|}$  y  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

La ecuación de actualización resultante viene dada por:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k) [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \mu(k) e(k) \mathbf{u}_1 \quad (3.23)$$

Donde  $e(k)$  esta dada por la ecuación (3.2) y

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(k)|} & \text{si } |e(k)| > \bar{\gamma} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.24)$$

Este algoritmo reduce al mínimo la distancia euclidiana  $\|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2$  sujeto a la restricción  $\mathbf{w}(k+1) \in \psi^{L+1}(k)$  de tal manera que los errores a posteriori en la interacción  $k-i$ ,  $k(\varepsilon-i)$  se mantengan constantes para  $i = 2, \dots, L+1$ .

La figura 3.6 ilustra un coeficiente típico de actualización del algoritmo *Simplified SM-AP* donde se observa que el error a posteriori en relación con los datos anteriores se mantiene inalterado.

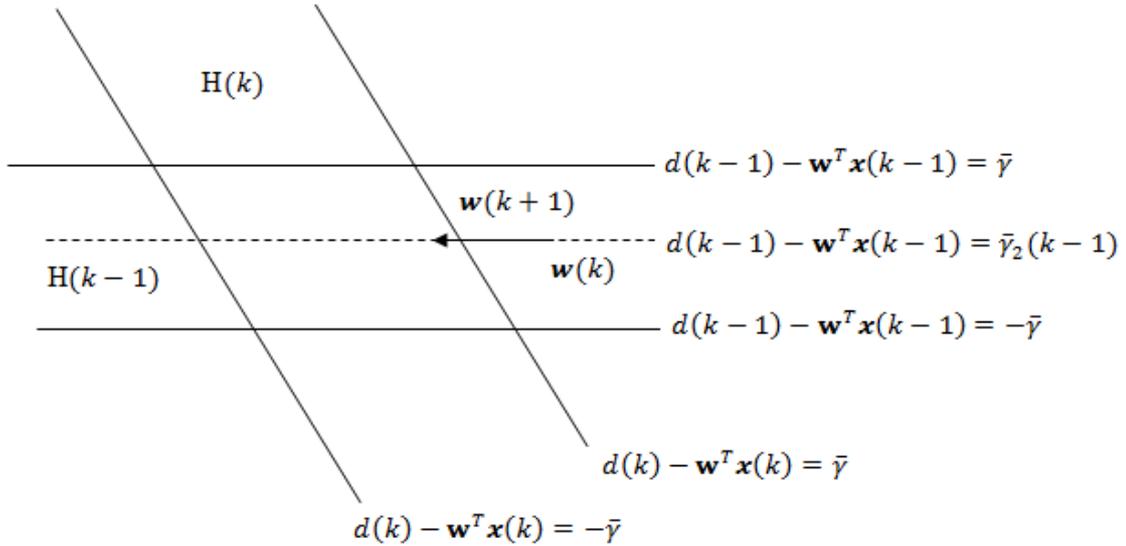


Figura 3.6. Algoritmo SM-AP actualización del coeficiente sin error de cero a posteriori

### 3.1.2.2 SIMPLIFIED SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION

El algoritmo *Simplified SM-AP* está dado por la ecuación (3.23) la misma que llevará a cabo una actualización si y sólo si  $w(k) \notin H(k)$ , o  $e(k) > \bar{y}$ . La descripción paso a paso del algoritmo *Simplified SM-AP* se presenta en la tabla 3.3

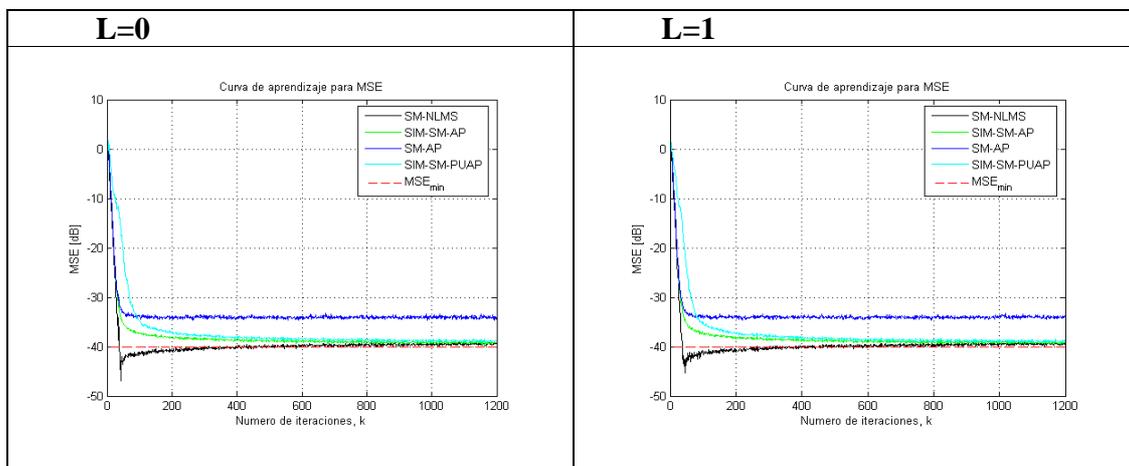
**Tabla 3.3. Algoritmo Simplified SM-AP**

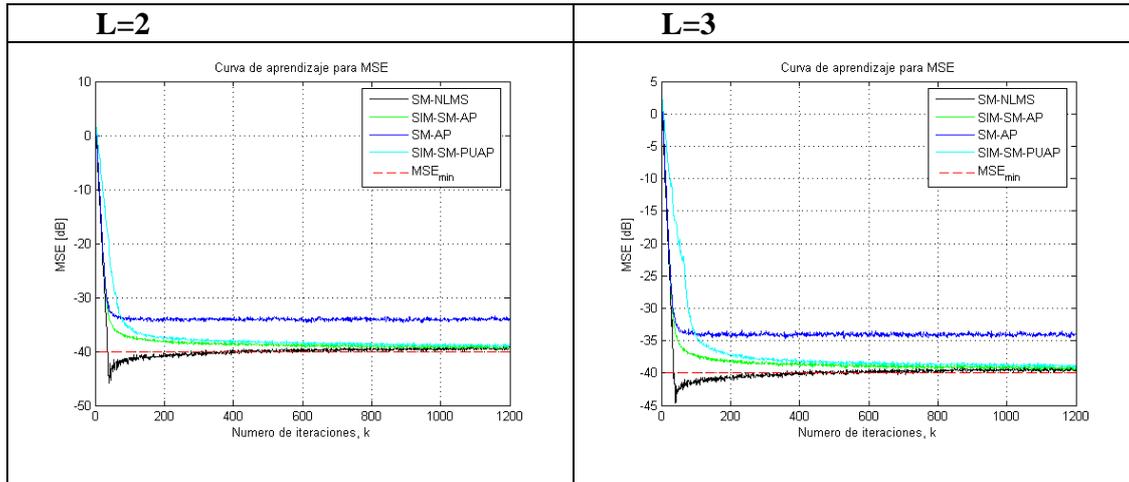
<b>ALGORITMO Simplified SM-AP</b>
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> <p><math>\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T</math></p> <p>Escoger <math>\bar{\gamma}</math> alrededor de <math>\sqrt{5}\sigma_n</math></p> <p><math>\gamma =</math> pequeña constante</p> <p>Hacer par <math>k \geq 0</math></p> <p><math>\mathbf{e}_{ap}(k) = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k)</math></p> $\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{ e(k) } & \text{si }  e(k)  > \bar{\gamma} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ <p><math>\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k) + \gamma\mathbf{I}]^{-1}\mu(k)e(k)\mathbf{u}_1</math></p>

### 3.2 COMPARACIÓN DE LOS ALGORITMOS

A continuación se realizará una comparación entre los algoritmos SM NLMS, *Simplified* SM AP, SM AP, SM PUAP con diferentes valores de L (factor de reutilización de datos). Código en el ANEXO2.

**Tabla 3.4. Comparación de algoritmos con diferentes valores de L**





Con un factor de reutilización de datos  $L$  igual a cero podemos verificar que el algoritmo que muestra mayor velocidad de convergencia es el SM AP sin embargo es el algoritmo que presenta mayor error con respecto al MSE esperado. El algoritmo SIM SM AP converge con mayor velocidad que el algoritmo SIM SM PUAP pero el error que presentan con respecto al MSE esperado es muy similar, mientras que el algoritmo SM NLMS tiene un error mínimo con respecto a todos los algoritmos mencionados anteriormente. Como se puede observar al aumentar el valor del factor de reutilización se consigue que el error del algoritmo SM AP con respecto al MSE esperado disminuya, adicionalmente la velocidad de convergencia del algoritmo SIM SM PUAP disminuye, sin embargo las características de los algoritmos SM NLMS y SIM SM AP se mantienen.

### 3.3 ROBUST SET-MEMBERSHIP AFFINE PROJECTION

#### 3.3.1 ALGORITMO RSMAP

En el algoritmo RSMAP propuesto, el vector de límite de error  $\bar{\gamma}(k)$  es escogido como:

$$\bar{\gamma}^T = \bar{\gamma}_k \left[ \frac{e(k)}{|e(k)|} \frac{\varepsilon_{k-1}}{|e(k)|} \cdots \frac{\varepsilon_{k-L+1}}{|e(k)|} \right] \quad (3.25)$$

Para este límite de error, si  $|e(k)| > \bar{\gamma}$ , se obtiene  $|\varepsilon_{k-i}| > \bar{\gamma}(i)$  para  $i = 2, \dots, L$  donde  $\bar{\gamma}(i)$  denota el  $i$  – ésimo elemento del vector  $\bar{\gamma}$ .

Si se utiliza (3.25) en:

$$\mathbf{w}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{w}(k) + X_{ap}(k)[X_{ap}^T(k)X_{ap}(k)]^{-1}[e_{ap}(k) - \bar{\gamma}(k)] & \text{si } |e(k)| > \bar{\gamma} \\ \mathbf{w}(k) & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.26)$$

La fórmula de actualización del vector de peso es:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(k)X_{ap}(k)[X_{ap}^T(k)X_{ap}(k)]^{-1}e(k) \quad (3.27)$$

Donde  $\mu(k)$  se encuentra definida por:

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(k)|} & \text{si } |e(k)| > \bar{\gamma}_k \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.28)$$

Donde  $\mu(k)$  es el paso de tamaño fijo y  $0 < \mu < 1$ . En base a (3.27), el propósito del algoritmo RSMAP puede ser considerado como un paso de tamaño variable del algoritmo AP, en el cual el tamaño del paso  $\mu(k)$  puede variar en el rango de cero a la unidad. Son posibles dos versiones del algoritmo RSMAP propuesto, una con umbral fijo (RSMAP<sub>1</sub>) y la otra con umbral variable (RSMAP<sub>2</sub>)

### Algoritmo RSMAP con umbral fijo

En el propuesto algoritmo RSMAP con umbral fijo, el factor  $\bar{\gamma}_k$  en (3.1) es escogido como:

$$\bar{\gamma}_k = \begin{cases} \|e(k)\|_\infty - v\theta_k & \text{si } \|e(k)\|_\infty > \theta_k \\ \bar{\gamma}_c & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.29)$$

Donde  $0 < v \ll 1$ ,  $\bar{\gamma}_c = \sqrt{5\sigma_v^2}$ , y  $\theta_k$  es escogida para ser menor que  $\bar{\gamma}_c$  con el fin de garantizar que el algoritmo trabaje con el límite de error  $\|e(k)\|_\infty - v\theta_k$  durante el estado estacionario y también con el ruido impulsivo corrupto  $e(k)$ . Extensas simulaciones han mostrado que para un valor adecuado de  $\theta_k$  se puede obtener  $\theta_k = Q\sigma_{1,k}$  donde  $1.86 \leq Q \leq 1.98$ . El valor  $Q = 1.98$  conduce a mejorar la eficiencia computacional. La varianza de la señal de error  $\sigma_{1,k}^2$  es obtenida como:

$$C_k = \text{mediana}(c_k) \quad (3.30)$$

$$\sigma_{1,k}^2 = \lambda\sigma_{1,k-1}^2 + (1 - \lambda)C_k \quad (3.31)$$

Donde  $c_k = [e_k^2 + \epsilon e_{k-1}^2 + \epsilon \dots e_{k-p+1}^2 + \epsilon] \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  y  $\epsilon$  es un escalar positivo muy pequeño del orden de  $10^{-12}$  mientras  $\lambda = 1 - \frac{1}{(c_1 M)}$  es el factor de recuerdo y  $c_1$  es un entero.

Un vector cero se puede asignar inicialmente a  $c_k$ . Con  $\sigma_{1,k}$  conocida,  $\theta_k$  se obtiene y por lo tanto  $\bar{\gamma}_k$  es evaluada usando (3.29). A su vez,  $\bar{\gamma}_k$  es usada en (3.28) para obtener  $\mu(k)$  la cual es también usada en (3.27) para obtener el vector de peso. En la Tabla 3.5 se tiene el algoritmo RSMAP<sub>1</sub>.

### Algoritmo RSMAP con umbral variable

El algoritmo RSMAP con umbral variable, usa todas las ecuaciones de RSMAP<sub>1</sub> es decir de la (3.29) a (3.31) junto con:

$$\eta_k = \beta\eta_{k-1} + (1 - \beta)\min\left(\eta_{k-1}, \frac{|a_k^2 - y_k^2|}{d_k^2}\right) \quad (3.32)$$

Tabla 3.5. Algoritmo RSMAP con Umbral Fijo

<b>ALGORITMO Robust SM-AP con Umbral fijo</b>
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> <p><math>\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T</math></p> <p>Escoger <math>\bar{\gamma}_c</math> y <math>\bar{\gamma}</math> alrededor de <math>\sqrt{5}\sigma_n</math></p> <p><math>c_k = [e_k^2 + \epsilon e_{k-1}^2 + \epsilon \dots e_{k-p+1}^2 + \epsilon] \in \mathbb{R}^{N \times 1}</math></p> <p>Escoger <math>\lambda</math> entre <math>0 &lt; \lambda \ll 1</math></p> <p>Escoger <math>v</math> entre <math>0 &lt; v \ll 1</math></p> <p>Escoger <math>Q</math> entre <math>1.86 \leq Q \leq 1.98</math></p> <p>Hacer para <math>k \geq 0</math></p> <p><math>\mathbf{e}_{ap}(k) = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k)</math></p> <p><math>C_k = \text{mediana}(c_k)</math></p> <p><math>\sigma_{1,k}^2 = \lambda\sigma_{1,k-1}^2 + (1 - \lambda)C_k</math></p> <p><math>\theta_k = Q\sigma_{1,k}</math></p> <p><math>\bar{\gamma}_k = \begin{cases} \ e(k)\ _\infty - v\theta_k &amp; \text{si } \ e(k)\ _\infty &gt; \theta_k \\ \bar{\gamma}_c &amp; \text{otro caso} \end{cases}</math></p> <p><math>\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{ e(k) } &amp; \text{si }  e(k)  &gt; \bar{\gamma}_k \\ 0 &amp; \text{otro caso} \end{cases}</math></p> <p><math>\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(k)\mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k) + \gamma\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}_{ap}(k)</math></p>

$$\sigma_{2,k}^2 = \lambda\sigma_{2,k-1}^2 + (1 - \lambda)\min(\sigma_{2,k-1}^2, \sigma_{1,k}^2) \quad (3.33)$$

Donde  $\eta_k$  es un parámetro usado para controlar el cambio entre el límite de error  $\bar{\gamma}_c$  y  $\|e(k)\|_\infty - v\theta_k$ ,  $\sigma_{2,k}$  es la varianza de la señal de error,  $\beta = 1 - \frac{1}{(c_2M)}$  es el factor de recuerdo usado para obtener el umbral:

$$\bar{\gamma}_c = \{\bar{\gamma}_{c,0}^2 + \gamma[1 + \text{sign}(1 - \eta_k)\sigma_{2,k}^2]\}^{1/2} \quad (3.34)$$

Donde  $Y$  es una constante de ajuste y  $\bar{\gamma}_{c,0}^2$  es una aproximación estimada de la varianza del ruido  $\sigma_v^2$ .

Si no se dispone de información sobre la varianza del ruido, un valor de cero puede ser asignado a  $\bar{\gamma}_{c,0}^2$ . En efecto el algoritmo RSMAP<sub>2</sub> usa (3.30) y (3.31) para obtener  $\sigma_{1,k}$  y a su vez evalúa  $\theta_k$  como  $\theta_k = 1.88\sigma_{1,k}$ ; luego utiliza (3.32) - (3.34) para obtener  $\bar{\gamma}_c$  y (3.29) para obtener  $\bar{\gamma}_k$ . Conociendo  $\bar{\gamma}_k$ , (3.28)  $\mu(k)$  es usado en (3.27) para obtener el nuevo vector de peso  $\mathbf{w}(k)$ . Los estimadores en (3.29) a (3.34) son similares a los estimadores usados en el algoritmo de adaptación de Newton propuesto en [51]. Se debe notar que el estimado  $\bar{\gamma}_c$  en (3.34) es diferente de la utilizada en la familia SMLMS en [53] y [54]. En la Tabla 3.6 se tiene el algoritmo RSMAP<sub>2</sub>.

### 3.3.2 CARACTERÍSTICAS

Se ha usado la mediana de las muestras de los cuadrados de la señal de error sobre una ventana finita para la evaluación de  $\sigma_{1,k}$  en (3.31) con el fin de hacer robusta la estimación de  $\sigma_{1,k}$  con respecto a los valores atípicos tanto para los algoritmos RSMAP<sub>1</sub> y RSMAP<sub>2</sub>. Por otra parte se ha usado  $\sigma_{2,k}$  para estimar el límite de error  $\bar{\gamma}_c$  en el algoritmo RSMAP<sub>2</sub>.

Con el fin de alcanzar la robustez con respecto a los cambios bruscos de sistemas, el estimador  $\sigma_{2,k}$  utiliza el mínimo de los valores anteriores y actuales de  $\sigma_{1,k}$ .

Como se aprecia en [7] con un valor pequeño de  $\bar{\gamma}$ , el rendimiento del algoritmo SSMAP converge rápidamente e incrementa el desajuste en estado estacionario; por otro lado con un valor grande de  $\bar{\gamma}$  la convergencia es más lenta pero se reduce el desajuste en estado estacionario.

Tabla 3.6. Algoritmo RSMAP con Umbral Variable

ALGORITMO Robust SM-AP con Umbral Variable
<p><b>INICIALIZACIÓN:</b></p> <p><math>\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T</math></p> <p>Escoger <math>\bar{\gamma}</math> alrededor de <math>\sqrt{5}\sigma_n</math></p> <p><math>c_k = [e_k^2 + \epsilon e_{k-1}^2 + \epsilon \dots e_{k-p+1}^2 + \epsilon] \in \mathbb{R}^{N \times 1}</math></p> <p>Escoger <math>\lambda</math> entre <math>0 &lt; \lambda \ll 1</math></p> <p>Escoger <math>\nu</math> entre <math>0 &lt; \nu \ll 1</math></p> <p>Escoger <math>Q</math> entre <math>1.86 \leq Q \leq 1.98</math></p> <p>Escoger <math>\beta = 0.5</math></p> <p>Escoger <math>Y = 2.5</math></p> <p>Hacer para <math>k \geq 0</math></p> <p><math>\mathbf{e}_{ap}(k) = \mathbf{d}_{ap}(k) - \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{w}(k)</math></p> <p><math>C_k = \text{mediana}(c_k)</math></p> <p><math>\sigma_{1,k}^2 = \lambda\sigma_{1,k-1}^2 + (1 - \lambda)C_k</math></p> <p><math>\theta_k = Q\sigma_{1,k}</math></p> <p><math>\eta_k = \beta\eta_{k-1} + (1 - \beta)\min\left(\eta_{k-1}, \frac{ d_k^2 - y_k^2 }{d_k^2}\right)</math></p> <p><math>\sigma_{2,k}^2 = \lambda\sigma_{2,k-1}^2 + (1 - \lambda)\min(\sigma_{2,k-1}^2, \sigma_{1,k}^2)</math></p> <p><math>\bar{\gamma}_c = \{\bar{\gamma}_{c,0}^2 + Y[1 + \text{sign}(1 - \eta_k)\sigma_{2,k}^2]\}^{1/2}</math></p> <p><math>\bar{\gamma}_k = \begin{cases} \ e(k)\ _\infty - \nu\theta_k &amp; \text{si } \ e(k)\ _\infty &gt; \theta_k \\ \bar{\gamma}_c &amp; \text{otro caso} \end{cases}</math></p> <p><math>\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{ e(k) } &amp; \text{si }  e(k)  &gt; \bar{\gamma}_k \\ 0 &amp; \text{otro caso} \end{cases}</math></p> <p><math>\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(k)\mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k) + \gamma\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}_{ap}(k)</math></p>

Bajo estas circunstancias, el rendimiento óptimo se puede lograr mediante el uso de un pequeño límite de error durante la transitoriedad y un límite de error grande durante el estado estacionario. En el algoritmo RSMAP propuesto, el rendimiento óptimo se logra eligiendo los valores iniciales de  $\sigma_{1,k}$ ,  $\sigma_{2,k}$  y  $\eta_k$  grandes. En tal situación, durante la transitoriedad el algoritmo debería trabajar con límite de error  $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_c$  que es significativamente menor que  $\|e(k)\|_\infty - v\theta_k$  y como resultado el estado transitorio que decaería a una tasa rápida.

Por otra parte durante el estado estacionario el algoritmo debería trabajar con el límite de error  $\bar{\gamma}_k = \|e(k)\|_\infty - v\theta_k$  con  $\theta_k < \bar{\gamma}_c$  para reducir el desajuste.

Además, la elección de  $\bar{\gamma}_k$  funcionaría en la ocurrencia de ruido impulsivo para ofrecer un rendimiento robusto con respecto a los valores atípicos, en presencia de una alteración repentina del sistema,  $\theta_k$  tiende a crecer y, por lo tanto, el límite de error  $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_c$  entra en juego. Como resultado, la capacidad de re-adaptación del algoritmo propuesto se mantendría.

Aunque una elección aproximada de los valores iniciales de  $\sigma_{1,k}$ ,  $\sigma_{2,k}$  y  $\eta_k$  funcionaria, los resultados de simulación han demostrado que las elecciones  $\sigma_{1,0} = \frac{20E_1}{\hat{\sigma}_v^2}$ ,  $\sigma_{2,0} = \frac{20E_2}{\hat{\sigma}_v^2}$  y  $\eta_0 = \frac{20E_3}{\hat{\sigma}_v^2}$  donde  $\hat{\sigma}_v^2$  es una cruda aproximación de la varianza del ruido, dan buenos resultados.

Los parámetros  $E_1, E_2, E_3, c_1, c_2$  son números enteros que pueden ser elegidos en el rango de 1 a 8 sobre la base de los resultados de simulación. Los algoritmos propuestos son más robustos con respecto a la elección de los parámetros de ajuste, con alta relación señal a ruido (SNR) en comparación con SNR's bajos.

El parámetro  $Y$  en el algoritmo de  $RSMAP_2$  es una constante elegida con un valor de 2,5.

La matriz de regularización  $\delta \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad  $L \times L$  y  $\delta$  es una constante pequeña, se añade a la matriz de correlación  $\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)$  en (3.27) y en (3.35) para asegurar su invertibilidad si la recepción está mal acondicionada.

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(k)\mathbf{X}_{ap}(k)[\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}e(k) \quad (3.35)$$

El valor de  $\delta$  debe ser muy pequeño, del orden de  $10^{-6}$ , para que no influya notablemente en el comportamiento del algoritmo. El rendimiento de estado estacionario del algoritmo propuesto no está influenciado por los parámetros de ajuste, como se determina por el parámetro  $\nu$ .

La velocidad de convergencia podría llegar a ser sensible a los cambios en los parámetros de ajuste, especialmente para SNR's bajos y sistemas desconocidos de orden alto. Sin embargo, estos problemas no han sido experimentados por SNR altos y sistemas desconocidos bajo órdenes moderados.

Para los sistemas desconocidos de bajo orden, por ejemplo de 7 a 15, del tipo comúnmente utilizado en los sistemas de comunicación, los parámetros de sintonización son fáciles de ajustar y el rendimiento del filtro adaptativo es bastante robusto, incluso para relaciones SNR relativamente bajas.

Ya que  $\sigma_\nu$  se especifica en el algoritmo RSMAP<sub>1</sub>, puede ser elegido para lograr un buen equilibrio entre la velocidad de convergencia y el bajo costo computacional.

Por otro lado, el algoritmo RSMAP<sub>2</sub> se puede utilizar en aplicaciones en las que no se especificó  $\bar{\nu}_c$  previamente. En la mayoría de situaciones, las dos versiones del algoritmo propuesto ofrecen un rendimiento similar.

### 3.3.3 ANÁLISIS DEL ESTADO ESTACIONARIO DE ALGORITMO RSMAP

En este apartado, se proporciona un análisis de estado estable del algoritmo RSMAP propuesto. El análisis se basa en el marco de una relación de conservación de energía que se describe en [6] y [55] que se utilizó para analizar varios algoritmos de adaptación, por ejemplo, en [56] - [57]. Puesto que la fórmula en (3.27) el análisis del estado estacionario del algoritmo RSMAP propuesto puede llevarse a cabo procediendo como en [6]. La ecuación de actualización en (3.17) se puede expresar en términos del vector de error de peso como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \mathbf{w}_n - \mathbf{w}(k) \\ \hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu(k)\mathbf{X}_{ap}(k)[\delta\mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}e(k)\end{aligned}\quad (3.36)$$

Donde  $\mathbf{w}_n$  denota el vector de peso del sistema desconocido y  $\delta\mathbf{I}$  es la matriz de regularización. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3.36) por la matriz de la señal de entrada, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{ap}^T(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \mathbf{X}_{ap}^T(k)\hat{\mathbf{w}}(k) + \\ \mu(k)\mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)[\delta\mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k)\mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1}e(k)\end{aligned}\quad (3.37)$$

Utilizando la definición que viene dada por el ruido libre de error a posteriori:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{X}_{ap}^T(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1)\quad (3.38)$$

Y el ruido libre de error a priori esta dado por:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{X}_{ap}^T(k)\hat{\mathbf{w}}(k)\quad (3.39)$$

En (3.37) se obtiene:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \hat{\mathbf{e}}_k - \mu(k) \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) [\delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) \quad (3.40)$$

Por lo tanto, se obtiene

$$[\delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) = \frac{1}{\mu(k)} \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) (\hat{\mathbf{e}}_k - \hat{\mathbf{e}}_k) \quad (3.41)$$

Sustituyendo  $[\delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \mathbf{e}(k)$  en (3.36), se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(k+1) \mathbf{X}_{ap}(k) [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) = \\ \hat{\mathbf{w}}(k) + \mathbf{X}_{ap}(k) [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \end{aligned} \quad (3.42)$$

Al tomar el cuadrado de la norma de  $L_2$  en ambos lados de la ecuación anterior, después de algunas manipulaciones se obtiene la siguiente relación de conservación de energía [6]:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{w}}(k+1)\|^2 + \hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k = \\ \|\hat{\mathbf{w}}(k)\|^2 + \hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tomando la expectativa de ambos lados en (3.43), se obtiene

$$\begin{aligned} E[\|\hat{\mathbf{w}}(k+1)\|^2] + E[\hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k] = \\ E[\|\hat{\mathbf{w}}(k)\|^2] + E[\hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k] \end{aligned} \quad (3.44)$$

En el estado estacionario se tiene  $E[\|\hat{\mathbf{w}}(k+1)\|^2] = E[\|\hat{\mathbf{w}}(k)\|^2]$  y por lo tanto, la relación anterior asume la forma:

$$E \left[ \hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \right] = E \left[ \hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \right] \quad (3.45)$$

Sustituyendo  $\hat{\mathbf{e}}_k$  dada en (3.40) en (3.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} E \left[ \hat{\mathbf{e}}_k^T [\mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \right] = \\ E \left[ \hat{\mathbf{e}}_k^T \left( \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k - \mu(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \left( \delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \mathbf{e}(k) - \mu(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \left( \delta \mathbf{I} + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k + \mu^2(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \left( \delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \left( \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right) \times \left( \delta \mathbf{I} + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \mathbf{e}(k) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Usando la definición de la matriz de correlación de la señal de entrada, es decir,  $\mathbf{R}(k) = \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k)$ , y suponiendo que:

$$\mathbf{S}_k = \left( \delta \mathbf{I} + \mathbf{X}_{ap}^T(k) \mathbf{X}_{ap}(k) \right)^{-1} \approx \mathbf{R}^{-1}(k) \quad (3.47)$$

Para  $\delta \ll 1$ , (3.46) puede ser simplificada:

$$E[\mu^2(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{T}_k \mathbf{e}(k)] = E[\mu(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{e}(k)] + E[\mu(k) \hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{e}}_k] \quad (3.48)$$

Donde  $\mathbf{T}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k$ . En estado estacionario  $\|\mathbf{e}_k\|_\infty \approx |\mathbf{e}_k|$  y  $\frac{|\mathbf{e}_k|}{\sigma_{1,k}} \rightarrow 1$ . Dado  $\bar{\mathbf{y}}_k = \|\mathbf{e}(k)\|_\infty - v\theta_k$  en estado estacionario para un valor pequeño de  $v$ :

$$\mu(k) = 1.88v \quad (3.49)$$

Así, mediante el uso de un valor determinístico para  $\mu(k)$ , (3.48) se simplifica a:

$$\mu(k) E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{T}_k e(k)] = E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k e(k)] + E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{e}}_k] \quad (3.50)$$

Los vectores  $e(k)$  y  $\hat{\mathbf{e}}_k$  están relacionadas entre sí por:

$$e(k) = \hat{\mathbf{e}}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.51)$$

Donde  $\mathbf{v}_k = [\mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k-1} \dots \mathbf{v}_{k-L+1}]^T$  es el vector de ruido de medición. Ahora sustituyendo (3.51) en (3.50), se obtiene:

$$\mu(k) E[(\hat{\mathbf{e}}_k + \mathbf{v}_k)^T \mathbf{T}_k (\hat{\mathbf{e}}_k + \mathbf{v}_k)] = 2E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k (\hat{\mathbf{e}}_k + \mathbf{v}_k)] \quad (3.52)$$

Considerando la señal de ruido blanco  $\mathbf{v}_k$ , así como estadísticamente independiente de la señal de entrada y dejando de lado la dependencia  $\hat{\mathbf{e}}_k$ , la expresión en (3.52) puede simplificarse aún más:

$$\mu(k) E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{T}_k \hat{\mathbf{e}}_k] + \mu(k) E[\mathbf{v}_k^T \mathbf{T}_k \mathbf{v}_k] = 2E[\hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{e}}_k] \quad (3.53)$$

Utilizando la definición en (3.47) se obtiene  $\mathbf{T}_k \approx \mathbf{S}_k$ ; con esta modificación, la aplicación de la operación de trazo a ambos lados de (3.53), se obtiene:

$$E\{\text{tr}[\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k^T \mathbf{S}_k]\} = \frac{\mu(k)}{2-\mu(k)} E\{\text{tr}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{S}_k]\} \quad (3.54)$$

Ahora asumiendo que  $\mathbf{S}_k$  es estadísticamente independiente tanto del error a priori en estado estacionario y la señal de ruido, se obtiene

$$\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k^T] E[\mathbf{S}_k]\} = \frac{\mu(k)}{2-\mu(k)} \text{tr}\{E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] E[\mathbf{S}_k]\} \quad (3.55)$$

Este resultado se utiliza para derivar una expresión para el MSE exceso en el algoritmo RSMAP.

### MSE en exceso para el Algoritmo RSMAP

Con el fin de derivar una expresión para el error cuadrático medio en exceso en el algoritmo propuesto RSMAP, tenemos que deducir una expresión para la covarianza del error libre de ruido. La ecuación de actualización en (3.27) durante el estado de equilibrio se puede escribir en términos de (3.51) como:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \hat{\mathbf{e}}_k - \mu(k)e(k) = (1 - \mu(k))\hat{\mathbf{e}}_k - \mu(k)\mathbf{v}_k \quad (3.56)$$

Ahora, siguiendo los pasos de [6], obtenemos:

$$E[\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k^T] = E[\hat{\mathbf{e}}_k^2] \mathbf{U}_1 + \mu^2(k) \sigma_v^2 \mathbf{U}_2 \quad (3.57)$$

Donde  $\mathbf{U}_1$  y  $\mathbf{U}_2$  son matrices diagonales dadas por:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (1 - \mu(k))^2 & & \\ & \dots & \vdots & \\ & & & (1 - \mu(k))^{2(L-1)} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 + \dots + (1 - \mu(k))^{2L} & \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Dado que el tamaño del paso  $\mu(k)$  es muy pequeño en estado estacionario, se obtiene  $\mu^2(k) \sigma_v^2 \mathbf{U}_2 \approx 0$  y  $\mathbf{U}_1 \approx \mathbf{I}$ . Por consiguiente, (3.57) asume la forma:

$$E[\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k^T] = E[\hat{\mathbf{e}}_k^2] \mathbf{U}_1 \quad (3.60)$$

Usando (3.60) en (3.55) se obtiene:

$$E[\hat{\mathbf{e}}_k^2] = \frac{\mu(k)}{2-\mu(k)} \sigma_v^2 \frac{\text{tr}\{E[\mathbf{S}_k]\}}{\text{tr}\{\mathbf{U}_1 E[\mathbf{S}_k]\}} \quad (3.61)$$

Para un valor suficientemente pequeño de  $\mu(k)$ , se puede suponer que  $\mathbf{U}_1 \approx \mathbf{I}$  en este caso (3.61) se obtiene el exceso de MSE

$$EMSE = \frac{\mu(k)}{2-\mu(k)} \sigma_v^2 \quad (3.62)$$

Como puede verse, el exceso de MSE es independiente del orden de proyección.

### 3.3.4 COSTO COMPUTACIONAL

Para realizar una comparación de complejidad computacional se deben tomar en cuenta el número de multiplicaciones, adiciones y divisiones, donde se supone que la aplicación minimiza el número de divisiones, multiplicaciones y adiciones en ese orden.

La Tabla 3.7 se enumera la complejidad computacional para los algoritmos RSMAP. En los algoritmos la complejidad del costo computacional no contempla el cálculo de  $\bar{\gamma}_k$  ni de  $\alpha_k$ , si se toman en cuenta estas consideraciones para el cálculo de  $\bar{\gamma}_k$  se tendría una adición mas y para el cálculo de  $\alpha_k$  se tendría una adición y una división mas.

**Tabla 3.7. Complejidad computacional de los algoritmos RSMAP**

Algoritmo	Multiplicación	Adición	División
RSMAP1	$2(L^2 \times N) + 2L^2 + N + L \times N + L + 2$	$2(L^2 \times N) + 2L^2 + L \times N + 2L + 3$	1
RSMAP2	$2(L^2 \times N) + 2L^2 + N + L \times N + L + 6$	$2(L^2 \times N) + 2L^2 + 2L \times N + 3L + 9$	2

## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL ALGORITMO RSMAP**

#### **4.1 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS ALGORITMOS**

La eliminación de las señales de eco es un problema en cuanto a redes de comunicación y el entorno de la comunicación manos libres por lo cual el filtraje adaptativo juega un papel importante en este ámbito.

El eco de red, también conocido como eco de línea, es causado por el transformador híbrido cuya tarea principal es la de convertir la conexión de bucle de dos hilos entre el usuario final y la oficina central a un circuito de cuatro hilos. En el caso de dos hilos, la señal en ambas direcciones atraviesa los dos cables, mientras que en los cables de cuatro, las señales en cada dirección son separadas. En la figura 4.1 se ilustra un sistema telefónico de larga distancia muy simplificado donde se puede apreciar la ubicación del cancelador de eco.

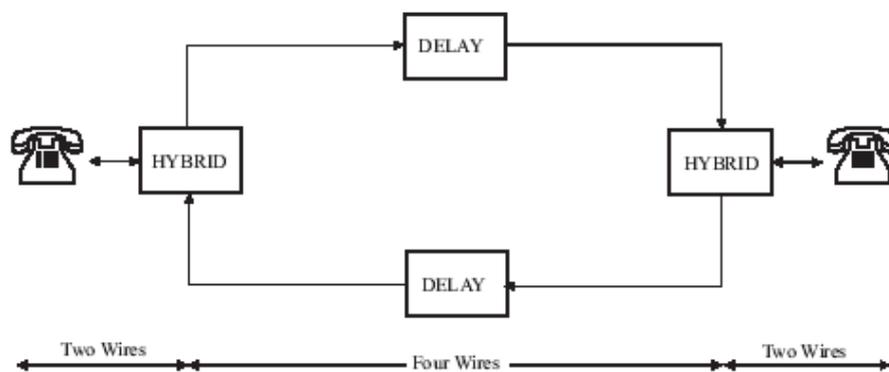
El circuito de cuatro hilos existe sólo en conexiones de larga distancia y el retardo incluido en la figura 4.1 representa el tiempo de viaje de la señal de un híbrido a otra. Si el retardo del eco es superior a 100 ms, su efecto en la conversación es mayor y preocupante.

Para eliminar este problema se puede implementar un supresor de eco, cuyo objetivo es eliminar el eco de la persona que habla cortando el puerto de salida cada vez que una señal entrante es detectada, sin embargo este enfoque funciona bien para bajos retardos de ida y vuelta, pero para grandes retardos un cancelador de eco adaptativo es más eficaz.

Los canceladores de eco se utilizan también en la acústica donde su tarea es modelar la función de transferencia desde el altavoz al micrófono en un sitio dado. Esta aplicación es más difícil que la cancelación de eco de red ya que la respuesta al impulso es más larga, por lo general muy por encima de 500 coeficientes y presenta cambios bruscos.

Como se representa en las figuras 4.1 y 4.2, los problemas de cancelación de eco en las redes y en la acústica están estrechamente relacionados, sin embargo para este último se requieren algoritmos mucho más sofisticados.

Para propósitos de simulación se ha utilizado el modelo recomendado por la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU) G.168[58], en el cual se describe las características de un cancelador de eco, incluyendo el requisito de mecanismos de control y el número de pruebas de laboratorio que deben realizarse para evaluar su rendimiento bajo condiciones que pueden darse en la red.



**Figura 4.1. De dos hilos o cuatro hilos de conversión en las llamadas telefónicas de larga distancia**

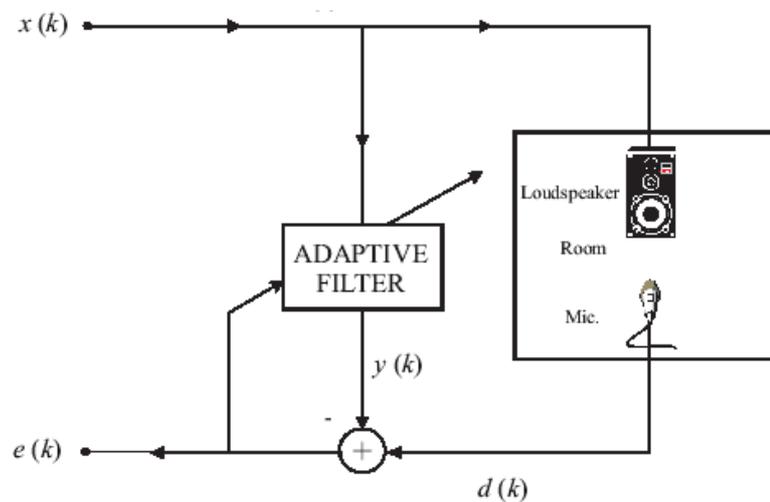


Figura 4.2. Cancelación del eco acústico

La recomendación G.168 contiene cuatro modelos de trayecto del eco que se generan a partir de un simulador de red híbrida. En las tablas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 se muestran los valores de  $m_i(k)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , los mismos que deben ser leídos en columnas.

El modelo  $m_1(k)$  tiene una corta dispersión (*valores que se encuentran alejados de la solución del sistema*), el modelo  $m_2(k)$  tiene una dispersión corta-mediana, el modelo  $m_3(k)$  tiene una dispersión mediana y el modelo  $m_4(k)$  tiene una larga dispersión. Se debe tomar en cuenta que para cada valor de  $i$  se tiene un factor de escala y un MSE mínimo esperado, dichos valores se encuentran descritos en la tabla 4.5.

Las pruebas recomendadas por el estándar ITU-T G.168 [58] utilizan señales particulares, tales como el ruido, tonos, y un conjunto de señales de una fuente compuesta CSS (*Set of Composite Source Signals*).

En las simulaciones realizadas en este capítulo se aplica la señal de entrada de CSS, gracias a las características del CSS se pueden realizar pruebas de rendimiento de los canceladores de eco ya que permite simular señales de voz de una o de varias personas hablando.

**Tabla 4.1. Coeficientes de m1 (k)**

-436	46150	390	-3948	-1098	745	1033	899	73	-512	-772
-829	34480	-8191	-2557	-618	716	1091	716	-119	-580	-820
-2797	-10427	-1751	-3372	-340	946	1053	390	109	-704	-839
-4208	9049	-6051	-1808	-61	880	1042	313	-176	-618	-724
-17968	-1309	-3796	-2259	323	1014	794	304	-359	-685	
-11215	-6320	-4055	-1300	419	976	831	304	-407	-791	

**Tabla 4.2. Coeficientes de m2 (k)**

-381	-21370	13509	-3858	1316	-1468	789	658	-331	-479	-249
658	-5307	17115	-1979	-693	-1221	954	476	-347	-479	-216
1730	23064	13952	6029	-759	-842	756	377	-430	-512	-249
-51	24020	13952	5616	-1517	-463	839	377	-314	-479	-265
-3511	1020	97	7214	-2176	-298	872	262	-430	-397	-166
-1418	-12374	-9326	6820	-2028	-68	1020	97	-463	-430	-232
7660	-16296	-9046	3935	-2654	64	789	-68	-463	-397	
8861	-19524	-15208	3919	-1814	493	822	-183	-414	-298	
-8106	-7480	-9853	921	-2077	723	558	-232	-381	-265	

**Tabla 4.3. Coeficientes de m3 (k)**

-448	-26261	14164	3271	-3101	2172	-139	-1066	-814	-233	-390
-436	-16249	13467	6566	-9269	5387	-573	-1020	-871	-333	-482
2230	21637	4438	4277	-6146	4598	-1100	-1100	-734	-356	-459
2448	25649	8627	11131	-2553	3535	-1157	-1008	-642	-390	-482
-4178	-2267	456	7562	-6272	4004	-1180	-1077	-562	-310	-551
-7050	-10311	-11879	1475	811	2311	-1455	-1088	-356	-265	-573
5846	-4693	-6352	3728	124	2150	-1123	-917	-379	-368	
18581	-12690	-5104	-3525	788	1017	-1386	-917	-345	-310	
2322	-7428	-7496	-7301	5147	330	-1123	-963	-230	-310	

**Tabla 4.4. Coeficientes de m4 (k)**

160	4041	14624	6850	2393	1592	2654	4617	-220	203	-57
312	14484	-6975	3944	2784	-4752	-881	3576	-306	-111	-24
-241	-1477	-17156	6969	-892	-3646	-4113	2382	257	95	30
-415	-21739	-187	8694	-7366	-5207	-3244	2839	615	-79	-68
897	-4470	149	-4068	-3376	-5577	-7289	-404	225	30	84
908	25356	1515	-3852	-5847	-501	-3830	539	561	84	-155
-1326	11458	14907	-5793	-2399	-1174	-4600	-1803	8	-13	-68
-1499	-19696	4345	-9371	3011	4041	-2508	-1401	344	-68	19
2405	-11800	-7128	453	1537	5647	431	-1705	127	-241	
3347	5766	-2757	1060	6623	4628	-144	-2269	-57	-68	
-3624	789	-10185	3965	4205	7252	4184	-783	182	-24	
-7733	6633	-7083	9463	1602	2123	2372	-1608	41	19	

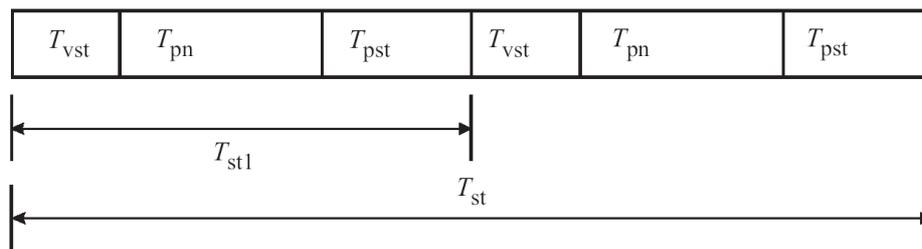
**Tabla 4.5. Factores de escala para Ki**

Modelo #(i)	Factor de Escala $K_i$	Mínimo MSE (dB)
1	$1.22 \times 10^{-5}$	6
2	$6.78 \times 10^{-6}$	6
3	$9.66 \times 10^{-6}$	6
4	$1.07 \times 10^{-5}$	6

El CSS se compone de señales de voz, ruido y pausas. La señal de voz activa los detectores de voz y tiene aproximadamente 50 ms de duración. La señal de voz es seguida por una señal de pseudo-ruido que tiene magnitud constante en la transformada de Fourier y cuya fase cambia con el tiempo.

La pausa es el tercer componente de la CSS que representa una modulación de amplitud para el CSS habitual y las pausas en una conversación. La duración de la pausa varía de 100 mseg a 150 mseg. La figura. 4.3 ilustra el CSS para hablar solo. Utilizando las siguientes duraciones:

- $T_{vst}$  (señal de voz): 48,62 ms.
- $T_{pn}$  (Pseudo ruido): 200,00 ms.
- $T_{pst}$  (Pausa): 101,38 ms.
- $T_{st1}$  (punto medio): 350,00 ms.
- $T_{st}$  (período completo): 700,00 ms.



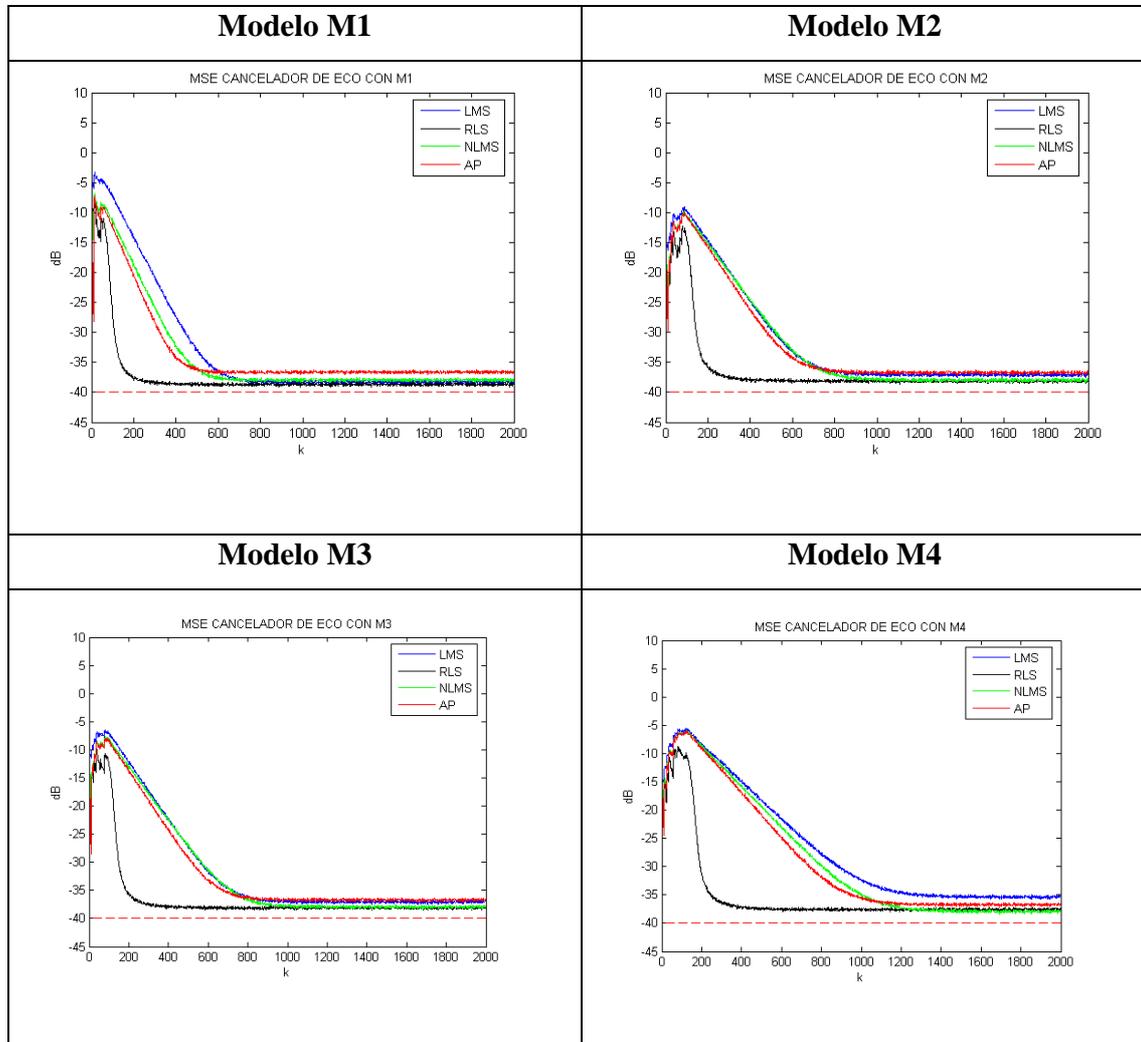
**Figura 4.3. Características CSS para una personal hablando**

En la tabla 4.6 se puede apreciar el desempeño de los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP aplicados al cancelador de eco para cada modelo utilizando un factor de reutilización de datos  $L$  igual a 3 y en la tabla 4.7 se realiza una comparación del MSE para cada algoritmo aplicado a los modelos de la ITU G.168 [58].

En la tabla 4.8 se tiene la comparación entre los modelos y algoritmos realizando la resta del MSE esperado (-40dB) con los MSE obtenidos en la simulación.

Como se puede apreciar en el cuadro comparativo 4.8 el error para los algoritmos LMS y RLS aumenta conforme aumenta la dispersión del modelo, mientras que para el algoritmo NMLS el error disminuye para los modelos de corta-mediana y mediana dispersión.

**Tabla 4.6. Comparación de los algoritmos LMS, RLS, NLMS y AP con los diferentes modelos dados por la ITU G.168**



El error del algoritmo AP disminuye conforme aumenta la dispersión en el modelo, por lo tanto los algoritmos LMS y RLS demuestran un mejor desempeño para modelos de baja dispersión, el algoritmo NLMS tiene mejor desempeño utilizando modelos de mediana dispersión mientras que para el algoritmo AP, el modelo utilizado debe tener mayor dispersión para lograr su mejor desempeño. Para todos los modelos de la ITU G.168 [58] el algoritmo que tiene mayor velocidad de convergencia es el RLS y en los tres primeros modelos es el que menor error presenta.

**Tabla 4.7. Comparación del MSE de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP.**

Algoritmo	Modelo M1	Modelo M2	Modelo M3	Modelo M4
LMS	1.4896e-4	1.9636e-4	1.9675e-4	2.9193e-4
RLS	1.3548e-4	1.5455e-4	1.5467e-4	1.7461e-4
NMLS	1.6128e-4	1.6076e-4	1.6098e-4	1.6158e-4
AP	2.1777e-4	2.1429e-4	2.1449e-4	2.1294e-4

**Tabla 4.8. Comparación del MSE en dB de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos LMS, RLS, NMLS y AP.**

Algoritmo	Modelo M1	Modelo M2	Modelo M3	Modelo M4
LMS	1.73dB	2.94dB	2.94dB	4.66dB
RLS	1.32dB	1.89dB	1.9dB	2.42dB
NMLS	2.08dB	2.06dB	2.07dB	2.08dB
AP	3.38dB	3.31dB	3.32dB	3.28dB

## 4.2 DISEÑO DEL CANCELADOR DE ECO

En la figura 4.2 se puede observar la estructura del cancelador de eco acústico, el diseño del cancelador propuesto consta de la generación de la señal de entrada y la señal deseada, la cual se obtiene realizando la adición del ruido con la señal de entrada filtrada mediante los diferentes modelos de la recomendación ITU G.168 [58].

Dichos modelos utilizan señales CSS las cuales se componen de señales de voz, ruido y pausas por este motivo los modelos aplicados permiten evaluar el rendimiento del cancelador de eco bajo condiciones que se pueden dar en el ambiente.

Los coeficientes del filtro adaptativo varían de acuerdo al modelo utilizado, para el modelo 1 (M1) el número de coeficientes es sesenta y cuatro, para el modelo 2 (M2) el número de

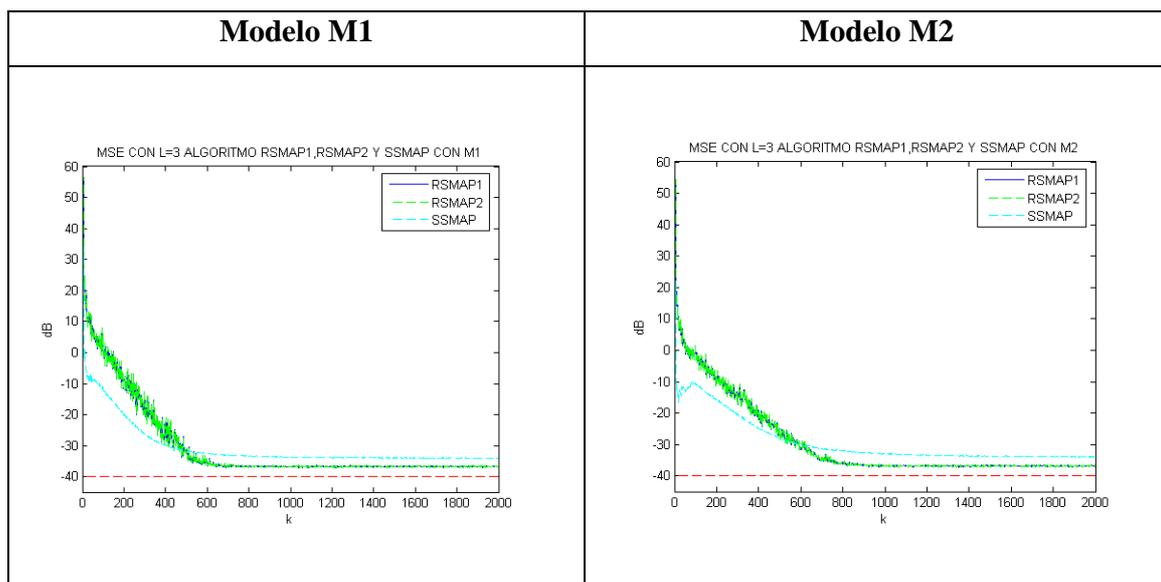
coeficientes es noventa y seis al igual que para el modelo 3(M3) y para el modelo 4 (M4) el número de coeficientes es de ciento veinte y ocho. Una vez generadas las señales explicadas con anterioridad se procede a aplicar el filtro adaptativo RSMAP.

En la tabla 4.9 se realizó la comparación del desempeño de los algoritmos diseñados con el algoritmo SSMAP donde se verifica claramente la versatilidad de los algoritmos RSMAP en cuanto a velocidad de convergencia y desajuste.

En la tabla 4.10 se tienen los valores del MSE obtenidos cuando converge el filtro adaptativo para los diferentes modelos aplicados utilizando un factor de reutilización de datos  $L$  igual a tres, en dicha tabla se observa que mientras mayor dispersión tiene el modelo menor es el error por lo cual el modelo óptimo para realizar comparaciones y para realizar un estudio más a fondo es el modelo 4 (M4).

En la tabla 4.11 se tiene la comparación entre los modelos y algoritmos realizando la resta del MSE esperado (-40dB) con los MSE obtenidos en la simulación.

**Tabla 4.9. Comparación de los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con los diferentes modelos dados por la ITU G.168**



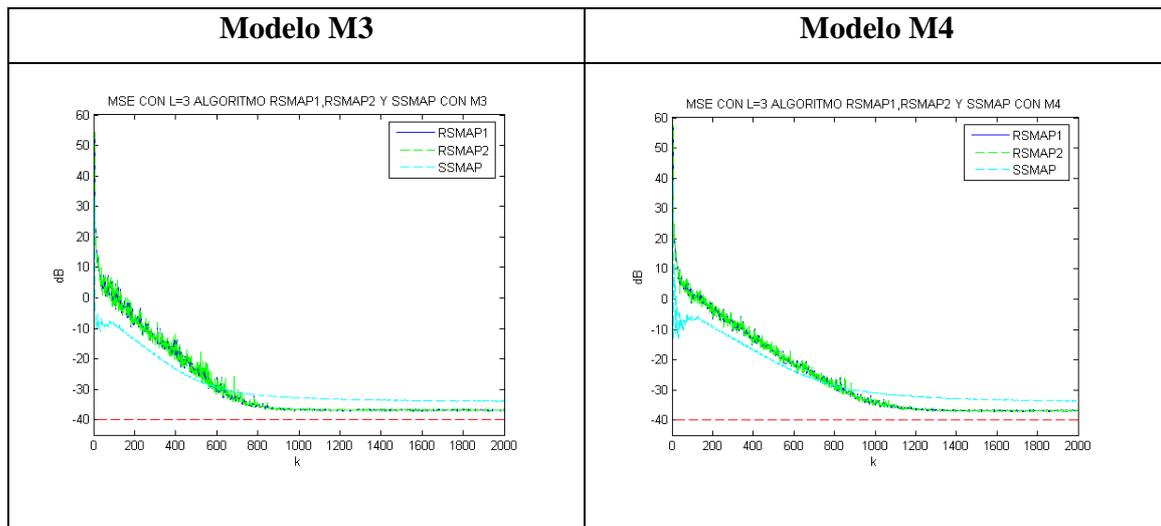


Tabla 4.10. Comparación del MSE de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2.

Algoritmo	Modelo M1	Modelo M2	Modelo M3	Modelo M4
SSMAP	3.9858e-4	4.1650e-4	4.1779e-4	4.6529e-4
RSMAP1	2.1170e-4	2.0760e-4	2.0757e-4	2.0594e-4
RSMAP2	2.1170e-4	2.0760e-4	2.0757e-4	2.0594e-4

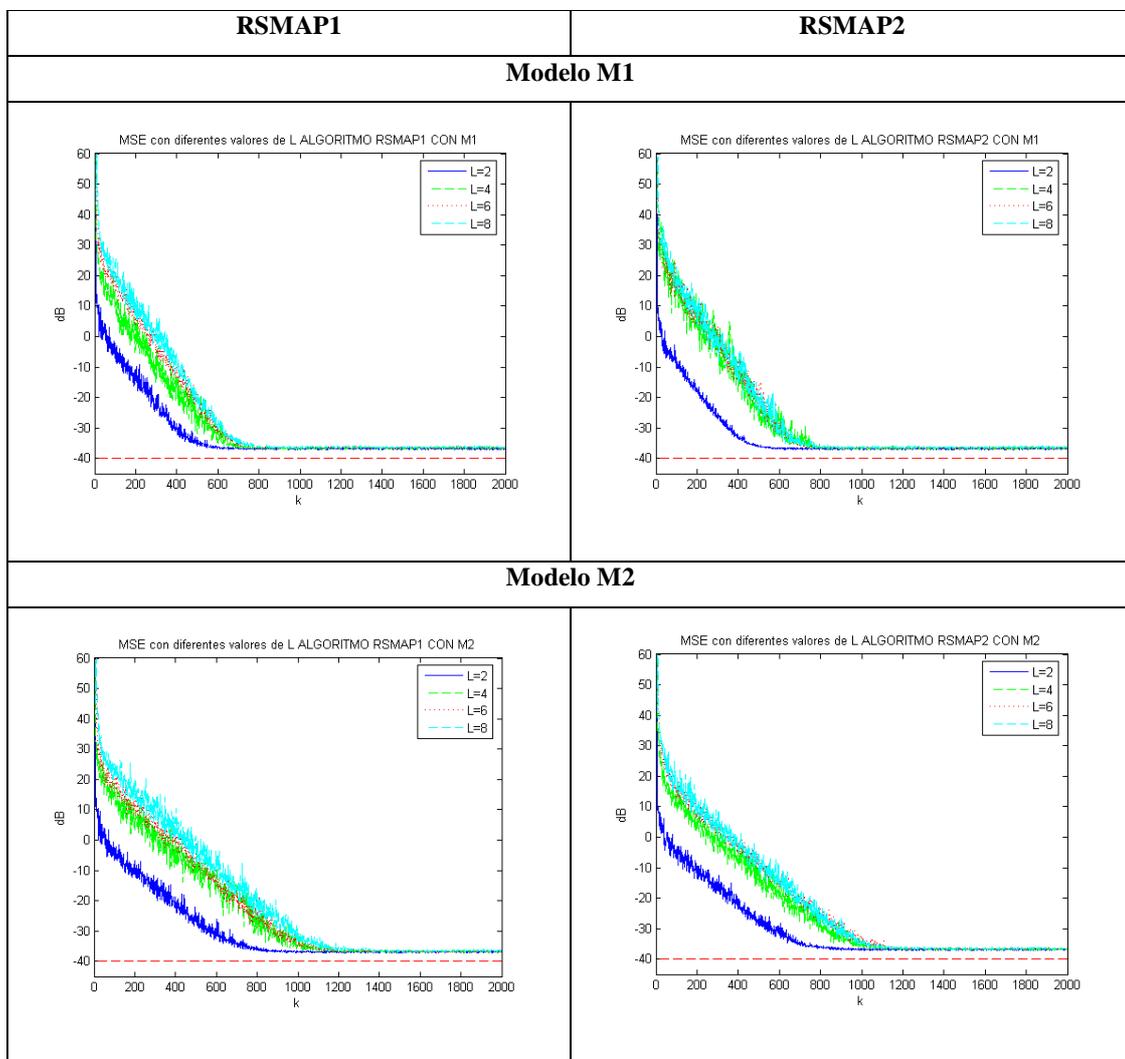
Tabla 4.11. Comparación del MSE dB de los diferentes modelos de la ITU G.168 para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2.

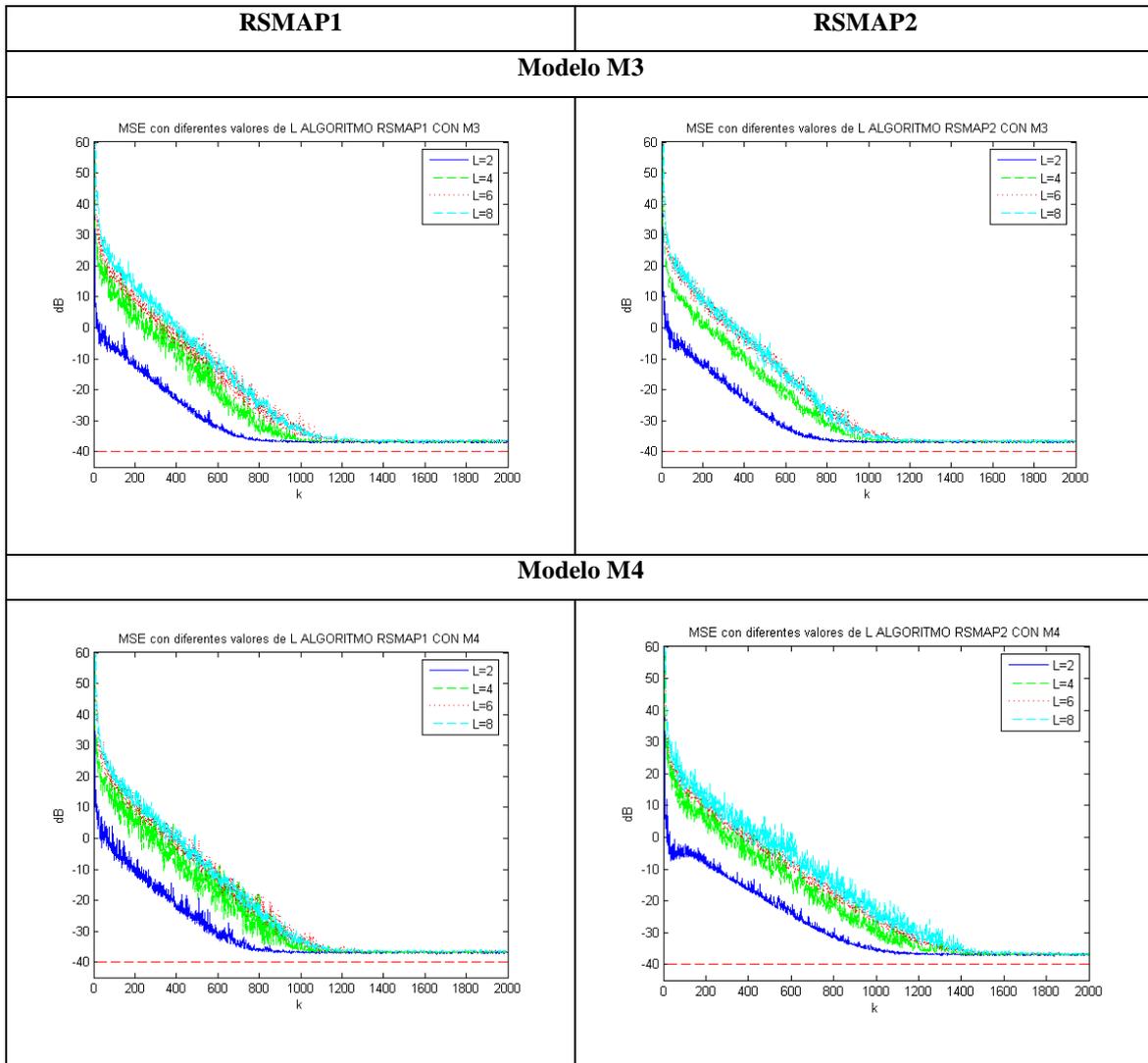
Algoritmo	Modelo M1	Modelo M2	Modelo M3	Modelo M4
SSMAP	6.005dB	6.2dB	6.21dB	6.67dB
RSMAP1	3.26dB	3.172dB	3.171dB	3.13dB
RSMAP2	3.26dB	3.172dB	3.171dB	3.13dB

### 4.3 COMPARACIÓN DEL DISEÑO PROPUESTO DEL CANCELADOR DE ECO

Para realizar una comparación más a fondo se han realizado las simulaciones aplicando diferentes valores de  $L$  en todos los modelos tanto para RSMAP1 y RSMAP2 para obtener las gráficas del MSE tal y como se puede evidenciar en la tabla 4.12.

**Tabla 4.12. Comparación del algoritmo RSMAP1 y RSMAP2 con diferentes valores de  $L$  aplicado a los modelos dados por la ITU G.168.**





**Tabla 4.13. Comparación del MSE de los modelos dados por la ITU G.168 con diferentes valores de L para los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2.**

L	Modelo M1		Modelo M2		Modelo M3		Modelo M4	
	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2
<b>2</b>	2.0857e-4	2.0842e-4	2.0581e-4	2.0557e-4	2.0545e-4	2.0554e-4	2.0572e-4	2.0429e-4
<b>4</b>	2.1706e-4	2.1708e-4	2.1210e-4	2.1182e-4	2.1168e-4	2.1164e-4	2.1192e-4	2.1224e-4
<b>6</b>	2.2632e-4	2.2642e-4	2.1877e-4	2.1862e-4	2.1846e-4	2.1832e-4	2.1876e-4	2.2451e-4
<b>8</b>	2.3615e-4	2.3376e-4	2.2601e-4	2.2323e-4	2.2544e-4	2.2283e-4	2.2575e-4	2.3104e-4

**Tabla 4.14. Comparación del MSE en dB de los modelos dados por la ITU G.168 con diferentes valores de L para los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2.**

L	Modelo M1		Modelo M2		Modelo M3		Modelo M4	
	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2	RSMAP1	RSMAP2
<b>2</b>	3.1925 dB	3.1893 dB	3.1347 dB	3.1296 dB	3.1271 dB	3.1289 dB	3.1328 dB	<b>3.1025 dB</b>
<b>4</b>	3.3658 dB	3.3662 dB	3.2654 dB	3.2597 dB	3.2568 dB	3.2559 dB	3.2617 dB	3.2683 dB
<b>6</b>	3.5472 dB	3.5491 dB	3.3999 dB	3.3968 dB	3.3937 dB	3.3909 dB	3.3997 dB	3.5123 dB
<b>8</b>	3.7319 dB	3.6877 dB	3.5413 dB	3.4875 dB	3.5303 dB	3.4797 dB	3.5363 dB	3.6368 dB

En la tabla 4.14 se tienen los valores del MSE en dB donde se puede observar que la variación entre el filtro adaptativo RSMAP1 y RSMAP2 es mínima, sin embargo esto demuestra que el filtro RSMAP2 presenta menor error en comparación con el filtro RSMAP1 por ende un mejor desempeño.

#### 4.3.1 ESTABILIDAD DEL ALGORITMO

En la figura 4.4 se puede observar las variaciones introducidas en el sistema estacionario manejado con anterioridad para producir un sistema variable, con lo cual se analizó la estabilidad del algoritmo, en la tabla 4.15 se obtiene el MSE antes de realizar la variación y en la tabla 4.16 se tiene el MSE en unidades de dB, en la tabla 4.17 se obtiene el MSE después de realizada la variación del sistema y en la tabla 4.18 se tiene el MSE en unidades de dB.

Comparando las tablas 4.16 y 4.18 se verificó que a pesar de la variación introducida los filtros operan de acuerdo a lo esperado en cuanto a sus características estabilidad.

**Tabla 4.15. Comparación del MSE antes de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.**

Algoritmo	Modelo M4
<b>SSMAP</b>	4.2131e-4
<b>RSMAP1</b>	2.0605e-4

<b>RSMAP2</b>	2.0605e-4
---------------	-----------

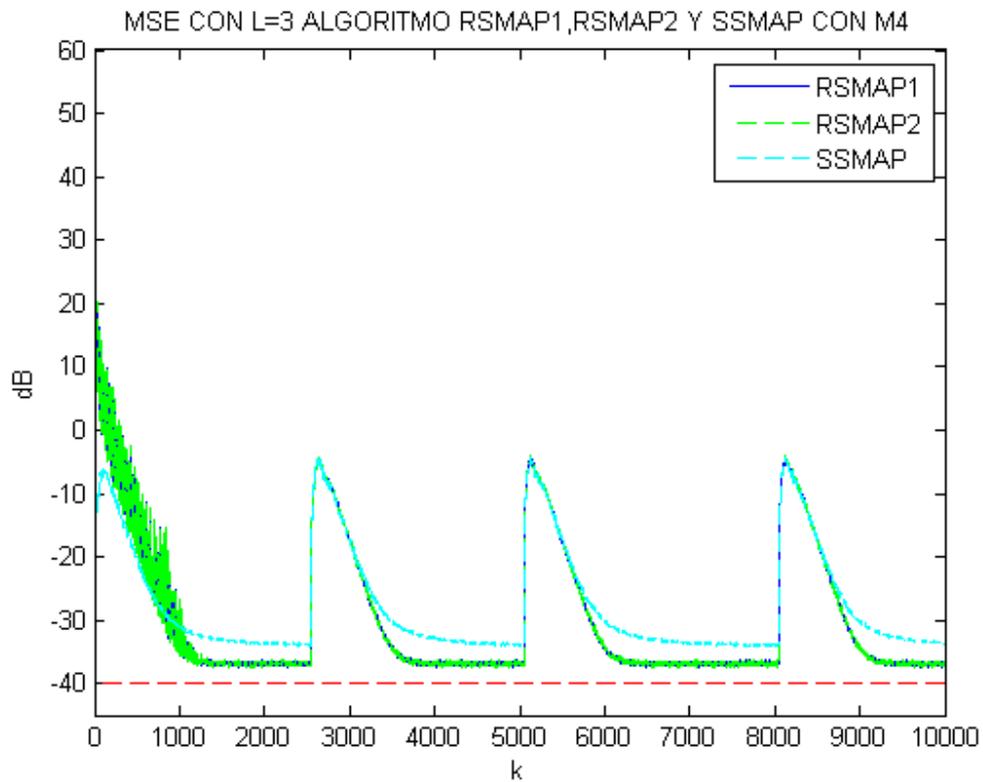


Figura 4.4. Cancelador de eco con canal variable con M4

Tabla 4.16. Comparación del MSE en dB antes de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.

Algoritmo	Modelo M4
SSMAP	6.246 dB
RSMAP1	3.139 dB
RSMAP2	3.139 dB

**Tabla 4.17. Comparación del MSE después de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.**

Algoritmo	Modelo M4
SSMAP	4.2262e-4
RSMAP1	2.0507e-4
RSMAP2	2.0507e-4

**Tabla 4.18. Comparación del MSE en dB después de variar el canal para los algoritmos SSMAP, RSMAP1 y RSMAP2 con M4.**

Algoritmo	Modelo M4
SSMAP	6.259 dB
RSMAP1	3.119 dB
RSMAP2	3.119 dB

### 4.3.2 VARIACIÓN EN EL TIEMPO

En la figura 4.4 se puede observar las variaciones introducidas en el sistema estacionario con lo cual se analizó el comportamiento del algoritmo, conforme varia en el tiempo, realizando una comparación entre dichas variaciones se verificó que antes y después de las variaciones introducidas el algoritmo conserva sus características de convergencia.

## 4.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con los valores obtenidos en la tabla 4.10 y 4.11 se verificó que los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2 muestran un mejor desempeño con respecto al algoritmo SSMAP, ya que para ambos algoritmos el MSE obtenido en las simulaciones es menor que el MSE del algoritmo SSMAP.

En las tablas 4.12,4.13 y 4.14 se verificó que para un número menor de factor de reutilización de datos  $L$ , los algoritmos muestran un mejor desempeño en cuanto a características de velocidad de convergencia y desajuste.

Adicionalmente en la figura 4.4 se observó que las características de estabilidad y convergencia se mantienen a pesar de que el sistema presente variaciones en el tiempo con todos los antecedentes presentados se concluye que el algoritmo RSMAP muestra un mejor desempeño en comparación con el algoritmo SSMAP.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1 CONCLUSIONES

- Se cumplió con el objetivo principal de desarrollar el cancelador de eco acústico empleando el algoritmo de filtraje adaptativo RSMAP demostrando que el algoritmo implementado es más versátil que el algoritmo SSMAP.
- Se realizó un estudio de los diferentes tipos de algoritmos y su rendimiento frente a varios modelos aplicados a un cancelador de eco, donde se determinó sus características en estado estacionario y en estado variable en el tiempo.
- El algoritmo RSMAP1 produce un desajuste ligeramente más notable en comparación con el algoritmo RSMAP2 debido al hecho de que el último algoritmo comienza con un límite de error inferior que el primero.
- Los resultados obtenidos de las simulaciones muestran que los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2 tiene un desempeño mucho mejor que el algoritmo SSMAP en estado estacionario como son el desajuste y robustez con respecto al ruido blanco sin comprometer la velocidad de convergencia inicial y la capacidad de re-adaptación.
- Como se verifica en la tabla 4.11 a mayor dispersión del modelo se tiene un menor error por esta razón para realizar la comparación con un canal variable se utiliza el modelo 4.
- Al aplicar el modelo 4 se verificó un mejor desempeño de los algoritmos, sin embargo esto representa un mayor costo computacional por que utiliza un mayor número de coeficientes.
- El algoritmo RSMAP muestra un mejor desempeño en comparación con el algoritmo SSMAP tanto en sus características de velocidad de convergencia como en desajuste ya sea en estado estacionario como en sistemas que presenten variaciones en el tiempo.

- En la tabla 4.16 se verifica que el MSE en el algoritmo RSMAP es la mitad del valor obtenido en el SSMAP, con lo cual se comprueba la versatilidad del algoritmo diseñado.
- Para comprobar el rendimiento del cancelador de eco es recomendable introducir variaciones al sistema para verificar sus características de estabilidad y convergencia a pesar de dichas variaciones.

## 5.2 RECOMENDACIONES

- Para tener un mejor desempeño del algoritmo RSMAP se debe utilizar modelos cuya dispersión sea elevada ya que se comprobó que bajo estas condiciones el algoritmo muestra un mejor rendimiento.
- Cuando los algoritmos RSMAP1 y RSMAP2 logran la estabilidad, el algoritmo RSMAP2 muestra mejor rendimiento a lo largo del tiempo ya que su MSE es ligeramente menor que el RSMAP1, sin embargo el costo computacional es mayor, por lo tanto no es recomendable su uso si no se cuenta con un hardware de buenas características.
- Para obtener mejores resultados se recomienda utilizar un factor de reutilización de datos  $L$  pequeño ya que los estudios realizados en este proyecto muestran que mientras menor es este valor se tiene mayor velocidad de convergencia y menor MSE.
- Se recomienda realizar el análisis aplicando todos los modelos posibles, los mismos que consten de diferentes características que puedan presentarse en el ambiente para obtener resultados cercanos a la realidad.

---

**GLOSARIO**

SM	<i>Set Membership</i>
AP	<i>Affine Projection</i>
LMS	<i>Least Mean Squares</i>
SSMAP	<i>Simplified Set-Membership AP</i>
RLS	<i>Recursive Least Squares</i>
RSMAP	<i>Robust Set-Membership Affine-Projection</i>
PU	<i>Partial-Update</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i>
WSS	<i>Wide-sense stationary</i>
MSE	<i>Error Cuadrático Medio</i>
ALE	<i>Mejora de la línea de adaptación</i>
NMLS	<i>Normalized Least Mean Squares</i>
SM-NLMS	<i>Set Membership Normalized Least Mean Squares</i>
PUAP	<i>Partial-Update Affine Projection</i>
SNR	<i>Signal to noise ratio</i>
L	<i>Factor de reutilización de datos</i>
ITU	<i>Unión Internacional de Telecomunicaciones</i>
CSS	<i>Set of Composite Source Signals</i>

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. Ozeki, K., & Umeda, T. (1984). *An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties*. Japan: Electronics and Communications.
- [2]. Gay, S. L., & Benesty, J. (2000). *Acoustic Signal Processing for Telecommunication*. Boston: Springer.
- [3]. Kraizer, S. G., & Morgan, D. R. (1985). *The partial-rank algorithm for adaptive beamforming*. SPIE Int.
- [4]. Werner, S., & Diniz, P. S. (2001). *Set-membership affine projection algorithm*. IEEE Signal Processing Letters.
- [5]. Diniz, P. S., & Werner, S. (2003). *Set-membership binormalized data reusing LMS algorithms*. IEEE Trans. Signal Process.
- [6]. Shin, H. C., & Sayed, A. H. (2004). *Mean-square performance of a family of affine projection algorithms*. IEEE Trans. Signal Process.
- [7]. Diniz, P. S. (2010). *Convergence performance of the simplified set-membership affine projection algorithm*. Circuits Syst. Signal Process.
- [8]. Werner, S., Apolinario, J. A., Diniz, P. S., & Laakso, T. I. (2005). *Set-membership approach to normalized proportionate adaptation algorithms*. Signal Process.
- [9]. Werner, S., Diniz, P. S., & Moreira, J. E. (2006). *Set-membership affine projection algorithm with variable data-reuse factor*. IEEE Int. Symp Circuits Syst.
- [10]. Zou, Y., Chan, S. C., & Ng, T. S. (2000). *A recursive least M-estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulsive noise*. IEEE Signal Process Letters.
- [11]. Bhotto, Z., & Antoniou, A. (2012). *Robust Set-membership affine projection algorithm*. IEEE Int Symp Circuits Syst.

- [12]. MATLAB, M. W. (s.f.). *The Language Of Technical Computing* . Obtenido de [www.mathworks.com/products/matlab/](http://www.mathworks.com/products/matlab/)
- [13]. Papoulis, A. (1991). *Random Variables and Stochastic Processes*. New York: McGraw Hill.
- [14]. Peebles, P. Z. (1993). *Random Variables, and Random Signal Principles*. New York: McGraw Hill.
- [15]. Gardner, W. A. (1990). *Introduction to Random Processes*. New York: McGraw Hill.
- [16]. Johnson, C. R. (1988). *Lectures on Adaptive Parameter Estimation*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [17]. Soderstr, T., & Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall.
- [18]. Strang, G. (1980). *Linear Algebra and Its Applications*. New York: Academic Press.
- [19]. Griffiths, L. J., & Jim, C. W. (1982). *An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming*. IEEE Trans. on Antennas and Propagation.
- [20]. Papoulis, A. (1977). *Signal Analysis*. New York: McGraw Hill.
- [21]. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1997). *Signals and Systems*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [22]. Diniz, P. S., da Silva, E. A., & Netto, S. L. (2002). *System Analysis and Design*. UK: McGraw Hill.
- [23]. Antoniou, A. (2005). *Signals, Systems, and Filters*. New York: McGraw Hill.
- [24]. Jackson, L. B. (1996). *Digital Filters and Signal Processing*. Kluwer Academic Publishers.
- [25]. Roberts, R. A., & Mullis, C. T. (1987). *Digital Signal Processing*. Addison-Wesley.
- [26]. Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [27]. Bose, T. (2004). *Digital Signal and Image Processing*. New York: Jhon Wiley & Sons.
- [28]. Proakis, J. G. (2001). *Digital Communication*. New York: McGraw Hill.

- [29]. Widrow, B., & Stearns, S. D. (1985). *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [30]. Wood, L. C. (1975). *Seismic signal processing*. IEEE.
- [31]. Messerschmitt, D. G. (1984). *Echo cancellation in speech and data transmission*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications.
- [32]. Honig, M. L. (1985). *Echo cancellation of voice band data signals using recursive least squares and stochastic gradient algorithms*. IEEE Trans. on Communications.
- [33]. Subramanian, S., Shpak, D. J., Diniz, P. S., & Antoniou, A. (1992). *The performance of adaptive filtering algorithms in a simulated HDSL environment*. Toronto: IEEE Conf. Electrical and Computer Engineering.
- [34]. Lin, D. W. (1990). *Minimum mean-squared error echo cancellation and equalization for digital subscriber line transmission: Part I - theory and computation*. IEEE Trans. On Communications.
- [35]. Lin, D. W. (1990). *Minimum mean-squared error echo cancellation and equalization for digital subscriber line transmission: Part II - a simulation study*. IEEE Trans. On Communications.
- [36]. Rabiner, L. R. (1978). *Digital Processing of Speech Signals*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [37]. Widrow, B., Grover, J. R., & Goodlin, R. C. (1975). *Adaptive noise cancelling: Principles and applications*. IEEE.
- [38]. Van Veen, B. D., & Buckley, K. M. (1988). *Beamforming a versatile approach to spatial filtering*. IEEE Acoust.
- [39]. Goodwin, G. C., & Payne, R. L. (1977). *Dynamic System Identification*. New York: Academic Press.
- [40]. Haykin, S. (2002). *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [41]. Ardalan, S. H. (1986). *Floating-point analysis of recursive least-squares and least-mean squares adaptive filters*. IEEE Trans on Circuits and Systems.

- [42]. Cioffi, J. M. (1987). *Limited precision effects in adaptive filtering*. IEEE Trans on Circuits and Systems.
- [43]. Roy, S., & Shynk, J. J. (1989). *Analysis of the data-reusing LMS algorithm*. Urbana: Midwest Symposium on Circuits and Systems.
- [44]. Gay, S. L., & Tavathia, S. (1995). *The fast affine projection algorithm*. Detroit: IEEE Conf Speech and Signal Processing.
- [45]. Apolinario, J. A., de Campos, M. L., & Diniz, P. S. (2000). *The binormalized data reusing LMS algorithm*. IEEE Trans on Signal Processing.
- [46]. Soni, R. A., Gallivan, K. A., & Jenkins, W. K. (2004). *Low-complexity data-reusing methods inadaptive filtering*. IEEE Trans on Signal Processing.
- [47]. Sankaran, S. G., & Beex, A. (2000). *Convergence behavior of affine projection algorithms*. IEEE Trans on Signal Processing.
- [48]. Scheweppe, F. C. (1968). *Recursive state estimate: Unknown but bounded errors and systems inputs*. IEEE Trans on Automatic Control.
- [49]. Fogel, E., & Huang, Y. F. (1982). *On the value of information in system identification - bounded noise case*. Automatica.
- [50]. Deller, J. R. (1989). *Set-membership identification in digital signal processing*. IEEE Speech Signal Processing.
- [51]. Antoniou, A., & Lu, W. S. (2007). *Algorithms and Engineering Applications*. New York: Springer.
- [52]. Bhotto, M. Z., & Antoniou, A. (2011). *Robust quasi-Newton adaptive filtering algorithms*. IEEE Trans Circuits Syst.
- [53]. Guo, L., & Huang, Y. F. (2005). *Set membership adaptive filtering with parameter dependent error bound tuning*. IEEE Speech Signal Process.
- [54]. Galdino, J. F., Apolinario, J. A., & de Campos, M. L. (2006). *A set membership NLMS algorithm with time varying error bound*. IEEE Circuits Syst.

- 
- [55]. Sayed, A. H., & Rupp, M. (1996). *Error-energy bounds for adaptive gradient algorithms*. IEEE Trans Signal Process.
- [56]. Yousef, N. R., & Sayed, A. H. (2001). *A unified approach to the steady state and tracking analyses of adaptive filters*. IEEE Signal Process.
- [57]. Naffouri, T. Y., & Sayed, A. H. (2003). *Transient analysis of adaptive filters with error nonlinearities*. IEEE Signal Process.
- [58]. Union, I. T. (2002). ITU-T G.168 Standard for Digital Network Echo Cancellers.