



ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO

CARRERA DE INGENIERÍA GEOGRÁFICA Y  
DEL MEDIO AMBIENTE

PROYECTO DE GRADO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO DE INGENIERÍA

PREDICCIÓN DE ONDULACIONES GEOIDALES A TRAVÉS DE  
UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL EN UN ÁREA DEL  
DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO

REALIZADO POR:  
MARÍA ALEXANDRA CHACÓN SILVA

SANGOLQUÍ – ECUADOR

FEBRERO 2010

## CERTIFICACIÓN

Certificación por parte del Director y Codirector de la elaboración del proyecto bajo su dirección y pie de firmas.

---

Dr. Alfonso Tierra

DIRECTOR

---

Ing. Alexander Robayo

CODIRECTOR

## RESUMEN

A más de conocer las coordenadas UTM (Este y Norte) o coordenadas geodésicas (latitud y longitud) de cualquier punto de la superficie terrestre surge la necesidad de obtener con precisión el valor de la altura referida al nivel medio de los mares, debido a su aplicación práctica en diversas obras de ingeniería. Por ello se investiga metodologías que pueda entregar buenos resultados en lo que a precisiones se refiere, siendo para el presente estudio la predicción de ondulaciones geoidales a través del entrenamiento de una red neuronal artificial en un área aproximada de 490 Km<sup>2</sup> del Distrito Metropolitano de Quito, a través de un aprendizaje supervisado utilizando el algoritmo de retropropagación del error (*backpropagation*).

La formulación de modelos de ondulaciones geoidales se lleva a cabo a través de cálculos que combinan algunos métodos tanto topográficos (nivelación) como geodésicos (determinaciones de alturas elipsoidales a través del GPS), para a partir de éstas conocer los valores de las alturas ortométricas (a través de la relación  $H \cong h - N$ ) ; para cuando se necesite conocer nuevos valores de altura se emplee dicho modelo para no recurrir a métodos como la nivelación, abaratando de esta manera recursos como tiempo y dinero.

## ABSTRACT

In addition to knowing the UTM coordinates (east and north) or geodetic coordinates (latitude and longitude) of any point on the surface the need arises to accurately obtain the height referred to the average sea level due to its practical application in various engineering works. Therefore investigating methodologies that can deliver good results as far as details are concerned, being for the present study the prediction of geoid undulations through the training of an artificial neural network in an approximate area of 490 km<sup>2</sup> of the Metropolitan District of Quito, through a supervised learning using the error backpropagation algorithm (backpropagation).

The modeling of geoid undulations is accomplished through calculations that combine both topographic some methods (leveling) and geodetic (ellipsoidal height determination via GPS) to learn from them the values of the orthometric heights (through the relationship  $H \cong h - N$ ), for when you need to meet new height values that model is used not to resort to methods such as leveling, thus lowering resources such as time and money.



**DEDICATORIA**

A mis padres y hermanos porque este logro a más de ser mío es de ellos porque en este largo y duro camino que requirió responsabilidad y entrega me brindaron amor, paciencia y todo su apoyo para Flavia y para mí.

A Flavi y Galo que son mi futuro y la razón que impulsa mi vida.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por iluminarme en los momentos difíciles  
y ayudarme a cristalizar este sueño.

A mi familia quienes son el pilar fundamental de mi vida.

Gracias por ayudarme y apoyarme sin condiciones.

A mi hija Flavia por enseñarme que se puede  
alcanzar el cielo aquí en la tierra y ser la razón  
que impulsa mi vida.

A mi director y codirector de tesis por brindarme  
sus conocimientos y ser ejemplo de profesionalidad.

Gracias por la paciencia mantenida durante  
el desarrollo de este proceso.

A mis compañeros y amigos por compartir  
los buenos y malos momentos.

Y en general agradezco a todos quienes estuvieron  
presentes en el transcurso de mi vida por el  
apoyo recibido siempre estarán en mí corazón.

## PRÓLOGO

La predicción de ondulaciones geoidales tiene una importancia relevante en zonas alejadas de puntos donde no se puede realizar nivelación, es por ello que se ha considerado necesario investigar cual es el comportamiento de los datos durante el proceso de aprendizaje en la fase del entrenamiento de la red neuronal artificial, debido a que la finalidad es que a través de un buen ajuste iterativo en los valores de los pesos sinápticos, se consiga una configuración adecuada para que la red proporcione una respuesta de salida deseada en base a la minimización de la función de error o coste, para que cuando se presenten patrones de entrada diferentes al de entrenamiento la red tenga un buen poder de generalización. El objetivo del aprendizaje es encontrar una configuración de pesos que corresponda al mínimo global de la función error.

Una vez finalizado el proceso de entrenamiento de la red se calculan los valores de media, desviación estándar, máximos y mínimos para comparar estos resultados con los obtenidos por el modelo matemático utilizando la metodología de mínimos cuadrados, desarrollado con anterioridad a éste proyecto; cabe indicar que se utilizó para el desarrollo del presente trabajo el mismo set de datos, con la finalidad de comparar para observa con cual se obtuvo mejores resultados en cuanto a precisiones se refiere.

Se pudo comprobar que al utilizar redes neuronales se obtuvo mejores resultados la razón es que las RNA son consideradas como un aproximador universal de funciones, es decir, que son capaces de ajustar funciones complejas y tomando en consideración que el geoide es una superficie difícil de determinar debido a que la densidad de masas del interior del planeta no es uniforme, alterándose el campo de gravedad en cualquier punto, el uso de esta metodología resulta apropiada.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIÓN .....	II
RESUMEN .....	III
ABSTRACT .....	IV
DEDICATORIA .....	V
AGRADECIMIENTOS .....	VI
PRÓLOGO .....	VII
ÍNDICE DE CONTENIDO .....	VIII
ÍNDICE DE FIGURAS .....	X
ÍNDICE DE TABLAS .....	XII
GLOSARIO .....	XIV

## ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>CAPITULO 1:</b> Introducción.....	3
<b>CAPÍTULO 2:</b> Fundamentos Teóricos.....	5
2.1    Superficies de Referencia.....	5
2.1.1    Superficie Física de la Tierra.....	5
2.1.2    El Elipsoide.....	5
2.1.3    El Geoide.....	7
2.2    Tipos de Altura.....	8
2.2.1    Altura Elipsoidal.....	9
2.2.2    Altura Ortométrica.....	9
2.2.3    Altura al Nivelada.....	10
2.3    La Neurona Biológica .....	11
2.4    Historia de las Redes Neuronales.....	14
2.5    Teoría del Aprendizaje .....	17
2.6    Red Neuronal Artificial. ....	19
2.6.1    Características de una Red Neuronal Artificial.....	23
2.6.2    Funciones de Transferencia .....	25
2.7    Arquitectura de una Red Neuronal Artificial .....	27
2.8    Aprendizaje de una Red Neuronal Artificial .....	29
2.9    Red Neuronal Multicapa .....	34
2.9.1    Entrenamiento de una Red Neuronal Artificial Multicapa.....	35
2.10    Descripción de los Datos Utilizados .....	44
<b>CAPÍTULO 3:</b> Metodología .....	46

3.1	Datos disponibles y selección de variables .....	46
3.2	Determinación de la mejor arquitectura de la RNA .....	47
3.3	Entrenamiento de la RNA .....	49
3.4	Predicción de ondulaciones geoidales en puntos de evaluación .....	51
3.4.1	Para 234 observaciones .....	53
3.4.2	Para 100 observaciones .....	57
3.4.3	Para 50 observaciones .....	61
3.4.4	Para 25 observaciones .....	65
3.4.5	Para 8 observaciones .....	69
<b>CAPÍTULO 4:</b>	<b>Análisis de los resultados .....</b>	<b>72</b>
4.1	Comparación de resultados obtenidos por medio de RNA con los del modelo matemático .....	72
4.1.1	Comparación de resultados obtenidos en puntos de evaluación Ajustado con 234 observaciones .....	72
4.1.2	Comparación de resultados obtenidos en puntos de evaluación ajustado con 100 observaciones .....	75
4.1.3	Comparación de resultados obtenidos en puntos de evaluación ajustado con 50 observaciones .....	76
4.1.4	Comparación de resultados obtenidos en puntos de evaluación ajustado con 25 observaciones .....	78
4.1.5	Comparación de resultados obtenidos en puntos de evaluación ajustado con 8 observaciones .....	80
<b>CAPÍTULO 5:</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones .....</b>	<b>87</b>
	Bibliografía .....	90
	Anexos .....	91

## INDICE DE FIGURAS

Figura. 2.1 Elipsoide de revolución.....	6
Figura. 2.2 El Geoide .....	8
Figura. 2.3 Altura elipsoidal de un punto sobre el terreno .....	9
Figura. 2.4 Tipos de alturas.....	10
Figura. 2.5 El Cerebro Humano .....	11
Figura. 2.6 Estructura de una neurona biológica .....	12
Figura. 2.7 Neurona presináptica y postsináptica .....	13
Figura. 2.8 Modelo de neurona artificial.....	20
Figura. 2.9 Campo local inducido de la neurona k .....	22
Figura. 2.10 Analogía de una neurona biológica y una neurona artificial .....	23
Figura. 2.11 Función de Transferencia .....	25
Figura. 2.12 Funciones de activación .....	26
Figura. 2.13 Topología unidireccional de tres capas .....	28
Figura. 2.14 Topologías de red.....	29
Figura. 2.15 Clasificación de los ANS por el tipo de aprendizaje y la arquitectura.....	32
Figura. 2.16 Aprendizaje y sobreaprendizaje en una RNA.....	33
Figura. 2.17 Evolución del error de aprendizaje con los datos de validación en función de las iteraciones, en un proceso de aprendizaje de un MLP.....	33
Figura. 2.18 Arquitectura de un MLP con dos capas ocultas.....	35
Figura. 2.19 Señales de un Perceptrón Multicapa .....	36
Figura. 2.20 Superficie de error .....	38
Figura. 2.21 Gráfico tridimensional de las ondulaciones geoidales reales.....	45
Figura. 3.1 Topología de red .....	48
Figura. 3.2 Arquitectura de red [2 10 1] .....	49
Figura. 3.3 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 10 1] para 234 observaciones .....	52
Figura. 3.4 Topología de red [2 21 1] .....	54
Figura. 3.5 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 21 1] .....	55
Figura. 3.6 Carta de ondulaciones geoidales para 234 observaciones.....	56
Figura. 3.7 Topología de red [2 9 1] .....	58
Figura. 3.8 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1] .....	59
Figura. 3.9 Carta de ondulaciones geoidales para 100 observaciones .....	60
Figura. 3.10 Topología de red [2 15 1] .....	62
Figura. 3.11 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 15 1].....	63

Figura. 3.12 Carta de ondulaciones geoidales para 50 observaciones .....	64
Figura. 3.13 Topología de red [2 9 1].....	66
Figura. 3.14 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1] .....	67
Figura. 3.15 Carta de ondulaciones geoidales para 25 observaciones .....	68
Figura. 3.16 Topología de red [2 9 1] .....	69
Figura. 3.17 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1] .....	70
Figura. 3.18 Carta de ondulaciones geoidales para 8 observaciones .....	71
Figura. 4.1 Ubicación de puntos de evaluación .....	83
Figura. 4.2 Topología de red [2 5 1] .....	84
Figura. 4.3 Evolución del error de aprendizaje en un MLP [2 5 1] .....	85

## INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Parámetros geométricos de principales elipsoides de referencia .....	7
Tabla. 3.1 Conjunto de datos de validación.....	47
Tabla 3.2 Comparación parámetros estadísticos RNA vs. Modelo Matemático .....	53
Tabla 3.3 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 234 observaciones.....	53
Tabla 3.4 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 100 observaciones.....	57
Tabla 3.5 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 50 observaciones.....	61
Tabla 3.6 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 25 observaciones.....	65
Tabla 3.7 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 8 observaciones.....	69
Tabla. 4.1 Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 234 observaciones .....	73
Tabla. 4.2 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 234 observaciones.....	74
Tabla. 4.3 Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 100 observaciones .....	75
Tabla. 4.4 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 100 observaciones.....	76
Tabla. 4.5 Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 50 observaciones .....	77
Tabla. 4.6 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 50 observaciones.....	78
Tabla. 4.7 Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 25 observaciones .....	78



Tabla. 4.8 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 25 observaciones .....	79
Tabla. 4.9 Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 8 observaciones .....	80
Tabla. 4.10 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones.....	81
Tabla. 4.11 Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones.....	82
Tabla. 4.12 Datos estadísticos con 22 puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones.....	84
Tabla. 4.13 Comparación de datos estadísticos con 22 puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones .....	86

## GLOSARIO

### **Altura al nivel medio del mar**

También denominado nivel cero, es la superficie de referencia para medir altitudes. Este nivel medio es una mejor aproximación a la forma real de la Tierra, la cual a su vez depende de las irregularidades en el campo gravitatorio terrestre, que alteran su posición.

### **Altura elipsoidal (h)**

Medida a lo largo de la normal elipsoidal, es la distancia entre la superficie del elipsoide y el punto de medición. La magnitud y dirección de este vector dependen del elipsoide empleado.

### **Altura nivelada**

Es la altura referida al nivel medio del mar determinada por los mareógrafos en una determinada localización geográfica. En el caso del Ecuador se encuentra en La Libertad (Provincia de Santa Elena).

### **Altura ortométrica (H)**

Distancia vertical existente entre la superficie del geoide y la superficie de la Tierra, la cual es medida a lo largo de la línea de la plomada. Esta distancia no es una línea recta sino que tiene una ligera curvatura que es tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto, ya que la dirección de la gravedad varía, dependiendo de las características de densidad local y de la distribución de las masas en el interior de la Tierra. En la práctica la altura ortométrica puede ser considerada como altura sobre el nivel medio del mar.

### **Aprendizaje**

Es el proceso a través del cual se adquieren nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción y la observación. Este proceso puede ser analizado desde distintas perspectivas, por lo que existen distintas teorías del aprendizaje. El aprendizaje es

una de las funciones mentales más importantes en humanos, animales y sistemas artificiales.

El aprendizaje en una red neuronal artificial consiste en la determinación de los valores precisos de los pesos para todas sus conexiones, que la capacite para la resolución eficiente de un problema.

### **Backpropagation**

Algoritmo también denominado de retropropagación del error, propaga el error de manera inversa al funcionamiento normal de la red en donde la información recorre de izquierda a derecha, es decir, desde la capa de salida a la de entrada en donde se modifican los pesos de las capas ocultas; es por ello que tiene aplicación en modelos neuronales que posean 1 o más capas ocultas.

### **Elipsoide**

Modelo fisicomatemático que representa a la Tierra, caracterizado por las constantes geométricas  $a$  (semieje mayor) y  $f$  (aplanamiento), y los parámetros físicos  $\omega$  (velocidad angular de rotación) y  $m$  (masa).

### **Entrenamiento**

Se refiere a la adquisición de conocimiento, habilidades, y capacidades como resultado de la enseñanza (aprendizaje), durante esta fase se utilizan algoritmos de aprendizaje. Tiene como finalidad ajustar los parámetros de la red con el fin de que las entradas produzcan las salidas deseadas con el fin de minimizar la función error.

### **Función de activación**

Son grados de activación que poseen los nodos o neuronas limitándose únicamente en dos: inactiva (0 o -1) y activa (1)

### **Generalización**

Capacidad que tiene la red para dar una respuesta correcta ante patrones que no han sido empleados durante el entrenamiento de la red.

**Geoide**

Superficie equipotencial del campo de gravedad que se aproxima al nivel medio del mar en calma.

**Neurona artificial**

Unidad simple de procesamiento que conforma una red neuronal, tienen la habilidad de aprender realizando sus propias reglas a través de la experiencia y también poseen la destreza de generalizar. Cada neurona recibe una serie de entradas a través de interconexiones y emite una salida.

**Neurona biológica**

Célula nerviosa, es la unidad estructural y funcional del sistema nervioso. Están especializadas en la recepción de estímulos y conducción del impulso nervioso (en forma de potencial de acción) entre ellas o con otros tipos celulares. Las neuronas presentan unas características morfológicas típicas que sustentan sus funciones: un cuerpo celular central; una o varias prolongaciones cortas que generalmente transmiten impulsos hacia el soma celular, denominadas dendritas; y una prolongación larga, denominada axón, que conduce los impulsos desde el soma hacia otra neurona u órgano.

**Neurona presináptica**

Célula nerviosa que transmite los impulsos nerviosos.

**Neurona postsináptica**

Célula nerviosa que recibe los impulsos nerviosos, ya sea a través de un neurotransmisor (sinapsis química) o por medio de uniones entre la membrana plasmática (sinapsis eléctrica).

**Ondulación geoidal (N)**

Diferencia de altura entre el geoide y el elipsoide.

**Patrón de entrada**

Son el conjunto de variables independientes de entrada que se han elegido para representar el sistema que se quiere modelar, consiste en los datos disponibles para el entrenamiento.

**Patrón de salida**

Es el conjunto de variables de respuesta del sistema a modelar, correspondiente a un patrón de entrada.

**Patrón de validación**

Conjunto de datos que mide la capacidad de la red para responder correctamente ante patrones que no han sido utilizados durante el entrenamiento. Estos datos se obtienen de la separación aleatoria de las muestras disponibles sobre el problema, siendo no utilizados como parte del patrón de entrada de la red.

**Pesos sinápticos**

Valores aleatorios que se presentan a la red durante el proceso de entrenamiento, la modificación de los mismos tiene el propósito de almacenar el conocimiento adquirido para alcanzar el objetivo o la solución de un problema dado, es aquí donde se produce el aprendizaje de la red.

**Razón de aprendizaje**

Es un parámetro encargado de controlar cuanto se desplazan los pesos de la red en la superficie del error siguiendo la dirección negativa del gradiente, determinando por lo tanto la magnitud de dicho desplazamiento, influyendo así en la velocidad de convergencia del algoritmo.

**Red neuronal artificial**

Las redes neuronales artificiales son considerados sistemas de procesamiento de información paralelos, distribuidos y adaptativos, los cuales pretenden construir modelos matemáticos que representen ciertas características y comportamiento de

las redes neuronales biológicas, siendo simulados mediante programas de computador.

### **Señal de error**

La señal de error está definida como la diferencia entre una respuesta deseada y la respuesta real de la red. Se propagan hacia atrás en forma de ajuste de los pesos sinápticos con la finalidad de alcanzar la meta deseada para un problema dado.

### **Señal funcional**

Constituye una señal de entrada la cual se propaga hacia delante a través de la red hasta llegar como una señal de salida.

### **Sinapsis**

Contacto, muy especializado, que se establece entre dos neuronas y a través del cual se transmiten las señales nerviosas de unas células nerviosas a otras. Existen dos clases de sinapsis: eléctricas y químicas.

### **Sobreajuste**

El sobreaprendizaje ocurre cuando el ajuste de los pesos sigue particularidades de los datos de entrada, es decir, la red memoriza los vectores del conjunto de aprendizaje dando como consecuencia un error de generalización que comete la red al presentarse patrones de entrada diferentes a los usados en el entrenamiento.

### **Umbral o límite**

Representa la mínima entrada total ponderada necesaria para provocar la activación de la neurona. También pueden definirse versiones límite de las funciones signo y sigmoides.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la forma y dimensiones de la Tierra se ha realizado desde épocas antiguas empleando diferentes técnicas para su real determinación, definiendo superficies que la representan tanto físicas (geoide) como matemáticas (elipsoide), las mismas que se usarán de referencia en la ubicación de puntos sobre la superficie terrestre.

En la actualidad gracias a la navegación por satélite se puede obtener coordenadas de cualquier punto sobre la tierra, sin embargo surge el inconveniente que a más de conocer la latitud y longitud (coordenadas geodésicas) o este y norte (coordenadas UTM) también es necesario el valor de la altura referida al nivel medio de los mares, siendo necesaria su obtención precisa debido a su aplicación práctica en diversas obras de ingeniería. Sin embargo la altura obtenida a partir de los receptores GPS (altura elipsoidal) carece de sentido físico para ser considerada como parámetro de elevación. Es por ello que la combinación de alturas en un sistema vertical es necesaria para la obtención de la altura ortométrica (altura semejante con el nivel medio de los mares) a través de la relación  $H \cong h - N$  en donde  $h$  corresponde a la altura geodésica o elipsoidal y  $N$  el valor de ondulación geoidal (diferencia de altura entre el geoide y el elipsoide).

Es por ello que la formulación de modelos de ondulaciones geoidales se lleva a cabo a través de cálculos que combinan algunos métodos como la nivelación y determinaciones de alturas elipsoidales, para a partir de éstas conocer los valores de las alturas ortométricas; para cuando se necesite conocer nuevos valores de altura se emplee dicho modelo para no recurrir a métodos como la nivelación, abaratando de esta manera recursos como tiempo y dinero.

## ANTECEDENTES

El geoide es una superficie física y equipotencial que modela la forma de la Tierra, contiene información sobre la distribución de masas en el interior del planeta, las mismas que no son fáciles de determinar. Esta superficie es utilizada como referencia para las alturas siendo el nivel medio del mar la mejor aproximación para esta superficie.

La predicción de ondulaciones geoidales tiene una importancia relevante en zonas alejadas de puntos donde no se puede realizar nivelación; debido a que a través de ellas se puede obtener la altura ortométrica (distancia vertical entre el punto de la superficie y el geoide) utilizada para proyectos de ingeniería.

Se ha considerado necesario realizar la predicción de ondulaciones geoidales a través del entrenamiento de una red neuronal artificial con la finalidad de investigar y comparar si es una buena alternativa para obtener mejores precisiones que a través del modelo matemático que utilizó el método paramétrico por mínimos cuadrados en la misma área de influencia de éste proyecto.

Cabe indicar que los datos utilizados son los mismos que se emplearon en el proyecto de grado “Determinación del modelo matemático para obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito” (Lima 2005), los mismos que se dividieron en 5 sets de entrenamiento<sup>1</sup>, los cuales corresponden a 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones; los cuales están distribuidos uniformemente en el área de estudio.

A más de contar con el conjunto de datos que forman el patrón de entrada también se cuenta con 23 puntos de evaluación los cuales no están incluidos dentro del conjunto de datos de entrada, teniendo la finalidad de proporcionar un control durante el proceso de aprendizaje de la RNA.

---

<sup>1</sup> Los sets de entrenamiento también son conocidos como patrones de entrada o vectores de entrada, que poseen los datos del sistema que se quiere modelar.



Al ser este un aprendizaje supervisado se dispone de un patrón de salida que contiene los valores de ondulación geoidal correspondiente a cada uno de los sets de entrenamiento; los cuales son consideradas como las variables de respuesta que conforman la salida deseada de la red y que el sistema debería modelar, para cuando se presenten datos que no estuvieron durante el entrenamiento, la red pueda realizar correctamente la predicción de los datos del fenómeno que se pretende modelar.

## **JUSTIFICACIÓN**

El conocimiento de los valores de ondulaciones geoidales es requerida para determinar la altura ortométrica, por lo cual se considera necesario realizar la predicción de las mismas a través de una red neuronal artificial no solo como una alternativa diferente a modelos geopotenciales globales sino para comparar con un modelo matemático local como el desarrollado en el proyecto de grado “Determinación del modelo matemático para obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito” (Lima 2005), con la finalidad de observar con que metodología se obtienen mejores resultados en cuanto a precisiones se refiere.

El conocimiento de las ondulaciones geoidales es necesaria para conectar los dos sistemas de altura (elipsoide – geoide), en donde la información proveniente del posicionamiento satelital es referida al elipsoide, mientras que para fines prácticos de ingeniería se utiliza la altura referida al nivel medio de los mares, razón por la cual se propone el proyecto con la finalidad de comprobar si con la metodología que va a ser investigada se podrán obtener mejores resultados que con el modelo antes mencionado.

## **OBJETIVO GENERAL**

- Entrenar una red neuronal artificial para predecir ondulaciones geoidales en un área determinada del Distrito Metropolitano de Quito.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Determinar los vectores de entrada para el proceso de entrenamiento.
- Determinar la mejor arquitectura de la RNA (Red Neuronal Artificial).
- Realizar el proceso de entrenamiento de una red neuronal artificial multicapa utilizando el software Matlab 7.0.1 con la herramienta ToolBox RNA.
- Evaluar el performance de la RNA.
- Comparar los resultados con los del modelo matemático.

## **CAPÍTULO 2**

### **FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

#### **2.1 SUPERFICIES DE REFERENCIA**

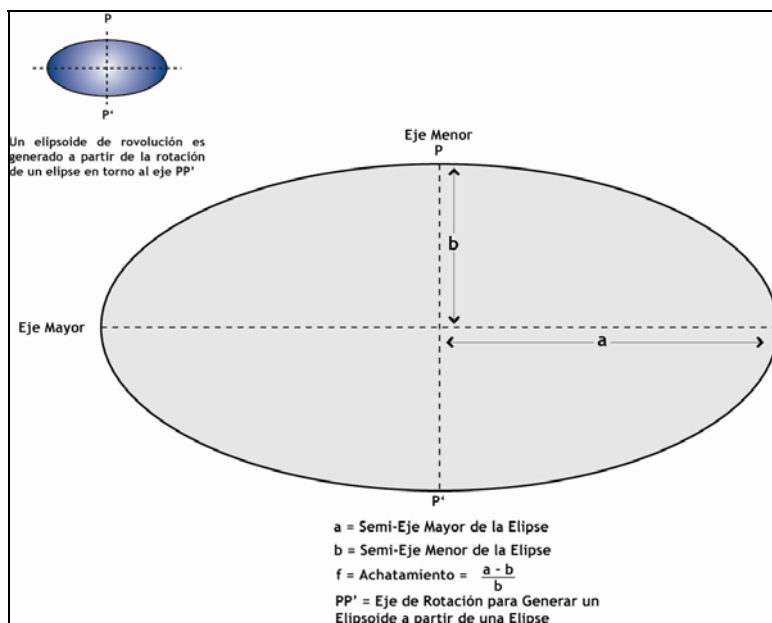
##### **2.1.1 SUPERFICIE FÍSICA DE LA TIERRA**

La Tierra no es una superficie homogénea, está constituida por la superficie terrestre o topografía del terreno y el fondo marino. Es sobre esta superficie donde se realizan los levantamientos y mediciones tanto geodésicas como topográficas así como también tiene lugar el estudio de los diferentes fenómenos terrestres por parte de las diversas disciplinas que forman parte de las geociencias.

Al hablar de la superficie terrestre se puede mencionar que existen superficies que la representan: una geométrica llamada elipsoide y una física denominada geoide.

##### **2.1.2 EL ELIPSOIDE**

El elipsoide o elipse de revolución se la obtiene haciendo girar una elipse sobre su eje menor ( $b$ ), éste representa la superficie geométrica que más se adapta a la forma de la Tierra en donde se realizan la mayor parte de los cálculos geodésicos y es la referencia para determinar las coordenadas geodésicas (latitud, longitud) de cualquier punto sobre el planeta; la forma y dimensiones del elipsoide está determinado por los parámetros: semiejes  $a$  (semieje mayor o ecuatorial) y  $b$  (semieje menor o polar) o semieje  $a$  y el achatamiento ( $f$ ). (Ver figura 2.1).



**Figura. 2.1 Elipsoide de revolución**

A partir de los semiejes  $a$  y  $b$  se obtienen los siguientes parámetros:

Achatamiento 
$$f = \frac{a-b}{a} \tag{2.1}$$

Primera excentricidad 
$$e_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{2.2}$$

Segunda excentricidad 
$$e_2^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tag{2.3}$$

En el transcurso del tiempo se han definido varios elipsoides de referencia para algunas regiones de la tierra tomando en consideración cual es el que mejor se adapta a la parte del geoide correspondiente a ese territorio. Por ello se han definido los valores de los parámetros geométricos de algunos elipsoides de referencia como se indica en la tabla 2.1.

**Tabla 2.1 Parámetros geométricos de principales elipsoides de referencia**

Nombre	a (m)	b (m)	1/f
International 1924 Hayford	6378388	6356911.946	297.000
GRS 1980	6378137	6356752.314	298.257222
South American 1969	6378160	6356774.719	298.250
WGS 84	6378137	6356752.314	298.257224

Fuente: <http://nacc.upc.es>

Hay que mencionar que una de las técnicas más utilizadas para conocer la posición de cualquier objeto en la superficie terrestre es a través de mediciones con GPS (*Global Positioning System*) en donde el elipsoide de referencia es el WGS 84 (*World Geodetic System 1984*).

Cabe mencionar que para la cartografía (a cualquier escala) en el territorio nacional se cuenta con ciertas referencias geográficas que están dadas en base al Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS), materializado en el Marco Internacional de Referencia Terrestre 1994 (ITRF94) para la época 1995.4 el cual tiene un elipsoide de referencia el GRS80, en donde el origen de longitudes es el meridiano de Greenwich y de las latitudes el paralelo cero o Ecuador.

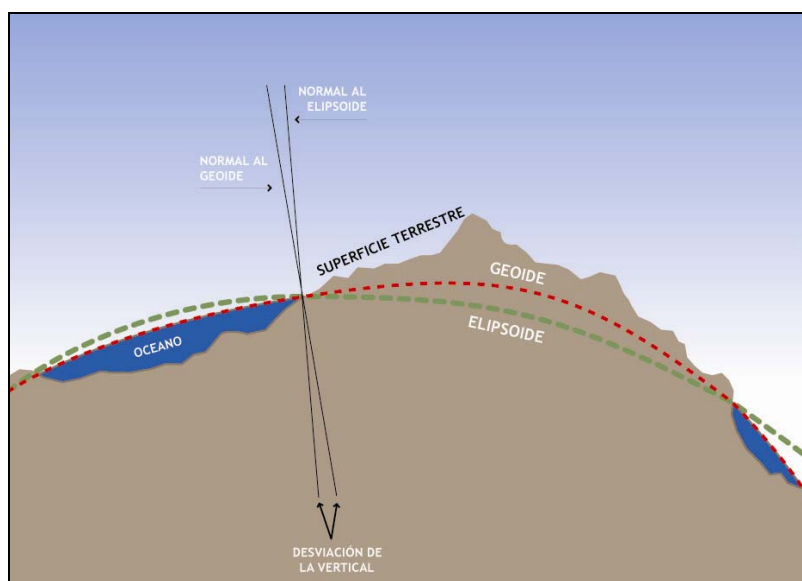
### 2.1.3 EL GEOIDE

Es una superficie física que busca representar la forma real de la Tierra definida a través de una superficie de potencial de gravedad constante o superficie equipotencial del campo de gravedad.

El geoide es una superficie que se aproxima al nivel medio del mar en calma tomándolo como referencia para determinar la altura o elevación del terreno; la cual se prolonga por debajo de la topografía continental y en cualquiera de sus puntos es perpendicular a la línea de plomada o dirección de la gravedad. (Ver figura 2.2).

El geoide puede estar por encima o por debajo del elipsoide de revolución y a esta diferencia se la conoce con el nombre de ondulación geoidal.

Determinar el geoide se torna una tarea difícil dado que la superficie terrestre no es homogénea debido a que la densidad de masas del interior del planeta no es uniforme, teniéndose como resultado la alteración de la fuerza de gravedad en cualquier punto.



**Figura. 2.2 El Geoide**  
Fuente: <http://nacc.upc.es>

## 2.2 TIPOS DE ALTURA

Al determinar la altura de un punto se debe tener en cuenta una superficie de referencia, ya que de acuerdo a como es obtenida se pueden distinguir alturas de tipo geométrico y alturas de tipo físico. El procedimiento que se emplea para conocer el valor de la altura se denomina nivelación, en donde las diferencias de nivel indican las variaciones topográficas del terreno, es necesario considerar la influencia del campo de gravedad en dicho proceso ya que al tener una distribución irregular de masas en el interior de la tierra la densidad tendrá diferencias apreciables y leves en todos los puntos, resultando así complicada su determinación exacta en algunos lugares.

### 2.2.1 ALTURA ELIPSOIDAL

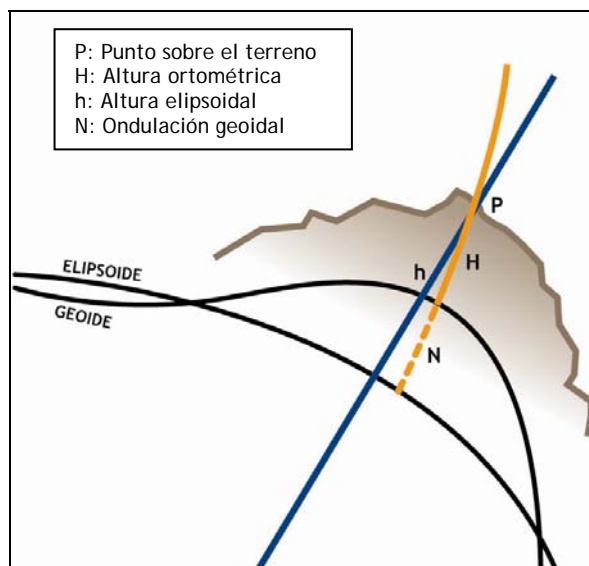
Es la distancia vertical medida entre la superficie topográfica y el elipsoide de referencia (por ejemplo: WGS84 o GRS80) como indica la figura 2.3, siendo este el dato que se obtiene directamente de los receptores GPS. Esta altura no posee sentido físico y no se la puede tomar como un parámetro de elevación ya que en la práctica se necesita utilizar alturas referidas al nivel medio del mar.



Figura. 2.3 Altura elipsoidal de un punto sobre el terreno  
Fuente: [www.inegi.gob.mx](http://www.inegi.gob.mx)

### 2.2.2 ALTURA ORTOMÉTRICA

La altura ortométrica ( $H$ ) se la puede definir como la distancia vertical existente entre la superficie del geoide y la superficie de la Tierra, la cual es medida a lo largo de la línea de la plomada (ver figura 2.4). Esta distancia no es una línea recta sino que tiene una ligera curvatura que es tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto, ya que la dirección de la gravedad varía, dependiendo de las características de densidad local y de la distribución de las masas en el interior de la Tierra. En la práctica la altura ortométrica puede ser considerada como altura sobre el nivel medio del mar.



**Figura. 2.4 Tipos de alturas**  
**Fuente: Drewes & Sánchez, 2000**

Para calcular la altura ortométrica con exactitud es necesario conocer el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada pero dado que ésta resulta difícil de determinar, el valor medio de la gravedad se lo obtiene a partir de modelos sobre la distribución de densidades de las masas terrestres.

La altura elipsoidal y la altura ortométrica se relacionan a través de la ondulación geoidal que es la diferencia comprendida entre el elipsoide y el geoide.

$$N = h - H \quad (2.4)$$

*N = Ondulación Geoidal*

*h = Altura elipsoidal*

*H = Altura ortométrica*

### 2.2.3 ALTURA NIVELADA

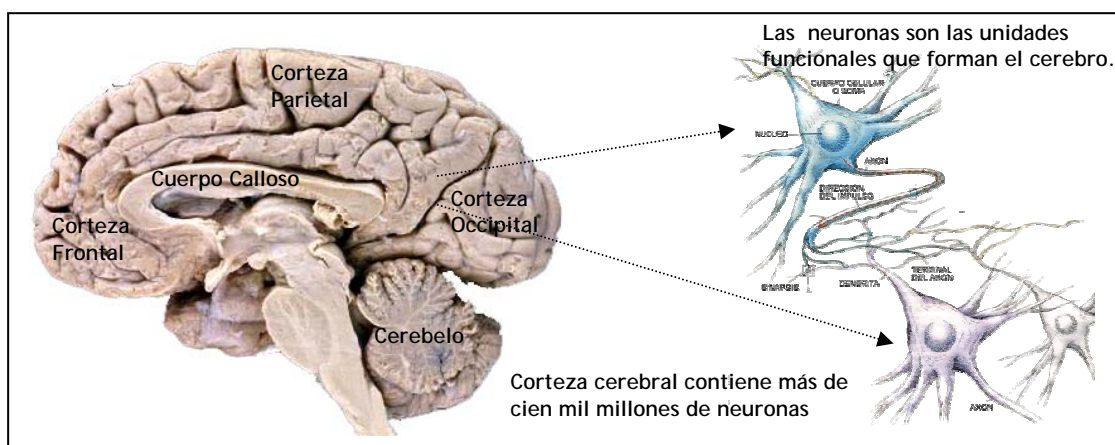
La superficie de referencia para medir altitudes es el nivel medio del mar o nivel cero. Este nivel medio se lo determina con el uso de mareógrafos, que registran ininterrumpidamente las oscilaciones de las mareas (tienden a variar en el transcurso del tiempo). Cada país fija el lugar desde el cual se calcularán todas las cotas de altitud que aparecerán en la cartografía. El nivel medio que se toma como cota cero o cero de nivelación para el Ecuador es el obtenido por el



mareógrafo ubicado en La Libertad (Provincia de Santa Elena). Para fines prácticos la altura ortométrica es semejante a la altura nivelada.

### 2.3 LA NEURONA BIOLÓGICA

El sistema nervioso central (encéfalo y médula espinal) se encuentra conformado por más de cien mil millones de neuronas como indica la figura 2.5, las mismas que reciben un gran número de información proveniente de los órganos y los sentidos, sensaciones transmitidas a través de impulsos nerviosos los cuales sobrepasarán un umbral (sumatoria de impulsos o potenciales de acción) para determinar cuál es la respuesta o reacción que debe realizar el cuerpo ante un estímulo (Snell, 2003) (Guyton, 2006).

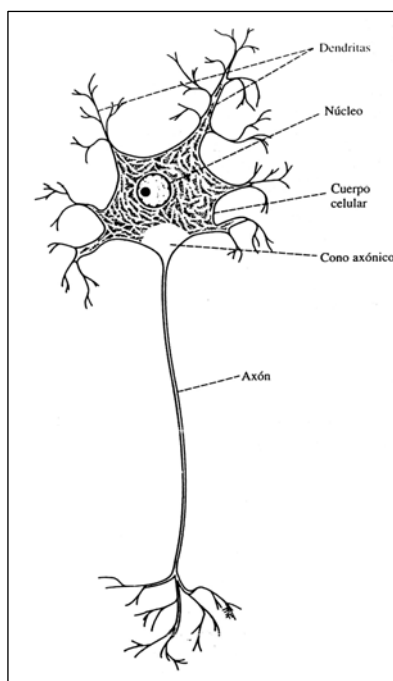


**Figura. 2.5 El Cerebro Humano**  
Fuente: Atlas Mcminn de Anatomía Humana, 2003

Gracias al trabajo realizado por el histólogo Santiago Ramón y Cajal (1911) se pudo conocer el papel que desempeña la neurona como unidad primaria funcional del sistema nervioso, sosteniendo que las neuronas son células que se comunican entre sí por impulsos eléctricos proceso denominado sinapsis.

Por lo tanto la neurona es considerada la unidad estructural y funcional del sistema nervioso, la misma que esta formada por tres partes principales: el soma, que es el cuerpo principal de la neurona; el axón, que parte del soma y por donde transitan los impulsos nerviosos a la siguiente célula neuronal y las dendritas que en algunas secciones puede llegar a medir hasta un metro de longitud, que son

numerosas prolongaciones ramificadas del soma y que transmiten los potenciales de acción desde neuronas adyacentes al soma (ver figura 2.6).



**Figura. 2.6 Estructura de una neurona biológica**  
**Fuente: Neuroanatomía Clínica Snell, 2003**

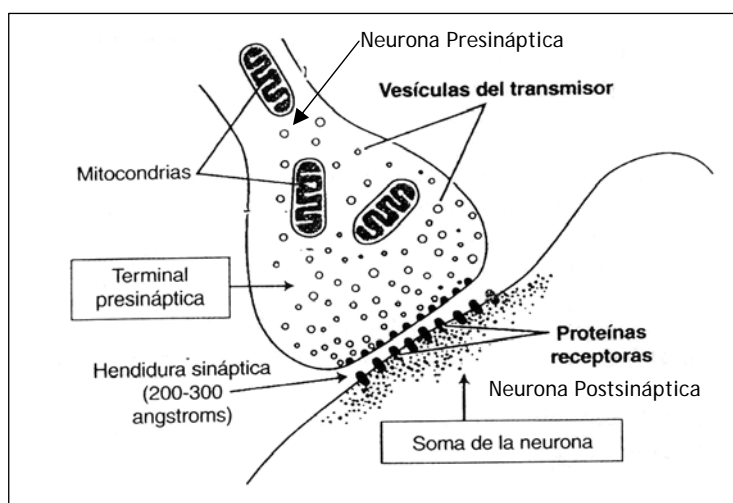
En el momento en que dos neuronas entran en estrecha proximidad y ocurre una intercomunicación interneuronal se produce un proceso conocido como sinapsis el cual consta de una neurona presináptica, una hendidura sináptica y una superficie postsináptica como indica la figura 2.7.

Existen dos tipos de sinapsis: la sinapsis química (transmite la señal desde una neurona a otra) y la sinapsis eléctrica (propaga una señal en el interior de la neurona). Generalmente todas las sinapsis que utiliza el sistema nervioso central para transmitir señales son de tipo químicas.

En este tipo de sinapsis la neurona produce una sustancia química denominada neurotransmisor el mismo que atraviesa un espacio conocido como hendidura sináptica la cual mide entre 20 – 30 nm, actuando sobre la siguiente neurona para excitarla o inhibirla, desencadenando así una respuesta concreta a un impulso nervioso dado. La neurona que produce la sustancia transmisora se la

conoce como neurona presináptica mientras que a la neurona que recibe al neurotransmisor es denominada neurona postsináptica.

Cada impulso nervioso genera un potencial interno que tiene un valor positivo o negativo según corresponda a una sinapsis excitatoria o inhibitoria. Esos potenciales se suman de manera temporal y cuando el potencial total excede un determinado valor, conocido como umbral, se genera una serie de pulsos que viajan a lo largo del axón propagándose hasta las terminales axónicas.



**Figura. 2.7 Neurona presináptica y postsináptica**

**Fuente: Fisiología de Guyton, 2006**

La inhibición o excitación de una neurona que se encuentra inicialmente en estado de reposo, está relacionada con el cambio en las propiedades de permeabilidad de la membrana neuronal postsináptica, debido a la apertura específica de los canales iónicos  $\text{Na}^+$  (sodio) y  $\text{K}^+$  (potasio) que posee.

La diferencia de potencial a través de la membrana plasmática de la neurona es de -80 milivoltios en el interior (concentración de iones de  $\text{K}^+$  en el interior de la membrana) con respecto al exterior de la célula, a esta diferencia de potencial se la denomina potencial en reposo.

La apertura de estos canales permite la difusión de los iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{K}^+$ , la entrada del  $\text{Na}^+$  (que supera la cantidad de  $\text{K}^+$  que sale de la membrana) genera

una disminución de la negatividad interna de la membrana, esta variación en la concentración excita a la neurona postsináptica.

Para que se dé un potencial postsináptico inhibitorio se abren canales que permiten el paso de las cargas eléctricas negativas para los iones Cl<sup>-</sup> (cloro), el momento en que se produce la salida de K<sup>+</sup> (interior de la membrana) e ingresa el Cl<sup>-</sup>, existe un aumento en la negatividad en el interior de la membrana, a esto se lo puede describir como hiperpolarización de la membrana.

## 2.4 HISTORIA DE LAS REDES NEURONALES

La presente reseña histórica de redes neuronales se la realizó recopilando información obtenida de los autores (Haykin, 2001), (Isasi y Galván, 2004).

Las redes neuronales comenzaron con el trabajo de Warren McCulloch (neurofisiólogo) y Walter Pitts (matemático) quienes en 1943 desarrollaron los primeros cálculos lógicos de redes neuronales, en donde a través de la observación de la forma como trabajan las neuronas lanzaron una teoría en donde al cerebro se lo considera como un organismo computacional, proponiendo la construcción de una red neuronal simple mediante circuitos eléctricos siguiendo una estructura similar a la que encontraron en las redes neuronales biológicas, basados en que las neuronas operan mediante impulsos binarios apagado (0) y encendido (1).

En 1949 se publicó el libro de Donald Hebb “La Organización de la Conducta” en el cual propone que la conectividad del cerebro esta modificándose continuamente a medida que un organismo va aprendiendo tareas funcionales diferentes en donde se van creando agrupamientos neuronales para tales modificaciones. Describió el modo real en que se relacionan las neuronas en el cerebro para formar asociaciones estables entre ellas. Desarrolló un mecanismo de aprendizaje el cual consiste en que cuando un axón presináptico causa la activación de cierta neurona postsináptica, la eficacia de la sinapsis que las relaciona se refuerza (Hebb 49)<sup>2</sup>; a éste aprendizaje se lo denomina aprendizaje

---

<sup>2</sup> Hebb, D. *The Organization of Behaviour*. Wiley, 1949

hebbiano y constituye un punto de partida para desarrollar algoritmos más complejos.

A partir de la década de los cincuenta se desarrollan otros avances importantes como la memoria asociativa y el reconocimiento de patrones, en 1954 Marvin Minsky inspirado en el trabajo de McCulloch y Pitts diseñó una máquina con 40 neuronas en donde las conexiones se ajustaban de acuerdo con una serie de sucesos que ocurrían al momento de realizar una tarea específica; pudiendo modelar como sería el comportamiento de un ratón al buscar comida en un laberinto.

A continuación Wilfrid K. Taylor comenzó a desarrollar su trabajo referente a la memoria asociativa publicando su obra *“Electrical Simulation of Some Nervous System Functional Activities”* en 1956. Él seguido por Steinbruch (1961) introdujeron la matriz de aprendizaje; también propone una red en tres capas: una con unidades sensoriales, otra con unidades asociativas y la última con unidades motoras. Los pesos de las sinapsis son modificables y las unidades son dispositivos analógicos. El procedimiento de entrenamiento es la regla de Hebb.

Posteriormente John Von Neumann en su artículo de 1956, *“Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components”*, introduce el tema de la redundancia en la red indicando que a una unidad informativa no se la puede representar mediante una neurona sino mediante la activación sincronizada de un conjunto de ellas, probando que al utilizar redes redundantes se pueden realizar cálculos aritméticos de manera más confiable, en donde por ejemplo se puede asignar con el 1 cuando la mitad de las neuronas contenidas en la red hayan sido activadas y un valor 0 si no lo están.

En 1958 el psicólogo Frank Ronsenblant desarrolló un modelo al que se lo conoce con el nombre de Perceptrón, su estructura fue inspirada en los sistemas sensoriales de los animales (por ejemplo la visión) en los cuales la información atraviesa varias capas de neuronas. Este modelo tenía la capacidad de aprender a reconocer patrones y generalizar similitudes entre ellos. El perceptrón simple es un modelo unidireccional el mismo que está conformado por dos capas, una de

entrada y otra de salida. Sin embargo, dicho modelo tenía limitaciones para resolver el problema de la disyunción exclusiva (función lógica XOR), siendo incapaz de clasificar clases o patrones linealmente no separables.

En 1960 Bernard Widrow y Marcial Hoff inventaron un nuevo procedimiento de aprendizaje, el algoritmo del mínimo cuadrado medio o LMS (*Least Mean Square*) y lo utilizaron para formular un modelo denominado Adaline (*Adaptive Linear Element* – Elemento Lineal Adaptativo) y posteriormente el Madaline (multiple – adaline) que fue una red neuronal en capas entrenada con múltiples elementos adaptativos, utilizada para resolver problemas de clasificación. Por otra parte el adaline fue la primera red neuronal aplicada a un problema real como filtro para eliminar los ecos en las líneas telefónicas.

A finales de los sesenta ya se discutía como solución a las limitaciones que presentaba el perceptrón introducir capas ocultas en las arquitecturas de red pero existía un inconveniente en el algoritmo de aprendizaje debido a que no se disponía de algún procedimiento que permita obtener los pesos en un multicapa de neuronas ocultas. A esto se lo denominó problema de asignación de crédito<sup>3</sup>, siendo resuelto a mediados de los ochenta por el algoritmo denominado backpropagation (BP).

Stephen Grossberg (1960-1970) realizó estudios referentes a los fenómenos y procesos que ocurren tanto a nivel psicológico (mente) como biológico (cerebro) durante el procesamiento de la información, intentando unir mente y cerebro en una sola teoría. Redescubre el entrenamiento de redes neuronales a través del aprendizaje no supervisado (Grossberg 76a y 76b)<sup>4</sup>. Desarrolló un modelo de red llamado Avalancha en 1967 para el reconocimiento del habla.

A continuación Teuvo Kohonen (1962-1980) trabajó en memoria asociativa y matrices de correlación, dando como resultado un modelo de memoria asociativa lineal la misma que requiere vectores linealmente independientes. Realizó varios

---

<sup>3</sup> Consiste en cómo medir la contribución del error en la salida de la red neuronal de cada uno de los nodos ocultos que precisamente no tienen una conexión directa con ella.

<sup>4</sup> Grossberg, S. *Adaptive pattern classification and universal recoding: I. Parallel development and coding of neural feature detectors. Biological Cybernetics*, 23, 121-134, 1976. *II. Feedback, expectation, olfaction, illusions. Biological Cybernetics*, 23, 187-202, 1976.

estudios en diversos métodos de aprendizaje desarrollando el LVQ (*Learning Vector Quantization*), que es un modelo supervisado que lleva a cabo tareas de reconocimiento de patrones.

Una respuesta al problema de ajustar los pesos si se tiene capas ocultas fue presentada por Rumelhart, Hinton y Williams en 1986. La idea central es que el error para las unidades de la capa o capas ocultas se determina por una retropropagación del error de las unidades de la capa de salida. Por esta razón esta regla de aprendizaje se la conoce como retropropagación o backpropagation.

En 1988 Broomhead y Lowe describieron un procedimiento que consiste en la utilización de un modelo de funciones de base radial o RBF (*Radial Basis Function*) para redes neuronales multicapas, la diferencia existente con otros modelos se encuentra en la capa oculta ya que operan en base a la distancia que separa el vector de entradas con respecto al vector sináptico que cada neurona almacena (se lo conoce como centroide), en el RBF las neuronas son de respuesta localizada<sup>5</sup>.

En la actualidad se siguen desarrollando nuevos modelos teniendo como base a los tradicionales. Entre los nuevos modelos se puede destacar el GRNN o redes de regresión generalizada (Specht 91)<sup>6</sup> que implementa un aprendizaje no iterativo presentando rapidez en el aprendizaje.

## 2.5 TEORÍA DEL APRENDIZAJE

Una de las funciones más importantes que posee el sistema nervioso es el procesar la información aferente (enviada por las neuronas sensitivas) para elaborar respuestas mentales y motoras adecuadas. Cabe indicar que solo una pequeña parte de la información sensorial desencadena una respuesta motora inmediata, como por ejemplo cuando una persona pone la mano sobre una estufa caliente. Sin embargo gran parte de los datos restantes se almacenan para usarlos más tarde en la regulación de los actos motores y en los procesos

---

<sup>5</sup> Solo responden con intensidad apreciable cuando tanto el vector de entrada y el centroide de la neurona pertenecen a una zona próxima en el espacio de las entradas.

<sup>6</sup> Specht, D.F. *A general regression neural network*. IEEE *Transactions on Neural Networks*, 2, 6, 568-576, 1991.

mentales. El almacenamiento de dicha información se la conserva en la corteza cerebral, constituyéndose una función de la sinapsis. En la conexión sináptica entre neuronas ocurren los procesos de memoria y aprendizaje.

El aprendizaje supone en cierta forma el almacenaje de información en el sistema nervioso y su recuperación cuando se desee. De cierta manera en el sistema nervioso debe haber almacenado un registro permanente de lo que se ha aprendido, que puede ser recordado en ocasiones futuras. Este registro ha sido denominado trazo de memoria o engrama (Ville, 1994).

La memoria humana se basa principalmente en las asociaciones; cuando intentamos recuperar una información, una cosa recuerda otra que a su vez hace referencia a otra y así sucesivamente, ha esto se lo conoce como memoria asociativa

En el ser humano existen dos tipos de memoria: la memoria de corto plazo que está representada por cambios en la fuerza sináptica entre las neuronas relacionadas. La memoria de largo plazo se basa en interacciones entre las sinapsis y el núcleo de la célula, donde cambios sinápticos a largo plazo involucran la activación de la expresión genética, síntesis de nuevas proteínas y la formación de nuevas conexiones sinápticas.

El aprendizaje es algo implícito en el ser humano y forma parte imprescindible de las actividades intelectuales. El aprendizaje se origina en la adaptación de los parámetros de un sistema ya sea éste artificial o natural (biológico) para obtener una respuesta deseada frente a un estímulo externo, produciéndose cambios en el organismo como resultado de la experiencia.

Existen algunas teorías de cómo se realiza el aprendizaje a continuación se mencionará alguna de ellas:

- La teoría conductista también denominada de condicionamiento clásico está asociado con el estudio de los estímulos y sus respuestas correspondientes.



- El condicionamiento instrumental u operante hace mención a la conducta y a la consecuencia de sus acciones, con el uso de refuerzos positivos o negativos se modificará la conducta. De hecho la mayoría de las situaciones reales de aprendizaje tienen características clásicas y operantes.
- La teoría cognoscitiva trata a los procesos que conducen al aprendizaje, es decir, se interesa por los procesos internos que ocurren en el individuo cuando aprende, cómo ingresa la información, cómo se transforma en el individuo y cómo la información se encuentra lista para hacerse manifiesta así mismo, considera al aprendizaje como un proceso en el cual cambian las estructuras cognoscitivas (organización de esquemas, conocimientos y experiencias que posee un individuo), debido a su interacción con los factores del medio ambiente. Dentro del aprendizaje cognoscitivo se pueden apreciar dos tipos de aprendizaje:

Aprendizaje repetitivo: Implica la memorización de la información a aprender.

Aprendizaje significativo: La información es comprendida por el individuo a través del desarrollo de habilidades intelectuales y estrategias que le permitan una relación entre la nueva información y aquella que ya estaba presente, es decir, que es lo que conoce de aquello que quiere aprender. En este aprendizaje se descubre el conocimiento y sólo se proporcionan elementos para llegar a él.

Como consecuencia el producto del aprendizaje es la capacidad de relacionar hechos, conocimientos y experiencias para tener un criterio bien definido y dar una respuesta acertada para alguna situación en particular.

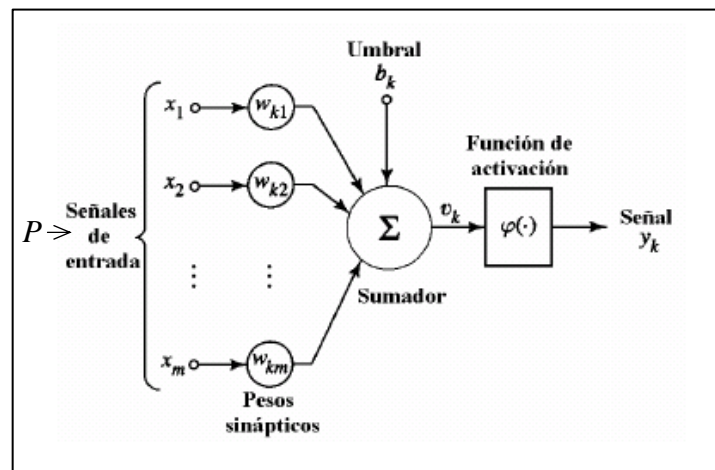
## 2.6 RED NEURONAL ARTIFICIAL

Las RNA (Redes Neuronales Artificiales) son consideradas sistemas de procesamiento de información paralelos, distribuidos y adaptativos, los cuales pretenden construir modelos matemáticos que representen ciertas características y comportamiento de las redes neuronales biológicas, siendo simulados mediante

programas de computador. Una red neuronal se encuentra conformada por unidades simples de procesamiento denominadas neuronas o nodos, las cuales tienen la habilidad de aprender realizando sus propias reglas a través de la experiencia y también poseen la destreza de generalizar<sup>7</sup>.

Dentro de las RNA el conocimiento es adquirido a partir de su ambiente utilizando un algoritmo de aprendizaje, el mismo que tiene la finalidad de modificar los pesos sinápticos o conexiones entre las neuronas, con el propósito de almacenar el conocimiento adquirido para alcanzar el objetivo o la solución de un problema dado.

A continuación se identificarán los elementos que forman parte de una neurona artificial como indica la figura 2.8, la cual constituye la base para el diseño de la red neuronal. (Haykin, 2001)



**Figura. 2.8 Modelo de neurona artificial**  
Fuente: Haykin, 2001

- a) Un conjunto de entradas  $x_i$  y pesos sinápticos  $w_{ki}$ , correspondiéndole a cada una un peso propio; en donde el primer subíndice indica la neurona postsináptica mientras que el segundo subíndice se refiere a la neurona de donde proviene la sinapsis o neurona presináptica. Hay que indicar que el peso de una neurona puede encontrarse en un rango de valores tanto positivos como negativos y son fijados de manera aleatoria.

<sup>7</sup> La generalización hace referencia a que la red produzca señales adecuadas para las entradas que no estuvieron presentes en el momento del entrenamiento.

- b) Un sumador lineal el cual suma las señales de entrada, ponderadas con los pesos respectivos de las sinapsis de la neurona  $\sum w_{ki}x_i$ .
- c) Una función de activación que usualmente es no lineal (función escalón, sigmoideal o gaussiana), la cual es escogida de acuerdo al problema que se desee resolver. Tiene como objetivo limitar la amplitud de salida de una neurona (nivel de activación) entre  $[0, 1]$  o  $[-1, 1]$ , éstos rangos de valores dependerán de la función que se vaya a utilizar.
- d) Una señal de salida que proporciona la salida actual de la neurona “i” en función de su estado de activación.

Además se puede notar un parámetro externo en la neurona artificial denominado umbral o bias denotado por  $b_k$ , que tiene el efecto de aumentar o disminuir el valor en la entrada de la función de activación, dependiendo si es positivo o negativo respectivamente, es decir, si el potencial de membrana supera un valor umbral  $b_k$  entonces la neurona se activa, caso contrario la neurona no se activará. Una neurona  $k$  puede formularse de la siguiente manera (Haykin, 2001):

$$u_k = \sum_{i=1}^m w_{ki}x_i \quad (2.5)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (2.6)$$

En donde:

$x_1, x_2, \dots, x_m$  son las señales de entrada.

$w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$  corresponde a los pesos sinápticos.

$u_k$  es la salida del sumador lineal.

$b_k$  es el umbral o bias.

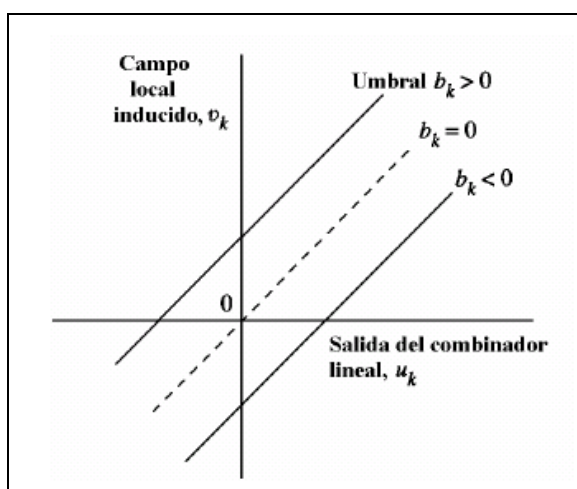
$\varphi(\cdot)$  es la función de activación.

$y_k$  es la señal de salida de la neurona.

Cabe mencionar que con el uso del valor umbral  $b_k$  se tiene el efecto de aplicar una transformación a la salida  $u_k$  del sumador lineal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$v_k = u_k + b_k \quad (2.7)$$

En éste punto se produce una modificación entre el campo local inducido ( $v_k$ ) y la salida del sumador lineal  $u_k$ , lo cual dependerá de si el valor umbral  $b_k$  es positivo o negativo. (Véase figura 2.9).



**Figura. 2.9 Campo local inducido de la neurona k**  
Fuente: Haykin, 2001

Cabe mencionar que la suma ponderada de todas las conexiones sinápticas más el valor del bias ( $b_k$ ), define el campo local inducido de la neurona. Ahora la neurona  $k$  puede expresarse al formular las ecuaciones anteriores en forma equivalente de la siguiente manera:

$$v_k = \sum_{i=0}^m w_{ki} x_i \quad (2.8)$$

$$y_k = \varphi(v_k) \quad (2.9)$$

Ya definidas las estructuras de la neurona biológica y la neurona artificial, a continuación se presenta una analogía para visualizar las similitudes que existen entre ellas, como indica la figura 2.10.

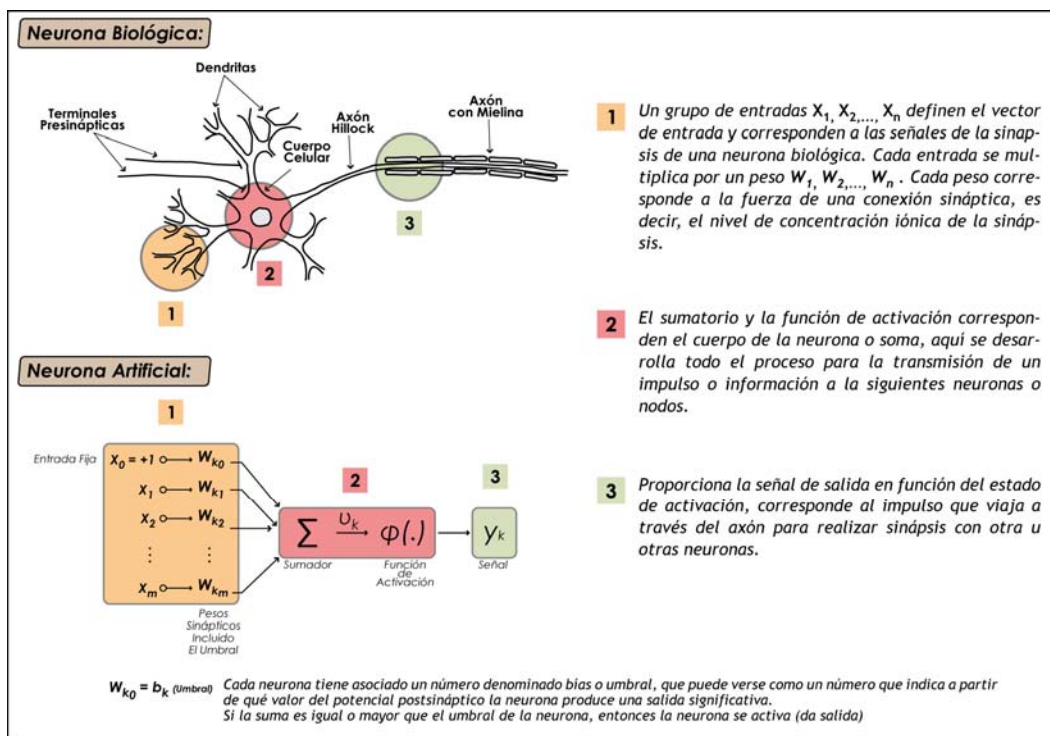


Figura. 2.10 Analogía de una neurona biológica y una neurona artificial

### 2.6.1 CARACTERÍSTICAS DE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL

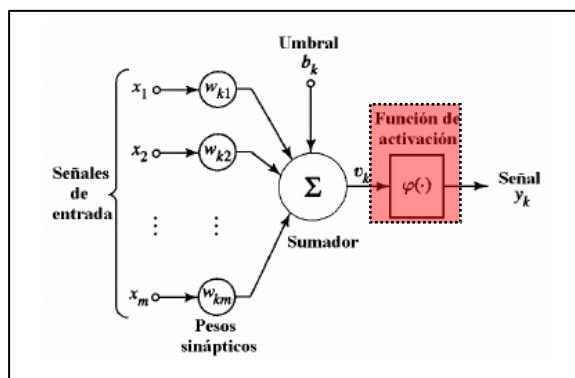
La caracterización de las redes neuronales se puede realizar desde los siguientes aspectos (Bonifacio Martín del Brío, 2001):

- **Paralelismo de cálculo:** Al referirse que un sistema es paralelo lo que se desea es que una RNA pueda ejecutar la operación simultáneamente en varios lugares a la vez, garantizando a cada neurona la capacidad de memoria local, así como también la capacidad de procesamiento distribuido de la información debido a la conectividad que existe a través de la red.
- **Memoria distribuida:** Hace referencia a que la información contenida no es almacenada localmente en zonas específicas de la red sino que en los sistemas neuronales se encuentra presente por toda ella, almacenándose en la sinapsis o conexiones entre las neuronas. De manera similar se puede decir que la computación también es distribuida ya que al calcular la respuesta de la red intervienen todos y cada uno de los procesadores

elementales (neuronas) los mismos que se encuentran distribuidos por toda la topología de la red. Esta característica distribuida hace que la red sea tolerante a fallo.

- **Tolerancia a Fallos:** Hace mención a que si una sinapsis resultase dañada no se pierde toda la información ya que algunas neuronas y sinapsis pueden realizar un papel similar sustituyendo a las neuronas dañadas o ir degradando su capacidad paulatinamente, únicamente se perdería una parte de ella sin afectar el trabajo de la red, sin ser necesario exhibir daños graduales o de manera permanente; lo que no sucedería en un computador convencional debido a que la pérdida de un fragmento de información puede traer como consecuencia la inoperancia de un sistema por poseer un único procesador, en donde la información se almacena en espacios localizados y únicos; mientras que en las RNA cada neurona representa un procesador elemental.
- **Adaptabilidad:** Las redes neuronales tienen la capacidad de ajustar sus pesos sinápticos de acuerdo a modificaciones existentes en su entorno adaptándose a él, es así como tiene lugar el aprendizaje de la red, almacenando la información acerca de las experiencias y generalizando conceptos a partir de casos particulares para luego utilizarla en situaciones futuras. Por lo tanto el aprendizaje se encuentra relacionado con la generalización ya que a través de la abstracción de información útil la RNA es capaz de generar señales adecuadas ante casos desconocidos.
- **No linealidad:** Una característica importante de las RNA es su no linealidad siendo capaces de modelar situaciones complejas, por ejemplo si a un conjunto de datos se tratara de ajustarlos utilizando una función lineal, el error que se obtendrá será elevado y los valores que esta función proporcionará para valores diferentes de los empleados se apartará de la realidad. Mientras que al utilizar funciones no lineales los resultados serán cercanos a la realidad resolviendo el problema.

## 2.6.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

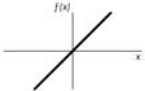
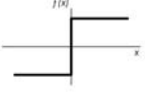
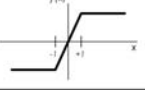

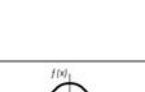
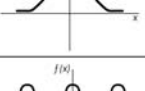



**Figura. 2.11 Función de Transferencia**  
Fuente: Haykin, 2001

En las redes neuronales existe una función sea esta lineal o no lineal, que permite cambiar de nivel de activación a partir de las señales que recibe, ésta función es conocida como función de activación o transferencia (véase figura 2.11). Éste nivel de activación dependerá de las entradas recibidas por cada una de las neuronas y de sus respectivos pesos sinápticos. Previo a obtener el estado de activación se calcula el valor de la suma de todas las entradas ponderadas (Ec. 2.10), para luego definir los valores de salida de la neurona (Haykin, 2001).

$$v_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j + b_k \quad (2.10)$$

De acuerdo para lo que se necesite entrenar la red neuronal, se selecciona la función de activación que irá en la capa o capas ocultas de la red; así como también dependiendo el problema a resolver la función de activación debe ser diferenciable, es decir, que exista la derivada en todos sus puntos. En la siguiente figura 2.12 se pueden identificar las funciones de activación más usuales:

	FUNCIÓN	RANGO	GRAFICA
IDENTIDAD	$y = x$	$[-\infty, +\infty]$	
ESCALÓN	$y = \text{signo}(x)$ $y = H(x)$	$[-1, +1]$ $[0, +1]$	
LINEAL A TRAMOS	$[-1, +1]$	$[-1, +1]$	
SIGMOIDEA LOGISTICA	$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$	$[0, +1]$	
SIGMOIDEA TANGENTE HIPERBÓLICA	$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$	$[-1, +1]$	
GAUSSIANA	$y = A \cdot e^{-Bx^2}$	$[0, +1]$	
SINUSOIDAL	$y = A \cdot \text{sen}(\omega x + \varphi)$	$[-1, +1]$	

**Figura. 2.12 Funciones de activación**  
Fuente: Bonifacio Martín, 2001

Se usa como función de activación una relación lineal (identidad) para neuronas de entrada a la red o sensores. Esto se debe a que un sensor tiene que indicar lo que está percibiendo. Si la función de activación de una neurona es lineal entonces se dice que es una neurona lineal, en caso contrario se dice que es una neurona no lineal.

Las tres primeras funciones presentan una desventaja porque no son derivables en algunos puntos por lo que no pueden aplicarse algunos algoritmos de aprendizaje, es por ello que la tendencia es utilizar funciones que sean diferenciables en todos sus puntos como es el caso de la función sigmoidea la misma que presenta dos formas, una logística y otra tangente hiperbólica.

De acuerdo a la experiencia de varios investigadores en el estudio de las RNA se recomienda la utilización de ésta función.



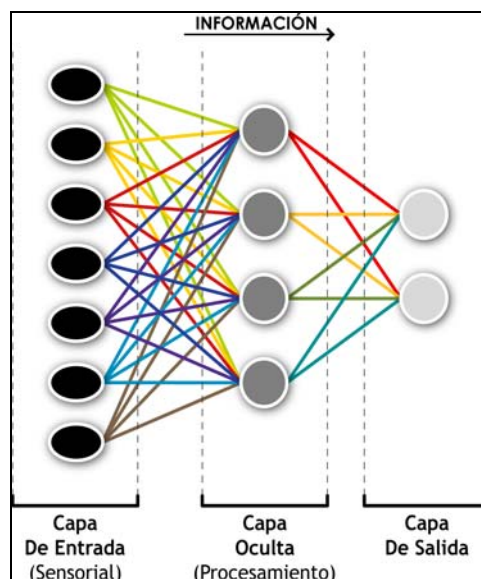
## 2.7 ARQUITECTURA DE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL

La topología o arquitectura de una red consiste en la organización y disposición de las neuronas en la red, formando capas de neuronas, en este sentido existen varios parámetros que se deben de tomar en consideración cuando se define una RNA como son: el número de capas, el número de neuronas por capa, su grado de conectividad y el tipo de conexión existente entre las neuronas.

En las RNA las conexiones sinápticas son direccionales, es decir, la información únicamente puede propagarse en un único sentido de izquierda a derecha, desde la neurona presináptica a la postsináptica.

En una red neuronal artificial las neuronas se encuentran agrupadas, conectadas entre sí en unidades estructurales denominadas capas. En relación a la estructura en capas se pueden definir redes monocapa y redes multicapa. Las redes monocapa son aquellas compuestas por una única capa de neuronas, en donde las neuronas de la capa de entrada constituyen también las de salida. Las redes multicapa son aquellas cuyas neuronas se organizan en varias capas y según la función que desempeñan suelen recibir un nombre específico. Se pueden distinguir tres tipos de capas (Isasi y Galván, 2004) (Bonifacio Martín, 2001) (Haykin, 2001) (véase figura 2.13):

- De entrada: También llamada sensorial, está formada por neuronas que reciben datos o señales provenientes del entorno. Aquí se encuentran las variables que definen el problema.
- Ocultas: Son aquellas que no poseen una conexión directa con el entorno, aquí es donde se genera la representación de la información y se realizan todas las conexiones neuronales posibles (dependiendo del problema a resolver) entre todas las capas.
- De salida: Es aquella en donde se transfiere la información de la red hacia el exterior, es decir, proporciona la respuesta.

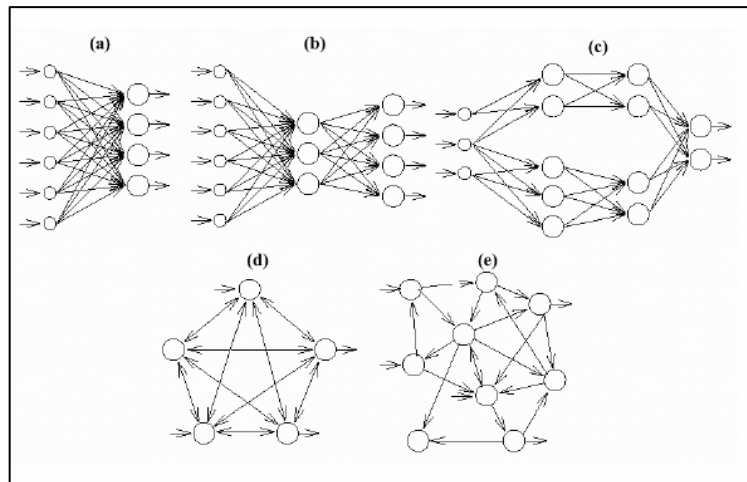


**Figura. 2.13 Topología unidireccional de tres capas**  
**Fuente: Bonifacio Martín, 2001**

También de acuerdo a la forma en la que se dirigen los datos en la red neuronal, se puede clasificar en redes unidireccionales (*feedforward*) y redes recurrentes (*feedback*).

En las redes unidireccionales la información circula en un solo sentido, desde las neuronas de entrada hacia las de salida (izquierda a derecha), estas redes son una generalización de los perceptrones multicapa (MLP), que constituyen la categoría de topologías más utilizada en computación neuronal; mientras que en las redes recurrentes o realimentadas la información puede circular entre las capas en cualquier sentido incluyendo el de salida-entrada.

Una topología de red bastante empleada en redes neuronales artificiales es la *feedforward*; para la realización de este proyecto se usará ésta topología. A continuación en la figura 2.14 se señalan algunas topologías de red.



**Figura. 2.14 Topologías de red**

a) Una red monocapa conectada completamente, b) Una red multicapa conectada completamente, c) Un MLP modular, d) Una red recurrente conectada completamente, e) Una red recurrente conectada parcialmente.

Fuente: Fiszlelew, 2002.

## 2.8 APRENDIZAJE DE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL

Para describir en qué consiste el aprendizaje de una RNA se busco referencias en los siguientes autores: (Isasi y Galván, 2004); (Bonifacio Martín, 2001); (Haykin, 2001).

La capacidad de una red para resolver un problema está ligada directamente al tipo de ejemplos que dispone en el proceso de aprendizaje.

Una de las características que poseen las redes neuronales es la habilidad de aprender a partir de ejemplos, el proceso de aprendizaje es un proceso iterativo de ajuste de pesos sinápticos, también considerados como parámetros libres de la red; éstos valores son dados aleatoriamente, presentándose una y otra vez los patrones de aprendizaje con el fin que los pesos se ajusten hasta lograr que el error sea aceptable. El tipo de aprendizaje viene determinado por la forma en la que dichos parámetros son adaptados.

El aprendizaje tiene lugar cuando existe modificación en los pesos y a su vez la memoria de las neuronas reside en los pesos sinápticos. Es por ello que la memoria y el aprendizaje se encuentran relacionados.

En las redes neuronales artificiales la memoria es distribuida debido a que las neuronas que se encuentran en las diferentes capas realizan varias actividades simultáneas como resultado de la información proveniente del exterior o del interior de la red. Las actividades neuronales forman un patrón espacial dentro de la memoria que contiene información sobre los estímulos.

En la memoria existen una fase de almacenamiento (entrenamiento de la red) y una fase de recuerdo (recuperación de un patrón memorizado). En redes neuronales las asociaciones se pueden dar de dos maneras: auto-asociación y heteroasociación, en la primera la red debe almacenar un conjunto de vectores de entrada, los cuales son presentados reiteradamente a la red, consecuentemente la red tiene la tarea de recuperar (recordar) aquel patrón particular, a diferencia de la heteroasociación en donde los patrones de entrada son asociados con otro conjunto de patrones de salida.

La auto-asociación se utiliza en el aprendizaje no supervisado y la heteroasociación es usada en el aprendizaje supervisado, estos tipos de aprendizaje serán descritos más adelante.

El aprendizaje en redes neuronales se puede dividir en supervisado, no supervisado y reforzado.

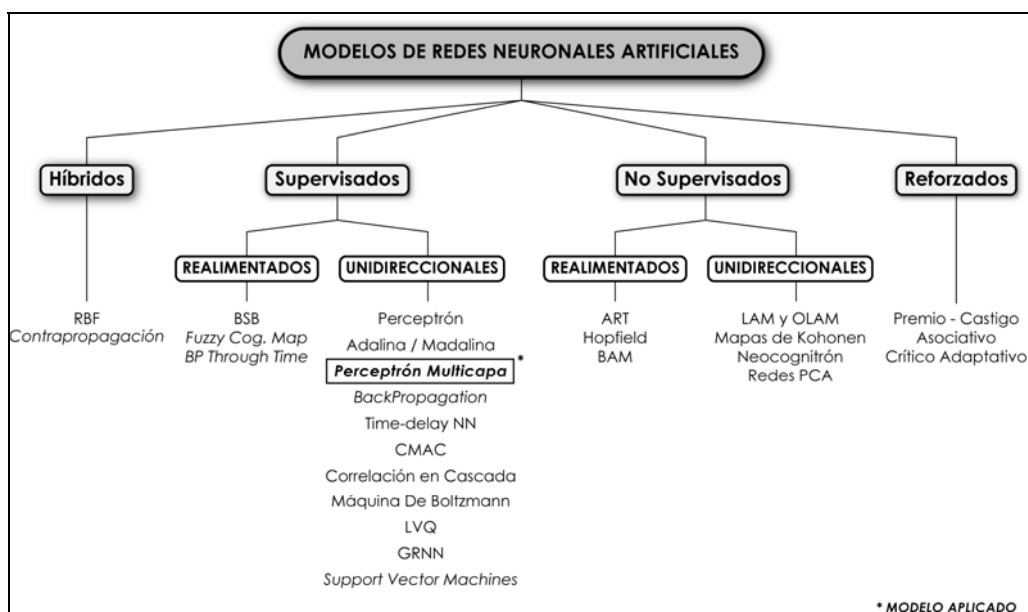
- **Aprendizaje supervisado:** El objetivo en este aprendizaje es la comparación entre la respuesta deseada y la respuesta real de la red, la cual es producida por las señales de entrada. Aquí se presenta un conjunto de ejemplos los cuales representan las señales de entrada así como también una serie de valores que conforman la salida deseada o el objetivo que debería alcanzar la red neuronal, es por ello que a éste tipo de aprendizaje se lo conoce como aprendizaje con profesor, debido a que se conoce los datos del conjunto de salida. En el proceso de entrenamiento

los parámetros de la red (pesos sinápticos) serán modificados para minimizar (a través de una función de error) la diferencia entre los valores de la salida actual y la salida deseada de la red neuronal.

- **Aprendizaje no supervisado o autoorganizado:** En este tipo de aprendizaje la red ajusta sus pesos dependiendo de los valores recibidos como entrada mas no se presenta un conjunto de valores hacia la cual la red neuronal debe tender, por ello se lo denomina también aprendizaje sin profesor, debido a que no existe una salida objetivo que indique si la red está operando correcta o incorrectamente. Cuando se utiliza éste tipo de aprendizaje la red trata de determinar características en los datos del conjunto de entrada, definiendo rasgos comunes, correlaciones o categorías (clases), que luego serán incorporados a la estructura interna de conexión de la red. Aquí las neuronas deben autoorganizarse en función de las señales o datos procedentes del exterior.
- **Aprendizaje reforzado:** Presenta características de los dos anteriores, en donde unas capas de la red se presenta aprendizaje supervisado y en otras capas aprendizaje no supervisado. Aquí no se indica una salida deseada ante una determinada entrada pero si se proporciona un error (global) que comete la red. La función del supervisor se reduce a indicar mediante una señal de refuerzo si la salida obtenida en la red se ajusta a la deseada (éxito=+1 o fracaso=-1), y en función de ello se ajustan los pesos basándose en un mecanismo de probabilidades.

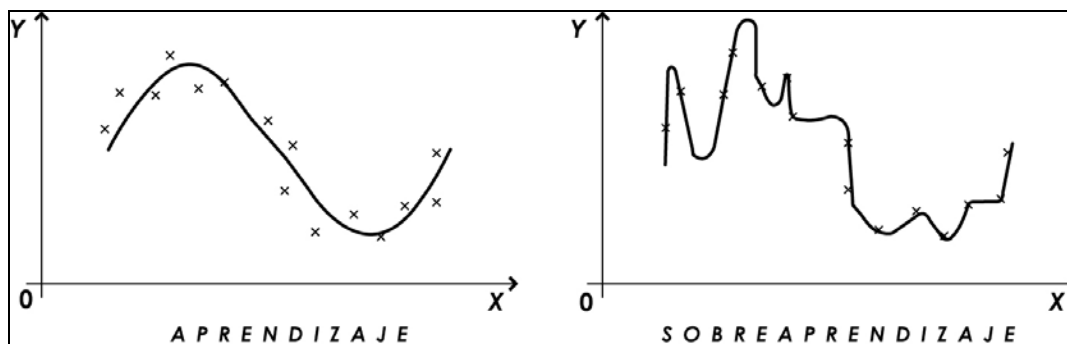
El aprendizaje en redes neuronales se lo realiza a través de reglas de aprendizaje, entre las cuales se puede mencionar: aprendizaje por corrección de error, aprendizaje basado en memoria, aprendizaje hebbiano, aprendizaje competitivo y aprendizaje de Boltzmann, que son básicas para el entrenamiento de redes neuronales, éstos algoritmos dependerá del tipo de aprendizaje que se éste utilizando según el problema que se desee resolver y los vectores de entrada.

En resumen se puede decir que dependiendo de la topología de red, el tipo de aprendizaje y los algoritmos de aprendizaje, surgirán diversos tipos de modelos computacionales de redes neuronales; los cuales dependiendo de las necesidades del problema utilizarán varios algoritmos de aprendizaje para buscar la mejor solución al problema dado, difiriendo entre sí por la forma como se formula el ajuste de los pesos sinápticos de los nodos presentes en la red. Por ello se presenta la siguiente clasificación [Simpson 89] (Bonifacio Martín, 2001). (Véase figura 2.15)



**Figura. 2.15 Clasificación de las RNA por el tipo de aprendizaje y la arquitectura**  
**Fuente: Bonifacio Martín, 2001**

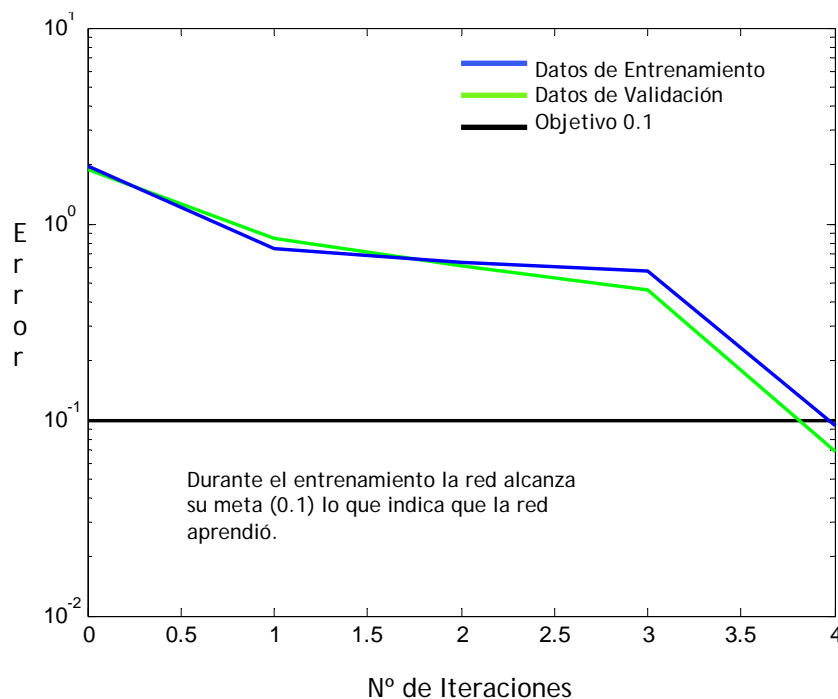
Un aspecto importante de las RNA es la generalización entendiéndose como la capacidad que tiene la red para dar una respuesta correcta ante patrones que no han sido empleados en el entrenamiento. Se debe tomar en consideración que puede llegar un momento en que el ajuste de los pesos siga particularidades de los datos de entrada, es decir, la red memoriza los vectores del conjunto de aprendizaje dando como consecuencia un error de generalización que comete la red al presentarse patrones de entrada diferentes a los usados en el entrenamiento; a esto se lo conoce como sobreaprendizaje o sobreajuste (véase figura 2.16).



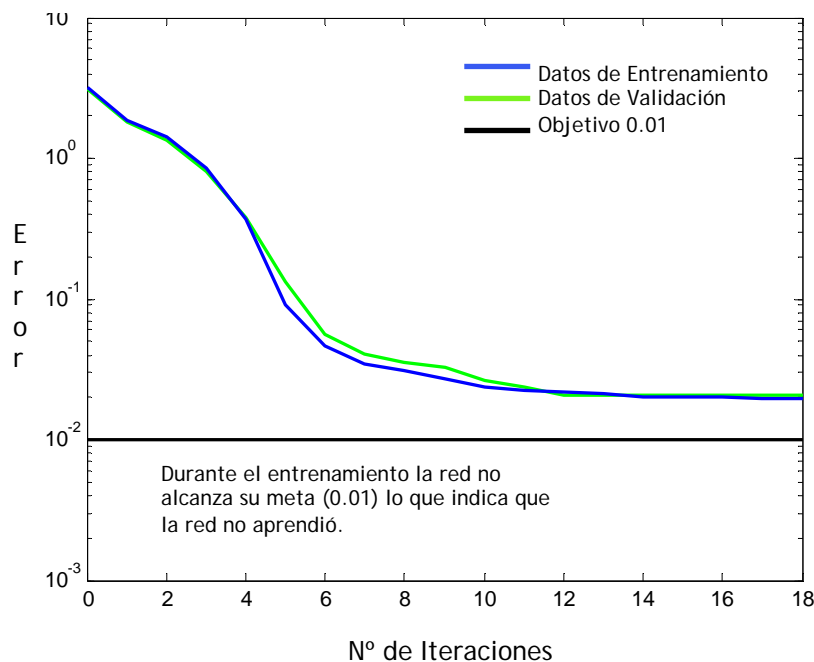
**Figura. 2.16 Aprendizaje y sobreaprendizaje en una RNA**

**Fuente: Bonifacio Martín, 2001**

Es por ello que durante el proceso de aprendizaje a más de contar con los datos de entrada para el entrenamiento de la red también se cuenta con otro conjunto de datos denominados de validación, que poseen características similares a los patrones de entrada. La finalidad es disminuir el error de generalización, deteniéndose en un punto óptimo en donde se alcance el rendimiento deseado de la red (véase figura 2.17).



**Figura. 2.17 Evolución del error de aprendizaje con los datos de validación en función de las iteraciones, en un proceso de aprendizaje de un MLP**



**Figura. 2.17 Evolución del error de aprendizaje con los datos de validación en función de las iteraciones, en un proceso de aprendizaje de un MLP**

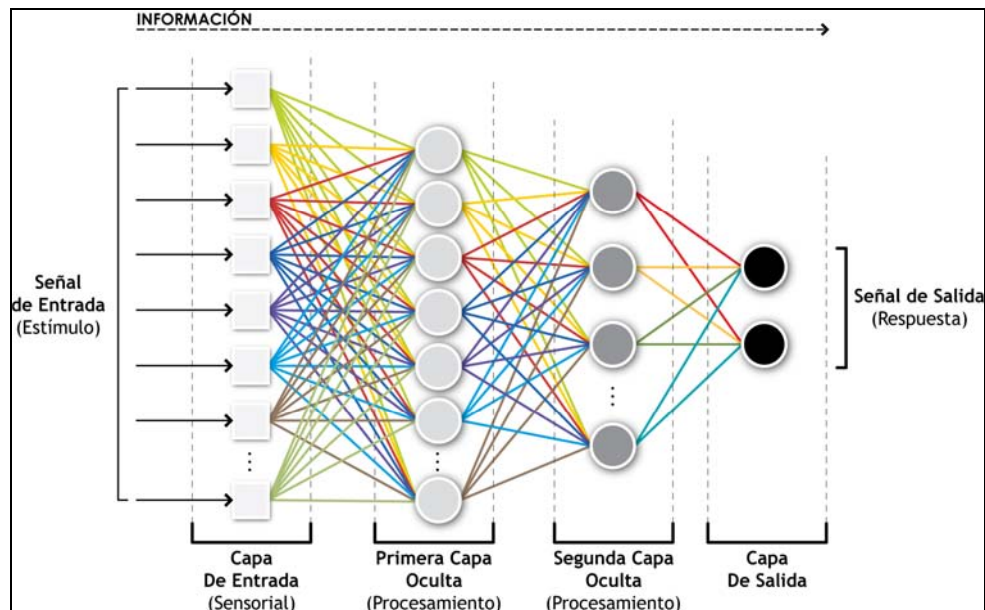
## 2.9 RED NEURONAL MULTICAPA

La topología de una red neuronal multicapa o MLP (*Multilayer Perceptrons*) está constituida como su nombre lo indica por una o varias capas en este caso ocultas, además de las capas de entrada y salida. Éste modelo computacional nace como consecuencia de las limitaciones (separabilidad no lineal<sup>8</sup>) que presenta el Perceptrón Simple (Rosemblant 1958) cuya arquitectura es monocapa, es decir, no existen capas ocultas sino únicamente capa de entrada y salida.

Las capas ocultas tienen la finalidad de realizar un procesamiento no lineal por medio de la función de activación, de los patrones de aprendizaje, capacitando así a la red a aprender y solucionar problemas complejos. En los MLP las neuronas de una capa se conectan con las neuronas de la siguiente capa con una conectividad total, en donde cada neurona de la red es afectada por la actividad de todas las otras neuronas en la red; se las denomina redes alimentadas hacia delante o redes *feedforward* por el sentido en que va la información (izquierda a derecha). (Véase figura 2.18)

<sup>8</sup> Separabilidad no lineal: El Perceptrón simple presenta una limitación de resolver problemas linealmente separables, es decir, problemas en donde las salidas estén clasificadas en dos categorías (clase A y clase B), quedando el espacio de entrada dividido únicamente en dos regiones a través de un hiperplano.





**Figura. 2.18** Arquitectura de un MLP con dos capas ocultas

**Fuente:** Haykin, 2001

El entrenamiento de un Perceptrón Multicapa utiliza un aprendizaje supervisado con un algoritmo de aprendizaje de retropropagación del error o *backpropagation*, el cual está basado en la regla de aprendizaje por corrección del error. La retropropagación de los errores medidos en la salida de la red hacia las neuronas ocultas se lo hace a través de una generalización de la regla delta o LMS (*Least Mean Square*).

### 2.9.1 ENTRENAMIENTO DE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL MULTICAPA

El entrenamiento de una red neuronal multicapa se realiza mediante un proceso de aprendizaje, para realizar este proceso se debe inicialmente tener definida la topología de la red, así como también la función o funciones de activación para cada una de las capas ocultas.

En el entrenamiento se utiliza un algoritmo de aprendizaje, siendo en este caso el de retropropagación del error, que ajusta iterativamente los parámetros libres de la red para dar como resultado una señal de salida deseada a partir de un conjunto de datos de entrada. Al utilizar éste un aprendizaje supervisado es necesario tener al conjunto predefinido de entradas con sus respectivos valores de salida.

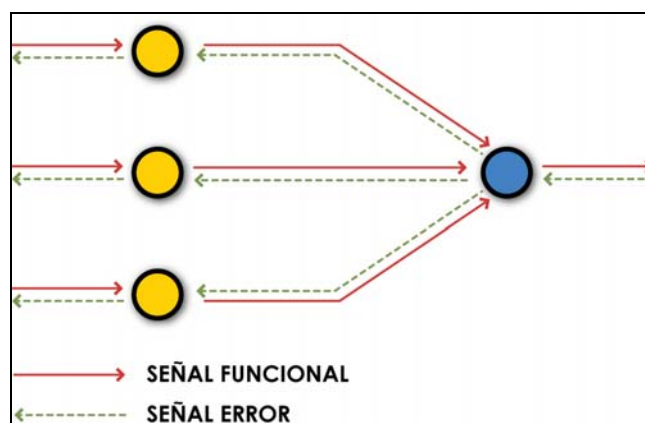
El aprendizaje por *backpropagation* consta de dos etapas: un paso hacia el frente o propagación y una pasada para atrás o retropropagación.

En la propagación el vector de entrada es aplicado a los nodos de la red y su efecto se propaga por toda la red capa por capa, produciendo una señal de salida. Aquí los valores de los pesos sinápticos son aleatorios y no sufren modificaciones.

Durante la pasada hacia atrás en cambio los pesos si se modifican de acuerdo con la regla de corrección del error. La señal de salida real se compara con la señal deseada y como resultado se obtiene un error el cual se propaga en dirección contraria a través de la red modificando los pesos, de forma que, al volver a pasar el vector de entrada hacia adelante, la respuesta obtenida se asemeje más a la salida deseada.

Aquí se pueden distinguir dos tipos de señales, como se indica en la figura 2.19 (Haykin, 2001):

1. Señales Funcionales: Constituye una señal de entrada la cual se propaga hacia delante a través de la red hasta llegar como una señal de salida.
2. Señales de Error: Se originan en las neuronas de salida y se propagan hacia atrás en forma de ajuste de los pesos sinápticos con la finalidad de alcanzar la meta deseada para un problema dado.



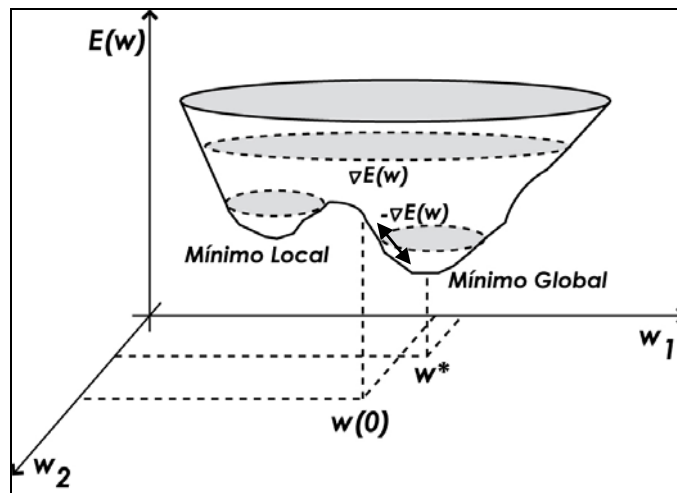
**Figura. 2.19 Señales de un Perceptrón Multicapa**  
Fuente: Haykin, 2001

La importancia de éste algoritmo radica en su capacidad de autoadaptar los pesos de las neuronas que se encuentran en las capas ocultas, para aprender la relación que existe entre el conjunto de vectores o patrones de entrada y su correspondiente salida, y poder aplicar esa relación después del entrenamiento a nuevos vectores de entrada. Esta capacidad se conoce como generalización. La red debe encontrar una representación interna que le permita generar las salidas deseadas durante la etapa de entrenamiento, y posteriormente durante el funcionamiento ser capaz de generar salidas para entradas que no le fueron mostradas durante el aprendizaje pero que se asemejan a alguna de las que si le fueron mostradas. Para obtener un proceso de aprendizaje bueno, el objetivo del algoritmo es actualizar todos los parámetros libres de la red minimizando el error medio cuadrático (Bonifacio Martín, 2001) (Isasi y Galván, 2004).

La modificación de los pesos sigue una regla de aprendizaje a partir de una función de error o coste que mide el rendimiento actual de la red, en donde se comparan las salidas actuales con respecto a las salidas deseadas.

El algoritmo de retropropagación utiliza el método del gradiente descendiente, esto significa que sigue la superficie del error siempre hacia abajo (véase figura 2.20). Dada esta función error, se introduce un procedimiento general de optimización que sea capaz de proporcionar una adecuada configuración de pesos, el cual debe ser un mínimo global de la función propuesta. El método de optimización aplicado a la función coste proporcionará una regla de actualización de pesos, que en función de los patrones de aprendizaje modifique iterativamente los mismos, hasta alcanzar el punto óptimo de la red neuronal. Algo que hay que tomar en consideración es la posibilidad de caer en algún mínimo local existente en la superficie del error del espacio de los pesos (Bonifacio Martín, 2001).

En la práctica no se puede asegurar que el mínimo que se encuentre sea global, una vez que la red converge y se encuentra en un mínimo sea local o global el aprendizaje se detiene.



**Figura. 2.20 Superficie de error**  
**Fuente: Bonifacio Martín, 2001**

Cuando el proceso de aprendizaje cae en un mínimo local, una posible solución para evitar éste problema es aumentar el número de neuronas ocultas en la red. En ocasiones, se considera que el proceso cae en un mínimo local debido a que la red posee un escaso poder de representación interna, de manera que no es capaz de distinguir patrones diferentes, proporcionando las mismas salidas para estos patrones. Esto podría resolverse aumentando el número de capas ocultas, de manera que la red posea un mayor número de parámetros libres y pueda conseguir una mayor representabilidad del problema (Isasi y Galván, 2004).

La experiencia de algunos diseñadores en redes neuronales, han comprobado que el alcanzar mínimos locales no impide que se consigan resultados satisfactorios.

El algoritmo backpropagation al ser bastante utilizado para el entrenamiento de redes neuronales multicapa, ha venido presentando ciertas variaciones que permiten su mejoramiento, teniendo como objetivo una rápida y óptima convergencia dependiendo del problema que se desee resolver. Entre estos se puede mencionar dos métodos heurísticos (capacidad de un sistema para realizar de forma inmediata innovaciones positivas para sus fines) y métodos basados en algoritmos de optimización numérica. A continuación se enlistaran las más sobresalientes.

- Red *backpropagation* con momentum
- Red *backpropagation* con tasa de aprendizaje variable
- Método del gradiente descendiente
- Método de Newton
- Método del Gradiente Conjugado
- Algoritmo de Levenberg – Marquardt (modificación del método Newton)

Para el desarrollo del proyecto se utilizará el algoritmo (*backpropagation*) que actualiza los pesos de acuerdo a la optimización de Levenberg – Marquardt, mientras que el desempeño de la red se evaluará por medio de la corrección del error cuadrático medio (MSE).

Este algoritmo se denomina de retropropagación o *backpropagation* debido a que el error se propaga de manera inversa al funcionamiento normal de la red, en donde la información va de izquierda a derecha, es decir, cada patrón de entrenamiento se propaga a través de la red y sus parámetros para producir una respuesta en la capa de salida, en donde se compara con los patrones objetivo o salidas deseadas para calcular el error en el aprendizaje, de esta manera el algoritmo encuentra el error en el proceso de aprendizaje desde las capas más internas hasta llegar a la entrada; con base en el cálculo de este error se actualizan los pesos de cada capa. Esto se logra minimizando el error cuadrático medio en cada iteración del proceso de aprendizaje.

Consideremos entonces una señal de error en la salida de la neurona  $j$  en la  $n$  iteración, siendo definido por la ecuación (2.11) (Haykin, 2001)

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \quad (2.11)$$

En donde:

- $e_j(n)$  Señal de error en la salida de la neurona  $j$ , para cada iteración  $n$
- $d_j(n)$  Respuesta deseada para la neurona  $j$ .
- $y_j(n)$  Señal funcional que aparece en la salida de la neurona  $j$ .

Hay que indicar que la señal funcional está definida por las ecuaciones (2.12) y (2.13):

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n)) \quad (2.12)$$

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}(n)y_i(n) \quad (2.13)$$

En donde:

$w_{ji}(n)$  Indica el peso sináptico conectado a la salida de la neurona  $i$  (neurona de la capa de entrada) siendo la entrada de la neurona  $j$  en la iteración  $n$ . Hay que indicar que la corrección aplicada a este peso en la iteración  $n$  está representado por  $\Delta W_{ji}(n)$ .

$v_j(n)$  Campo local inducido conformado por la suma ponderada de todas las entradas de la neurona  $j$ ;  $m$  indica el número total de entradas excluido el bias.

$\varphi_j$  Representa la función de activación asociada a la neurona  $j$ .

Para definir el valor total del error se debe sumar los términos  $\frac{1}{2}e_j^2(n)$  de todas las neuronas de la capa de salida como señala la ecuación 2.14. En donde el conjunto  $C$  incluye todas las neuronas de la capa de salida de la red. Este es el error debido a cada patrón de entrenamiento que posee la red.

$$\varepsilon_{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (2.14)$$

Este proceso se repite para el número total de patrones de entrenamiento ( $M$ ); para que un proceso de aprendizaje sea exitoso el objetivo del algoritmo será actualizar todos los parámetros libres de la red minimizando el error cuadrático medio total representado en la ecuación (2.15).

$$\mathcal{E}_{(med)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_{(n)} \quad (2.15)$$

$\mathcal{E}_{(med)}$  Error total en el proceso de aprendizaje en una iteración luego de haber presentado a la red los N patrones de entrenamiento.

Éste algoritmo aplica una corrección a los pesos sinápticos expresando el gradiente como indica la ecuación (2.16), de acuerdo a la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (2.16)$$

La derivada parcial  $\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial w_{ji}(n)}$  representa el factor de sensibilidad el mismo que

determina la dirección en el espacio de los pesos para los pesos sinápticos  $w_{ji}$ .

Para obtener el valor de cada uno de los diferenciales que la componen, se va derivando:

$$\text{Ecuación (2.14) en función de } e_j(n): \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial e_j(n)} = e_j(n) \quad (2.17)$$

$$\text{Ecuación (2.11) en función de } y_j(n): \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} = -1 \quad (2.18)$$

$$\text{Ecuación (2.12) en función de } v_j(n): \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = \varphi'_j(v_j(n)) \quad (2.19)$$

$$\text{Ecuación (2.13) en función de } w_{ji}(n): \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} = y_i(n) \quad (2.20)$$

Reemplazando las ecuaciones desde la (2.17) hasta la (2.20) en (2.16) tenemos la ecuación (2.21):

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n) \varphi'_j(v_j(n)) y_i(n) \quad (2.21)$$

La corrección  $\Delta w_{ji}(n)$  aplicada a los pesos sinápticos está definida por la regla delta dando la ecuación (2.22), en donde  $\eta$  es el parámetro de la tasa de aprendizaje del algoritmo de retropropagación:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (2.22)$$

El error en una red neuronal está en función de sus pesos, el cual genera un espacio en donde se evalúa el gradiente del error en un punto determinado, obteniéndose la dirección en la cual la función del error tendrá un mayor crecimiento; siendo el objetivo del proceso de aprendizaje minimizar el error, se debe tomar la dirección negativa del gradiente para alcanzar el mayor decremento del error y de esta forma su minimización, condición requerida para realizar la actualización de la matriz de pesos en éste algoritmo. La corrección de los pesos está dada usando la ecuación (2.21) en (2.22) produciendo la ecuación (2.23).

$$\begin{pmatrix} \text{Corrección} \\ \text{de pesos} \\ \Delta W_{ji}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Parámetros de la taza} \\ \text{de aprendizaje} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Gradiente} \\ \text{local} \\ \delta_j(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Señal de entrada} \\ \text{de la neurona } j \\ y_i(n) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Aquí se debe tener en consideración para el cálculo de la corrección de los pesos si la neurona  $j$  se trata de una unidad proveniente de la capa oculta o de la capa de salida. En este caso al tratarse de un MLP la topología de red posee una capa oculta a más de la de entrada y la de salida. Por ello la fórmula de retropropagación para el cálculo del gradiente local ( $\delta_j(n)$ ) en una capa oculta es:

$$\delta_j(n) = \varphi'_j(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (2.24)$$

En donde el subíndice  $k$  representa la capa de salida. Cuando la neurona es un nodo de la capa de salida el gradiente local está dado por la ecuación (2.25):

$$\delta_j(n) = e_j(n) \varphi'_j(v_j(n)) \quad (2.25)$$

Aquí el subíndice  $j$  puede ser reemplazado por el subíndice  $k$ .



Se debe señalar que se deriva no solo en función de los pesos de la capa de salida sino también en función de los pesos de las neuronas ocultas, haciendo uso de la regla de la cadena, como consecuencia la función de transferencia que en este caso se utilizó la función tangente hiperbólica ( $\phi'_j$ ) debe ser diferenciable, dando como resultado la ecuación (2.26), en donde a y b son constantes:

$$\phi'_j(v_j(n)) = \frac{b}{a} [a - y_j(n)] [a + y_j(n)] \quad (2.26)$$

Utilizando la ecuación (2.26) para definir el gradiente local tanto en una capa de salida como para una capa oculta tenemos como resultado las ecuaciones (2.27) y (2.28) respectivamente:

$$\delta_j(n) = \frac{b}{a} [d_j(n) - o_j(n)] [a - o_j(n)] [a + o_j(n)] \quad (2.27)$$

$$\delta_j(n) = \frac{b}{a} [a - y_j(n)] [a + y_j(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (2.28)$$

Como se indico anteriormente existen ciertas variaciones que se utilizan en el algoritmo de retropropagación para la actualización de los pesos durante el proceso de entrenamiento, siendo usado el algoritmo de Levenberg – Marquardt<sup>9</sup>, este algoritmo utiliza una aproximación de la matriz Hessiana y de su inversa, a través del producto de las matrices que contienen las primeras derivadas de los errores respecto a los pesos sinápticos, así como se indica en las ecuaciones:

$$H \cong (\nabla E(W^{(\varepsilon)}))^t (\nabla E(W^{(\varepsilon)})) \quad (2.29)$$

$$W^{(\varepsilon+1)} = W^{(\varepsilon)} - [(\nabla E(W^{(\varepsilon)}))^t (\nabla E(W^{(\varepsilon)}))]^{-1} (\nabla E(W^{(\varepsilon)}))^t e^{(\varepsilon)} \quad (2.30)$$

<sup>9</sup> Este algoritmo puede ser revisado en "Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera, literal 4.6" o <http://fondosdigitales.us.es/tesis/tesis/269/redes-de-neuronas-artificiales-en-oceanografia/> o en Neural Network Toolbox (Matlab).

## 2.10 DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS UTILIZADOS

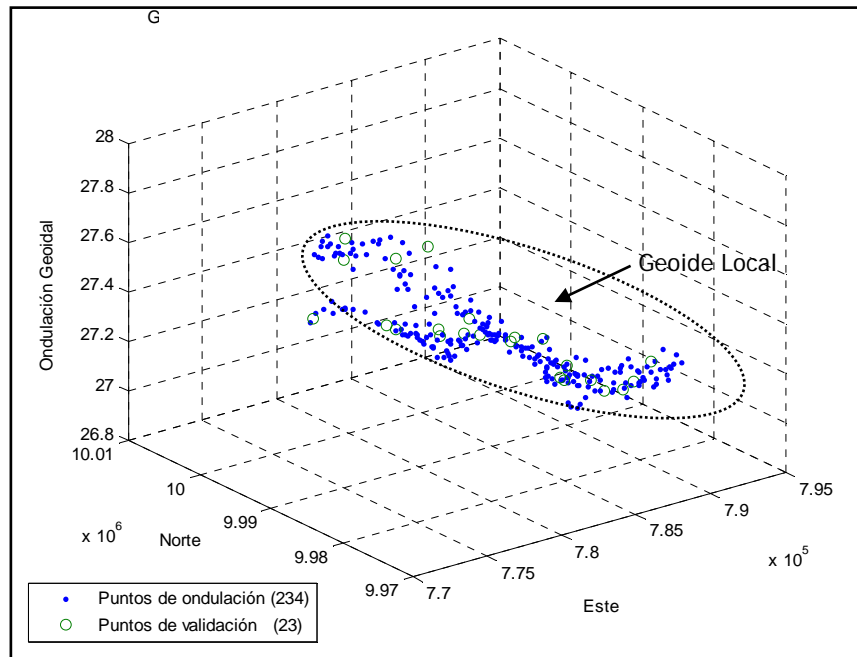
Los datos utilizados en el desarrollo de este proyecto son los mismos que se emplearon en el proyecto de grado “Determinación del modelo matemático para obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito”, (Lima, 2005). La finalidad de usar la misma información es la comparación de las dos metodologías, en este caso utilizando una red neuronal multicapa y el modelo matemático que utilizó el método paramétrico por mínimos cuadrados para así determinar con cual se obtiene mejores resultados.

El proyecto se encuentra localizado en un área del Distrito Metropolitano de Quito, siendo aproximadamente de 490 Km<sup>2</sup>, presentando una altitud media de 2650 m, una altitud máxima de 3429.08 m y una altitud mínima 2096.49 m sobre el nivel medio del mar; comprende:

**Norte - Sur:** Desde San Antonio de Pichincha hasta la Mariscal Sucre

**Este – Oeste:** Desde Puenbo hasta las faldas del Volcán Ruco Pichincha

Para el entrenamiento de la RNA se utilizó como vector de entrada 234 puntos coordenados (Este – Norte), provenientes de observaciones GPS cuyas bases fueron Oyambaro e IGM VIGA, encontrándose inmersa la altura elipsoidal. Debido al tipo de aprendizaje (supervisado) que se emplea, es necesario conocer los valores del conjunto de salida, siendo para éste caso las ondulaciones geoidales (valor real) correspondientes a cada punto. El cálculo de dicho conjunto se lo realiza utilizando la ecuación (2.4), en donde la altura ortométrica es reemplaza por alturas niveladas, las mismas que fueron obtenidas a través del método de nivelación geométrica de segundo orden, en donde la tolerancia fue de 8.4 mm  $\sqrt{K}$  ( $K$  distancia entre puntos nivelados geoméricamente en Km). Además se consideraron 23 observaciones que no están incluidas dentro de los 234 puntos para la validación del proyecto, en donde se comprobará el error que comete el RNA.



**Figura. 2.21 Gráfico tridimensional de las ondulaciones geoidales reales**

## **CAPÍTULO 3**

### **METODOLOGÍA**

#### **3.1 DATOS DISPONIBLES Y SELECCIÓN DE VARIABLES**

La descripción de los datos utilizados es indicada en la sección (2.10), los mismos que se dividieron en 5 sets de entrenamiento, en donde cada uno está constituido por dos variables de entrada denominadas Este y Norte. Cada vector de entrada está conformado por 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones las cuales corresponden a cada uno de los sets de entrenamiento respectivamente; los mismos que están distribuidos uniformemente en el área de estudio.

A más de contar con el conjunto de datos que forman el patrón de entrada los cuales serán utilizados al momento del entrenamiento de la red, también se cuenta con 23 puntos de evaluación o validación los cuales no están incluidos dentro del conjunto de datos de entrada (ver tabla 3.1), teniendo la finalidad de proporcionar un control durante el proceso de aprendizaje de la RNA.

En los anexos (A, B, C, D, E) se puede apreciar la distribución espacial de cada uno de los patrones de entrada así como los datos del conjunto de evaluación para 234, 100, 50, 25 y 8 respectivamente.

También se dispone de un patrón de salida que contiene los valores de ondulación geoidal correspondiente a cada uno de los sets de entrenamiento; los cuales son consideradas como las variables de respuesta que conforman la salida deseada de la red y que el sistema debería modelar, para cuando se presenten datos

que no estuvieron durante el entrenamiento, la red pueda realizar correctamente la predicción de los datos del fenómeno que se pretende modelar.

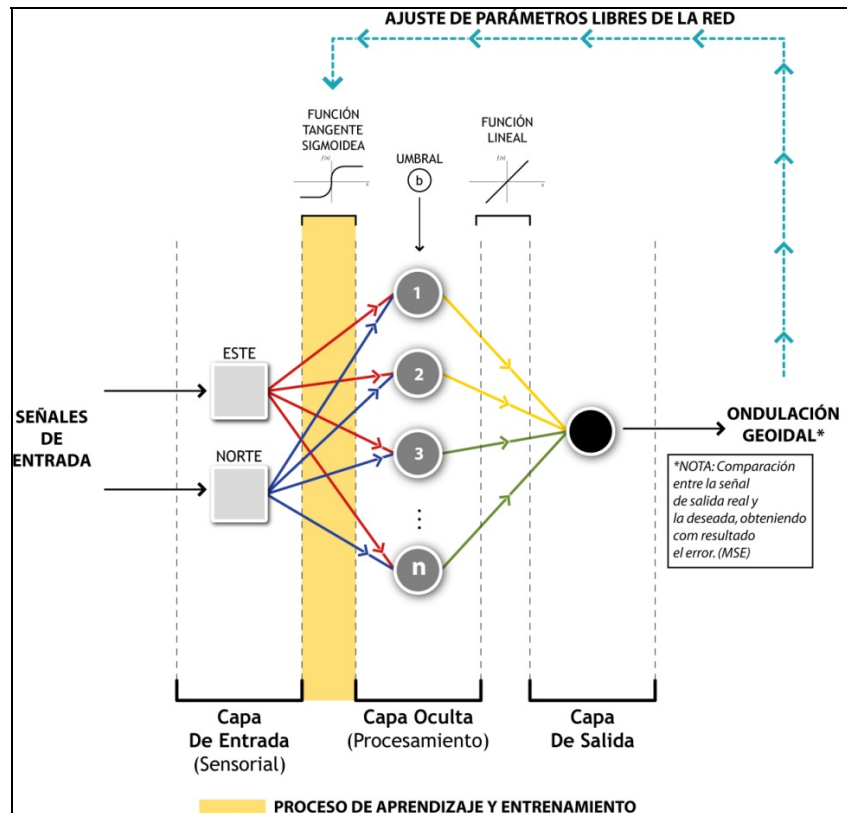
**Tabla. 3.1 Conjunto de datos de validación**

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación Geoidal (m)
1Q	775548.717	9991354.306	27.694
2Q	777729.251	9988583.582	27.699
3Q	782180.412	9981670.856	27.385
4Q	782267.221	9987680.833	27.392
5Q	782275.004	9991890.825	27.265
6Q	786077.092	9994111.345	27.177
7Q	787572.556	9985110.724	27.149
8Q	787473.573	9988327.902	27.216
9Q	786672.492	9990466.601	27.207
10Q	777216.667	9983099.532	27.831
11Q	792482.679	9983648.532	27.101
12Q	785182.218	9974819.832	27.230
13Q	787362.692	9976879.107	27.167
14Q	793076.439	9987283.726	26.960
15Q	787535.009	9981708.824	27.140
16Q	783732.433	9977534.989	27.262
17Q	782044.510	9974499.974	27.342
18Q	783125.214	10001208.870	27.165
19Q	786992.244	10001856.369	27.074
20Q	783153.196	9999808.257	27.168
21Q	785990.691	9996196.776	27.152
22Q	778500.029	10001840.706	27.264
23Q	774069.378	9988015.190	27.849

### 3.2 DETERMINACIÓN DE LA MEJOR ARQUITECTURA DE LA RNA

La forma en cómo se organizan las neuronas y el tipo de conexiones existentes entre ellas es lo que se conoce como topología o arquitectura de red tal como se indica en la sección 2.7; la cual constituye un factor de importancia para encontrar la solución al problema que se desea resolver. Para el desarrollo de éste proyecto se utilizó una topología de red multicapa o MLP debido a que el problema a tratar no es linealmente separable.

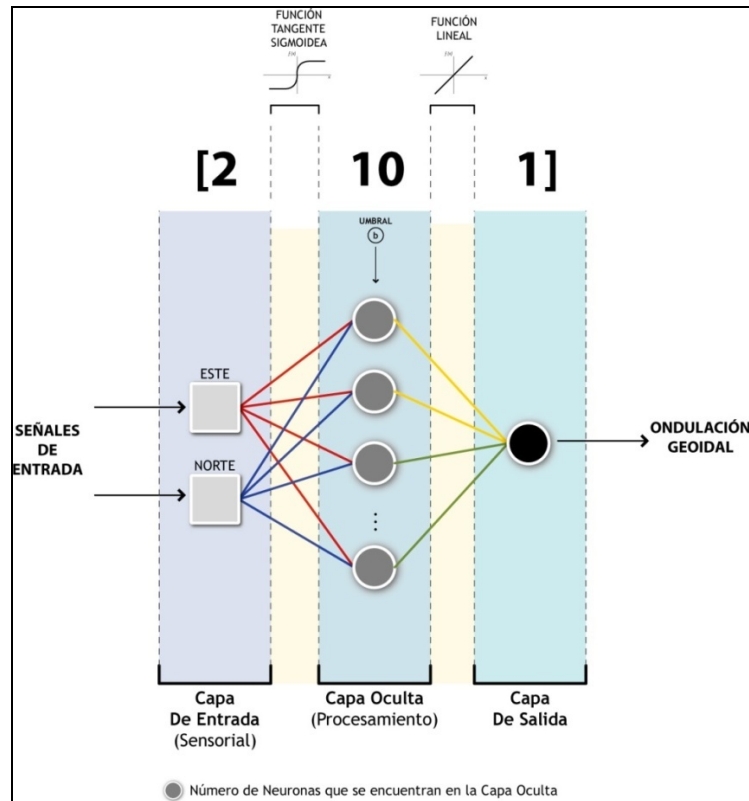
Las conexiones entre los nodos de la red son unidireccionales porque la información recorre de izquierda a derecha; en esta etapa la red se denomina *feedforward*. Debido a que en el proceso de aprendizaje se utiliza el algoritmo de retropropagación (*backpropagation*), los datos contenidos en la red se propagan hacia atrás dando lugar a un proceso iterativo (el cual termina cuando la red obtiene un buen ajuste) en donde la información fluctúa como se indica en la figura 3.1. Como resultado la topología de red se denomina *feedforward backpropagation*.



**Figura. 3.1 Topología de red**

La topología de red utilizada contiene en la primera capa los patrones de entrada definidas por las variables Este y Norte, la capa intermedia contiene las neuronas ocultas las cuales en la etapa de entrenamiento irán variando en número y por último se encuentra la capa de salida; dado que el aprendizaje es supervisado se tiene el patrón de salida que corresponde al valor de ondulaciones geoidales.

En el gráfico 3.2 se indica un ejemplo de red. También se definieron las funciones de transferencia que son requeridas en cada capa, las funciones de activación tanto para la capa oculta como para la capa de salida fueron tangente sigmoidea (tansig) y lineal (purelin) respectivamente.



**Figura. 3.2 Arquitectura de red [2 10 1]**

Durante el proceso de entrenamiento se fue cambiando el número de neuronas de la capa oculta en donde se evaluaron arquitecturas desde 3 hasta 100 neuronas en cada uno de los experimentos de cada set de entrenamiento correspondiente a los 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones. Los experimentos terminan hasta definir la mejor topología de red.

### 3.3 ENTRENAMIENTO DE LA RNA

El entrenamiento de una red neuronal multicapa se describió en la sección (2.9.1), en resumen el entrenamiento debe realizarse a través de un proceso de aprendizaje (algoritmo backpropagation), teniendo definida inicialmente la

arquitectura de red. El proceso de entrenamiento tiene por objeto la minimización del error cuadrático medio del conjunto de patrones de entrada a través de un proceso iterativo de ajuste de pesos sinápticos de tal forma que las predicciones reproduzcan eficazmente lo que se desea modelar. Para el ajuste de pesos sinápticos se utilizó el algoritmo de optimización numérica de Levenberg Marquardt descritos en la sección (2.9.1). El entrenamiento de la red se lo realizó en el programa Matlab utilizando las herramientas Neural Network Toolbox.

Para iniciar con el proceso de entrenamiento de la red cada variable perteneciente al conjunto de entrada y los datos de validación fueron normalizados con media cero y varianza uno. El propósito de contar con los 5 conjuntos de vectores de entrada es ver con cuál de ellos se obtiene un mejor resultado durante el proceso de aprendizaje. Una vez que se haya alcanzado las predicciones se realiza el proceso contrario deshaciendo la normalización para así poder comparar los resultados con los patrones de salida.

El proceso de entrenamiento comenzó con 234 puntos coordenados que corresponden al primer set de aprendizaje se inicializó con 10 neuronas para la capa oculta y una neurona en la capa de salida. Dentro de los parámetros de entrenamiento de la red se consideran 50 iteraciones y un error máximo permitido de 0.1. Estas características iniciales de la red se emplearon para los siguientes patrones de entrenamiento de 100, 50, 25 y 8 variables de entrada.

A medida que avanza el proceso de entrenamiento en cada uno de los sets de aprendizaje van cambiando el número de neuronas de la capa oculta, así como el error máximo permitido el cual va tomando valores entre 0.1 y 0.01. Las predicciones de ondulaciones geoidales se elaboraron a través de un programa que se indica en el anexo F.

Durante la etapa de entrenamiento de la red también se encuentra presente la matriz de pesos sinápticos ( $W$ ) en donde sus valores son establecidos aleatoriamente, es aquí en donde en realidad ocurre el proceso de aprendizaje cuando se ajustan éstos parámetros, los cuales tienen por objeto aprender a



reconocer características del espacio de entrada para la generalización de la red debido a que al momento de realizar las predicciones para un conjunto de datos que no estuvieron presentes dentro del proceso de entrenamiento de la red representen de manera certera el fenómeno que se quiere modelar.

El entrenamiento finaliza cuando los valores de la media, desviación estándar, máximo y mínimo son menores que los obtenidos con el modelo matemático por mínimos cuadrados, la comparación de estos resultados se visualizará en el capítulo IV.

### **3.4 PREDICCIÓN DE ONDULACIONES GEOIDALES EN PUNTOS DE EVALUACIÓN**

Para la predicción de las ondulaciones geoidales se tomaron en consideración 5 sets de entrenamiento con 8, 25, 50, 100 y 254 observaciones respectivamente, las mismas que poseen las variables de entrada Este y Norte. Por tratarse de un aprendizaje supervisado el vector de salida contiene las ondulaciones geoidales que corresponden a cada uno de los 5 sets de entrenamiento. A más de contar con el conjunto de datos que intervienen en el proceso de aprendizaje también se incorporan los puntos de validación (23 observaciones) que tienen la finalidad de evaluar la capacidad que posee la red para la generalización. Los datos de evaluación van a ser los mismos para cada set de entrenamiento.

Para comenzar con el proceso de entrenamiento inicialmente para cada patrón de entrada se partió de una topología de red [2 10 1] y los parámetros iniciales como el número de iteraciones se mantuvo con una valor constante de 50 épocas de entrenamiento (`net.trainParam.epochs = 50`) y el error máximo permitido fue tomando valores entre 0.1 y 0.01 (`net.trainParam.goal = 0.1`). Lo que indica la figura 3.3 es uno de los resultados obtenidos en el primer experimento con 234 observaciones, se puede visualizar una línea azul que corresponde al entrenamiento de las variables de entrada, una línea verde que indica el conjunto de puntos de validación y la línea negra corresponden a la meta o desempeño que alcanza la red, se puede ver que la

red puede seguir aprendiendo porque la curva de aprendizaje se detiene cuando alcanza un performance de 0.022 en la cuarta iteración.

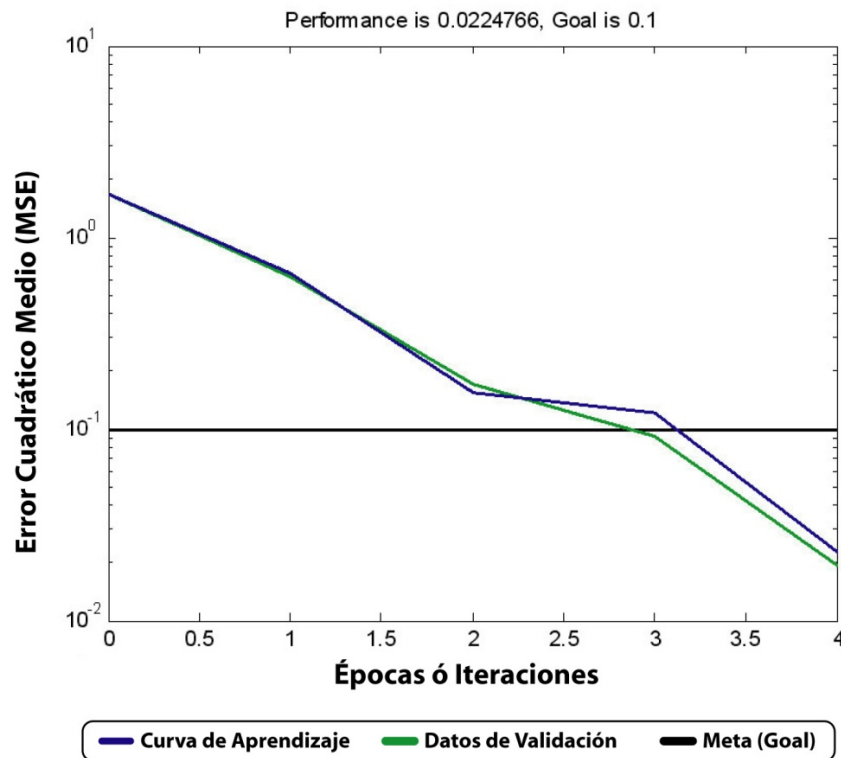


Figura. 3.3 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 10 1] para 234 observaciones

Es por ello que se continúa con el proceso de entrenamiento cambiando el número de neuronas de la capa oculta y el valor de la meta (goal) de la red. A más de ello también se calcula parámetros estadísticos que aportan con información sobre la manera en la que se encuentra la distribución de los datos; estos parámetros son los valores de la media y desviación estándar, así como también valores máximos y mínimos.

Todo esto tiene la finalidad de comparar éstos resultados, con los obtenidos en la metodología del modelo matemático por mínimos cuadrados así como se presenta en la tabla 3.2. La comparación de metodologías será revisada en el capítulo IV.

**Tabla 3.2 Comparación parámetros estadísticos RNA vs. Modelo Matemático**

	RNA	Min.Cuadrados
Media (m)	-0.002	0.018
Desviación Estándar (m)	0.035	0.068
Mínimo (m)	-0.106	-0.116
Máximo (m)	0.063	0.195

Siguiendo con el proceso de entrenamiento se realizó varios experimentos para cada uno de los sets de aprendizaje (8, 25, 50, 100 y 234) los cuales serán mostrados a continuación.

### 3.4.1 PARA 234 OBSERVACIONES

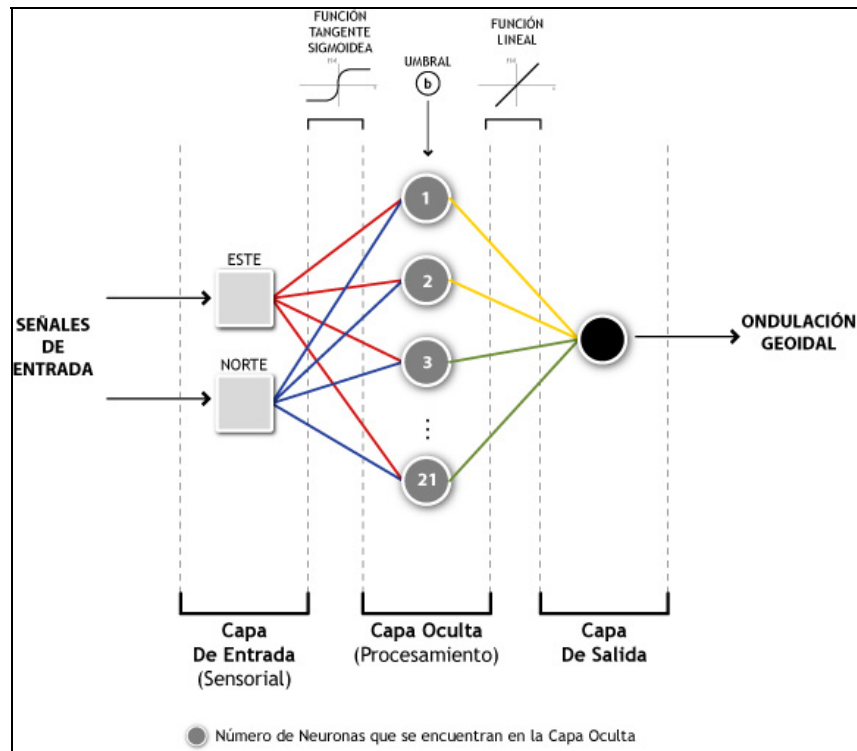
Para el vector de entrada (Este, Norte) con 234 observaciones en cada variable de entrada, como se muestra en la tabla 3.3; se consideró una arquitectura de red [2 21 1] como se indica en la figura 3.4; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 21 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida con funciones de transferencia tangente sigmoidea y lineal tanto para la capa oculta como para la de salida.

**Tabla 3.3 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 234 observaciones**

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación Geoidal (m)
1 Q	779013.533	9978463.724	27.541
2 Q	778480.434	9979620.119	27.598
3 Q	776187.022	9985653.280	27.721
4 Q	774083.393	9990438.817	27.786
5 Q	779696.980	9978798.658	27.493
6 Q	779248.973	9980198.513	27.572
7 Q	780067.978	9980479.985	27.512
8 Q	778996.140	9983548.207	27.598
9 Q	776850.879	9986098.739	27.683
10 Q	777647.101	9986338.258	27.665
11 Q	775783.405	9988699.507	27.746
12 Q	774800.043	9990939.059	27.739
13 Q	781623.709	9979179.750	27.407
14 Q	780288.362	9982199.952	27.466

15 Q	781145.621	9982532.670	27.421
16 Q	779074.444	9985389.990	27.580

Los datos faltantes correspondientes a las 234 observaciones se pueden observar en el Anexo G.



**Figura. 3.4 Topología de red [2 21 1]**

Esta topología de red se obtuvo después de realizar varios ensayos con este patrón de entrada, también experimentando con el performance o meta de aprendizaje que tiene la red siendo para éste caso un valor de 0.013 dando como resultado la figura 3.5, en donde se indica la evolución del aprendizaje en cuanto al error cuadrático medio (MSE) que se obtiene aplicando la ecuación 2.15 y el número de iteraciones durante el proceso de entrenamiento.

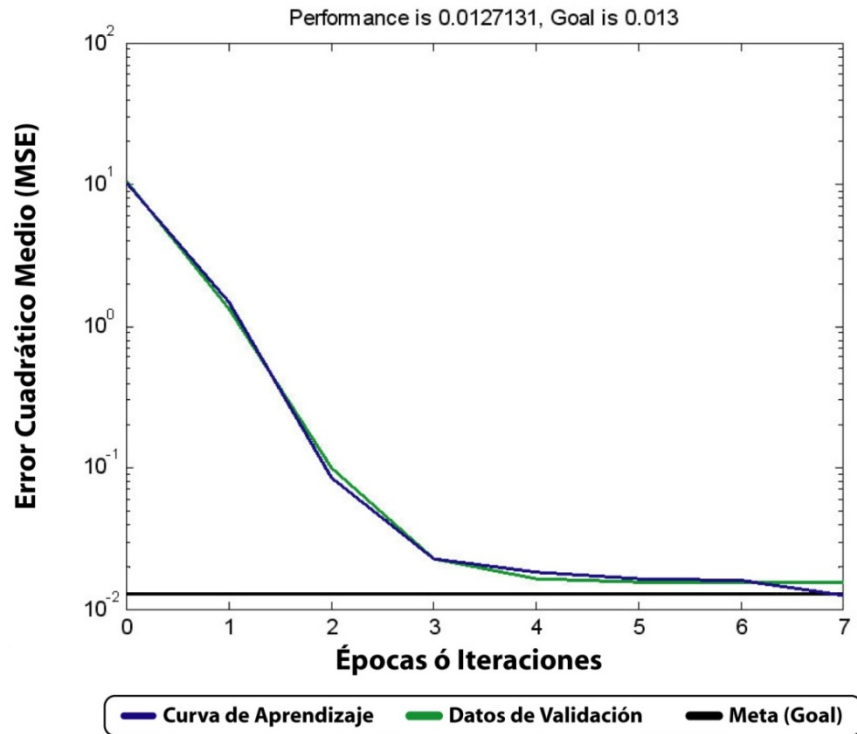


Figura. 3.5 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 21 1]

Una vez terminado el proceso de entrenamiento de la red neuronal a continuación se presenta un mapa correspondiente a las ondulaciones geoidales que se obtuvieron durante el proceso de aprendizaje como indica la figura 3.6

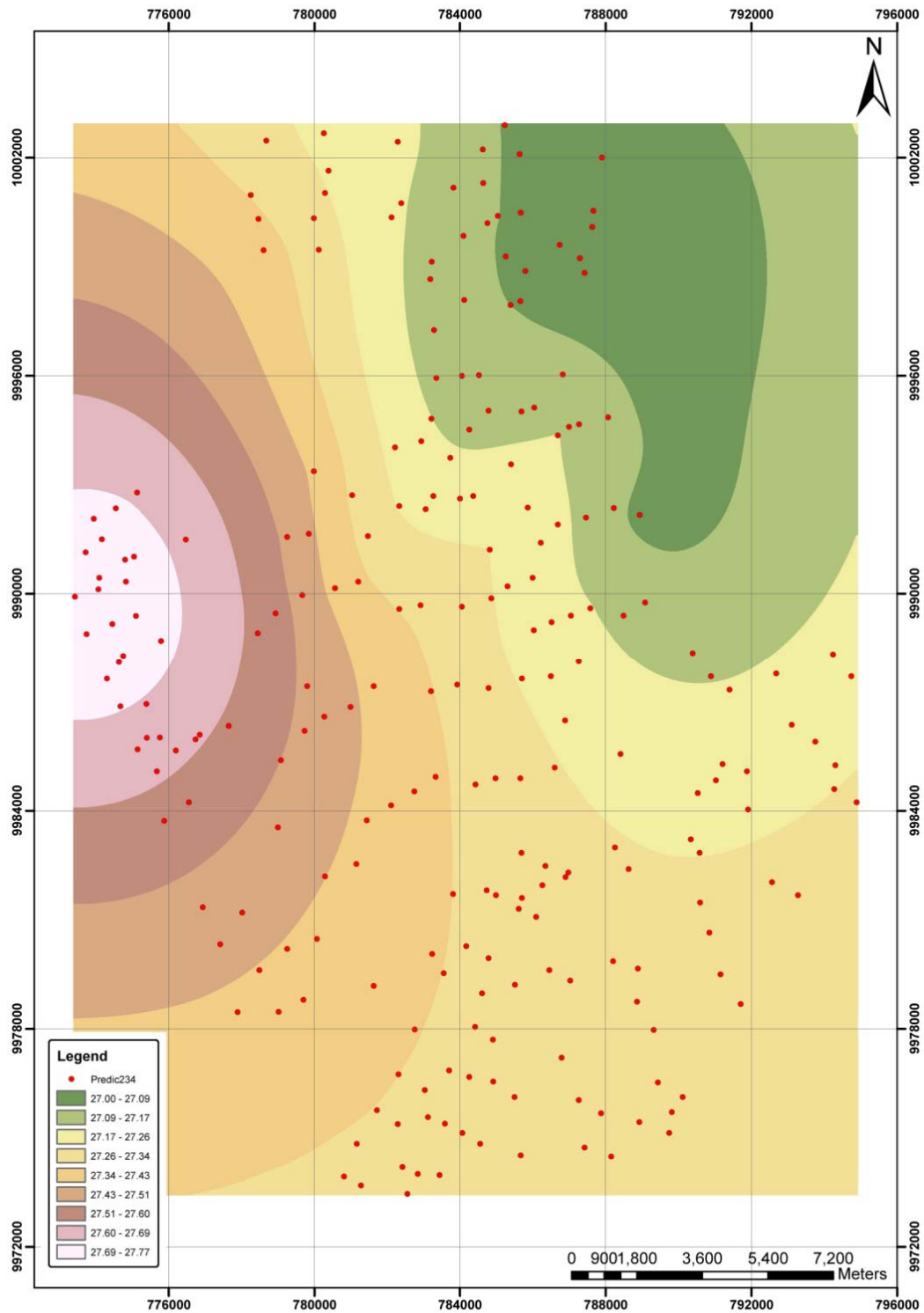


Figura. 3.6 Carta de ondulaciones geoidales para 234 observaciones

### 3.4.2 Para 100 observaciones

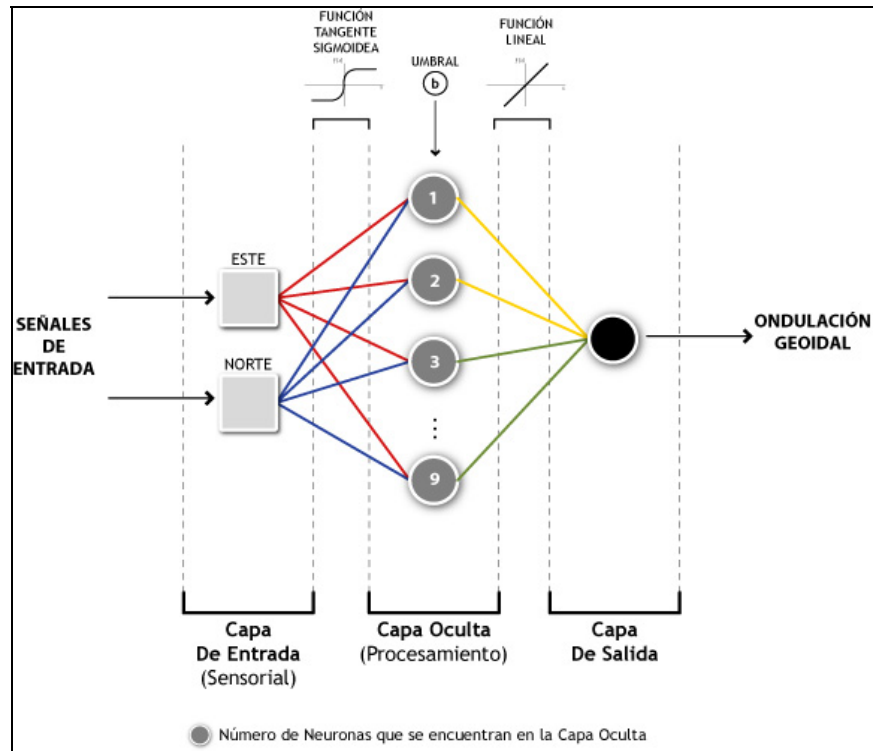
En este set de entrenamiento se consideró como variables de entrada los valores Este y Norte como si indica en la tabla 3.4.

**Tabla 3.4 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 100 observaciones**

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación Geoidal (m)
1 Q	779013.533	9978463.724	27.541
3 Q	776187.022	9985653.280	27.721
6 Q	779248.973	9980198.513	27.572
8 Q	778996.140	9983548.207	27.598
10 Q	777647.101	9986338.258	27.665
11 Q	775783.405	9988699.507	27.746
13 Q	781623.709	9979179.750	27.407
14 Q	780288.362	9982199.952	27.466
16 Q	779074.444	9985389.990	27.580
18 Q	778444.343	9988907.331	27.637
19 Q	776461.605	9991489.012	27.691
21 Q	779249.637	9991558.430	27.511
23 Q	779665.919	9989963.961	27.454
24 Q	779805.443	9987428.461	27.564
26 Q	780988.514	9986858.497	27.476
28 Q	782110.563	9984147.289	27.379
29 Q	779977.933	9993368.175	27.336
32 Q	781201.075	9990328.945	27.395
35 Q	783330.792	9984933.044	27.349
37 Q	784725.197	9981811.560	27.271
39 Q	781464.520	9991582.627	27.290
40 Q	782324.508	9989575.558	27.388

Los datos faltantes correspondientes a las 100 observaciones se pueden observar en el Anexo H.

Se consideró una topología de red [2 9 1] tal como se muestra en la figura 3.7; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 9 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida con funciones de transferencia tangente sigmoidea y lineal tanto para la capa oculta como para la de salida respectivamente.



**Figura. 3.7 Topología de red [2 9 1]**

Para observar la evolución del error durante el proceso de aprendizaje del vector de entrada y el conjunto de puntos de evaluación se muestra la figura 3.8, en donde se experimentó con una meta de 0.02.

Se visualiza que a medida que se produce las iteraciones en donde ocurre el ajuste de los parámetros libres de la red, el error cuadrático medio va disminuyendo hasta alcanzar el performance en donde el proceso de aprendizaje se detiene lo cual indica que la red aprendió siendo necesario 8 épocas o iteraciones.



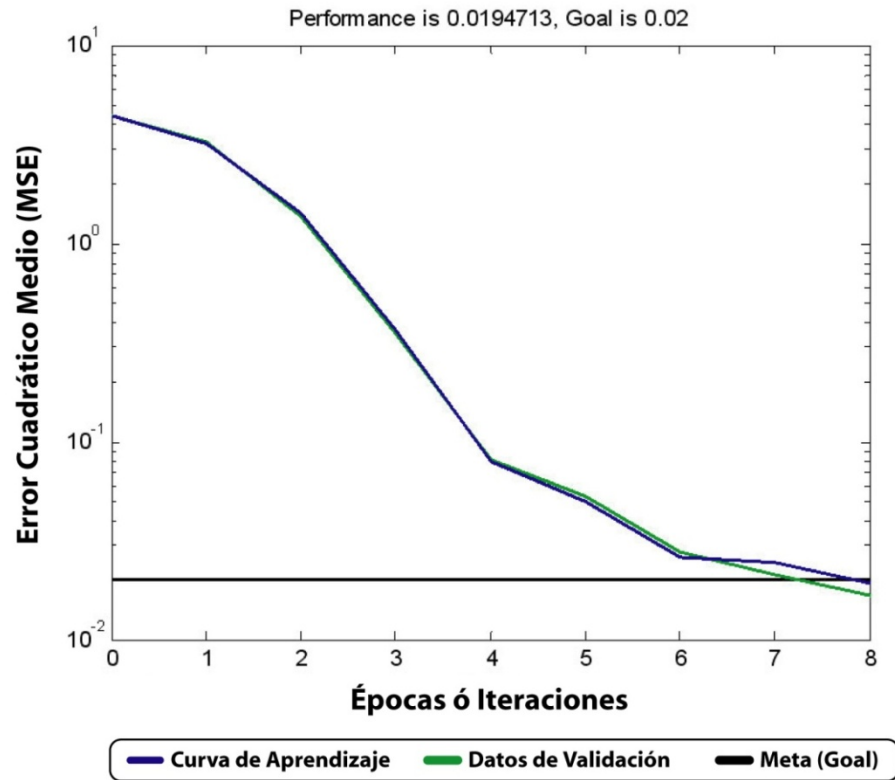


Figura. 3.8 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1]

Una vez terminado el proceso de entrenamiento de la red neuronal a continuación se presenta un mapa correspondiente a las ondulaciones geoidales que se obtuvieron durante el proceso de aprendizaje como indica la figura 3.9

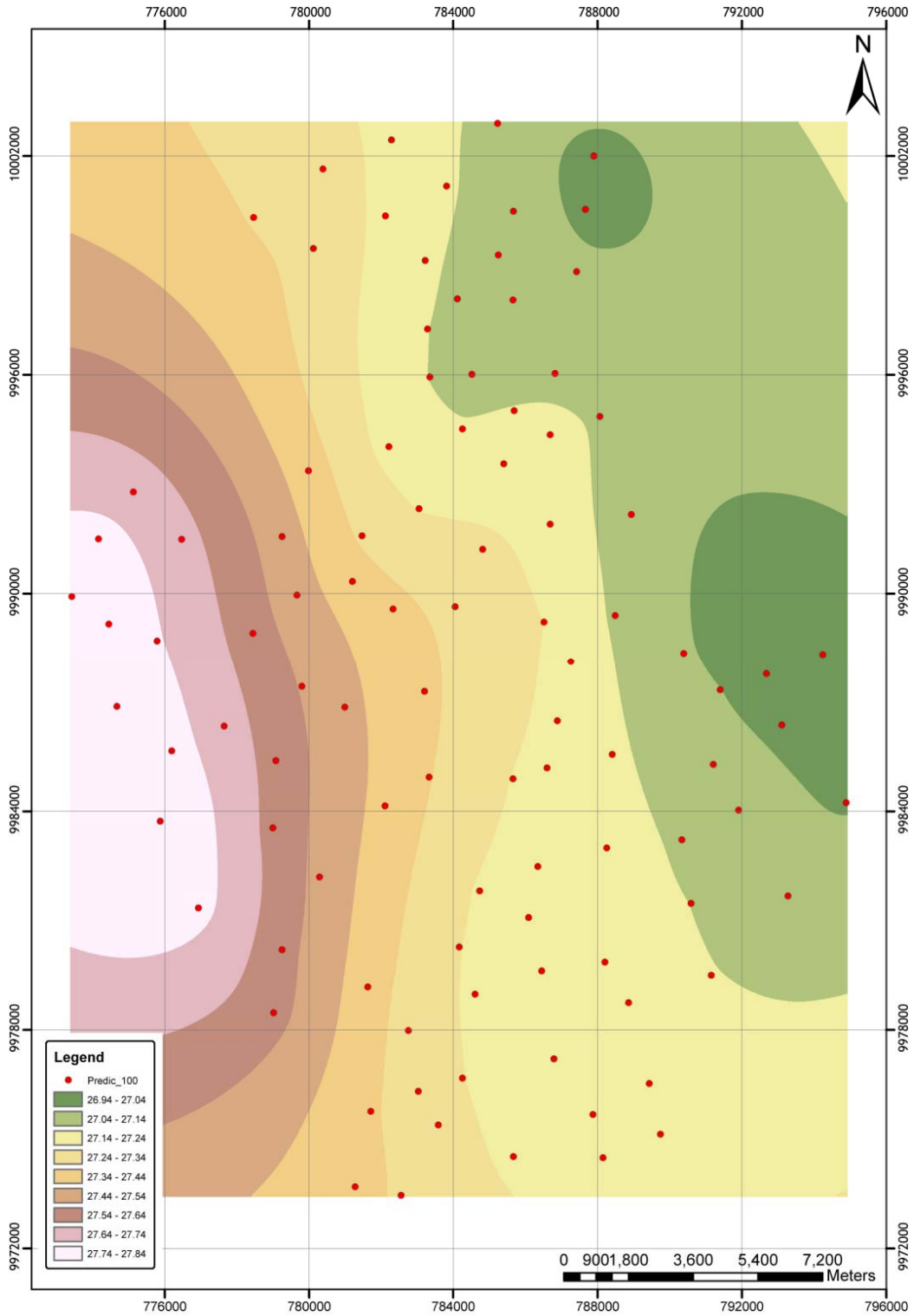


Figura. 3.9 Carta de ondulaciones geoidales para 100 observaciones

### 3.4.3 PARA 50 OBSERVACIONES

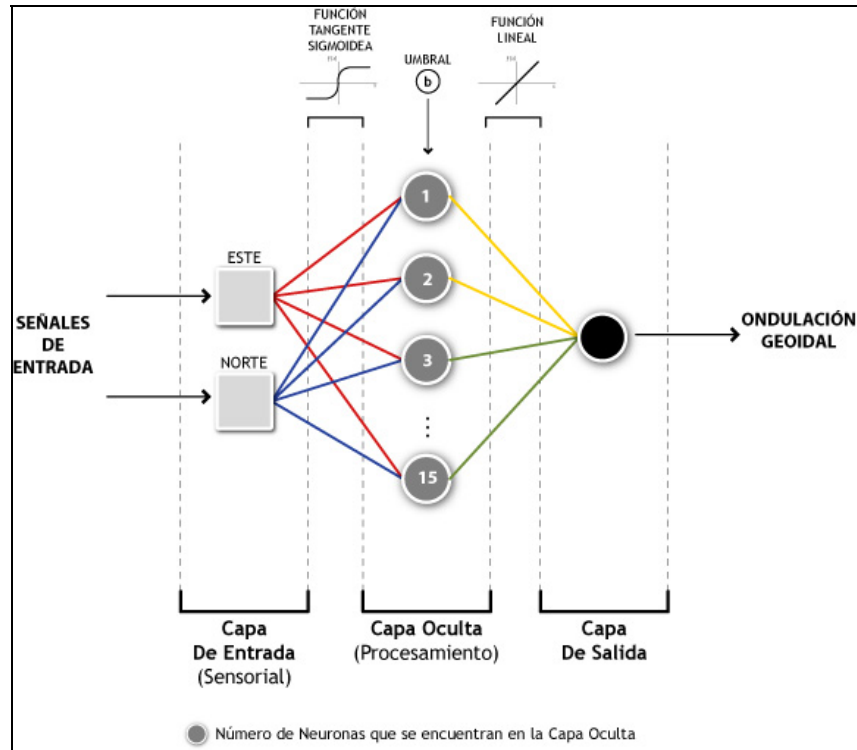
Las variables de entrada (Este y Norte) para el entrenamiento de la red con 50 observaciones se indica en la tabla 3.5

**Tabla 3.5 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 50 observaciones**

NOMBRE	ESTE (m)	NORTE (m)	Ondulación Geoidal (m)
1 Q	779013.533	9978463.724	27.541
10 Q	777647.101	9986338.258	27.665
11 Q	775783.405	9988699.507	27.746
14 Q	780288.362	9982199.952	27.466
20 Q	783226.943	9980065.620	27.338
23 Q	779665.919	9989963.961	27.454
25 Q	780272.666	9986591.362	27.552
29 Q	779977.933	9993368.175	27.336
34 Q	782737.790	9984529.810	27.366
41 Q	782912.775	9989682.153	27.383
49 Q	785652.823	9984890.262	27.203
52 Q	785692.544	9987643.396	27.204
58 Q	788933.052	9992163.584	27.068
59 Q	788064.173	9994850.841	27.108
64 Q	788489.975	9989393.206	27.141
70 Q	788406.917	9985565.256	27.164
82 Q	775126.348	9992788.006	27.777
83 Q	785859.307	9992370.218	27.273
97 Q	789312.379	9977969.379	27.158
99 Q	790847.486	9980641.142	27.151

Los datos faltantes correspondientes a las 50 observaciones se pueden observar en el Anexo I.

La mejor topología de red es [2 15 1], como se indica en la figura 3.10; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 15 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida.



**Figura. 3.10 Topología de red [2 15 1]**

La curva de aprendizaje como se indica en la figura 3.11 corresponde a un gráfico del valor del error cuadrático medio que se encuentra en función del número de iteraciones.

Para éste experimento la meta fue de 0.02 y se observa que en la 6 iteración la red alcanzo su performance en donde concluye el aprendizaje de la red.

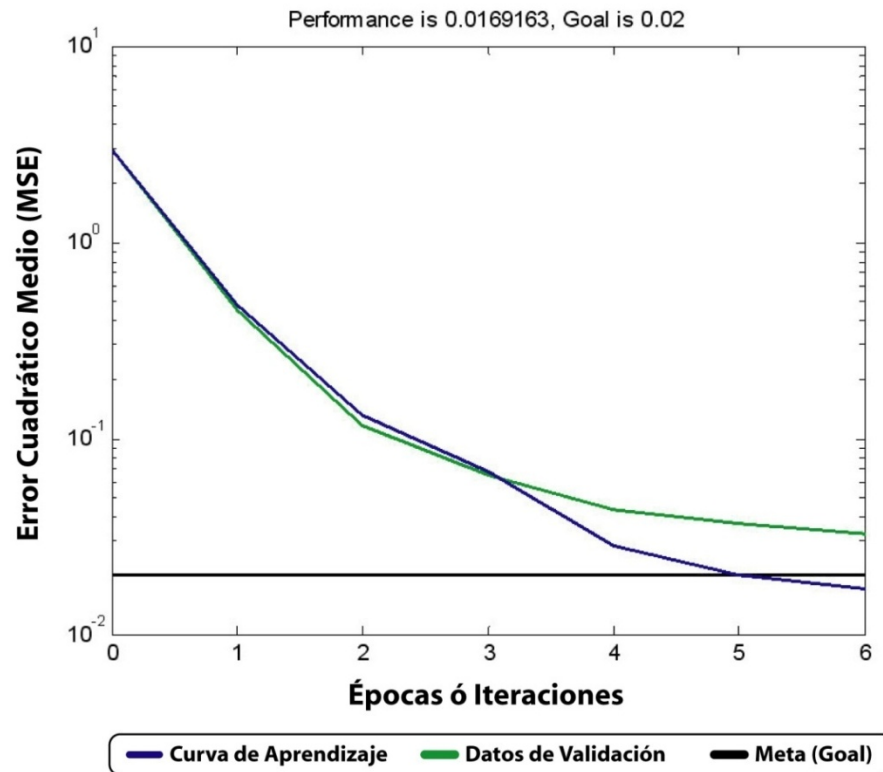


Figura. 3.11 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 15 1]

Una vez terminado el proceso de entrenamiento de la red neuronal a continuación se presenta un mapa correspondiente a las ondulaciones geoidales que se obtuvieron durante el proceso de aprendizaje como indica la figura 3.12

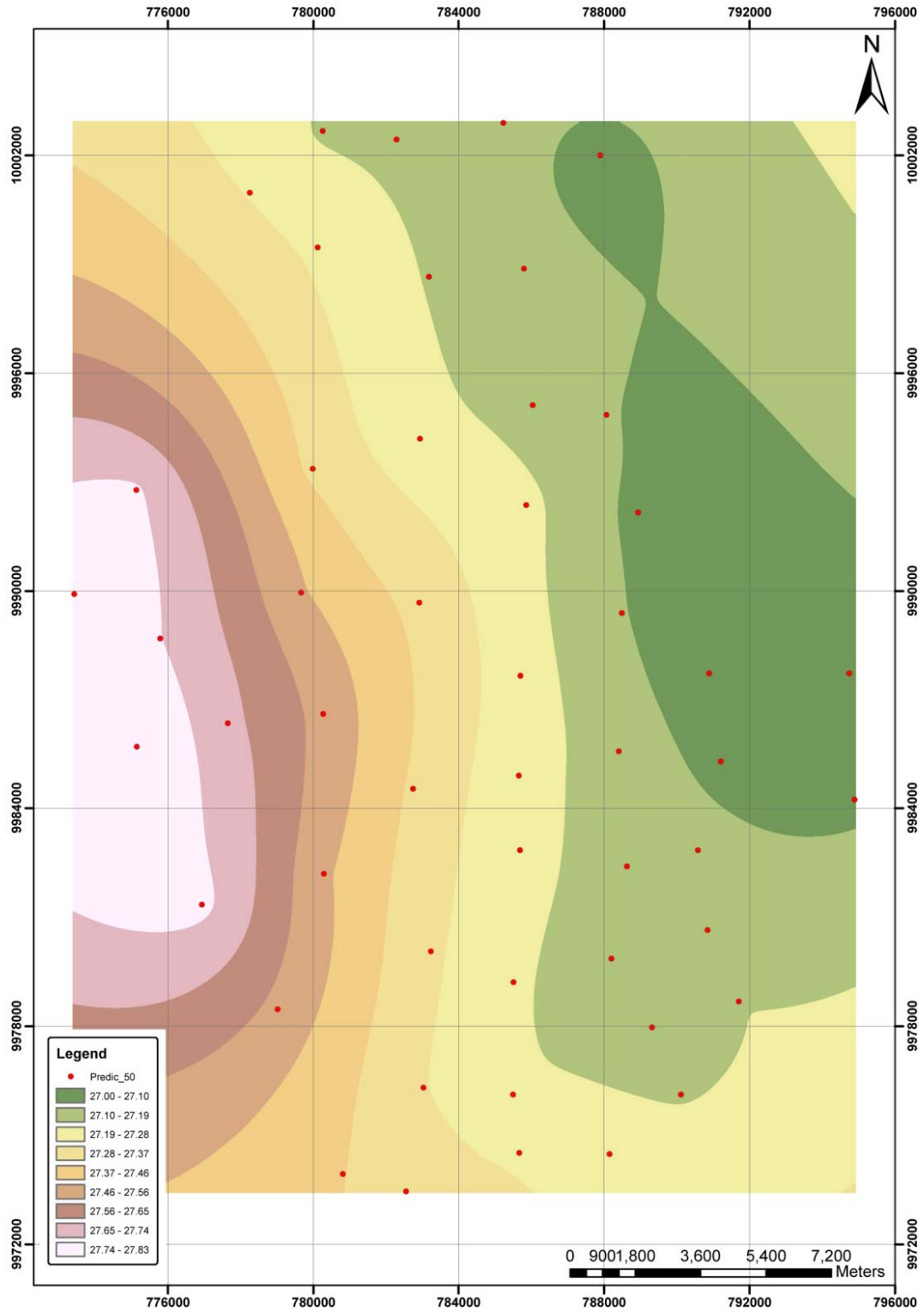


Figura. 3.12 Carta de ondulaciones geoidales para 50 observaciones

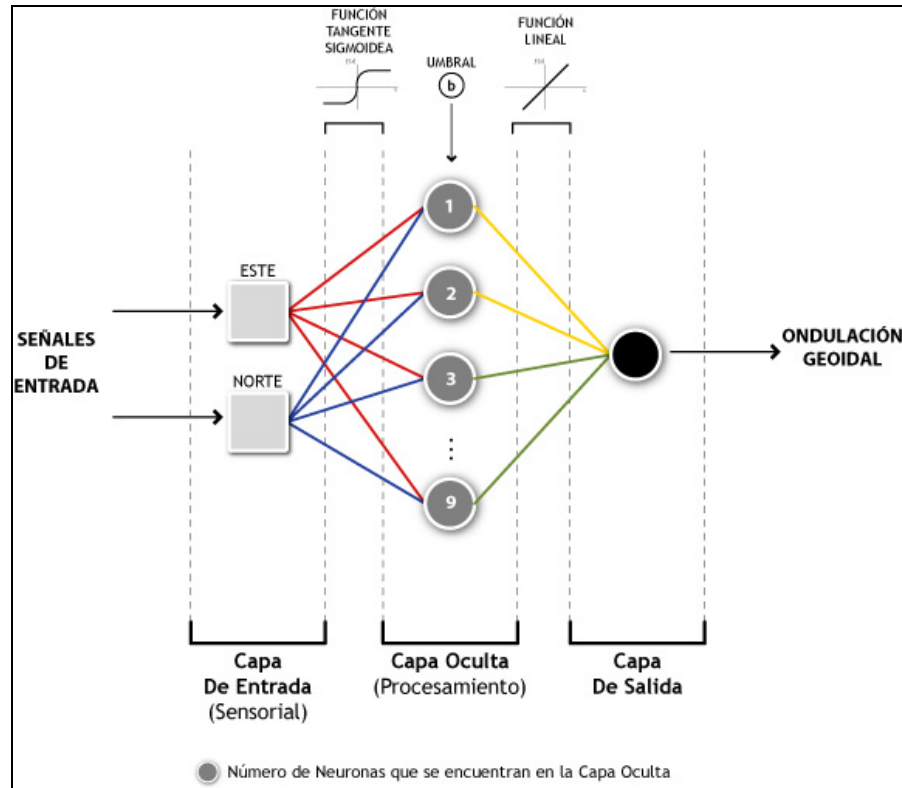
### 3.4.4 PARA 25 OBSERVACIONES

El set de entrenamiento correspondiente a las 25 observaciones está compuesto de los datos como se indica en la tabla 3.6.

**Tabla 3.6 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 25 observaciones**

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación Geoidal (m)
7 Q	780067.978	9980479.985	27.512
21 Q	779249.637	9991558.430	27.511
24 Q	779805.443	9987428.461	27.564
36 Q	783808.590	9981707.985	27.266
51 Q	784779.479	9987380.664	27.219
58 Q	788933.052	9992163.584	27.068
76 Q	777894.245	9978460.826	27.666
82 Q	775126.348	9992788.006	27.777
107 Q	794886.310	9984235.522	27.052
111 Q	791708.075	9978684.797	27.176
119 Q	788199.825	9979860.413	27.140
126 Q	788152.881	9974487.436	27.257
134 Q	788252.302	9982989.757	27.124
137 Q	792679.998	9987777.872	26.933
153 Q	782550.054	9973456.767	27.364
158 Q	784898.213	9977699.432	27.139
186 Q	787623.873	10000090.274	27.022
194 Q	784095.995	9999845.903	27.136
196 Q	783732.373	9993744.285	27.145
199 Q	786824.408	9996028.629	27.105
207 Q	778599.164	9999455.587	27.364
208 Q	778672.950	10002464.046	27.236
210 Q	785224.830	10002895.370	27.113
226 Q	773423.504	9989916.709	27.822
232 Q	775875.325	9983721.892	27.864

Para determinar la mejor arquitectura de red se realizaron varios experimentos en donde el mejor resultado fue una red [2 9 1] como indica la figura 3.13; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 9 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida con funciones de transferencia tangente sigmoidea y lineal tanto para la capa oculta como para la de salida respectivamente.



**Figura. 3.13 Topología de red [2 9 1]**

Para éste experimento el performance de la red durante el proceso de entrenamiento es como se indica en la figura 3.14, teniendo en cuenta una meta con un valor de 0.02, aquí se indica la evolución del aprendizaje en cuanto al error cuadrático medio (MSE) que se obtiene aplicando la ecuación 2.15, con respecto al número de iteraciones durante el proceso de entrenamiento.

Se observa que a medida que se produce el proceso iterativo del ajuste de los pesos sinápticos, el error va descendiendo. La curva de aprendizaje llega hasta la línea de meta indicando que se alcanzó el objetivo del entrenamiento de la red.



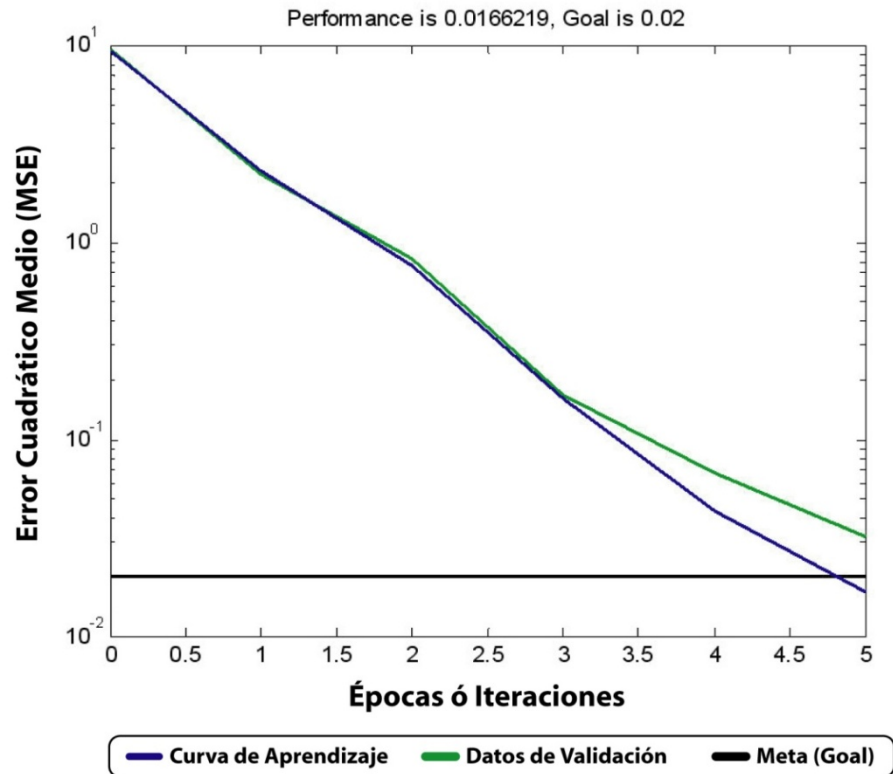


Figura. 3.14 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1]

Una vez terminado el proceso de entrenamiento de la red neuronal a continuación se presenta un mapa correspondiente a las ondulaciones geoidales que se obtuvieron durante el proceso de aprendizaje como indica la figura 3.15

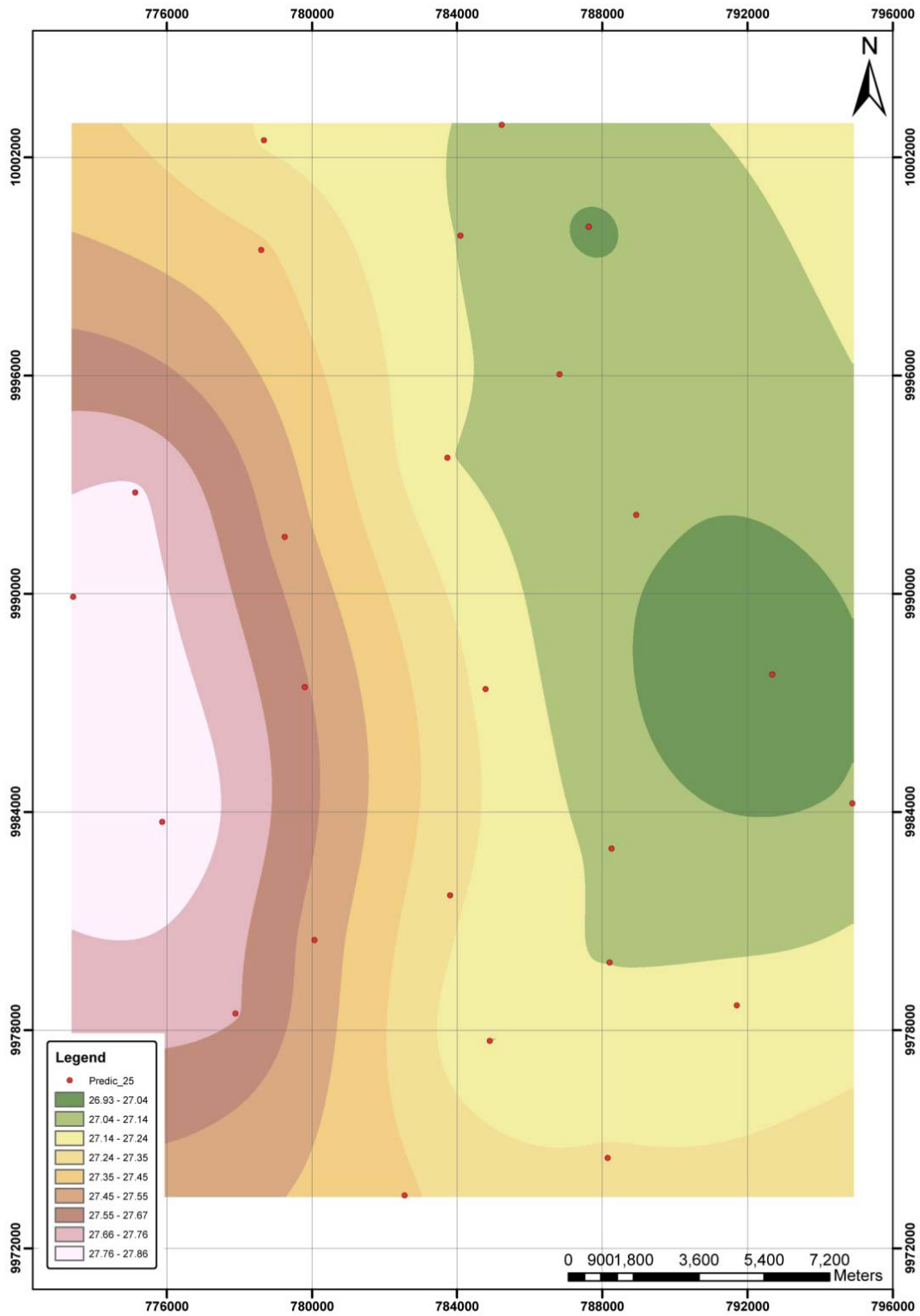


Figura. 3.15 Carta de ondulaciones geoidales para 25 observaciones

### 3.4.5 PARA 8 OBSERVACIONES

El conjunto de entrenamiento correspondiente a las 8 observaciones está compuesto de los datos como se indica en la tabla 3.7.

Tabla 3.7 Datos correspondientes al patrón de entrenamiento con 8 observaciones

Nombre	Este (m)	Norte (m)	Ondulación Geoidal (m)
16 Q	779074.444	9985389.990	27.580
72 Q	787260.797	9988118.996	27.208
107 Q	794886.310	9984235.522	27.052
146 Q	784169.439	9980277.515	27.282
153 Q	782550.054	9973456.767	27.364
178 Q	784047.013	9995993.124	27.094
210 Q	785224.830	10002895.370	27.113
226 Q	773423.504	9989916.709	27.822

Para determinar la mejor topología de red se realizaron varios experimentos en donde el mejor resultado fue una red [2 9 1] como indica la figura 3.16; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 9 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida con funciones de transferencia tangente sigmoidea y lineal tanto para la capa oculta como para la de salida respectivamente.

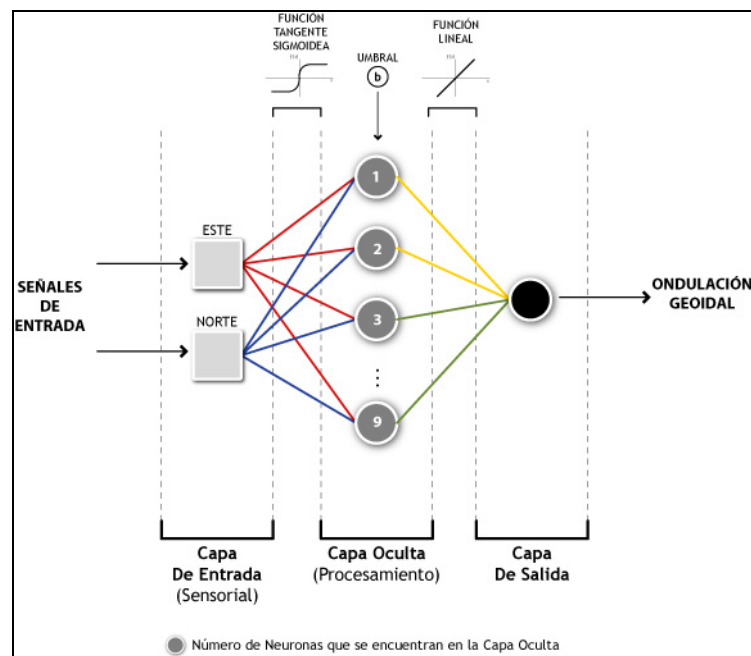


Figura. 3.16 Topología de red [2 9 1]

Se puede observar el comportamiento que tiene la evolución del error a través de las iteraciones o épocas en el proceso de entrenamiento tanto para el patrón de entrada como para el conjunto de datos de evaluación, tal como se muestra en la figura 3.17. Se puede observar que los dos errores disminuyen pero a partir de un momento en el entrenamiento a pesar que el error de la curva de aprendizaje sigue disminuyendo hasta alcanzar el goal o meta de la red que para éste experimento fue de 0.02, el error de la curva de validación no sigue esta trayectoria y no decrece como la de entrenamiento. Sin embargo la red alcanzó su meta siendo necesario 2 épocas o iteraciones lo que indica que se produjo el aprendizaje. También se puede decir que esta conducta indica que durante el proceso de entrenamiento se han comenzado a ajustar comportamientos que son representativos del espacio de entrada.

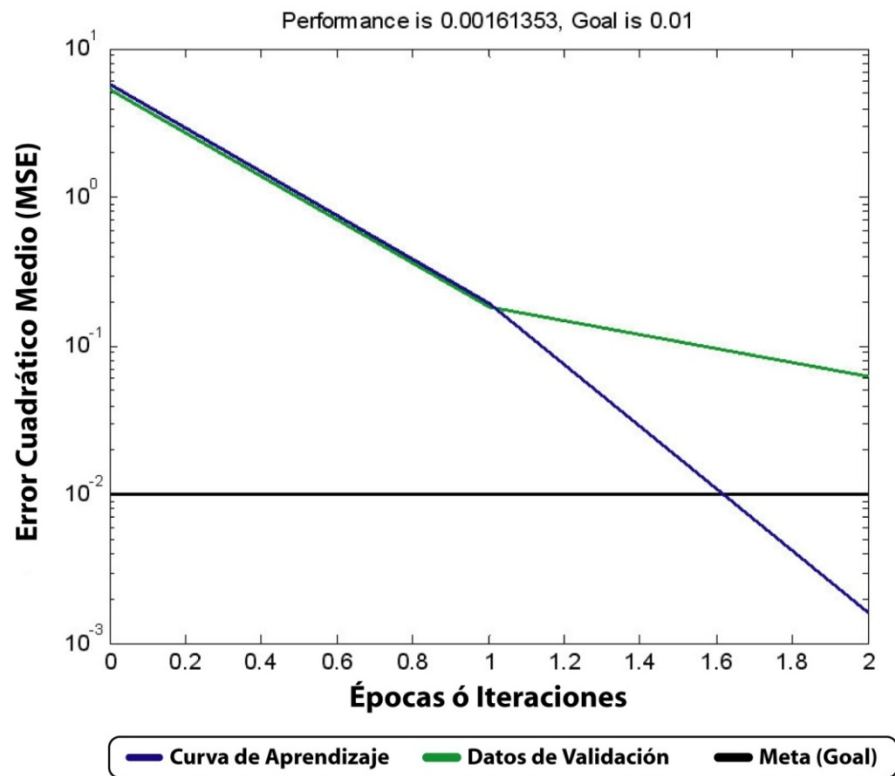


Figura. 3.17 Evolución del error de aprendizaje de un MLP [2 9 1]

Una vez terminado el proceso de entrenamiento de la red neuronal a continuación se presenta un mapa correspondiente a las ondulaciones geoidales que se obtuvieron durante el proceso de aprendizaje como indica la figura 3.18

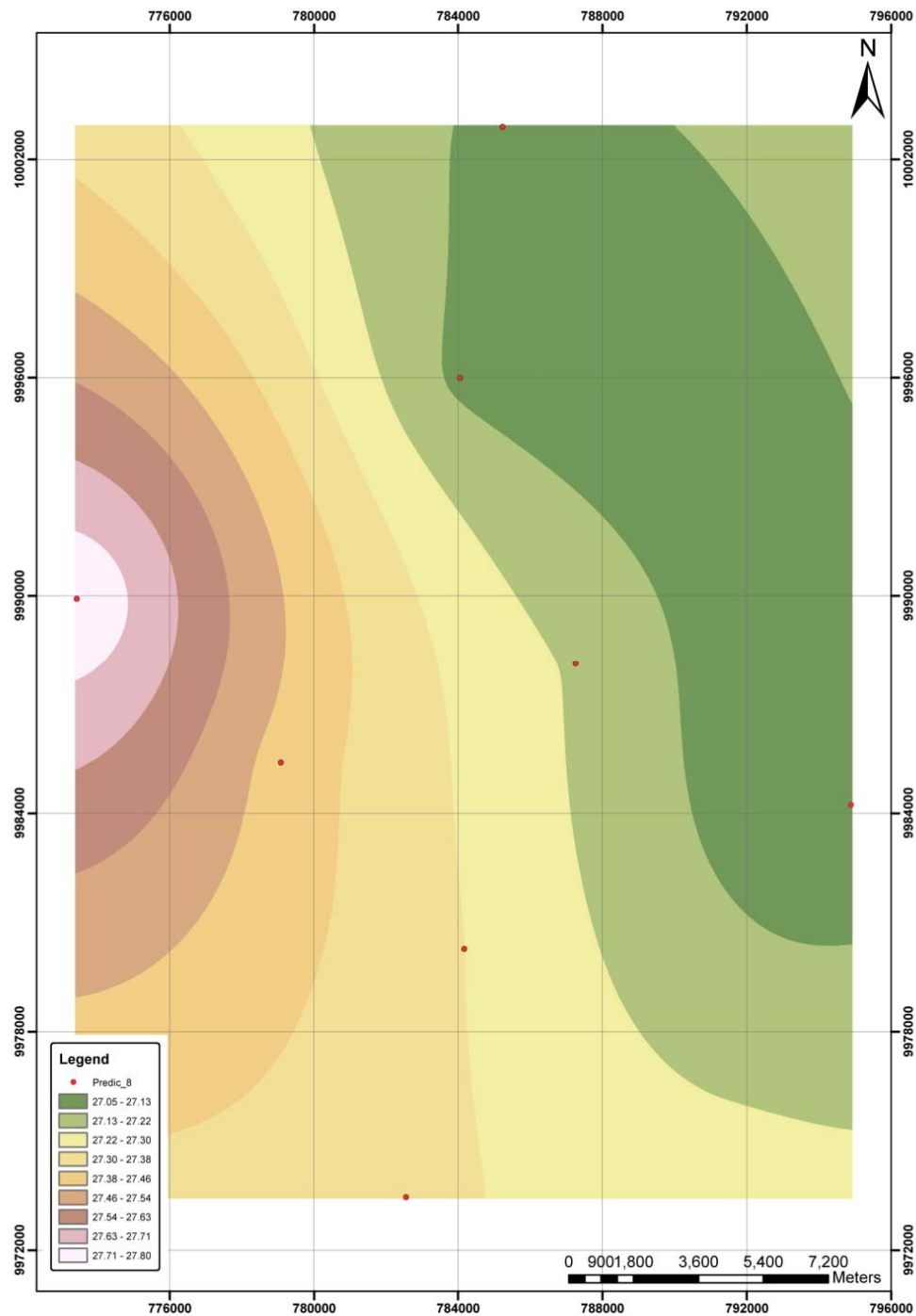


Figura. 3.18 Carta de ondulaciones geoidales para 8 observaciones

## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**

#### **4.1 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR MEDIO DE RNA CON LOS DEL MODELO MATEMÁTICO.**

Durante el proceso de entrenamiento de la red se trabajó con un grupo de datos que no forman parte de los patrones de entrada. Estas 23 observaciones corresponden a los puntos de evaluación que durante el proceso de aprendizaje indican el error de generalización que va cometiendo la red, midiendo así la eficacia que tiene la misma para la resolución del problema.

Este conjunto de datos se encuentra distribuido uniformemente a lo largo del área de estudio como se indica en el anexo A.

Una vez terminado el proceso de aprendizaje se obtiene las predicciones de las ondulaciones geoidales para las 23 observaciones que no intervinieron en el ajuste; para luego compararlas con las ondulaciones calculadas por el modelo matemático y así determinar las diferencias existentes entre las ondulaciones geoidales tanto al utilizar una RNA como el modelo matemático.

##### **4.1.1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PUNTOS DE EVALUACIÓN AJUSTADO CON 234 OBSERVACIONES.**

En esta sección se presentará la predicción de las 23 ondulaciones geoidales que fueron obtenidas después de realizarse el entrenamiento de la red utilizando los 234 datos de entrada, que siguieron los parámetros indicados en la sección 3.5.1.

La tabla 4.1 muestra en la primera columna el nombre de los puntos de

evaluación; en la segunda columna la predicción de las ondulaciones geoidales a partir del entrenamiento de un MLP; en la tercera columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 234 observaciones; en la cuarta columna las diferencias existentes entre las ondulaciones geoidales obtenidas con la red neuronal y el modelo matemático y la quinta columna las diferencias calculadas entre las ondulaciones geoidales con el modelo matemático y el GPS/Nivelación<sup>10</sup>

**Tabla. 4.1: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 234 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
1 QV	27.736	27.699	0.042	-0.005
2 QV	27.645	27.573	-0.054	0.126
3 QV	27.361	27.361	-0.024	0.024
4 QV	27.394	27.330	0.002	0.062
5 QV	27.327	27.294	0.062	-0.029
6 QV	27.188	27.126	0.011	0.051
7 QV	27.178	27.159	0.029	-0.01
8 QV	27.201	27.142	-0.015	0.074
9 QV	27.213	27.146	0.006	0.061
10 QV	27.771	27.636	-0.060	0.195
11 QV	27.109	27.096	0.008	0.005
12 QV	27.253	27.239	0.023	-0.009
13 QV	27.157	27.179	-0.010	-0.012
14 QV	26.971	27.076	0.011	-0.116
15 QV	27.132	27.172	-0.008	-0.032
16 QV	27.254	27.298	-0.007	-0.036
17 QV	27.331	27.365	-0.010	-0.023
18 QV	27.165	27.131	-0.001	0.034
19 QV	27.039	26.987	-0.035	0.087
20 QV	27.155	27.153	-0.013	0.015

<sup>10</sup> Método utilizado para determinar ondulaciones geoidales a través de la altura elipsoidal proporcionada por el receptor GPS; y la altura nivelada (que reemplazará a la altura ortométrica) obtenida por medio de la nivelación geométrica; aplicando la ecuación 2.4. Esta técnica es usada para la validación de ondulaciones geoidales en los 23 puntos de evaluación ajustados con el modelo matemático en cada uno de los experimentos de 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones.

**Tabla. 4.1: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 234 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático(m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
21 QV	27.145	27.102	-0.007	0.05
22 QV	27.332	27.360	0.067	-0.096
23 QV	27.842	27.840	-0.007	0.009

Una vez concluido el proceso de entrenamiento de la red se calcularon los parámetros estadísticos como se indica en la tabla 4.2. Para conocer qué porcentaje del conjunto de puntos de evaluación se necesitaron para que exista una mejoría en los resultados de éstos parámetros, se compararon las diferencias de la cuarta y quinta columna de la tabla 4.1, en donde se contabilizaron cuantas observaciones correspondientes a la cuarta columna son las que tiene el menor valor; dando como resultado 52.17%.

**Tabla. 4.2: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 234 observaciones**

	RNA	Mod.Matemático
Media (m)	0.001	0.018
Desviación Estándar (m)	0.031	0.068
Max. (m)	0.067	0.195
Min. (m)	-0.060	-0.116

A través de la tabla 4.2 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales optimizó los resultados. Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 1 cm y una desviación estándar de 3.1 cm. Los valores de máximos y mínimos se obtuvieron de la cuarta columna correspondiente a la tabla 4.1.



#### 4.1.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PUNTOS DE EVALUACIÓN AJUSTADO CON 100 OBSERVACIONES.

Las 23 ondulaciones geoidales que fueron obtenidas durante el proceso de entrenamiento de la red utilizando los 100 datos de entrada, son indicadas en la tabla 4.3.

**Tabla. 4.3: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 100 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
1 QV	27.681	27.726	-0.013	-0.032
2 QV	27.624	27.593	-0.075	0.106
3 QV	27.359	27.364	-0.026	0.021
4 QV	27.371	27.337	-0.021	0.055
5 QV	27.305	27.303	0.040	-0.038
6 QV	27.203	27.127	0.026	0.05
7 QV	27.145	27.154	-0.004	-0.005
8 QV	27.172	27.139	-0.044	0.077
9 QV	27.211	27.145	0.004	0.062
10 QV	27.741	27.653	-0.090	0.178
11 QV	27.059	27.082	-0.042	0.019
12 QV	27.208	27.225	-0.022	0.005
13 QV	27.171	27.165	0.004	0.002
14 QV	26.982	27.064	0.022	-0.104
15 QV	27.131	27.164	-0.009	-0.024
16 QV	27.247	27.291	-0.015	-0.029
17 QV	27.314	27.357	-0.028	-0.015
18 QV	27.149	27.136	-0.016	0.029
19 QV	27.037	26.983	-0.037	0.091
20 QV	27.144	27.158	-0.025	0.01
21 QV	27.130	27.103	-0.021	0.049
22 QV	27.320	27.375	0.056	-0.111
23 QV	27.827	27.870	-0.022	-0.021

Una vez concluido el proceso de entrenamiento de la red se calcularon los parámetros estadísticos como se indica en la tabla 4.4. Para conocer qué porcentaje del conjunto de puntos de evaluación se necesitaron para que exista una mejoría en

los resultados de éstos parámetros, se compararon las diferencias de la cuarta y quinta columna de la tabla 4.3, en donde se contabilizaron cuantas observaciones correspondientes a la cuarta columna son las que tienen el menor valor; dando como resultado 65.22%.

**Tabla. 4.4: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 100 observaciones**

	RNA	Mod.Matemático
Media (m)	-0.016	0.016
Desviación Estándar(m)	0.033	0.065
Max. (m)	0.056	0.178
Min. (m)	-0.090	-0.111

A través de la tabla 4.4 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales optimizó los resultados. Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 1.6 cm y una desviación estándar de 3.3 cm.

#### **4.1.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PUNTOS DE EVALUACIÓN AJUSTADO CON 50 OBSERVACIONES.**

Una vez definida la topología de red y los parámetros de entrenamiento indicados en la sección 3.5.3, se procede a realizar la predicción de las 23 ondulaciones geoidales en los puntos de evaluación.

La tabla 4.5 muestra en la primera columna el nombre de los puntos de evaluación; en la segunda columna la predicción de las ondulaciones geoidales a partir del entrenamiento de un MLP; en la tercera columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 50 observaciones; en la cuarta columna las diferencias existentes entre las ondulaciones geoidales obtenidas con la red neuronal y el modelo matemático y la quinta columna las diferencias calculadas entre las ondulaciones geoidales con el modelo matemático y el GPS/Nivelación.

**Tabla. 4.5: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 50 observaciones.**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
1 QV	27.749	27.656	0.055	0.038
2 QV	27.628	27.556	-0.071	0.143
3 QV	27.361	27.377	-0.024	0.008
4 QV	27.357	27.342	-0.035	0.05
5 QV	27.312	27.298	0.047	-0.033
6 QV	27.200	27.131	0.023	0.046
7 QV	27.157	27.182	0.008	-0.033
8 QV	27.134	27.161	-0.082	0.055
9 QV	27.175	27.161	-0.032	0.046
10 QV	27.729	27.620	-0.102	0.211
11 QV	27.110	27.103	0.009	-0.002
12 QV	27.236	27.254	0.006	-0.024
13 QV	27.222	27.198	0.055	-0.031
14 QV	27.024	27.077	0.064	-0.117
15 QV	27.154	27.196	0.014	-0.056
16 QV	27.236	27.314	-0.026	-0.052
17 QV	27.354	27.370	0.013	-0.028
18 QV	27.148	27.100	-0.018	0.065
19 QV	27.047	26.958	-0.027	0.116
20 QV	27.151	27.129	-0.018	0.039
21 QV	27.178	27.100	0.026	0.052
22 QV	27.304	27.300	0.040	-0.036
23 QV	27.830	27.787	-0.019	0.062

Una vez concluido el proceso de entrenamiento de la red se calcularon los parámetros estadísticos como se indica en la tabla 4.6. Para conocer qué porcentaje del conjunto de puntos de evaluación se necesitaron para que exista una mejoría en los resultados de éstos parámetros, se compararon las diferencias de la cuarta y quinta columna de la tabla 4.5, en donde se contabilizaron cuantas observaciones correspondientes a la cuarta columna son las que tienen el menor valor; dando como resultado 52.17%.

**Tabla. 4.6: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 50 observaciones.**

	RNA	Mod.Matemático
Media (m)	-0.004	0.023
Desviación Estándar(m)	0.044	0.073
Max. (m)	0.064	0.211
Min. (m)	-0.102	-0.117

A través de la tabla 4.6 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales optimizó los resultados. Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 4 mm y una desviación estándar de 4.4 cm.

#### 4.1.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PUNTOS DE EVALUACIÓN AJUSTADO CON 25 OBSERVACIONES.

Las 23 ondulaciones geoidales que fueron obtenidas después de realizar el entrenamiento de la red utilizando los 25 datos de entrada, que siguieron los parámetros indicados en la sección 3.5.4, se muestran en la tabla 4.7.

**Tabla. 4.7: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 25 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
1 QV	27.756	27.713	0.062	-0.019
2 QV	27.713	27.568	0.014	0.131
3 QV	27.373	27.363	-0.012	0.022
4 QV	27.361	27.298	-0.031	0.094
5 QV	27.312	27.263	0.047	0.002
6 QV	27.135	27.090	-0.042	0.087
7 QV	27.155	27.121	0.006	0.028
8 QV	27.175	27.094	-0.041	0.122
9 QV	27.215	27.098	0.008	0.109
10 QV	27.812	27.658	-0.019	0.173
11 QV	27.057	27.068	-0.044	0.033
12 QV	27.186	27.316	-0.044	-0.086
13 QV	27.204	27.220	0.037	-0.053

**Tabla. 4.7: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 25 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
14 QV	26.991	27.032	0.031	-0.072
15 QV	27.149	27.158	0.009	-0.018
16 QV	27.252	27.339	-0.010	-0.077
17 QV	27.451	27.459	0.109	-0.117
18 QV	27.080	27.167	-0.086	-0.002
19 QV	27.056	27.020	-0.019	0.054
20 QV	27.081	27.172	-0.088	-0.004
21 QV	27.105	27.079	-0.047	0.073
22 QV	27.298	27.429	0.033	-0.165
23 QV	27.842	27.867	-0.007	-0.018

Una vez concluido el proceso de entrenamiento de la red se calcularon los parámetros estadísticos como se indica en la tabla 4.8. Para conocer qué porcentaje del conjunto de puntos de evaluación se necesitaron para que exista una mejoría en los resultados de éstos parámetros, se compararon las diferencias de la cuarta y quinta columna de la tabla 4.7, en donde se contabilizaron cuantas observaciones correspondientes a la cuarta columna son las que tienen el menor valor; dando como resultado 56.52%.

**Tabla. 4.8: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 25 observaciones**

	RNA	Mod. Matemático
Media (m)	-0.006	0.013
Desviación Estándar (m)	0.047	0.085
Max. (m)	0.109	0.173
Min. (m)	-0.088	-0.165

A través de la tabla 4.8 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales optimizó los resultados. Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 6 mm y una desviación estándar de 5 cm.

#### 4.1.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PUNTOS DE EVALUACIÓN AJUSTADO CON 8 OBSERVACIONES.

En esta sección se presentará la predicción de las 23 ondulaciones geoidales que fueron obtenidas después de realizar el entrenamiento de la red utilizando los 8 datos de entrada, que siguieron los parámetros indicados en la sección 3.5.5.

La tabla 4.9 muestra en la primera columna el nombre de los puntos de evaluación; en la segunda columna la predicción de las ondulaciones geoidales a partir del entrenamiento de un MLP; en la tercera columna las ondulaciones geoidales obtenidas con el modelo matemático ajustado con 8 observaciones; en la cuarta columna las diferencias existentes entre las ondulaciones geoidales obtenidas con la red neuronal y el modelo matemático y la quinta columna las diferencias calculadas entre las ondulaciones geoidales con el modelo matemático y el GPS/Nivelación.

**Tabla. 4.9: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 8 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
1 QV	27.790	27.702	0.096	-0.008
2 QV	27.841	27.581	0.142	0.118
3 QV	27.388	27.381	0.003	0.004
4 QV	27.426	27.342	0.034	0.05
5 QV	27.293	27.309	0.028	-0.044
6 QV	27.013	27.137	-0.164	0.04
7 QV	27.124	27.161	-0.025	-0.012
8 QV	27.190	27.142	-0.026	0.074
9 QV	27.168	27.150	-0.039	0.057
10 QV	27.876	27.648	0.045	0.183
11 QV	27.033	27.071	-0.068	0.03
12 QV	27.248	27.277	0.018	-0.047
13 QV	27.128	27.201	-0.039	-0.034
14 QV	27.050	27.043	0.090	-0.083
15 QV	27.088	27.180	-0.052	-0.04

**Tabla. 4.9: Comparación de ondulaciones geoidales obtenidas a través de una RNA con el modelo matemático ajustado con 8 observaciones**

Nombre	RNA (m)	Modelo matemático (m)	Diferencias RNA (m)	Diferencias Modelo (m)
16 QV	27.292	27.327	0.030	-0.065
17 QV	27.446	27.408	0.104	-0.066
18 QV	27.179	27.170	0.014	-0.005
19 QV	27.007	27.020	-0.068	0.054
20 QV	27.195	27.187	0.027	-0.019
21 QV	26.989	27.118	-0.163	0.034
22 QV	27.292	27.400	0.028	-0.136
23 QV	27.979	27.835	0.130	0.014

Una vez concluido el proceso de entrenamiento de la red se calcularon los parámetros estadísticos como se indica en la tabla 4.10. Para conocer qué porcentaje del conjunto de puntos de evaluación se necesitaron para que exista una mejoría en los resultados de éstos parámetros, se compararon las diferencias de la cuarta y quinta columna de la tabla 4.9, en donde se contabilizaron cuantas observaciones correspondientes a la cuarta columna son las que tienen el menor valor; dando como resultado 47.83%.

**Tabla. 4.10: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones**

	RNA	Mod.Matemático
Media (m)	0.006	0.004
Desviación Estándar (m)	0.080	0.07
Max. (m)	0.142	0.183
Min. (m)	-0.164	-0.136

A través de la tabla 4.10 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales no optimizó los resultados. Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 6 mm y una desviación estándar de 8 cm.

A continuación se presenta la tabla 4.11 que resume los parámetros estadísticos obtenidos durante el proceso de entrenamiento de la red con 234, 100, 50, 25 y 8 datos de entrada los cuales son comparados con los calculados por el modelo matemático.

**Tabla. 4.11: Comparación de datos estadísticos en puntos de evaluación ajustados con 234, 100, 50, 25 y 8 observaciones**

	Primer set de entrenamiento con 234 observaciones		Segundo set de entrenamiento con 100 observaciones		Tercer set de entrenamiento con 50 observaciones		Cuarto set de entrenamiento con 25 observaciones		Quinto set de entrenamiento con 8 observaciones	
	RNA	Mod.Mat	RNA	Mod.Mat	RNA	Mod.Mat	RNA	Mod.Mat	RNA	Mod.Mat
<b>Media (m)</b>	0.001	0.018	-0.016	0.016	-0.004	0.023	-0.006	0.013	0.006	0.004
<b>Desviación Estándar (m)</b>	0.031	0.068	0.033	0.065	0.044	0.073	0.047	0.085	0.080	0.070
<b>Max. (m)</b>	0.067	0.195	0.056	0.178	0.064	0.211	0.109	0.173	0.142	0.183
<b>Min. (m)</b>	-0.060	-0.116	-0.090	-0.111	-0.102	-0.117	-0.088	-0.165	-0.164	-0.136



Como se puede observar en el primer, segundo, tercero y cuarto set de entrenamiento existe una optimización en los parámetros estadísticos en comparación con los obtenidos por el modelo matemático a excepción del quinto set de entrenamiento en donde no existe una diferencia importante en cuanto a los valores de media, desviación, valores máximo y mínimo. Se puede concluir que las predicciones de ondulaciones geoidales obtenidas a través del entrenamiento de la RNA dan una mejor precisión referente a las calculadas por el modelo matemático ya que presenta una menor desviación estándar.

Para el quinto set de entrenamiento con 8 observaciones, se realizó una modificación para observar si se obtiene un mejor resultado no tomando en cuenta el punto 22 QV del conjunto de datos de evaluación por encontrarse alejado de la distribución de puntos, tal como se indica en la figura 4.1.

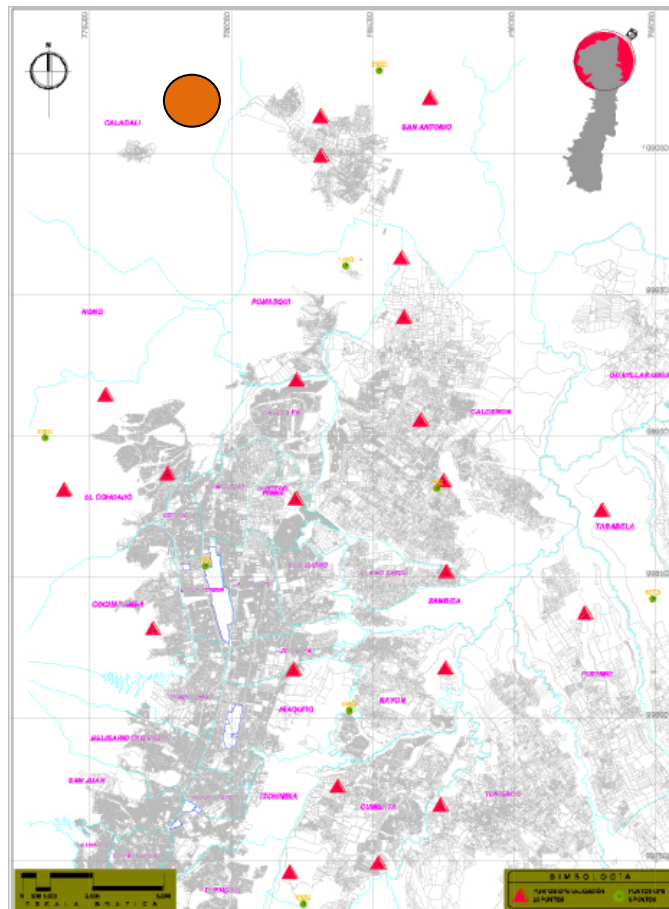


Figura. 4.1 Ubicación de puntos de evaluación

La topología de red con la que se obtuvo un mejor resultado fue [2 5 1] como indica la figura 4.2; en donde 2 neuronas corresponden a la capa de entrada, 5 neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida con funciones de transferencia tangente sigmoidea y lineal tanto para la capa oculta como para la capa de salida respectivamente.

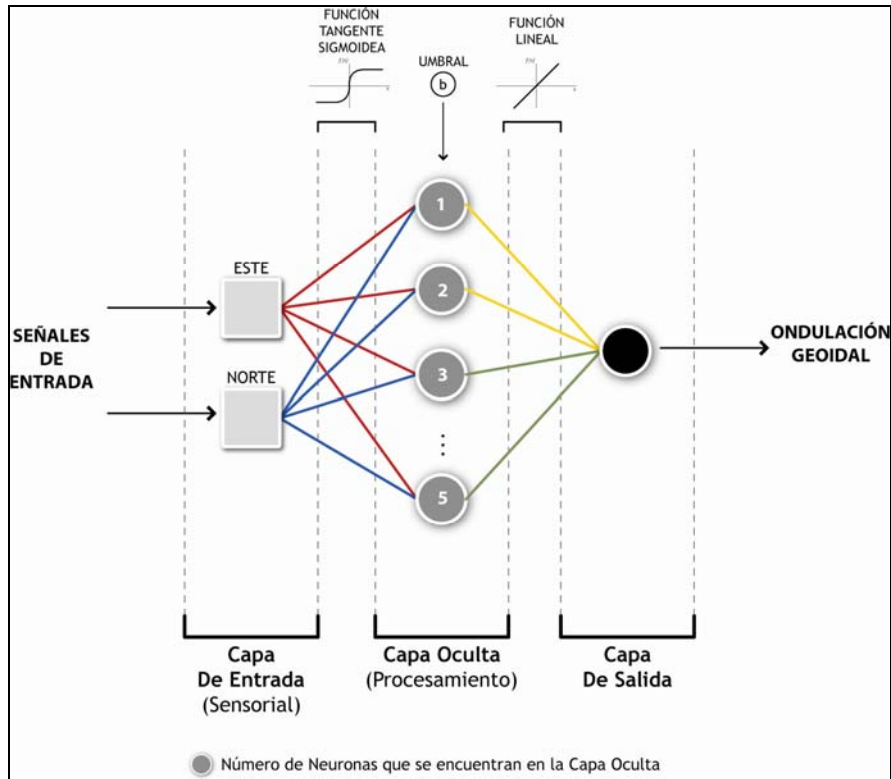


Figura. 4.2 Topología de red [2 5 1]

De tal manera realizando el entrenamiento de red dio como resultado la tabla 4.12.

Tabla. 4.12: Datos estadísticos con 22 puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones

Nº Neuronas Capa oculta	Nº Neuronas Capa salida	Nº de Iteraciones	Error máx.permitido	Media (m)	Desviación (m)	Mínimo	Máximo
5	1	50	0.004	0.027	0.055	-0.050	0.164

Se puede observar el comportamiento que tiene la evolución del error a través de las iteraciones o épocas en el proceso de entrenamiento tanto para el patrón de entrada como para el conjunto de datos de evaluación, tal como se muestra en la figura 4.3. Se puede observar que los dos errores disminuyen pero a partir de un momento en el entrenamiento a pesar que el error de la curva de aprendizaje sigue disminuyendo hasta alcanzar el performance de la red que para éste experimento fue de 0.004, el error de la curva de validación no sigue esta trayectoria y no decrece como la de entrenamiento. Sin embargo la red alcanzó su meta siendo necesario 6 épocas o iteraciones lo que indica que se produjo el aprendizaje.

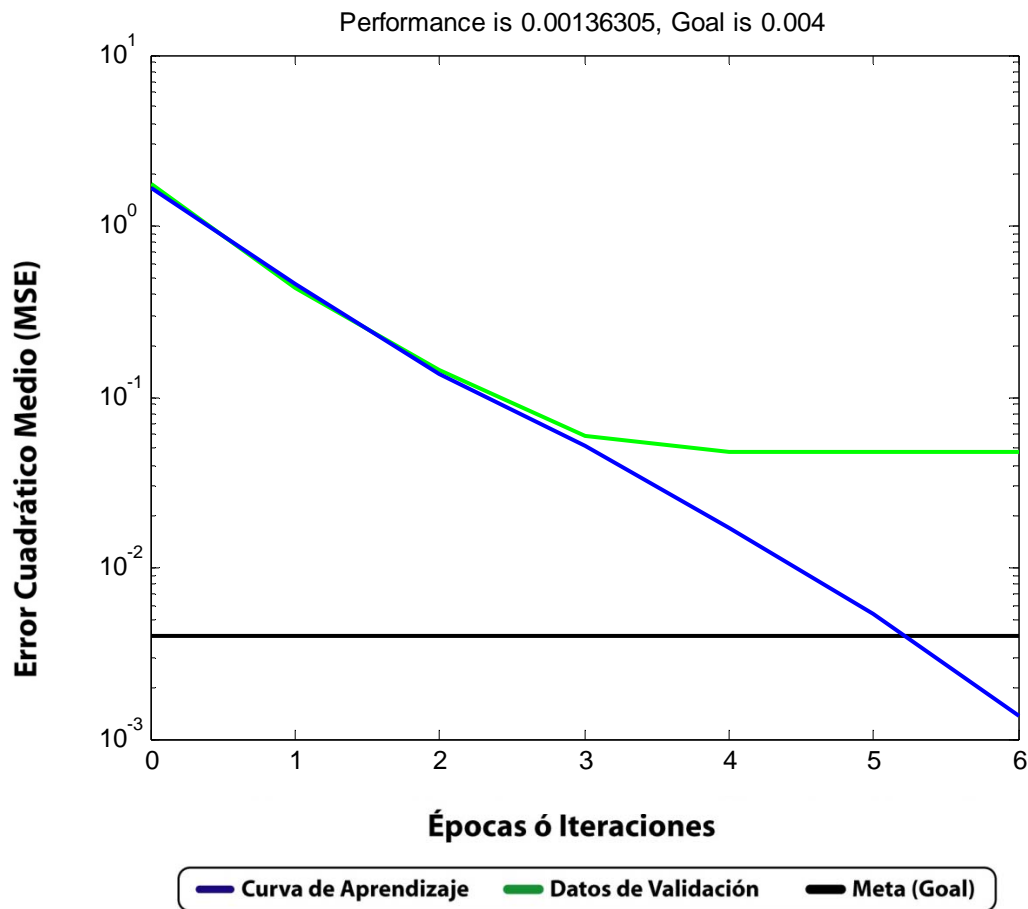


Figura. 4.3 Evolución del error de aprendizaje en un MLP [2 5 1]

A través de la tabla 4.13 se observa que el ajuste por medio de redes neuronales con 22 puntos de evaluación mejoró un poco los resultados que los

obtenidos con los 23 puntos de validación, la razón es que las redes neuronales son capaces de interpolar pero en lo referente a las extrapolaciones esta metodología no resulta ser eficiente. Se puede entender como extrapolación a las predicciones que obtiene la red fuera del rango de los patrones de entrenamiento o en áreas internas en donde existe un vacío experimental, siendo éste el caso que se observa en la figura 4.1.

Se puede indicar que las predicciones de ondulaciones geoidales de cualquier punto dentro del área de estudio tendrán una media de 0.03 cm y una desviación estándar de 6 cm.

**Tabla. 4.13: Comparación de datos estadísticos con 22 puntos de evaluación ajustada con 8 observaciones**

	RNA	Mod.Matemático
Media (m)	0.027	0.004
Desviación Estándar (m)	0.055	0.07
Max. (m)	0.164	0.183
Min. (m)	-0.050	-0.136

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **5.1 CONCLUSIONES**

5.1.1 Al utilizar la metodología de redes neuronales se observó que existe una amplia variedad de modelos computacionales los cuales pueden ser aplicados de acuerdo al problema que se desea resolver; para ello dependerá de las características que presentan los datos así como también la experiencia que posee el diseñador de la red.

5.1.2 Dentro de la definición de la mejor arquitectura de red cabe indicar que no existe un criterio determinado, el cual establezca la cantidad de nodos que pueden estar presentes en las capas ocultas, por ello para cada set de entrenamiento se experimentó con varios números de neuronas y de acuerdo a la experiencia en el diseño de la red se establecieron las topologías para 8, 25, 50, 100 y 234 observaciones como se indica en el Capítulo III. Durante el entrenamiento de la red se observó que cuando se incrementaba el número de neuronas (mayor a 25) o disminuía (menor a 5) en la capa oculta los resultados de los parámetros estadísticos aumentaban comparados con los del modelo matemático, la razón es que cuando se trabaja con topologías de red con una cantidad de neuronas en la capa oculta, que para objeto del problema no es la adecuada se tiene superficies de error que tienden a formar mínimos locales, así como los valores de los pesos pueden ser no confiables para el conjunto de patrones de entrada. En resumen el número de nodos o

neuronas debe ser suficiente para que la red pueda resolver el problema y dependerá de la experiencia del diseñador de la red.

- 5.1.3 El estudio y comparación de metodologías para la obtención de valores de ondulaciones geoidales es necesaria para observar con cuál de ellas se obtiene mejores resultados en cuanto a precisiones se refiere; es a través de ellos donde se calcula la altura ortométrica que es aplicada en proyectos de ingeniería, el uso de estos modelos tiene como finalidad optimizar el tiempo y los recursos que implica conocer mencionada altura por medio de un proceso de nivelación.
- 5.1.4 Durante el entrenamiento de la red neuronal para el patrón de entrada correspondiente a las 8 observaciones se puede concluir que no existió una diferencia importante entre los valores de media (0.6 cm) y desviación estándar (8 cm) con los obtenidos a través del modelo matemático. Mientras que para el set de entrenamiento correspondiente a las 234 observaciones se pudo apreciar que se optimiza los datos estadísticos, en donde se obtuvo una desviación estándar de 3.10 cm y una media de 0.1 cm.
- 5.1.5 Al tener conocimiento que las redes neuronales son sistemas que utilizan ejemplos para su aprendizaje se debe tomar en cuenta que el conjunto de datos refleje adecuadamente el espacio del problema que se desea resolver debiendo ser representativos para obtener una buena generalización de la red. Las observaciones tanto del patrón de entrada como del conjunto de evaluación deben estar uniformemente distribuidos dentro del área de estudio. El objetivo es realizar una buena interpolación a partir de los patrones de entrenamiento para que las predicciones de ondulaciones geoidales representen adecuadamente la realidad que se quiere modelar; caso contrario se puede tener extrapolaciones en donde la metodología de redes neuronales no resulta ser eficiente.

## 5.2 RECOMENDACIONES

- 5.2.1 Para realizar un entrenamiento con redes neuronales es necesario contar con una cantidad suficiente de datos que se encuentren bien distribuidos en el área de estudio y tengan una buena representatividad de lo que se desea modelar, para que no exista inconvenientes cuando se realice la interpolación de los mismos y se pueda obtener buenas predicciones.
- 5.2.2 Se debe investigar métodos en los que se pueda determinar cuántas neuronas debe contener la capa oculta así como cuantas capas ocultas debe tener una red neuronal ya que es a través de una buena topología de red que se puede obtener una mejor generalización.
- 5.2.3 Dentro de redes neuronales se cuenta con algunos modelos computacionales los cuales pueden ser utilizados para el entrenamiento de la red a más del usado en éste proyecto teniendo como finalidad observar con cual da mejores resultados durante el proceso de aprendizaje y entrenamiento de la RNA.
- 5.2.4 Dado que el aprendizaje en una red neuronal se produce durante el ajuste de los parámetros libres de la red, es necesario investigar otros métodos de optimización para la actualización de los pesos.

## Bibliografía

- Drewes, H. Sánchez, L. *Sistemas de Referencia en Geodesia*. Quito - Ecuador. 2000.
- Guyton, *Fisiología de Guyton, Sistema Nervioso A. Generalidades y Fisiología Sensitiva*, Editorial Médica Panamericana, 2006
- Haykin. S, *Redes Neuraís: Principios e Práctica*, 2 da edición, Prentice Hall, New Yersye 2001.
- Isasi Viñuela Pedro, Galván León Inés M., *Redes Neuronales Artificiales. Un enfoque práctico*, Prentice Hall, España, 2004.
- Lima Paula, *Determinación del modelo matemático para obtener las ondulaciones geoidales en un área del Distrito Metropolitano de Quito*, Sangolquí, 2005.
- Martín del Brío Bonifacio, Sanz Molina Alfredo, *Redes Neuronales y Sistemas Difusos*, segunda edición, Alfaomega, México, 2001.
- Snell Richard, *Neuroanatomía Clínica*, 5 ta edición, Editorial Médica Panamericana, Madrid – España 2003.
- Ville Claude, *Biología de Ville*, séptima edición, McGraw-Hill, México 1994.
- Curso Avanzado de Sistemas de Posicionamiento por Satélite, Instituto Geográfico Nacional de España, Madrid – Julio 2006.
- <http://nacc.upc.es>, ingresado en agosto 2008
- <http://www.inegi.gob.mx>, ingresado en agosto 2008



- Hernández López, Leonor, *Predicción y optimización de emisores y consumo mediante redes neuronales en motores diesel*, Universidad Politécnica de Valencia, Editorial Reverté S.A., 2006, <http://books.google.com.ec/books>, ingresado en julio 2009.