

PROPUESTA SIMPLIFICADA PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN PÓRTICO DE HORMIGÓN.

INTRODUCCIÓN.

A continuación se presenta un método simplificado para encontrar la matriz de rigidez de un pórtico constitutivo de una edificación de hormigón armado a partir de las ecuaciones de Manney, el lector notará que el resultado será semejante a aplicar el método matricial tradicional considerando todos los elementos constitutivos (vigas y columnas) como axialmente rígidos.

MODELO MATEMÁTICO

Para facilitar el entendimiento del modelo propuesto en este artículo, se estudiará el siguiente pórtico:

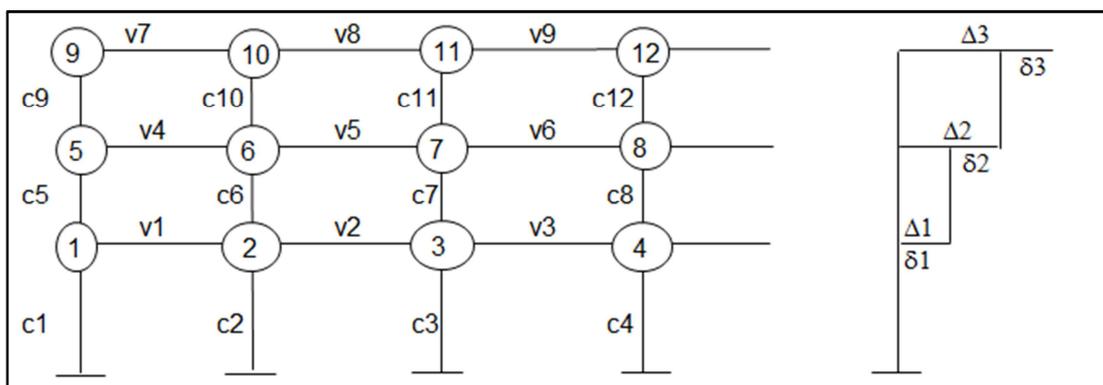


Figura 1.1: Pórtico de análisis

En donde:

V = viga

C = columna

∂ = desplazamiento relativo de piso

Δ = desplazamiento absoluto de piso

$\Delta_1 = \partial_1$

$\Delta_2 = \partial_1 + \partial_2$

$\Delta_3 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$

Analizando el nudo 7 se tiene:

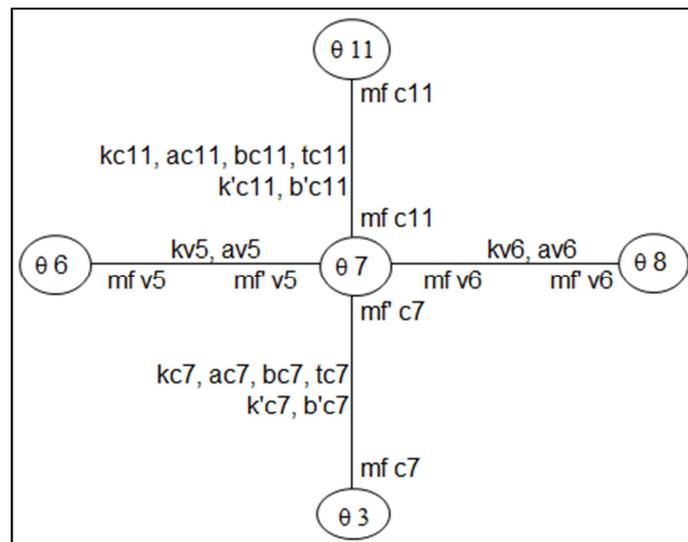


Figura 1.2: Nudo 7

Donde:

mf, mf' = momento de empotramiento perfecto

k, k' = rigidez a flexión del elemento

a = rigidez recíproca

b, b' = rigidez de flexión-cortante

t = rigidez frente a cortante

Θ = rotación en el nudo

$$k = \frac{4EI}{L} = k' , \text{ para elementos de sección constante}$$

$$a = \frac{2EI}{L}$$

$$b = \frac{6EI}{L^2} = b' , \text{ para elementos de sección constante}$$

$$t = \frac{12EI}{L^3}$$

E = módulo de elasticidad del material

I = momento de inercia de la sección

L = longitud del elemento

G = módulo de corte estático

β = factor de forma de la sección

De acuerdo a las ecuaciones de Manney en vigas de nudos i, j con sección constante tenemos que:

$$M_i = mf_i + k * \theta_i + a * \theta_j$$

$$M_j = mf_j + k * \theta_j + a * \theta_i$$

Donde:

M_i = momento final en el nudo i

M_j = momento final en el nudo j

En el caso de las columnas de sección constante con nudos i,j, tenemos:

$$M_i = mf_i + k * \theta_i + a * \theta_j + b * \delta_i + b * \delta_j$$

$$M_j = mf_j + k * \theta_j + a * \theta_i + b * \delta_i + b * \delta_j$$

Ahora aplicaremos equilibrio en el nudo 7:

$$\sum M = 0$$

$$mf'_{v5} + k_{v5} * \theta_7 + a_{v5} * \theta_6 + mf_{v6} + k_{v6} * \theta_7 + a_{v6} * \theta_8 + mf'_{c7} + k_{c7} * \theta_7 + \dots$$

$$a_{c7} * \theta_3 + b_{c7} * \delta_2 + b'_{c7} * \delta_1 + mf_{c11} + k_{c11} * \theta_7 + a_{c11} * \theta_{11} + b'_{c11} * \delta_2 + b_{c11} * \delta_3 = 0$$

Agrupamos y reemplazamos variables:

$$(mf'_{v5} + mf_{v6} + mf'_{c7} + mf_{c11}) + (k_{v5} + k_{v6} + k_{c7} + k_{c11}) * \theta_7 + a_{v5} * \theta_6 + a_{v6} * \theta_8 + \dots$$

$$+ a_{c7} * \theta_3 + a_{c11} * \theta_{11} + (b_{c7} + b'_{c11}) * \delta_2 + b'_{c7} * \delta_1 + b_{c11} * \delta_3 = 0$$

Si:

$$(mf'_{v5} + mf_{v6} + mf'_{c7} + mf_{c11}) = M_7$$

$$(k_{v5} + k_{v6} + k_{c7} + k_{c11}) = A_7$$

Entonces tenemos:

$$M_7 + A_7 * \theta_7 + a_{v5} * \theta_6 + a_{v6} * \theta_8 + a_{c7} * \theta_3 + a_{c11} * \theta_{11} + (b_{c7} + b'_{c11}) * \delta_2 + \dots$$

$$+ b'_{c7} * \delta_1 + b_{c11} * \delta_3 = 0$$

En forma matricial tenemos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3

												q1	* =	-M7
												q2		
												q3		
												q4		
												q5		
												q6		
ac7	av5	A7	av6	ac11	b'c3	bc7+b'c11	bc11					q7		
												q8		
												q9		
												q10		
												q11		
												q12		
												∂1		
												∂2		
												∂3		

Aplicando para todos los nudos:

1 2 3 4				5 6 7 8				9 10 11 12				1 2 3			* =	-M1 -M2 -M3 -M4 -M5 -M6 -M7 -M8 -M9 -M10 -M11 -M12			
A1	av1			ac5								bc1+b'c5	bc5	q1					
av1	A2	av2			ac6								bc2+b'c6	bc6			q2		
av2		A3	av3	ac7									bc3+b'c7	bc7			q3		
av3			A4	ac8								bc4+b'c8	bc8	q4					
ac5				A5	av4			ac9				b'c5	bc5+b'c9	bc9			q5		
ac6		av4		A6	av5			ac10				b'c6	bc6+b'c10	bc10			q6		
ac7			av5		A7	av6	ac11					b'c7	bc7+b'c11	bc11			q7		
ac8				av6		A8	ac12							b'c8			bc8+b'c12	bc12	q8
				ac9				A9	av7					b'c9			bc9	q9	
				ac10			av7	A10	av8					b'c10			bc10	q10	
				ac11		av8		A11	av9					b'c11			bc11	q11	
				ac12				av9		A12					b'c12	bc12	q12		
												∂1							
												∂2							
												∂3							

De esta manera tenemos una matriz de doce ecuaciones con quince incógnitas, a continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio por fuerzas horizontales en el nudo:

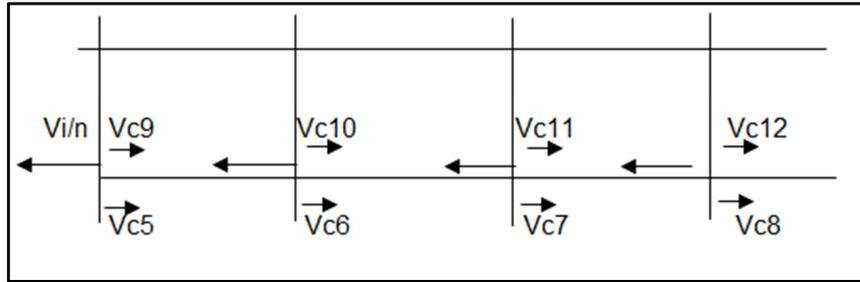


Figura 1.3: Fuerzas Horizontales a nivel de dintel en el piso 2

En donde:

$$V_{i/n} = V_{ci} + V_{cj}$$

$$V_i = n * V_{i/n}$$

V_i : cortante a nivel de piso del pórtico.

$V_{i/n}$: Cortante a nivel de piso de pórtico dividido por n nudos.

V_{ci} : cortante en columna i del nudo n.

V_{cj} : cortante en columna j del nudo n.

Si:

$$M_{c7} + M'_{c7} = mf_{c7} + k_{c7} * \theta_3 + a_{c7} * \theta_7 + b_{c7} * \delta_2 + b'_{c7} * \delta_1 + mf'_{c7} + k_{c7} * \theta_7 + ..$$

$$a_{c7} * \theta_3 + b'_{c7} * \delta_2 + b_{c7} * \delta_1$$

Realizando agrupaciones tenemos:

$$M_{c7} + M'_{c7} = (mf_{c7} + mf'_{c7}) + (k_{c7} + a_{c7}) * \theta_3 + (k_{c7} + a_{c7}) * \theta_7 + \dots$$

$$(b_{c7} + b'_{c7}) * \delta_1 + (b'_{c7} + b_{c7}) * \delta_2$$

Dividiendo la expresión para la longitud del elemento L:

$$\frac{M_{c7} + M'_{c7}}{L} = \frac{(mf_{c7} + mf'_{c7})}{L} + \frac{(k_{c7} + a_{c7})}{L} * \theta_3 + \frac{(k'_{c7} + a_{c7})}{L} * \theta_7 + \dots$$

$$\frac{(b_{c7} + b'_{c7})}{L} * \delta_1 + \frac{(b'_{c7} + b_{c7})}{L} * \delta_2$$

Y siendo:

$$b_{c7} = \frac{k_{c7} + a_{c7}}{L} = b'_{c7}$$

$$t_{c7} = \frac{b_{c7} + b'_{c7}}{L}$$

Reemplazando en la expresión tenemos:

$$\frac{M_{c7} + M'_{c7}}{L} = \frac{(mf_{c7} + mf'_{c7})}{L} + b_{c7} * \theta_3 + b'_{c7} * \theta_7 + t_{c7} * \delta_1 + t_{c7} * \delta_2$$

Por teoría de estructuras sabemos que:

$$V_{ci} = \frac{M + M'}{L}$$

$$V_{c7} = \frac{(mf_{c7} + mf'_{c7})}{L} + b_{c7} * \theta_3 + b'_{c7} * \theta_7 + t_{c7} * \delta_1 + t_{c7} * \delta_2$$

Dado que V tiene dos componentes, uno asociado al cortante de empotramiento perfecto y el otro asociado a los corrimientos y giros en los nudos, entonces llamaremos Hf al cortante producido por empotramiento perfecto de los elementos:

$$Hf_{c7} = \frac{(mf_{c7} + mf'_{c7})}{L}$$

$$V_{c7} = Hf_{c7} + b_{c7} * \theta_3 + b'_{c7} * \theta_7 + t_{c7} * \delta_1 + t_{c7} * \delta_2$$

Con este criterio, tendremos que para el nudo 7 del pórtico de análisis surgen las siguientes ecuaciones:

$$V_{c7} = Hf'_{c7} + b_{c7} * \theta_3 + b'_{c7} * \theta_7 + t_{c7} * \delta_1 + t_{c7} * \delta_2$$

$$V_{c11} = Hf_{c11} + b_{c11} * \theta_7 + b'_{c11} * \theta_{11} + t_{c11} * \delta_2 + t_{c11} * \delta_3$$

$V2/n = V_{c7} + V_{c11}$, en el nudo 7

$$V^2/n = (Hf_{c11} + Hf'_{c7}) + (b'_{c7} + b_{c11}) * \theta_7 + b_{c7} * \theta_3 + b'_{c11} * \theta_{11} + \dots$$

$$t_{c7} * \delta_1 + (t_{c7} + t_{c11}) * \delta_2 + t_{c11} * \delta_3$$

Llamaremos V2 al cortante producido en el nivel 2 del p3rtico, de forma general tenemos:

$$V2 = (V_{c5} + V_{c9}) + (V_{c6} + V_{c10}) + (V_{c7} + V_{c11}) + (V_{c8} + V_{c12})$$

Llamemos $S = \sum V_i$ concurrentes a los nudos del piso y $T = \sum t$ concurrentes a los nudos del piso, por lo tanto la expresi3n resultante ser3:

$$S = (b'_{c5} + b_{c9}) * \theta_5 + (b'_{c6} + b_{c10}) * \theta_6 + (b'_{c7} + b_{c11}) * \theta_7 + (b'_{c8} + b_{c12}) * \theta_8 + \dots$$

$$b_{c5} * \theta_1 + b_{c6} * \theta_2 + b_{c7} * \theta_3 + b_{c8} * \theta_4 + b'_{c9} * \theta_9 + b'_{c10} * \theta_{10} + b'_{c11} * \theta_{11} + \dots$$

$$b'_{c12} * \theta_{12} + (t_{c5} + t_{c6} + t_{c7} + t_{c8}) * \delta_1 + T2 * \delta_2 + (t_{c9} + t_{c10} + t_{c11} + t_{c12}) * \delta_3$$

Siendo T2 igual a:

$$T2 = t_{c5} + t_{c6} + t_{c7} + t_{c8} + t_{c9} + t_{c10} + t_{c11} + t_{c12}$$

Se proceder3 de manera an3loga para el resto de niveles, nuevamente colocaremos en forma matricial las ecuaciones descritas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	θ1	-M1	
A1	av1			ac5								bc1+b'c5	bc5		θ2	-M2	
av1	A2	av2			ac6							bc2+b'c6	bc6		θ3	-M3	
	av2	A3	av3			ac7						bc3+b'c7	bc7		θ4	-M4	
		av3	A4				ac8					bc4+b'c8	bc8		θ5	-M5	
				ac5	A5	av4		ac9				b'c5	bc5+b'c9	bc9	θ6	-M6	
					av4	A6	av5		ac10			b'c6	bc6+b'c10	bc10	θ7	-M7	
						av5	A7	av6		ac11		b'c7	bc7+b'c11	bc11	θ8	-M8	
							av6	A8			ac12	b'c8	bc8+b'c12	bc12	θ9	-M9	
									A9	av7			b'c9	bc9	θ10	-M10	
									av7	A10	av8		b'c10	bc10	θ11	-M11	
										av8	A11	av9		b'c11	bc11	θ12	-M12
										av9	A12			b'c12	bc12		
bc1+b'c5 bc2+b'c6 bc3+b'c7 bc4+b'c8				b'c5	b'c6	b'c7	b'c8					T1	t5+t6+t7+t8		θ1	S1	
bc5	bc6	bc7	bc8	bc5+b'c9	bc6+b'c10	bc7+b'c11	bc8+b'c12	b'c9	b'c10	b'c11	b'c12	t5+t6+t7+t8	T2	t9+t10+t11+t12	θ2	S2	
				bc9	bc10	bc11	bc12	bc9	bc10	bc11	bc12		t9+t10+t11+t12	T3	θ3	S3	

Figura 2.4: Matriz de Rigidez del pórtico

Los espacios en blanco serán llenados con ceros, de esta manera hemos encontrado la matriz de rigidez del pórtico y hemos planteado la ecuación matricial para la resolución de pórticos planos, la cual de acuerdo con Aguiar (2004), escrita en forma general es:

$$\bar{K} * \bar{q} = \bar{Q}$$

En donde K es la matriz de rigidez del pórtico, q es el vector que contiene los giros producidos en los nudos por el sistema de cargas y Q es el vector que contiene las cargas aplicadas, si multiplicamos ambos miembros por la inversa K^{-1} , obtendremos los giros y corrimientos en los nudos:

$$\bar{q} = \bar{K}^{-1} * \bar{Q}$$

Una vez obtenido el vector de giros y corrimientos de nudos, se puede aplicar la ecuación de Manney descrita anteriormente a fin de encontrar los momentos en los elementos estructurales provocados por el sistema de cargas aplicadas al pórtico analizado. Con ello para el caso de Carga Muerta y Carga Viva se asumirá cero para los valores de S1, S2 y S3; y para el caso de la Carga Sísmica se asumirá cero para los momentos de empotramiento perfecto concurrentes en los nudos M (M1, M2, etc), de esta manera al resolver la ecuación matricial encontraremos el vector de giros y corrimientos lo que nos permitirá encontrar las solicitaciones en las barras al resolver la

ecuación de Manney de cada una. Dado que las solicitaciones resultantes por estos estados de carga son aditivos de acuerdo con el principio de superposición de efectos entonces bastará aplicar las combinaciones de carga establecidas en los Códigos para proceder al diseño en hormigón armado.