

**ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO**

**DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**PROYECTO DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO EN INGENIERÍA**

**“ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DE CONTROLADORES  
DIGITALES BASADOS EN EL MÉTODO DE UBICACIÓN  
DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL”**

**José Santiago Villalba Orellana**

**SANGOLQUÍ – ECUADOR**

**2008**

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente Proyecto de Grado fue realizado en su totalidad por el **Sr. José Santiago Villalba Orellana** bajo nuestra dirección, como requisito previo para la obtención del título en Ingeniería Electrónica.

---

**Sr. Ing. Rodolfo Gordillo**

**DIRECTOR DE TESIS**

---

**Sr. Ing. Víctor Proaño**

**CODIRECTOR DE TESIS**

## **AGRADECIMIENTO**

Ante todo quisiera agradecer a Dios quien mediante su guía divina me ha ayudado a ser un hombre de bien permitiéndome tener una familia maravillosa y obtener mi título profesional.

A mis padres Marco y Pilar quienes han sido unos padres ejemplares y maravillosos y que gracias a sus esfuerzos y apoyo incondicional he llegado a ser quien soy.

A mis hermanos Marco, Paola y Lorena quienes han sido un gran apoyo en toda mi vida, han sido unos hermanos invaluable y más que hermanos han sido unos amigos para mí.

Al resto de mi familia quienes también han sido un soporte para mí, y mis amigos quienes me han apoyado a lo largo de toda mi carrera y han estado junto a mí en los buenos y malos momentos.

Por último quisiera agradecer a todos los profesores de la Escuela Politécnica del Ejército ya que han compartido sus conocimientos guiándome a lo largo de toda mi carrera, y sobre todo un agradecimiento al Sr. Ing. Rodolfo Gordillo quien fue un apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y como Director de proyecto supo guiarme con sus conocimientos para poder concluir este proyecto de grado con éxito, también un agradecimiento especial al Sr. Ing. Víctor Proaño quien también fue un apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y supo guiarme como Codirector de tesis con éxito para concluir el presente proyecto.

## **DEDICATORIA**

Dedico el presente proyecto a Dios quien ha sido y será la guía incondicional en mi vida, a mis padres Marco y Pilar quienes mediante su sacrificio han sabido darme la mejor de las educaciones y me han ayudado a ser un hombre de bien, espero seguir llenándolos de satisfacciones en adelante sabiendo compensar todo lo que hacen por mí.

A mis hermanas Lorena y Paola quienes han estado junto a mi en las buenas y en las malas, han sido unas maravillosas hermanas; a mi hermano Marco a quien considero mi mejor amigo y la persona que siempre ha estado a mi lado brindándome su apoyo incondicional.

A mi familia y a mis amigos que siempre han estado a mi lado en los momentos buenos y difíciles de mi vida.

## PRÓLOGO

El control automático digital es hoy en día una de las herramientas imprescindibles a nivel industrial, por ello la importancia del desarrollo de controladores digitales ya que permiten una mejora de control a nivel industrial. La teoría de control moderna juega un papel muy importante a nivel industrial ya que permite un manejo más simple de sistemas a nivel industrial. Este proyecto en particular presenta el diseño y análisis de controladores digitales basados en el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial, permitiendo realizar un correcto control para cualquier tipo de planta que se presente previo la obtención de su respectiva ley de control.

Previo al desarrollo de los controladores digitales, se procederá al desarrollo de fundamentos teóricos como lo son la obtención de la ley de control, el análisis a las actuales problemáticas de control que presentan los controladores digitales como lo son los problemas servo y de regulación, por ello la importancia del desarrollo de este tipo de controladores ya con el diseño de controladores con dos grados de libertad van a permitir separar y solucionar ambas problemáticas la servo a través del modelo en Feedforward el mismo que permitirá un correcto seguimiento del sistema a las señales de comando; y la solución de las problemáticas de regulación las cuales mediante el diseño de un sistema realimentado permite generar un correcto rechazo a inyección de ruido de medición y a perturbaciones.

Una vez que este aclarada la teoría con la cual vamos a desarrollar los controladores, se procederá al diseño para tres casos de estudio en particular; un controlador para un Doble Integrador, un Oscilador Armónico y Brazo Robótico Flexible.

Realizado el diseño de los tres controladores, se procederá a realizar el esquema de simulación y un respectivo análisis de resultados variando parámetros de diseño los cuales darán una visión clara del comportamiento de los controladores a través de la variación de los mismos.

Luego se realizará una comparación con otros métodos actuales de control complejo como los son el Root –Locus y el Predictor Smith, por último se procederá a generar las respectivas conclusiones y recomendaciones acerca de las experiencias y análisis de todo lo desarrollado en el proyecto.

# ÍNDICE

**CONTENIDO** **PÁG**

## **CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN**

1.1 Introducción.....	1
1.1 Justificación e Importancia .....	2
1.2 Alcance del Proyecto.....	3
1.3 Objetivos .....	4
1.3.1 Objetivo General .....	4
1.3.2 Objetivos Específicos .....	5
1.4 Organización del Informe .....	5

## **CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

2.1 Introducción.....	7
2.1.1 Características Básicas del Control Digital.....	7
2.3 Problemática de Diseño .....	10
2.3 Cancelación de Polos y Ceros .....	22
2.4 Separación de la Perturbación y de la Respuesta al Comando de Señal .....	26
2.5 Mejora a la Respuesta de Perturbaciones .....	30
2.6 Polinomio Característico .....	33
2.6.1 Influencia del Polinomio del Observador .....	33
2.6.1.1 Ejemplo.- Influencia del Polinomio del Observador con el Polinomio 1:.....	34
2.7 Ecuación Diophantina .....	35
2.7.1 Condiciones de Causalidad.....	38

### **CAPÍTULO 3: DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES**

3.1. Introducción.....	39
3.2 Diseño de un Controlador Para un Doble Integrador .....	39
3.3 Diseño de un Controlador Para un Oscilador Armónico.....	44
3.3 Diseño de un Controlador Para un Brazo Robótico Flexible .....	49

### **CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE SIMULACIÓN**

4.1 Introducción.....	57
4.2 Esquema de Simulación de un Controlador Para un Doble Integrador .....	57
4.2.1 Modificando $\zeta$ y $\omega$ .....	62
4.2.2 Modificando los Polos del Observador .....	65
4.2.3 Modificando el Período de Muestreo T.....	68
4.2.4 Sensibilidad al Modelamiento de Errores .....	70
4.3 Esquema de Simulación de un Controlador Para un Oscilador Armónico .....	71
4.3.1 Cambiando los Polos del Observador .....	73
4.3.2 Cambiando el Período de Muestreo.....	74
4.3.3 Robustez .....	76
4.4 Esquema de Simulación de un Controlador Para un Brazo Robótico Flexible.....	78
4.4.1 Variando los Polos del Observador y Del Polinomio Característico .....	80
4.4.2 Modificando $\zeta_m$ y $\omega_m$ .....	81
4.5 Esquema de Simulación de un Controlador Para un Doble Integrador Mediante Funciones.....	85
4.6 Esquema de simulación de un Controlador Para un Oscilador Armónico Mediante Funciones.....	88

### **CAPÍTULO 5: RELACIÓN CON OTROS MÉTODOS DE DISEÑO**

5.1 Introducción.....	91
5.2 Root - Locus.....	91
5.3 Predictor Smith.....	93

## **CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

6.1 Conclusiones.....	99
6.2 Recomendaciones.....	102
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
ANEXOS.....	106
ÍNDICE DE FIGURAS.....	129

## CAPÍTULO I

### 1.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de control juega un papel importante tanto en la enseñanza como en la compleja tecnología actual, por ello aunque en el pasado el objetivo del control era mantener un control estable, hoy en día esta teoría no es muy factible ya que se conoce que las industrias se enfrentan a un mercado cambiante y difícil de predecir, por ello se ven obligados a operar sus procesos productivos en consonancia con la evolución del mercado para poderse mantener competitivas y rentables; por ello en la actualidad en todo proceso industrial y de manufactura se ha optado por la implementación de un control automático el cual ha sido una herramienta fundamental en el avance de la ingeniería y la ciencia. Por ejemplo, el control automático en nuestro caso automático digital ha sido imprescindible en operaciones industriales en el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo en las industrias de proceso; además ha sido también imprescindible en el control numérico de las máquinas – herramienta de industrias de manufactura, en el ensamblaje automotriz, etc.

Debido a estos antecedentes el control digital se ha convertido en una de la herramientas necesarias en el ámbito industrial además que permiten obtener un desempeño óptimo de los sistemas dinámicos, efectuar con mayor flexibilidad y eficacia procesos repetitivos y rutinarios de producción; por esto y mucho más se realizará un análisis de controladores digitales versus los controladores análogos convencionales, teniendo como resultado que los controladores digitales podrán brindar mayor versatilidad que los análogos ya que si se llegase a presentar alguna falla en el controlador con uno digital se podrá corregir ésta inmediatamente mediante programación, en cambio con un análogo será mucho

más difícil corregir esta situación y esto presenta problemas a la larga en procesos productivos.

Uno de los objetivos de este estudio se centrará en el estudio de la ley de control discreta la cual se la puede obtener mediante dos métodos:

Mediante espacio de estados utilizando cálculos matriciales y mediante ubicación de polos el cual utiliza cálculos polinomiales los mismos que consideran la problemática del modelamiento de errores teniendo en cuenta que es mucho más conveniente trabajar con formulación de sistemas de Entrada / Salida que con formulación de espacio de estados, así se obtendrá una nueva visión de controladores digitales y nuevos métodos computacionales.

## 1.1 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

El propósito de análisis de desempeño de controladores digitales es el de desarrollar controladores más óptimos que cumplan con requerimientos de la ley de control discreta; en este caso el controlador basado en ubicación de polos con enfoque polinomial es el más adecuado para los sistemas que se van a simular y comparar a lo largo del proyecto ya que estos controladores permitirán la obtención de un sistema con específico lazo cerrado con característica polinomial detallada, esto fue analizado por Kart J. Åstrom en sistemas digitales controlados con ello se podrá obtener un controlador más avanzado que los conocidos convencionalmente con un tiempo de respuesta a perturbaciones mucho más óptimo y de forma más precisa.

En el proyecto se aplicaron y estudiaron diversos métodos de control, en los cuales se cumplió las etapas de especificación del método, modelado, diseño y simulación en tiempo real. Pese a los problemas de diseño y simulación el propósito del proyecto es el de buscar nuevos métodos de control comparándolos o analizándolos con los métodos ya existentes.

Se pudo verificar la importancia de este estudio ya que los controladores digitales permiten desarrollar técnicas de control avanzadas las cuales no son

desarrolladas normalmente en los cursos de Ingeniería de Control dictados en el transcurso de la carrera; además se pudo enfrentar esta técnica de control con otras técnicas de control avanzadas no estudiadas como lo son el Predictor Smith y estudiadas como el Root Locus; de este modo se pudo tener una amplia gama de controladores a escoger al momento que se requiera ciertos algoritmos de control para los diferentes modelamientos de control existentes.

Para el entorno del proyecto se utilizó un método computacional el cual permitió sistematizar el diseño e implementación de la teoría de control haciéndola más llamativa, aplicable, competitiva y eficiente; el entorno utilizado fue Matlab y se utilizó herramientas como Simulink.

Este entorno va a poder ser mejorado permanentemente adicionando nuevas herramientas y actualizando otras.

## **1.2 ALCANCE DEL PROYECTO**

Este proyecto tiene como finalidad analizar el método de ubicación de polos para el diseño de controladores digitales desde el punto de vista polinomial. La aplicación de esta técnica permite obtener estructuras de filtros digitales avanzados.

En el proyecto se parte de la hipótesis de que la teoría de control juega un papel importante tanto en la enseñanza como en la compleja tecnología actual, aportando con nuevos métodos de análisis y diseño a partir de modelos matemáticos que en muchas ocasiones son posibles de obtener a un costo bajo en lugar de obtener un comportamiento deseado del sistema a través de técnicas clásicas de sintonización que por lo general implican un menor esfuerzo y un buen desempeño; pero lo que se desea obtener en un buen sistema de control es un comportamiento óptimo del sistema, cumplimiento de requerimientos como estándares de calidad y con esas técnicas clásicas en ciertos casos los resultados en cuanto a lo que se desea obtener son dudosos.

La dificultad que existe en cuanto al diseño de este tipo de controladores, simulación, implementación, prueba y ajuste de reguladores de base matemática lo cual dificulta su utilización se lo resuelve utilizando entornos de programación mediante rutinas computacionales de última generación y altamente probadas como Matlab/Simulink.

Como base del proyecto se logrará una interesante caracterización para estabilizar los controladores a través de la obtención del cálculo de la ley de control discreta y se realizará el análisis y simulación del comportamiento de los controladores y su programación a través de rutinas computacionales con Matlab/Simulink; el problema de diseño se lo realizará a través de la ecuación polinomial la cual es la parte crucial para la solución de este problema, por ello mediante la ecuación polinomial se generarán algoritmos y condiciones de resolución de la problemática de la ley de control discreta, además se deberá considerar aspectos como la cancelación de polos y ceros, la separación de respuestas al comando de señales y respuestas a las perturbaciones.

La simulación contemplará el análisis de estudio de casos de plantas prototipo y nos permitirá evaluar el desempeño de los controladores para poder enfrentarlo con otras técnicas de control que no se han podido estudiar a lo largo de la carrera como lo son el Predictor Smith y el Root Locus.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 OBJETIVO GENERAL**

- ✓ Diseñar y evaluar mediante simulaciones el desempeño de controladores digitales basados en el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial, cubriendo las etapas de modelado, diseño, simulación y programación en tiempo real.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Obtener el cálculo de leyes de control discretas mediante el estudio de la ley de control discreta.
- ✓ Desarrollar rutinas computacionales para evaluar mediante diseño y simulación el desempeño de las leyes de control discretas y compararlas con métodos de control clásicos y modernos, con base en su comportamiento sobre un sistema físico.
- ✓ Extender el método de ubicación de polos y analizar su relación con técnicas de control avanzadas como el Smith Predictor y el Root Locus.

### 1.4 ORGANIZACIÓN DEL INFORME

El presente informe de investigación está organizado de la manera que se expone a continuación:

En el Capítulo 1 (Introducción) se presentaron los objetivos finalmente alcanzados en el trabajo de investigación, además de la importancia y alcance del mismo.

En el Capítulo 2 (Fundamentos Teóricos) se dan a conocer algunos conceptos y métodos básicos utilizados en el proyecto.

En el Capítulo 3 (Diseño de Controladores Digitales) se presenta un panorama del problema de modelado y control para un Doble Integrador, un Oscilador Armónico y un Brazo Robótico Flexible.

En el Capítulo 4 (Resultados de Simulación) se presentan ejemplos simulados en el entorno computacional que se utilizó Matlab de los controladores digitales expuestos anteriormente.

En el Capítulo 5 (Relación con otras Técnicas de Control) se presenta una comparación de nuestro controlador con respecto a técnicas de control avanzadas como lo son el Predictor Smith y el Root Locus.

En el Capítulo 6 se dan las conclusiones del trabajo y las recomendaciones para trabajos futuros.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los conceptos, ideas y métodos generales utilizados en el proyecto, sin embargo es importante aclarar que en este trabajo de investigación no se obtienen nuevos resultados teóricos sino que se aplican métodos, metodologías, teorías y herramientas obtenidas de otros autores.

##### 2.1.1 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DEL CONTROL DIGITAL

Existen varios aspectos que hacen al control digital más eficiente que el control analógico los cuales son:

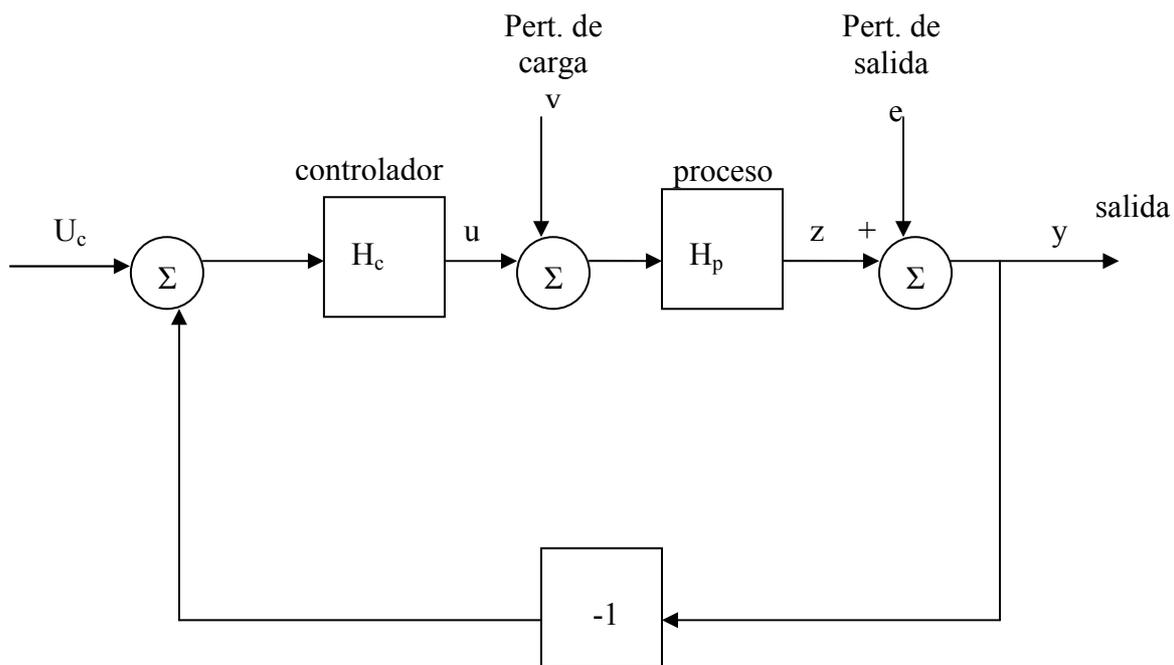
- ✓ Cuando se diseña un control digital no existe límite en la complejidad del algoritmo, cosa que sí sucedía anteriormente con los controladores analógicos.
- ✓ Los controladores digitales poseen facilidad de ajuste y cambio, esto quiere decir que se puede cambiar totalmente las operaciones del controlador a efectuar simplemente colocando un nuevo programa lo cual genera mayor versatilidad en el mismo; por el contrario un cambio en el control analógico implica en el mejor de los casos un cambio de componentes si no un cambio del controlador completo.

- ✓ Los controladores digitales brindan mayor exactitud y estabilidad en el cálculo ya que no presentan ninguna deriva u otras fuentes de error, este tipo de controladores realizan cálculos complejos con exactitud constante a alta velocidad. En la actualidad las computadoras digitales pueden realizar cálculos casi hasta cualquier grado de exactitud deseado a un costo relativamente pequeño.
- ✓ Además de utilizar la computadora para realizar el control digital se puede utilizarla para otros fines tales como supervisión, alarmas, tener un archivo de datos de la planta, administración de la planta, realizar un control centralizado, etc.
- ✓ No siempre se justifica realizar un control digital ya que si se desea controlar un número reducido de variables sería más eficiente realizar un control analógico por cuestión de costos.

Para realizar el análisis de desempeño de controladores digitales por el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial, primero hay que analizar teóricamente los problemas de diseño del controlador como lo son:

Rechazo a las perturbaciones, la sensibilidad al modelamiento de errores en el proceso de diseño y la cancelación de polos y ceros. También se analizarán los muestreadores los cuales son fundamentales para realizar el control digital y con ellos se podrá analizar los retenedores de orden cero (ZOH) lo cual vamos a utilizar en el diseño del controlador, también se analizará el controlador en feedback y feedforward; y por último se estudiará la importancia de la ecuación Diophantina.

El diseño de un controlador digital es similar al diseño de un sistema en tiempo continuo. En la figura a continuación se describe un diagrama de bloques de un típico sistema de control:



**Figura 2.1.1.1. Diagrama Típico de un Sistema de Control.**

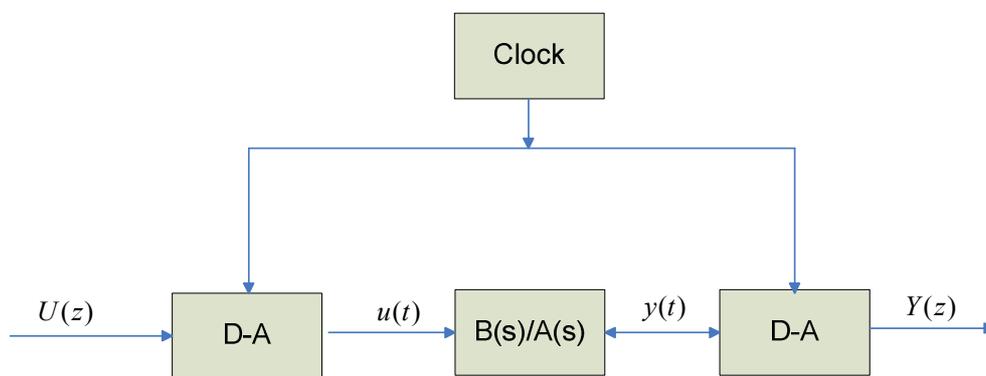
Se puede apreciar claramente que el sistema se ve influenciado por tres señales externas las cuales son la señal de comando “ $u_c$ ” y las perturbaciones “ $v$ ” y “ $e$ ”. La señal de comando es utilizada para hacer que el sistema tenga un cierto comportamiento, la señal “ $v$ ” representa las perturbaciones de carga las cuales hacen que el sistema se salga de su comportamiento deseado. Por último la señal “ $e$ ” representa el ruido de medición que interfiere con la información obtenida de los sensores. Las perturbaciones pueden ingresar a nuestro sistema de varias maneras como señal de comando por ello pueden excitar los modos del sistema. Como se sabe en sistemas lineales se sigue el principio de superposición de señales que ingresan al sistema. El ruido de medición es inyectado en un proceso realimentado y viene dado por altas frecuencias, por último las perturbaciones de carga por lo general vienen dadas en bajas frecuencias.

“Los problemas de control pueden ser determinados ampliamente y clasificados en servo problemas o en problemas de regulación. El modelo que se va a plantear soluciona ambos problemas, por lo general el mayor inconveniente en problemas de regulación es el compromiso entre la reducción de perturbaciones de carga y con el ingreso de ruido de medición; y la respuesta a

los servo problemas es tratar de que la señal de salida responda de forma deseada a la señal de comando.” [1]

## 2.2. PROBLEMÁTICA DE DISEÑO

Para analizar la problemática primero partimos asumiendo que el sistema tiene una variable de control “ $u$ ” y una variable de salida medible “ $y$ ” la cual se representa en el siguiente modelo de entrada – salida:



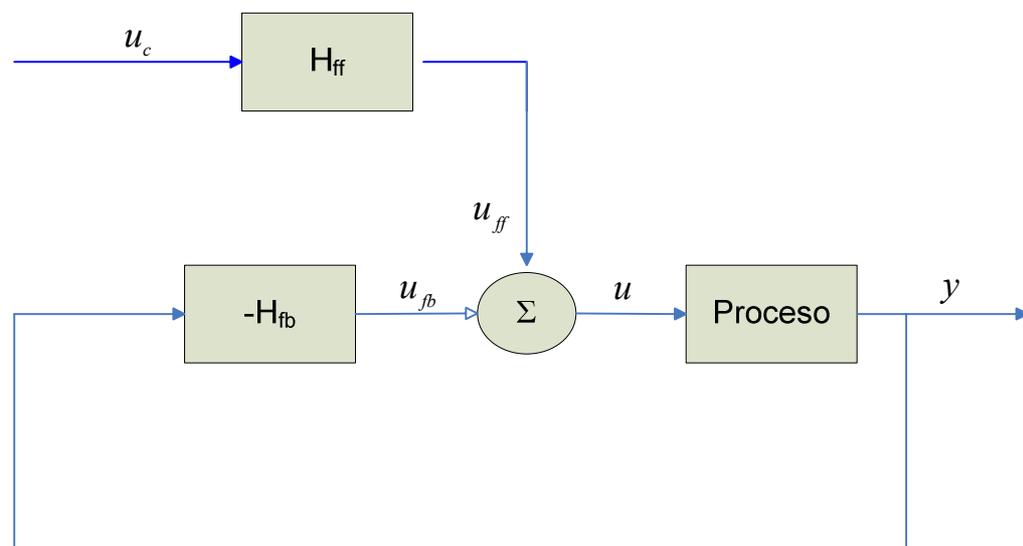
**Figura 2.2.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Tiempo Continuo Conectado a Conversores A-D y D-A**

La idea del controlador es obtener un sistema discreto partiendo de un continuo por ello si se parte de la figura (2.2.1) se obtiene un sistema del tipo  $\frac{B(z)}{A(z)}$  teniendo como resultado el siguiente modelo entrada-salida en tiempo discreto:

$$A(z)Y(z) = B(z)U(z) \quad (2.2.1)$$

“ Donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son los polinomios del modelo en tiempo discreto, para ello se asume que el polinomio de  $B(z)$  es de menor grado que el polinomio de  $A(z)$ , que los polinomios  $A(z)$  y  $B(z)$  no tienen factores en común y que el polinomio  $A(z)$  tiene que ser normalizado de esta manera el coeficiente del término con mayor valor en  $z$  es uno; por esta característica se le denomina al polinomio  $A(z)$  mónico. ” [1]

En esta sección se analizará un problema simple de diseño el cual permitirá encontrar un controlador de dos grados de libertad para un sistema lineal con salida realimentada. La idea de realizar un controlador de dos grados de libertad es que debido a que los problemas de control se pueden clasificar en servo problemas los cuales se originan por la problemática del seguimiento de señales de comando, y los problemas de regulación cuya problemática se basa en la reducción de las perturbaciones de carga y las fluctuaciones generadas por el ruido de medición inyectado al sistema a través de la realimentación. A continuación se puede apreciar un sistema realimentado con una estructura de dos grados de libertad:



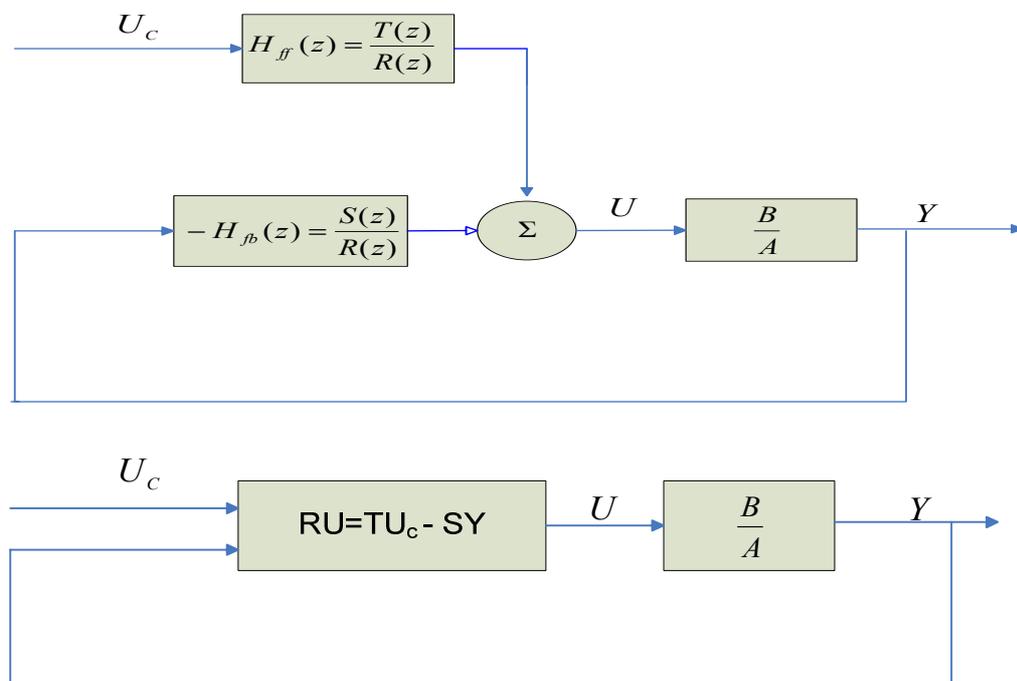
**Figura 2.2.2. Diagrama de Bloques de un Sistema Realimentado con Estructura de dos Grados de Libertad.**

“Esta configuración tiene la ventaja de que ambas problemáticas la de regulación y la servo son separadas de esta manera el controlador de realimentación  $H_{fb}$  es diseñado de tal modo que el proceso se vuelve insensitivo a las perturbaciones, al ruido de medición y a las incertidumbres, únicamente hace referencia al seguimiento de señal de comando, por otra parte el controlador en feedforward  $H_{ff}$  es diseñado para obtener las propiedades de regulación deseadas.

La respuesta de un sistema en lazo cerrado puede ser juzgada en como este sistema responde a las perturbaciones que se le aplican al proceso en condiciones iniciales. ” [1]

“En el diseño por ubicación de polos se asume que las especificaciones del sistema son dadas por las características del polinomio en lazo cerrado. También hay que tener en cuenta que el controlador tiene ciertas propiedades como por ejemplo acción integral. Las variables que se van a tomar en cuenta para el proceso de diseño son las características del polinomio en lazo cerrado y el período de muestreo. ” [1]

Se puede observar que el controlador general a diseñar esta basado en un controlador en feedback y controlador en feedforward, por ello el controlador general basado en la figura 2.2.3 consta de dos entradas y una salida; las entradas vienen dadas por la señal de referencia “ $y$ ” y “ $u_c$ ”, por otra parte la señal de salida viene dada por la salida medible “ $u$ ”. Se puede representar a un controlador lineal como:



**Figura 2.2.3. Diagrama de Bloques de un Sistema Realimentado.**

$$R(z)U(z) = T(z)U_c(z) - S(z)Y(z) \quad (2.2.2.)$$

“Donde  $R(z)$ ,  $S(z)$  y  $T(z)$  son los polinomios del compensador en adelanto. Se puede escoger el polinomio  $R(z)$  de tal manera que su coeficiente de más alto grado en  $z$  sea la unidad.

La ley de control expuesta en la ecuación 2.2.2 representa la combinación de un controlador feedforward con la función de transferencia  $H_{ff}(z) = T(z)/R(z)$  y un realimentado o feedback con un a función de transferencia  $H_{fb} = S(z)/R(z)$ .

Para obtener un controlador causal se requiere que el grado del polinomio  $R(z)$  sea mayor o igual al grado de los polinomios  $S(z)$  y  $T(z)$ .

Para poder determinar la ecuación característica del sistema en lazo cerrado y determinar las condiciones que satisfagan la ecuación lo que se procede a realizar es eliminar el factor  $U(z)$  de las ecuaciones 2.2.1. y 2.2.2. y realizar una multiplicación de las ecuaciones obteniendo:

$$(A(z)R(z) + B(z)S(z))Y(z) = B(z)T(z)U_c(z) \quad (2.2.3.)$$

Por lo tanto el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es el siguiente:

$$A_{cl}(z) = A(z)R(z) + B(z)S(z) \quad (2.2.4.)$$

Con esto la problemática del diseño por ubicación de polos se reduce simplemente a un problema algebraico en el cual se tienen que encontrar los polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$  que satisfagan la ecuación 2.2.4. dada por los polinomios  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $A_{cl}(z)$ .” [1] Esta ecuación la cual toma un papel muy importante en el diseño polinomial se la conoce como la ecuación Diophantina la cual se explica en la sección 2.7. La ecuación 2.2.4 podrá ser resuelta únicamente si los polinomios  $A(z)$  y  $B(z)$  no tienen factores en común.

Para poder determinar a que equivale el polinomio  $A_{cl}$  se procede a analizar el diseño en espacio de estados para el cual se tiene que el controlador basado en un estado realimentado y un observador se asume que el sistema viene descrito por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) + v \\ y &= Cx(t) + Dx(t)\end{aligned}\tag{2.2.5.}$$

“ El sistema va a tener  $n$  estados,  $r$  entradas y  $p$  salidas,  $u$  representa las variables de control,  $x$  representa el vector de estado,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  representan las matrices constantes,  $v$  es la perturbación que actúa sobre el proceso la misma que tiene más energía cuando actúa en bajas frecuencias; asumiendo que al tiempo  $kh$  el estado  $x(kh)$  el sistema está disponible y que una constante es aplicada a la entrada del sistema en el tiempo  $kh \leq t < kh + h$ , en este intervalo el estado del sistema vendrá descrito por: ” [1]

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{A(t-kh)}x(kh) + \int_{kh}^t e^{A(t-s')}Bu(s')ds' \\ x(t) &= e^{A(t-kh)}x(kh) + \int_{kh}^t e^{A(t-s')}ds' Bu(kh) \\ x(t) &= e^{A(t-kh)}x(kh) + \int_0^{t-kh} e^{As}ds Bu(kh) \\ x(t) &= \Phi(t, kh)x(kh) + \Gamma(t, kh)u(kh)\end{aligned}\tag{2.2.6.}$$

Donde “ $v$ ” es la perturbación descrita por

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= A_w w \\ v &= C_w w\end{aligned}\tag{2.2.7.}$$

“La matriz  $A_w$  tiene los ceros en el origen del eje imaginario o en el semiplano derecho. Un caso común es cuando la perturbación “ $v$ ” es una constante Esto viene descrito por  $A_w = 0$ ; otro caso son perturbaciones sinusoidales las cuales corresponden a:

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \omega_o \\ -\omega_o & 0 \end{pmatrix}$$

Se asume que  $\omega$  puede ser medido. Ahora introduciendo el vector de estado:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}$$

Con ello se puede notar el cambio de estado debido al período de muestreo. Para considerar la situación del sistema en la siguiente etapa de muestreo se tiene que:

$$x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh)$$

$$y(hk) = Cx(kh) + Du(kh)$$

Donde

$$\Phi = \Phi(kh + h, kh) = e^{Ah}$$

$$\Gamma = \Gamma(kh + h, kh) = \int_0^h e^{As} ds B$$

Dado que la salida  $y(kh)$  en mucho de los casos es medida antes de que la señal de control  $u(kh)$  sea aplicada al sistema se tiene que la matriz  $D=0$ .

El sistema aumentado se puede describir como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & C_\omega \\ 0 & A_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (C \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.8.}$$

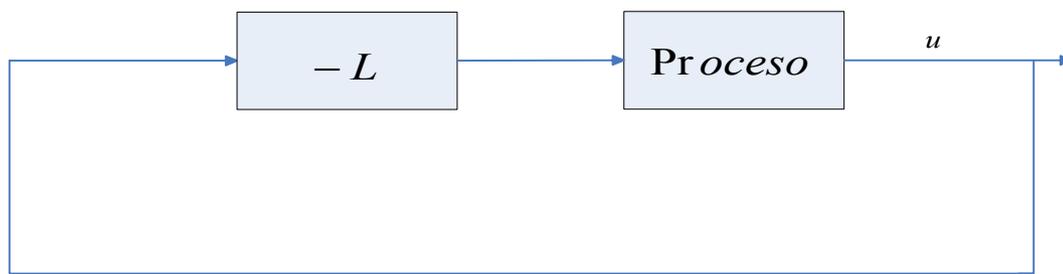
Muestreando el sistema obtenemos el siguiente sistema en tiempo discreto:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \phi_{x\omega} \\ 0 & \phi_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \quad (2.2.9.)$$

$$y = (C \quad 0) \begin{pmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}$$

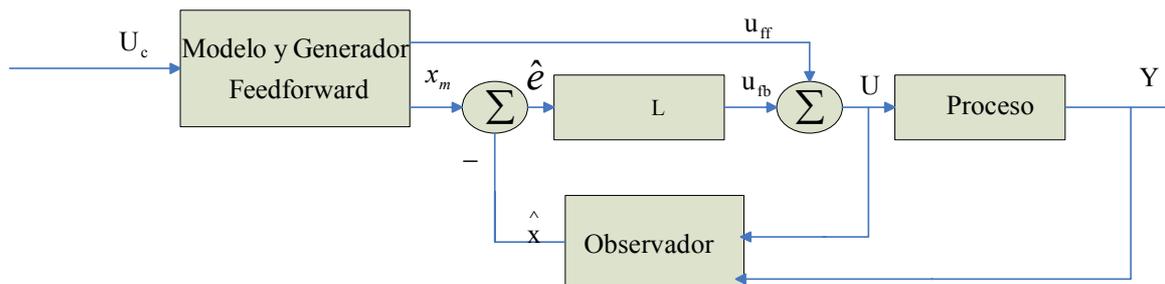
Es importante especificar la información disponible para generar la señal de control, una simple situación se da cuando todas las variables de estado son medidas sin error alguno, con ello un controlador lineal general es un controlador lineal realimentado desde todos sus estados y viene dado por:

$$u(k) = -Lx(k) \quad (2.2.10.)$$



**Figura 2.2.4. Diagrama de Bloques de un Controlador Lineal Realimentado.**

La respuesta a las señales de comando puede ser obtenida utilizando un controlador que tenga dos grados de libertad, el cual fue descrito en la figura 2.2.2, pero una visión adicional del controlador a diseñar considerando una representación en espacio de estados se indica en la figura a continuación:



**Figura 2.2.5. Diagrama de Bloques de un Controlador de dos Grados de Libertad Basado en Estado Realimentado y un Observador.**

En la figura 2.2.5. el controlador viene representado por tres bloques: el generador de señales feedforward, un observador y el realimentador de estado  $L$ . El generador feedforward tiene señales de comando como entradas y genera el comportamiento deseado de los estados  $x_m$  del sistema y la señal feedforward  $u_{ff}$ . La señal  $u_{ff}$  del feedforward produce una entrada en el proceso que va a generar la respuesta deseada a las señales de comando. El generador de feedforward puede ser implementado como un sistema dinámico descrito a continuación:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= \Phi_m x_m(k) + \Gamma_m u_c(k) \\ u_{ff}(k) &= C_m x_m(k) + D_m u_c(k) \end{aligned} \quad (2.2.11.)$$

El bloque denominado observador también tiene dos entradas, el proceso de entrada – salida, “ $u$ ” y “ $y$ ” respectivamente, y esto genera un estado estimado del proceso. El observador es también un sistema dinámico y viene dado por:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C \hat{x}(k)) \quad (2.2.12.)$$

El estado estimado  $\hat{x}$  es comparado con el estado ideal desde un generador feedforward produciendo una señal realimentada:

$$u_{fb}(k) = L \left( x_m(k) - \hat{x}(k) \right) \quad (2.2.13.)$$

La señal feedback  $L(x_m - \hat{x})$  es cero si el error  $e = x_m - \hat{x}$  es cero; si existe diferencia entre  $\hat{x}$  y  $x_m$ , el modelo realimentado o feedback realizará las respectivas correcciones.

Al combinar la solución al problema por ubicación de polos cuando todas las variables de estado son medibles directamente y el problema de encontrar los estados desde la salida del sistema realimentado, sabiendo que el sistema viene descrito por:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{2.2.14.}$$

Si todas las variables son medibles la ley de realimentación de estado viene dada por la ecuación 2.2.10. dando los polos deseados. Cuando el estado no puede ser medido, es razonable utilizar la ley de control expresada a continuación:

$$u(k) = -L\hat{x}(k|k-1)\tag{2.2.15.}$$

Donde  $L$  representa la ley de control,  $\hat{x}$  el valor de estado estimado y se lo obtiene desde el observador lo cual genera:

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))\tag{2.2.16.}$$

Donde  $\Phi$  viene dado por la matriz de estado  $A$ ,  $\Gamma$  por la matriz de estado  $B$  y  $K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$  es la salida estimada del sistema multiplicada por una ganancia  $K$ , cuando el sistema alcanza la salida deseada esta relación se hace cero y el sistema adquiere las características del sistema original. Con la ecuación 2.2.16. la realimentación se convierte en un sistema dinámico de orden  $n$  debido a las dinámicas del observador.

Para demostrar las propiedades deseadas del sistema en lazo cerrado, se introduce la siguiente igualdad:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (2.2.17.)$$

Donde  $\tilde{x}$  representa el error de valor estimado,  $x$  el valor deseado del sistema y  $\hat{x}$  el valor estimado del sistema, reemplazando  $u(k)$  de la ecuación 2.2.15. en la ecuación 2.2.14. se obtiene:

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma L \hat{x}(k|k-1) \quad (2.2.18.)$$

Ahora reemplazando la ecuación 2.2.17. en la ecuación 2.2.18. se tiene que:

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma L (x(k) - \tilde{x}(k|k-1)) \quad (2.2.19.)$$

Por último realizando una sustracción de la ecuación 2.2.14. de la ecuación 2.2.16 se tiene que:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ - \hat{x}(k+1|k) &= \Phi \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C \hat{x}(k|k-1)) \\ \hline \tilde{x}(k+1|k) &= \Phi \tilde{x}(k|k-1) - K(y(k) - C \hat{x}(k|k-1)) \end{aligned}$$

Siendo que  $y(k)$  es igual a  $Cx(k)$  la ecuación final viene dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k) &= (\Phi - KC) \tilde{x}(k|k-1) \\ x(k+1) &= \Phi x(k) - \Gamma L (x(k) - \tilde{x}(k|k-1)) \end{aligned} \quad (2.2.20.)$$

El sistema en lazo cerrado por tanto es de orden  $2n$ . Los valores del sistema en lazo cerrado son los valores de las matrices  $\Phi - \Gamma L$  y  $\Phi - KC$  obtenidas de las ecuaciones 2.2.19 y 2.2.20. respectivamente, los valores de  $\Phi - \Gamma L$  son los polos deseados en lazo cerrado del sistema característico y los valores de  $\Phi - KC$  son los polos del observador. ” [1]

Retomando nuestro estudio desde un enfoque polinomial encontramos que nuestro polinomio característico  $A_{cl}(z)$  puede ser factorado como:

$$A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z) \quad (2.2.21.)$$

“Donde  $A_c(z) = \det(zI - \Phi + \Gamma L)$  y  $A_o(z) = \det(zI - \Phi + KC)$ . Esta factorización corresponde a una separación del controlador realimentado de estado y un observador como se mostró en la figura 2.2.5.

Por esta razón denominamos al polinomio característico  $A_c$  y al polinomio del observador  $A_o$ .

Para completar el diseño se tiene que determinar el polinomio  $T(z)$ . Para ello se parte de la ecuación 2.2.3. la cual indica como el sistema reacciona al comando de señales. La función de transferencia desde la señal de comando a la salida viene dada por:

$$Y(z) = \frac{B(z)T(z)}{A_{cl}(z)} U_c(z) \quad (2.2.22.)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)T(z)}{A_c(z)A_o(z)} U_c(z)$$

Esta ecuación indica que los ceros del sistema en lazo abierto son los mismos ceros del sistema en lazo cerrado a menos que los polinomios  $B(z)$  y  $A(z)$  tengan factores en común. Ahora tenemos que escoger un polinomio  $T(z)$  de tal manera que cancele al polinomio  $A_o(z)$ . Esto implica que el comando de señal es introducido de modo que no genere errores de observador por ello se escoge:

$$T(z) = t_o A_o(z) \quad (2.2.23.)$$

Donde el parámetro  $t_o$  se escoge para obtener la ganancia estática deseada del sistema, por ejemplo si se desea obtener una ganancia unitaria se escoge  $t_o = A_c(1)/B(1)$ .

De esta manera la respuesta al comando de señales viene dada por:

$$Y(z) = \frac{t_o B(z)}{A_c(z)} U_c(z) \quad (2.2.24.)$$

En resumen se ha obtenido el siguiente procedimiento:

El proceso del modelo viene especificado por la función de transferencia  $B(z)/A(z)$ , donde  $A(z)$  y  $B(z)$  no tienen factores en común. Las especificaciones vienen dadas en términos del polinomio característico en lazo cerrado deseado  $A_{cl}(z)$ .

**Paso 1:** Se deben encontrar los polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$ , de manera que  $\deg S(z) \leq \deg R(z)$ , de manera que satisfagan la siguiente ecuación: " [1]

$$A_{cl}(z) = A(z)R(z) + B(z)S(z)$$

Como un ejemplo suponiendo que el polinomio  $A_{cl}$  sea de cuarto grado ya que  $A_c$  puede ser de segundo grado y  $A_o$  también de segundo grado, en la sección (2.7.) se especificará de donde se obtienen estos polinomios.

Ahora suponiendo que el grado del polinomio  $A(z)$  también sea de segundo grado y que el grado del polinomio  $B(z)$  sea de primer grado, para poder satisfacer la ecuación 2.2.4 se tendría que escoger un polinomio  $R(z)$  de orden dos para que al momento de multiplicarlo por  $A(z)$  tengamos un polinomio de orden cuatro cumpliendo con la especificación de  $A_{cl}$  es de cuarto grado.

De esta manera podremos satisfacer una igualdad en la ecuación, ahora podemos escoger el polinomio  $S(z)$  de segundo grado cumpliendo con la condición de  $\deg S(z) \leq \deg R(z)$  esto de manera que al momento que generemos la ecuación  $A.C=I$  obtengamos una matriz cuadrada en  $A$  para poder encontrar las incógnitas del sistema, esto lo podemos verificar más adelante en el diseño de los controladores como por ejemplo en el diseño del doble integrador.

**Paso 2:** Se debe factorar el polinomio característico en lazo cerrado como  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ , donde  $\deg A_o(z) \leq \deg R(z)$ , y tenemos que escoger:

$$T(z) = t_o A_o(z)$$

Donde  $t_o = A_c(1)/B(1)$ , obteniendo la ley de control definida por:

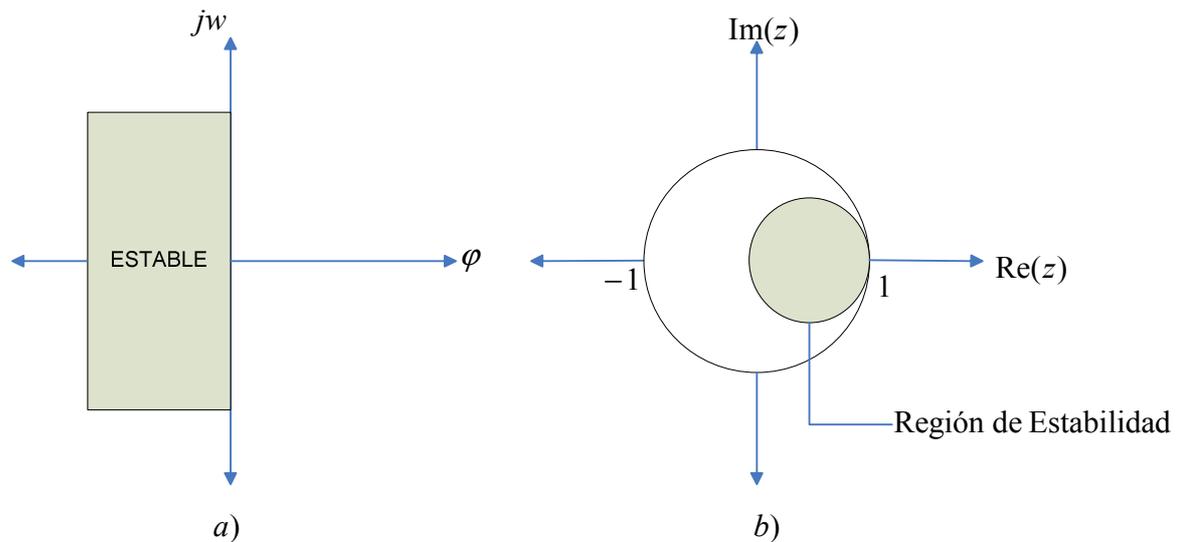
$$R(z) * u(k) = T(z) * u_c(k) - S(z) * y(k)$$

Y la respuesta al comando de señales dada por:

$$A_c(z)y(k) = t_o B(z)u_c(k)$$

## 2.3 CANCELACIÓN DE POLOS Y CEROS

En la sección anterior el diseño asume que no se cancelan polos ni ceros por el controlador en el proceso, pero en ciertos casos es posible que el controlador cancele polos y ceros que estén ubicados en la región específica indicada a continuación:



**Figura 2.3.1. Mapeo de polos estables del plano s al plano z con método de diferencia hacia atrás. (a) Plano s; (b) Plano z.**

Asumiendo que los polinomios A y B son factorizados como:

$$\begin{aligned} A &= A^+ A^- \\ B &= B^+ B^- \end{aligned} \quad (3.3.1.)$$

“ Donde  $A^+$  y  $B^+$  son los factores a ser cancelados, para obtener factorizaciones únicas se escogen polinomios  $A^+$  y  $B^+$  de modo que sean mónicos. Los polinomios  $A^+$  y  $B^+$  deben tener todas sus raíces dentro del disco unitario. Debido al proceso del polo a ser cancelado el controlador debe ser de orden cero y viceversa, de esta manera los polinomios  $R$ ,  $S$  y  $T$  tendrán la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} R &= B^+ \bar{R} \\ S &= A^+ \bar{S} \\ T &= A^+ \bar{T} \end{aligned} \quad (2.3.2.)$$

Reemplazando en la ecuación 2.2.4. se obtiene que el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es:

$$A_{cl} = AR + BS = A^+ B^+ (A^- \bar{R} + B^- \bar{S}) \quad (2.3.3.)$$

$$A_{cl} = A^+ B^+ \bar{A}_{cl}$$

Los polinomios  $A^+$  y  $B^+$  los cuales son cancelados, son factores del polinomio característico en lazo cerrado  $A_{cl}$ . También se tiene que factorar el polinomio característico de  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ , donde:

$$A_c = B^+ \bar{A}_c \quad (2.3.4.)$$

$$A_o = A^+ \bar{A}_o$$

Cancelando los factores en común entre la ecuación 2.3.3. y 2.3.4. se tiene que los polinomios  $\bar{R}$  y  $\bar{S}$  satisfacen:

$$A^- \bar{R} + B^- \bar{S} = \bar{A}_{cl} = \bar{A}_c \bar{A}_o \quad (3.3.5.)$$

El controlador causal de mínimo grado se obtiene escogiendo que la única solución es  $\deg \bar{S} < \deg A^-$  o  $\deg \bar{R} < \deg B^-$  por lo tanto se puede escribir la ley de control partiendo de la ecuación 2.2.2 como:

$$B^+ \bar{R} u = A^+ \bar{T} u_c - A^+ \bar{S} y$$

Por lo tanto:

$$u = \frac{A^+}{B^+} \left( \frac{\bar{T}}{\bar{R}} u_c - \frac{\bar{S}}{\bar{R}} y \right)$$

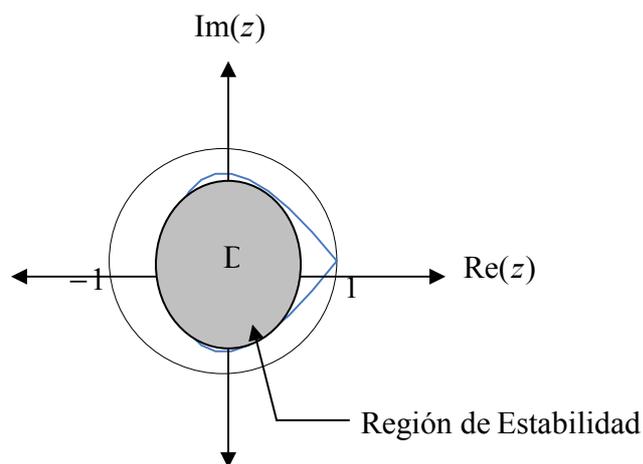
Esto quiere decir que simplemente se ha cancelado los polos y ceros del proceso y diseñando un controlador para el sistema reducido como si los polos cancelados no hubiesen estado presentes. Debido a que  $T=t_o A_o$ , la función de transferencia desde el comando de señal a la salida es:

$$\frac{BT}{A_{cl}} = \frac{t_o B^+ B^- A_o}{A_c A_o}$$

Reemplazando 2.3.4. se tiene que:

$$\frac{BT}{A_{cl}} = \frac{t_o B^-}{A_c^-}$$

Los factores cancelados deben corresponder a los modos estables, si este no es el caso el sistema va a tener modos inestables los cuales lo hacen irrealizables e inobservables. Solo los ceros que se encuentren en la región D que indicamos en la figura a continuación pueden ser cancelados:" [1]



**Figura 2.3.2. Mapeo de Polos Estables del Plano z Donde la Región D son los Puntos en el Diagrama que tienen la Mínima Amortiguación Relativa y Absoluta.**

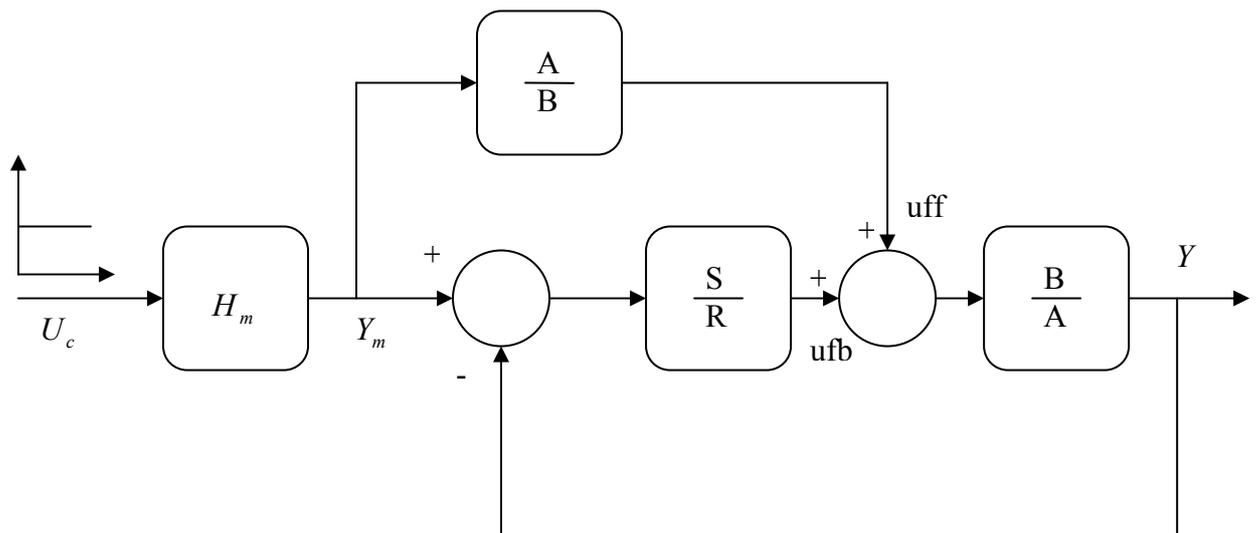
Esta teoría se aclarará más adelante mediante un ejemplo en la sección 2.6.

## 2.4 SEPARACIÓN DE LA PERTURBACIÓN Y DE LA RESPUESTA AL COMANDO DE SEÑAL

“Es muy importante diseñar un controlador en el cual el comando de señales sea completamente separado de la respuesta a las perturbaciones. Tomando en cuenta el modelo factorado  $A = A^+ A^-$  y  $B = B^+ B^-$ , donde  $A^+$  y  $B^+$  son las dinámicas a ser canceladas, ahora teniendo que la respuesta deseada al comando de señales viene dada por:” [1]

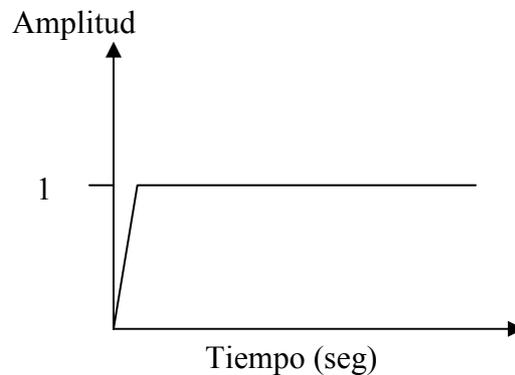
$$y_m = H_m u_c = \frac{B_m}{A_m} u_c \quad (3.4.1.)$$

Básicamente hasta el momento se ha realizado un controlador en lazo cerrado o feedback, el diseño planteado requiere de un controlador que permita el seguimiento de un modelo específico de esta manera si se generan perturbaciones a la entrada este modelo permite que el controlador siga la referencia del modelo de entrada, a este modelo se lo denomina como feedforward representado a continuación en la siguiente figura:



**Figura. 2.4.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado que Indica una Completa Separación Entre la Respuesta al Comando de Señales y a las Perturbaciones**

Para obtener el modelo  $Bm/Am$  lo que se hizo es tomar como modelo de referencia un sistema:



**Figura. 2.4.2. Modelo de Controlador en Tiempo Continuo**

La idea de este modelo es que el controlador debe realizar el seguimiento de esta señal de comando, para ello lo que se hace es pasar del dominio en  $s$  al dominio en  $z$  de este modelo para ello:

$$Hm(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{Gm(s)}{s}\right\}$$

A este modelo se lo plantea para un tiempo de muestreo  $T$ .

Una vez obtenido este modelo de seguimiento de señal de comando se tiene que:

$$Hm(z) = \frac{Bm}{Am}$$

El problema que se presenta en este modelamiento es que como nos podemos dar cuenta en el bloque  $A(z)/B(z)$  obviamente el numerador va a ser de mayor grado que el denominador teniendo en cuenta que nuestro modelo original es  $H(z)=B(z)/A(z)$  por ello se utilizó el siguiente artificio:

$$Bm = Km.B \quad (2.4.2.)$$

Donde  $K_m$  es una ganancia que va a permitir al modelo alcanzar el comportamiento deseado del modelo planteado en  $s$  en un principio y  $B$  es el numerador de  $H(z)=B(z)/A(z)$  del modelo original.

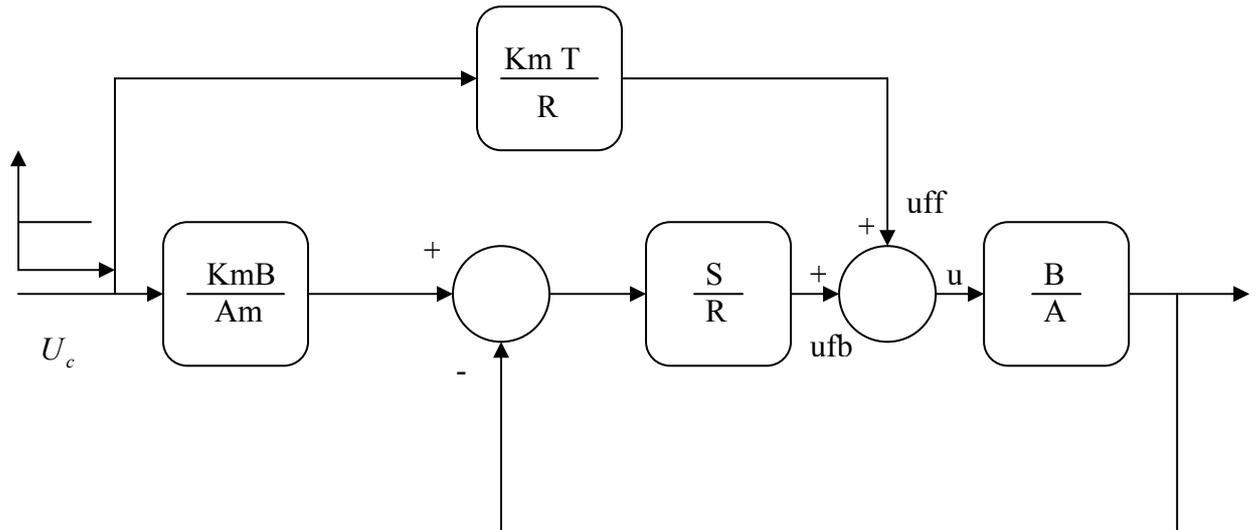
Ahora como se observa en el diagrama de bloques de la figura 2.4.1,  $u_{ff}$  viene dado por:

$$u_{ff} = \left( \frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{A}{B} \right) r_{ef} \quad (2.4.3.)$$

Reemplazando  $B_m$  por la fórmula (2.4.2.) se tiene que:

$$u_{ff} = \frac{K_m \cdot A}{A_m} \quad (2.4.4.)$$

Con este artificio se soluciona la problemática de que el numerador sea de mayor grado que el denominador y el modelo en feedforward quedaría representado de la siguiente manera:



**Figura. 2.4.3. Controlador Basado en la Ubicación de Polos en Lazo Cerrado y Feedforward Utilizando el Artificio  $u_{ff}$**

Ahora para obtener la ganancia  $K_m$  se tiene:

*Ganancia* = Ganancia en estado estacionario (modelo de seguimiento de señal de comando)

$$Ganancia = G_{ss}\left(\frac{B}{Am}\right)$$

Para ello lo que se realizó es:

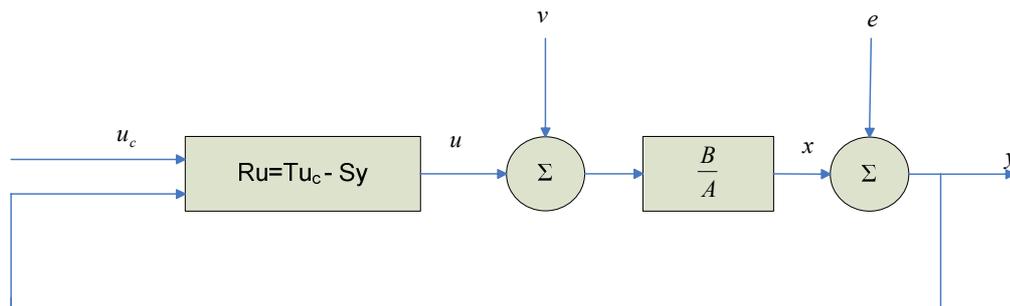
$$Ganancia = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{B}{Am} \right) \quad (2.4.5.)$$

Por lo tanto:

$$K_m = \frac{1}{Ganancia}$$

## 2.5 MEJORA A LA RESPUESTA DE PERTURBACIONES

En esta sección se procede a modificar el controlador para mejorar la respuesta a perturbaciones. Para este propósito se asume que existe una perturbación en el proceso  $v$  que actúa a la entrada del proceso y un ruido de medición  $e$  el cual actúa a la salida del proceso. Esto lo podemos observar en la siguiente figura:



**Figura. 2.5.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado con Señales de Comando, Perturbaciones de Carga y Errores de Medición.**

De acuerdo al modelo de entrada-salida se tiene que:

$$\begin{aligned} Ax &= B(u + v) \\ y &= x + e \\ Ru &= Tu_c - Sy \end{aligned} \quad (2.5.1.)$$

Resolviendo las señales  $x$ ,  $y$  y  $u$  tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{BT}{AR + BS} u_c + \frac{BR}{AR + BS} v - \frac{BS}{AR + BS} e \\ y &= \frac{BT}{AR + BS} u_c + \frac{BR}{AR + BS} v + \frac{AR}{AR + BS} e \\ u &= \frac{AT}{AR + BS} u_c + \frac{BS}{AR + BS} v - \frac{AS}{AR + BS} e \end{aligned} \quad (2.5.2.)$$

Las ecuaciones indican como el sistema en lazo cerrado responde al comando de señales y perturbaciones. En este caso se asumió que el diseño fue

desarrollado de manera que el sistema en lazo cerrado siempre sea estable; por tanto el polinomio característico  $A_{cl} = AR + BS$  tiene todas sus raíces dentro del disco unitario.

**Ejemplo para cancelación de polos y ceros de un motor con cancelación de ceros del proceso:**

La función de transferencia de un motor DC puede ser escrita como:

$$H(z) = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} = \frac{B}{A} \quad (2.6.1.)$$

En donde:

$$\begin{aligned} K &= e^{-h} - 1 + h \\ a &= e^{-h} \\ b &= 1 - \frac{h(1 - e^{-h})}{e^{-h} - 1 + h} \end{aligned}$$

Donde  $h=T$  y representa el tiempo de muestreo; suponiendo que el tiempo de muestreo sea  $T=1$  se puede notar claramente que  $b < 0$ , esto indica que el cero se encuentra ubicado en el eje real negativo, se asume que el sistema en lazo cerrado viene caracterizado por la función de transferencia:

$$H_m(z) = \frac{z(1 + p_1 + p_2)}{z^2 + p_1z + p_2} = \frac{B_m}{A_m} \quad (2.6.1.)$$

La función de transferencia  $H$  tiene un cero en  $z=b$  el cual no está incluido en  $H_m$ . Con estas especificaciones es necesario cancelar el cero en  $z=b$ . Factorando el polinomio B de la función de transferencia como se mostró en la ecuación 2.3.1. se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= B^+ B^- \\ B^+ &= z - b \\ B^- &= k \end{aligned}$$

Con el método de cancelación de polos y ceros tenemos que  $B_m = B^- \bar{B}_m$ , por lo tanto:

$$\bar{B}_m = \frac{B_m}{K} = \frac{1 + p_1 + p_2}{K} z$$

Escogiendo el polinomio del observador como  $A_o(z)=1$  el grado de los polinomios  $\bar{R}$  ya que R se sustituye por  $R = B^+ \bar{R}$  y S viene dados por :

$\deg \bar{R} \leq \deg B^-$  como se indicó en la sección 2.3 por lo tanto  $\deg \bar{R} = 0$  y para S dado que  $\deg S < \deg A$  y que A es de grado 2 escogemos a S de primer grado, para satisfacer la ecuación  $A_{cl} = AR + BS$  se tiene que:

$$(z-1)(z-a)r_o + K(s_o z + s_1) = z^2 + p_1 z + p_2$$

Con lo cual se satisface la ecuación Diophantina.

Resolviendo:

$$\begin{aligned} r_o &= 1 \\ s_o &= \frac{1+a+p_1}{k} \\ s_1 &= \frac{p_2-a}{k} \end{aligned}$$

De esta manera como  $T(z) = t_o A_o(z)$  escogemos que  $t_o = A_c(1) / B^-(1)$  teniendo que:

$$T(z) = A_o(z) \bar{B}_m(z) = \frac{z(1+p_1+p_2)}{k} = t_o z$$

## 2.6 POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Es conveniente describir el polinomio característico en término de factores de primer y segundo orden, los cuales serán descritos en sus equivalentes de tiempo continuo. El equivalente en tiempo discreto de un sistema de primer orden caracterizado por  $A(s)=s+\alpha$  es:

$$A_1(z) = z - a$$

Donde  $a = e^{-\alpha h}$  y  $h=T$  o  $h=\text{período de muestreo}$ .

Para el sistema de segundo orden consideramos el sistema en tiempo continuo:

$$A(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Los polos correspondientes al sistema en tiempo discreto dada por la ecuación característica son:

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

donde

$$a_1 = -2\alpha\beta; a_2 = \alpha^2$$

$$\beta = \cos(\omega h); \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 T} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 h)$$

$$a_2 = e^{-2\zeta\omega_0 T}$$

### 2.6.1 Influencia del Polinomio del Observador

El efecto del polinomio del observador en la transmisión de las perturbaciones es ilustrado con un ejemplo a continuación:

### 2.6.1.1 Ejemplo.- Influencia del Polinomio del Observador con el Polinomio 1:

Asumiendo un sistema con la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{0.1}{z-1}$$

Asumiendo que la función de transferencia deseada desde el comando de señal hacia la señal de salida venga dado por:

$$H_m(z) = \frac{0.2}{z-0.8}$$

Dada la función de transferencia que  $A_{cl} = A_c A_o$ , asumiendo que el polinomio del observador sea escogido como  $A_o = 1$ , el polinomio característico  $A_c = z - 0.8$ , dado que el grado del polinomio B es de grado 1 y que el polinomio  $A_{cl}$  es de grado 1, para cumplir con la ecuación:

$$A_{cl} = A(z)R(z) + B(z)S(z)$$

$$\deg A_{cl} = 1$$

$$\deg A = 0$$

$$\deg B = 1$$

Para poder satisfacer la ecuación dado que  $\deg B=1$  como tenemos la función de transferencia  $H_{ff} = T(z)/R(z)$  y  $H_{fb} = S(z)/R(z)$ , el grado de S(z) tiene que ser de orden cero, por lo tanto  $\deg R(z) \geq \deg S(z)$  y  $\deg R(z) \geq \deg T(z)$ , asumimos también que R(z) es de grado cero, y en consecuencia el grado de T(z) es de orden cero, aplicamos únicamente constantes a los polinomios quedando el controlador de la siguiente manera:

$$Ru = Tu_c - Sy$$

$$u(k) = 2(u_c(k) - y(k))$$

Por lo tanto la salida del proceso de acuerdo a la ecuación 2.5.2 queda de la siguiente manera:

$$x = \frac{BT}{AR + BS} u_c + \frac{BR}{AR + BS} v - \frac{BS}{AR + BS} e$$

$$X(z) = \frac{0.1 * 2}{z - 0.8} U_c(z) + \frac{0.1 * 1}{z - 0.8} V(z) - \frac{0.1 * 2}{z - 0.8} E(z)$$

$$Xz) = \frac{0.2}{z - 0.8} U_c(z) + \frac{0.1}{z - 0.8} V(z) - \frac{0.2}{z - 0.8} E(z)$$

## 2.7 ECUACIÓN DIOPHANTINA

“Para realizar el diseño de controladores digitales basados en la ubicación de polos por enfoque polinomial es necesario resolver la ecuación Diophantina y determinar los polinomios del controlador. El fundamento del problema matemático es el de entender las propiedades del siguiente polinomio:

$$A_o A_c = A \bar{R} + B^- S^- \quad (2.7.1.)$$

Esta ecuación se la conoce como ecuación Diophantina y fue determinada por Diophantus (A.C. 300) el mismo que fue uno de los inventores del algebra. La existencia de una solución para esta ecuación de los grados que sea el polinomio y si existen factores comunes entre los polinomios, la ecuación Diophantina se puede escribir de manera general como:

$$AX + BY = C \quad (2.7.2.)$$

Esta ecuación tiene solución si únicamente el mayor factor en común entre A y B divide a C. Si existe una solución  $X_o, Y_o$  entonces  $X = X_o + QB$  y  $Y = Y_o - QA$ , donde Q es un polinomio arbitrario y es la solución. Por ello existen muchas soluciones para esta ecuación la misma que puede ser generada tan pronto se obtenga una solución. Sin embargo también pueden existir soluciones únicas donde  $\deg X < \deg B$  o que  $\deg Y < \deg A$ . Resolviendo la ecuación Diophantina para los coeficientes en los polinomios X y Y es lo mismo que resolver ecuaciones lineales.

Para resolver la ecuación Diophantina se tiene que obtener las soluciones de mínimo grado para  $U$  y  $V$  para la ecuación:

$$AU + BV = 0 \quad (2.7.3.)$$

Para ello hay que tener en cuenta el algoritmo de Euclides el cual revela la importancia de la solución de la ecuación (2.7.2.). Primero hay que desarrollar un resultado como en algebra. Este algoritmo deberá encontrar los mayores factores en común del divisor  $G$  de los dos polinomios  $A$  y  $B$ . Este algoritmo es recursivo, si el un polinomio es cero entonces el otro polinomio es definido como el mayor divisor en común  $G$ .

Suponiendo que el grado del polinomio  $A$  es de igual o mayor grado que el polinomio  $B$  entonces se asume que  $A_0=A$  y  $B_0=B$ , se tendría de manera iterativa lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= B_n \\ B_{n+1} &= A_n \bmod B_n \end{aligned}$$

Hasta que  $B_{n+1}=0$ , el mayor divisor en común será  $G=B_n$  con ello se obtendrá que:

$$AX + BY = G \quad (2.7.4.)$$

Donde los polinomios  $X$  y  $Y$  se podrán obtener buscando los coeficientes y residuos de estas iteraciones.

$$AU + BV = 0 \quad (2.7.5.)$$

Para demostrar que existen soluciones para la ecuación Diophantina supongamos que los polinomios  $A, B$  y  $C$  son polinomios con coeficientes reales, con ello la ecuación (2.7.2.) tendrá una solución si y solo si el mayor factor en común entre  $A$  y  $B$  divide  $C$ . Si una solución existe en  $X_0, Y_0$  entonces  $X=X_0+QB$ , y  $Y=Y_0 - QB$ , donde  $Q$  es un polinomio arbitrario y será la solución. Prueba de ello es que si  $A$

y B no tienen un factor en común tenemos que  $G=1$ , al multiplicarlo la ecuación (2.7.4.) por C obtenemos la ecuación

$$A_{cl} = A(z)R(z) + B(z)S(z) \quad (2.7.6.)$$

Partiendo de las ecuaciones (2.7.4.) y (2.7.5.) se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.7.)$$

Lo cual implica que:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & X & Y \\ 0 & U & V \end{pmatrix} \quad (2.7.8.)$$

Para determinar las matrices  $X, Y, U$  y  $V$  hay que partir de la matriz:

$$\begin{pmatrix} A & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y realizar operaciones de matrices para obtener:

$$\begin{pmatrix} G & X & Y \\ 0 & U & V \end{pmatrix}$$

Los polinomios  $X, Y, U$  y  $V$  se obtienen directamente de los coeficientes de la matriz

### 2.7.1 CONDICIONES DE CAUSALIDAD

Se sabe que hay infinidad de soluciones para la ecuación (2.7.6.). Para las ecuaciones Diophantinas que aparecen cuando resolvemos el problema de ubicación de polos, es natural introducir algunas contradicciones en la solución. Los grados de los polinomios  $S(z)$  y  $T(z)$  deben ser de menor o igual grado que el polinomio  $R(z)$ , de no ser así la señal de control en un tiempo  $k$  dependerá de los valores de la señal medida y del comando de señal en tiempos mayores que  $k$ , a esto se le denomina condición de causalidad. Si el tiempo para calcular la señal de control en el computador es solo una fracción pequeña del período de muestreo, es necesario olvidar el tiempo para computar la señal de control, con ello la causalidad se convierte en: " [1]

$$\deg R = \deg T = \deg S \quad (2.7.1.1.)$$

Si el tiempo de cómputo es solo un período de muestreo entonces se tiene que:

$$\deg R = \deg T + 1 = \deg S + 1 \quad (2.7.1.2)$$

## CAPÍTULO III

### DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los procesos de diseño a través de los cuales mediante fórmulas y deducciones analizados en el capítulo anterior permiten la obtención de la ley de control para el diseño de control de un Doble Integrador, un Oscilador Armónico y un Brazo Robótico Flexible basadas en el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial.

#### 3.2 DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA UN DOBLE INTEGRADOR

En el diseño por ubicación de polos primeramente se escogen los polinomios  $A_c$  y  $A_o$  cuyos ceros sean los polos del lazo cerrado, y se escoge el tiempo de muestreo. Para realizar elecciones apropiadas es muy importante comprender como estos influyen sobre la respuesta al comando de señales, a las perturbaciones de carga, al ruido de medición y a la sensibilidad del modelamiento de errores.

Para el diseño de un doble integrador consideremos una señal tipo rampa definida por  $y(hk) = Kh$  para  $k \geq 0$  cuya transformada de Laplace viene definida por  $Y(s) = 1/s^2$  de esta forma obtenemos que:

$$Y(z) = 0 + hz^{-1} + 2hz^{-2} + \dots = h(z^{-1} + 2z^{-2} + \dots) = \frac{hz}{(z-1)^2} \quad (3.2.1.)$$

Por este motivo la señal  $G(s) = 1/s^2$  con el muestreador de orden cero nos genera una función de transferencia tipo:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Obteniendo:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}\right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (3.2.2.)$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \frac{h^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

Para obtener la ley de control del sistema se debe encontrar el polinomio del sistema característico en este caso lo llamaremos un  $Ac_1$  y el polinomio del observador  $Ac_2$ .

Primero se determina que un sistema en lazo cerrado viene dado por:

$$A_{cl} = A(z)R(z) + B(z)S(z)$$

Donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son los polinomios de la señal de transferencia tipo  $1/s^2$  en tiempo continuo seguida por un muestreador de orden cero dando como resultado el sistema en tiempo discreto a continuación:

$$H(z) = \frac{h^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$A_{cl} = (z-1)^2 * R(z) + \frac{h^2}{2} (z+1) * S(z)$$

Debido a que la función de transferencia tiene un cero en  $z=-1$ , no se permite una cancelación de ceros. Esto implica que  $B^+=1$  y por lo tanto  $B_m=B$

Se requiere que el polinomio R tenga un cero en  $z=-1$ , por ello la solución que se da para obtener el grado mínimo sin tener retardo en el controlador es que ambos polinomios R y S sean polinomios de segundo orden por esto se requiere que:

$$S(z) = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$$

$$R(z) = z^2 + r_1 z + r_2 = (z+r)(z-1)$$

Con estos polinomios se puede deducir que:

$$Acl(z) = (z^2 - 2z + 1)(z^2 + zr - z - r) + \frac{h^2}{2}(z+1)(s_0 z^2 + s_1 z + s_2)$$

Al resolver esta ecuación genera un polinomio de cuarto grado el cual se expresa a continuación:

$$Acl(z) = z^4 + z^3 \left( r + \frac{h^2}{2} s_0 - 3 \right) + z^2 \left( 3 - 3r + \frac{h^2}{2} s_1 + s_0 \frac{h^2}{2} \right) + z \left( 3r - 1 + \frac{h^2}{2} s_2 + \frac{h^2}{2} s_1 \right) + \frac{h^2}{2} s_2 - r$$

Es decir genera un polinomio de cuarto grado de tipo:

$$Acl(z) = z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4$$

Donde:

$$\begin{aligned} r + \frac{h^2}{2}s_0 &= p1 + 3 \\ -3r + \frac{h^2}{2}s_0 + \frac{h^2}{2}s_1 &= p2 - 3 \\ 3r + \frac{h^2}{2}s_1 + \frac{h^2}{2}s_2 &= p3 + 1 \\ -r + \frac{h^2}{2}s_2 &= p4 \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & h^2/2 & 0 & 0 \\ -3 & h^2/2 & h^2/2 & 0 \\ 3 & 0 & h^2/2 & h^2/2 \\ -1 & 0 & 0 & h^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p1 + 3 \\ p2 - 3 \\ p3 + 1 \\ p4 \end{bmatrix}$$

Donde  $h=T$ .

Para resolver esta matriz se tiene en cuenta que:

$$A.C = I$$

Donde:

$$C = \begin{pmatrix} r \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} p1 + 3 \\ p2 - 3 \\ p3 + 1 \\ p4 \end{pmatrix}$$

$$C = A^{-1}.I$$

Con ello se concluye que:

$$r = 1/8 p_1 + 7/8 - 1/8 p_2 + 1/8 p_3 - 1/8 p_4$$

$$s_0 = 175/4 p_1 + 425/4 + 25/4 p_2 - 25/4 p_3 + 25/4 p_4$$

$$s_1 = -25 p_1 - 125 + 25 p_2 + 25 p_3 - 25 p_4$$

$$s_2 = 25/4 p_1 + 175/4 - 25/4 p_2 + 25/4 p_3 + 175/4 p_4$$

Este análisis permite desarrollar un sistema en lazo cerrado por lo que las propiedades de un sistema en lazo cerrado se pueden especificar indirectamente con el requerimiento de que el polinomio  $A_{c1}$  sea el equivalente en tiempo discreto de:

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 \quad (3.2.3.)$$

Por lo que para que este sistema se lo tenga en tiempo discreto en  $z$  se obtiene que:

$$A_c(z) = z^2 - 2ze^{-\zeta} \cos(\omega h \sqrt{1 - \zeta^2}) + e^{-2\zeta\omega h} \quad (3.2.4.)$$

$$A_c(z) = z^2 + a_{c1}z + a_{c2}$$

Obteniendo las raíces de este sistema se puede encontrar  $z_1, z_2 = e^{+s_1, s_2 T}$  pero para poder encontrar los valores de  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  se requiere de un sistema de cuarto orden por lo que se requiere un observador de segundo orden para obtener un controlador con acción integral.

El polinomio del observador que se escoge es un equivalente en tiempo discreto de un sistema continuo con dos polos en  $s = -\alpha$  dando como resultado:

$$A_{obs} = (z - e^{-\alpha T})^2$$

donde  $T$  es el tiempo de muestreo se tiene que

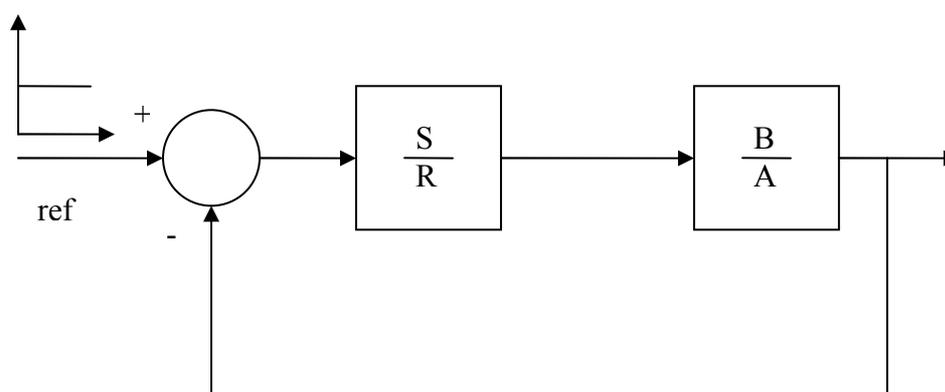
$$A_{obs} = z^2 + a_{01}z + a_{02}$$

Donde  $\alpha$  son los polos que tendremos que escoger para obtener un buen diseño del controlador con lo que para encontrar los valores de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  y  $p_4$  tenemos que  $A_{cl} = A_c(z) * A_{obs}(z)$  por lo tanto:

$$T(z) = \frac{A_c(1)A_{obs}(z)}{B(1)} = \frac{(1 + a_{c1} + a_{c2}) * A_{obs}(z)}{h^2} \quad (3.3.6.)$$

donde  $h = T$

Con esto se puede obtener los valores de  $r$ ,  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  generando el controlador en lazo cerrado con acción integral indicado en la figura:



**Figura. 3.2.1. Controlador Basado en la Ubicación de Polos en Lazo Cerrado**

Básicamente hasta el momento se ha realizado un controlador en lazo cerrado o feedback, el diseño planteado requiere de un controlador que permita el seguimiento de un modelo específico de esta manera si se generan perturbaciones a la entrada este modelo permite que el controlador siga la referencia del modelo de entrada, a este modelo se lo denomina como feedforward, por ello se procedió a realizar el modelo explicado en la sección 2.4.

### 3.3 DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO

En esta sección se continúa con el diseño por ubicación de polos basado en el método polinomial. El proceso que se va a considerar es el oscilador armónico. Además se observará la influencia de un filtro antialiasing.

Siendo el proceso de un oscilador armónico definido por:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Siendo

$$\omega_0 = 1$$

La función de transferencia obtenida será:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)} \right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z \sin wh}{z^2 - 2z \cos wh + 1} \right)$$

$$H(z) = \frac{(1-\beta)(z+1)}{z^2 - 2\beta z + 1} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Siendo

$$\beta = \cos(\omega_0 h)$$

con

$$h = T$$

La respuesta deseada se caracteriza por la ecuación característica en tiempo continuo de:

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$$

Por lo que para que este sistema lo tengamos en z tenemos que:

$$A_c(z) = z^2 - 2ze^{-\zeta} \cos(\omega h \sqrt{1 - \zeta^2}) + e^{-2\zeta\omega h}$$

$$A_c(z) = z^2 + a_{c1} + a_{c2}$$

El polinomio muestreado es  $A_c(z)$ . Debido a que la función de transferencia tiene un cero en  $z=-1$ , no se permite una cancelación de ceros. Esto implica que  $B^+=1$  y por lo tanto  $B_m=B$ . Esto especifica que el controlador tiene acción integral. Por ello el polinomio del observador por lo menos debe ser de segundo grado, por ello un equivalente en tiempo discreto al polinomio del observador es:

$$s^2 + 2\zeta_{obs}\omega_{obs}s + \omega_{obs}^2$$

Por lo que para que este sistema sea en tiempo discreto se tiene que:

$$A_o(z) = z^2 - 2ze^{-\zeta} \cos(\omega h \sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-2\zeta\omega h}$$

$$A_o(z) = z^2 + a_{o1} + a_{o2}$$

Para obtener la ley de control del sistema se debe encontrar el polinomio del sistema característico en este caso lo llamaremos un  $Ac_1$  y el polinomio del observador  $Ac_2$ .

Primero se determina que un sistema en lazo cerrado viene dado por

$$A_{cl} = A(z)R(z) + B(z)S(z)$$

Donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son los polinomios de la señal de transferencia tipo  $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$  seguida por un muestreador de orden cero dando como resultado:

$$A_{cl} = (z^2 - 2\beta z + 1)^2 R(z) + (1 - \beta)(z + 1)S(z)$$

Donde:

$$S(z) = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$$

$$R(z) = z^2 + r_1 z + r_2 = (z + r)(z - 1)$$

Con estos polinomios se puede deducir que:

$$A_{cl}(z) = (z^2 - 2\beta z + 1)^2 (z^2 + zr - z - r) + (1 - \beta)(z + 1)^2 (s_0 z^2 + s_1 z + s_2)$$

Al resolver esta ecuación genera un polinomio de cuarto grado el cual se expresa a continuación:

$$Acl(z) = z^4 + z^3(r - 1 - 2\beta + s_0(1 - \beta)) + z^2(-r(2\beta + 1) + s_0(1 - \beta) + s_1(1 - \beta) + 1 + 2\beta) + z(r(2\beta + 1) + s_1(1 - \beta) + s_2(1 - \beta) - 1) - r + s_2(1 - \beta)$$

Es decir genera un polinomio de cuarto grado de tipo:

$$Acl(z) = z^4 + p_1z^3 + p_2z^2 + p_3z + p_4$$

Donde:

$$\begin{aligned} r + s_0(1 - \beta) &= p_1 + 1 + 2\beta \\ r(-2\beta - 1) + s_0(1 - \beta) + s_1(1 - \beta) &= p_2 - 2\beta - 1 \\ r(2\beta + 1) + s_1(1 - \beta) + s_2(1 - \beta) &= p_3 + 1 \\ -r + s_2(1 - \beta) &= p_4 \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 - \beta & 0 & 0 \\ -2\beta - 1 & 1 - \beta & 1 - \beta & 0 \\ 2\beta + 1 & 0 & 1 - \beta & 1 - \beta \\ -1 & 0 & 0 & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + 3 \\ p_2 - 3 \\ p_3 + 1 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Para resolver esta matriz se tiene en cuenta que:

$$A.C = I$$

Donde :

$$C = \begin{pmatrix} r \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} p1+1+2\beta \\ p2-1-2\beta \\ p3+1 \\ p4 \end{pmatrix}$$

$$C = A^{-1}.I$$

Con ello se concluye que:

$$r=0.1263 p1 + 0.8737 - 0.1263 p2 + 0.1263 p3 - 0.1263 p4$$

$$s_0=43.8330 p1 + 104.6680 + 6.3340 p2 - 6.3340 p3 + 6.3340 p4$$

$$s_1= -25.0835 p1 - 123.4175 + 25.0835 p2 + 25.0835 p3 - 25.0835 p4$$

$$s_2=6.3340 p1 + 43.8330 - 6.3340 p2 + 6.3340 p3 + 43.8330 p4$$

Con el polinomio del observador y el polinomio del sistema en tiempo discreto podemos encontrar los coeficientes de  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$  y  $p4$  por ello  $A_{cl} = A_c(z) * A_{obs}(z)$  por lo tanto:

$$T(z) = \frac{A_c(1)A_{obs}(z)}{B(1)} = \frac{(1+a_{c1}+a_{c2}) * A_{obs}(z)}{h^2}$$

$$\text{donde } h = T$$

Con esto podemos encontrar los valores de  $r$ ,  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  generando el controlador en lazo cerrado con acción integral mostrado en la figura (3.2.1.)

Para el diseño de feedforward se procede a realizar exactamente el mismo diseño utilizado en la sección 2.4 al igual que en el procedimiento para el Doble Integrador.

### 3.4 DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA UN BRAZO ROBÓTICO FLEXIBLE

Para poder ilustrar el método de diseño se considera el control para la junta elástica de un robot. Se tiene un motor con corriente constante  $k_1$  el cual maneja una carga que consiste en dos masas acopladas con un resorte el mismo que tiene una constante  $k$ . Se asume que la fricción y el amortiguamiento son omitidos. La señal de entrada al motor viene determinada por la corriente  $I$ . Las velocidades angulares y los ángulos de las masas son  $\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2$ ; los momentos de inercia son  $J_1$  y  $J_2$ . Se asume que existe un amortiguamiento relativo viscoso  $d$ . Finalmente la salida del proceso es la velocidad angular  $\phi_2$ . Este esquema se lo puede apreciar en la siguiente figura:

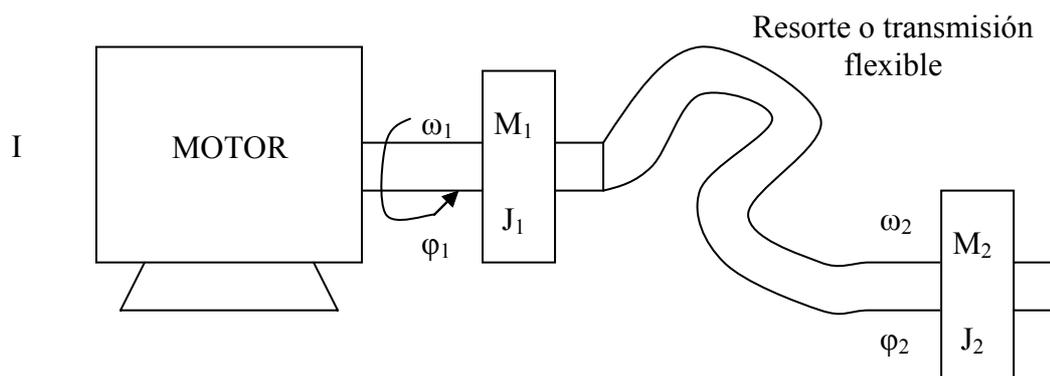


Figura. 3.4.1. Diagrama de un Brazo Robótico Flexible.

Se procede a introducir los estados del brazo robótico:

$$x_1 = \phi_1 - \phi_2$$

$$x_2 = \omega_1 / \omega_0$$

$$x_3 = \omega_2 / \omega_0$$

Donde:

$$\omega_0 = \sqrt{k(J_1 + J_2)/(J_1 J_2)}$$

Con esto el proceso viene descrito en variables de estado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_o \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \alpha - 1 & -\beta_1 & \beta_1 \\ \alpha & \beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \quad 0 \quad \omega_o) x \end{aligned} \quad (3.4.1.)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= J_1 / (J_1 + J_2) \\ \beta_1 &= d / J_1 \omega_o \\ \beta_2 &= d / J_{d1} \omega_o \\ \gamma &= k_f / J_1 \omega_o \end{aligned}$$

Los siguientes valores fueron utilizados en el proceso:

Factor de amortiguamiento viscoso  $d=0.1$ .

Momento de inercia 1  $J_1=10/9$ .

Momento de inercia 2  $J_2=10$ .

Constante  $k=1$  generando  $\omega_o=1$ .

Factor de amortiguamiento  $\zeta_p=0.05$  y frecuencia natural  $\omega_p=1$  rad/s.

Con estos valores se forma un sistema en tiempo continuo de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{0.009s + 0.09}{s^3 + 0.1s^2 + s - 1.182e-018}$$

Este sistema genera un cero en  $z_1=-10$ , y tres polos en  $p_1=0$  y  $p_{23} = -0.05 \pm 0.999i$  de manera que no hay como cancelar polos y ceros.

La función de transferencia obtenida en tiempo discreto con su respectivo zero order hold será:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{0.009s + 0.09}{s^3 + 0.1s^2 + s - 1.182e - 018} \frac{1}{s}\right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{0.009s + 0.09}{s(s^3 + 0.1s^2 + s - 1.182e - 018)}\right\} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \frac{0.0029126(z + 2.338)(z + 0.1054)}{(z-1)(z^2 - 1.712z + 0.9512)}$$

Se desea que el sistema en lazo cerrado tenga una respuesta desde la señal de referencia de esta manera los modos dominantes tendrán una frecuencia natural  $\omega_m = 0.5$  rad/s y un factor de amortiguamiento de  $\zeta_m = 0.7$ . Se desea que el modelo tenga una frecuencia natural  $\omega_m = 0.5$  rad/s, por ello se escoge un período de muestreo  $T=0.5$ s. Por lo tanto la frecuencia de Nyquist de  $\omega_N = \frac{\pi}{h} = 6$  rad/s.

A continuación se procede a diseñar el controlador desde el enfoque polinomial:

Para obtener la ley de control del sistema se debe encontrar el polinomio del sistema característico en este caso lo llamaremos un  $A_c$  y el polinomio del observador  $A_o$ .

Dado que el sistema es de tercer orden, implica que los polos pueden ser ubicados utilizando el polinomio característico de la forma:

$$(s^2 + 2\zeta_m\omega_m s + \omega_m^2)(s + \alpha_1\omega_m) = 0$$

Por lo que para que este sistema lo tengamos en  $z$  se tiene que:

$$A_c(z) = z^2 - 2ze^{-\zeta} \cos(\omega h \sqrt{1 - \zeta^2}) + e^{-2\zeta\omega h}$$

$$A_c(z) = (z^2 + a_{c1} + a_{c2})(z + e^{-\alpha_1\omega_m T})$$

Con esto podemos encontrar tres polos para el polinomio  $A_c$ .

Para el diseño del polinomio del observador se asume que solo una salida va a ser medida. Los valores del observador son escogidos de la misma forma que hemos venido haciendo para un sistema en lazo cerrado pero hay que considerar que existe un polo  $\alpha_o$  que esta lejos del origen, por ello se asume que el polinomio característico en tiempo continuo es de la forma:

$$(s^2 + 2\zeta_m \alpha_o \omega_m s + (\alpha_o \omega_m)^2)(s + \alpha_o \alpha_1 \omega_m) = 0$$

Por lo que para que este sistema lo tengamos en z se tiene que:

$$A_o(z) = z^2 - 2ze^{-\zeta} \cos(\omega h \sqrt{1 - \zeta^2}) + e^{-2\zeta\omega h}$$

$$A_o(z) = (z^2 + a_{o1} + a_{o2})(z + e^{-\alpha_o \alpha_1 \omega_m T})$$

Luego se determina que un sistema en lazo cerrado viene dado por:

$$A_{cl} = A(z)R(z) + B(z)S(z)$$

Donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son los polinomios de la señal de transferencia tipo  $\frac{0.009s + 0.09}{s^3 + 0.1s^2 + s - 1.182e - 018}$  seguida por un muestreador de orden cero dando como resultado:

$$A_{cl} = (z - 1)(z^2 - 1.712z + 0.9512) * R(z) + 0.0029126(z + 2.338)(z + 0.1054) * S(z)$$

Dado que  $A_{cl} = A_c + A_o$  y que como escogimos tres polos del polinomio característico tenemos que  $\deg A_c = 3$  y tres polos del polinomio del observador

tenemos  $\deg A_o = 3$ , con esto dado que  $\deg B = 2$  y  $\deg A = 3$ , para cumplir con la ecuación característica y satisfacer la ecuación Diophantina tomamos el polinomio  $R(z)$  de tercer orden y el polinomio de  $S(z)$  de segundo orden de esta manera podemos generar una matriz cuadrada; por ello tomamos a los polinomios de  $R(z)$  y  $S(z)$  de la siguiente manera:

$$S(z) = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$$

$$R(z) = z^3 + r_0 z^2 + r_1 z + r_2$$

Con estos polinomios se puede deducir que:

$$Acl = (z-1)(z^2 - 1.712z + 0.9512)(z^3 + r_0 z^2 + r_1 z + r_2) + 0.0029126(z + 2.338)(z + 0.1054)(s_0 z^2 + s_1 z + s_2)$$

Al resolver esta ecuación genera un polinomio de sexto grado teniendo en cuenta que se tomó el tiempo de muestreo  $T=0.5$  se obtuvo:

$$a = 0.0029126$$

$$b = 2.338$$

$$c = 0.1054$$

$$d = 1.712$$

$$e = 0.9512$$

Por lo que:

$$Acl = (z-1)(z^2 - d + e)(z^3 + r_0 z^2 + r_1 z + r_2) + a(z+b)(z+c)(s_0 z^2 + s_1 z + s_2)$$

Resolviendo la ecuación se tiene que:

$$A_{cl} = z^6 + (-1 - d + r_0) z^5 + (d + e + (-1 - d) r_0 + r_1 + a S_0) z^4 + ((a b + a c) S_0 + a S_1 - e + (d + e) r_0 + (-1 - d) r_1 + r_2) z^3 + (-e r_0 + (d + e) r_1 + (-1 - d) r_2 + a b c S_0 + (a b + a c) S_1 + a S_2) z^2 + (-e r_1 + (d + e) r_2 + a b c S_1 + (a b + a c) S_2) z - e r_2 + a b c S_2$$

Es decir genera un polinomio de sexto grado de tipo:

$$Acl(z) = z^6 + p_1z^5 + p_2z^4 + p_3z^3 + p_4z^2 + p_5z + p_6$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_o &= p_1 + d + 1 \\ r_o(-1-d) + r_1 + s_o(a) &= p_2 - d - e \\ r_o(d+e) + r_1(-1-d) + r_2 + s_o(ab+ac) + s_1(a) &= p_3 + e \\ r_o(-e) + r_1(d+e) + r_2(-1-d) + s_o(abc) + s_1(ab+ac) + s_2(a) &= p_4 \\ r_1(-e) + r_2(d+e) + s_1(abc) + s_2(ab+ac) &= p_5 \\ r_2(-e) + s_2(abc) &= p_6 \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1-d & 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ d+e & -1-d & 1 & ab+ac & a & 0 \\ -e & d+e & -1-d & abc & ab+ac & a \\ 0 & -e & d+e & 0 & abc & ab+ac \\ 0 & 0 & -e & 0 & 0 & abc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_o \\ r_1 \\ r_2 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + d + 1 \\ p_2 - d - e \\ p_3 + e \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}$$

Para resolver esta matriz se tiene en cuenta que:

$$A.C = I$$

Donde :

$$C = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} p1 + d + 1 \\ p2 - d - e \\ p3 + e \\ p4 \\ p5 \\ p6 \end{pmatrix}$$

$$C = A^{-1}.I$$

Con ello se concluye que:

$$r_0 = p1 + 2.7120 + 1.5491e - 016 * p2 - 5.1124e - 017 * p3 - 1.1793e - 016 * p4 \\ - 2.1594e - 017 * p5 + 2.5708e - 016 * p6$$

$$r_1 = 1.5438 * p1 + 3.0060 + 0.3847 * p2 - 0.1642 * p3 + 0.0665 * p4 + 0.0073 * p5 - 0.3417 * p6 \\ r_2 = 0.1516 * p1 + 0.2879 + 0.0405 * p2 - 0.0164 * p3 - 0.0018 * p4 + 0.0842 * p5 - 0.8277 * p6$$

$$s_0 = 401.0862 * p1 + 578.7743 + 211.2432 * p2 + 56.3620 * p3 - 22.8155 * p4 \\ - 2.4945 * p5 + 117.3195 * p6$$

$$s_1 = -508.9713 * p1 - 867.2381 - 171.8054 * p2 + 58.3894 * p3 + 118.2376 * p4 \\ - 16.0504 * p5 - 320.6649 * p6$$

$$s_2 = 200.9345 * p1 + 381.5132 + 53.6116 * p2 - 21.7021 * p3 - 2.3727 * p4 \\ + 111.5943 * p5 + 296.3948 * p6$$

Con el polinomio del observador y el polinomio del sistema en tiempo discreto se puede encontrar los coeficientes de p1, p2, p3, p4, p5 y p6 por ello

$$Acl = A_c(z)A_{obs}(z) .$$

Con esto se puede encontrar los valores de  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  generando el controlador en lazo cerrado.

Para el diseño de feedforward se procede a realizar exactamente el mismo diseño utilizado en la sección 2.4 al igual que en el procedimiento para el Doble Integrador y el Oscilador Armónico.

## **CAPÍTULO I V**

### **RESULTADOS DE SIMULACIÓN**

#### **4.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se presentan los esquemas y resultados de simulación los cuales se llevaron a cabo mediante la utilización del software basado en Matlab/Simulink, se presentará la simulación a través de Simulink para cada uno de los controladores diseñados en el capítulo anterior. También se realizará un análisis de los controladores cuando se varían los parámetros de diseño y por último se presentará el resultado de simulación para el Doble Integrador y el Oscilador Armónico utilizando una función realizada en Matlab para comprobar que los controladores pueden ser implementados fácilmente ya sea con la ayuda de un microcontrolador, un DCP, etc .

#### **4.2 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PARA UN DOBLE INTEGRADOR**

Lo que se realiza en esta sección es ir analizando bloque por bloque como se fue diseñando el controlador de acuerdo a los parámetros de diseño expuestos en el capítulo anterior; se procede al desarrollo del controlador feedback presentado a continuación en la figura 4.2.1:

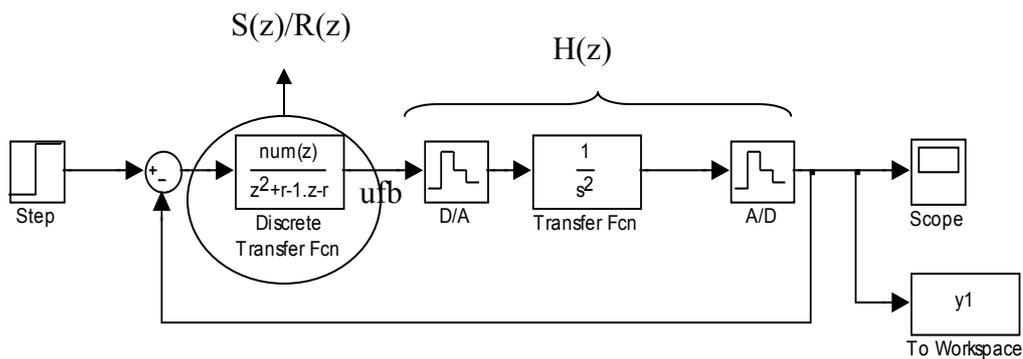


Figura. 4.2.1. Diagrama de un Controlador Para un Doble Integrador en Lazo Cerrado

En la figura 4.2.2 se presenta la salida del Doble Integrador en lazo cerrado:

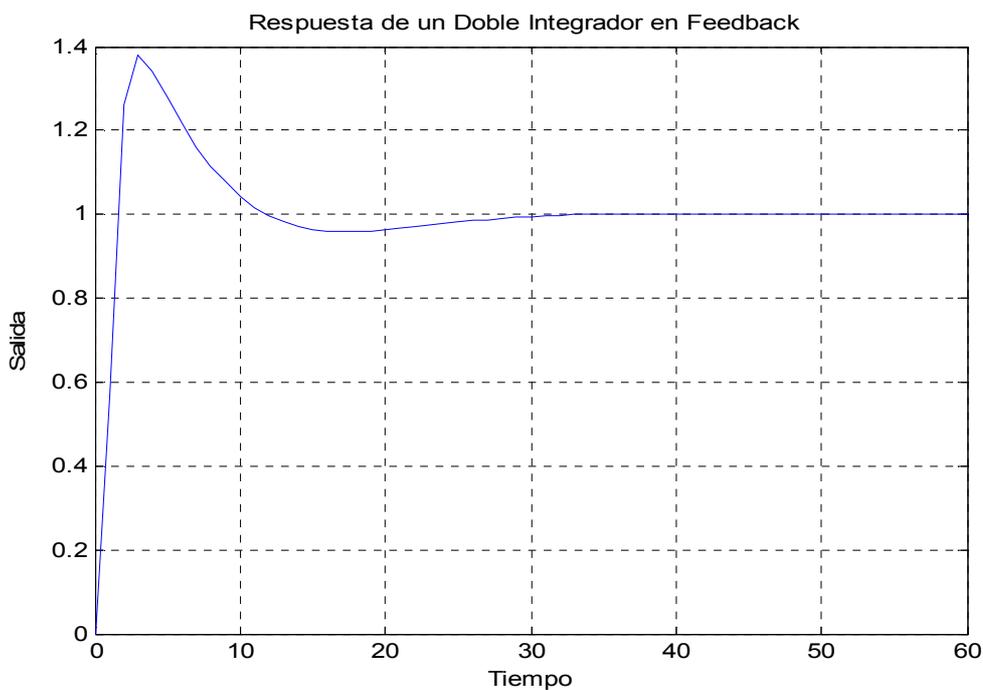
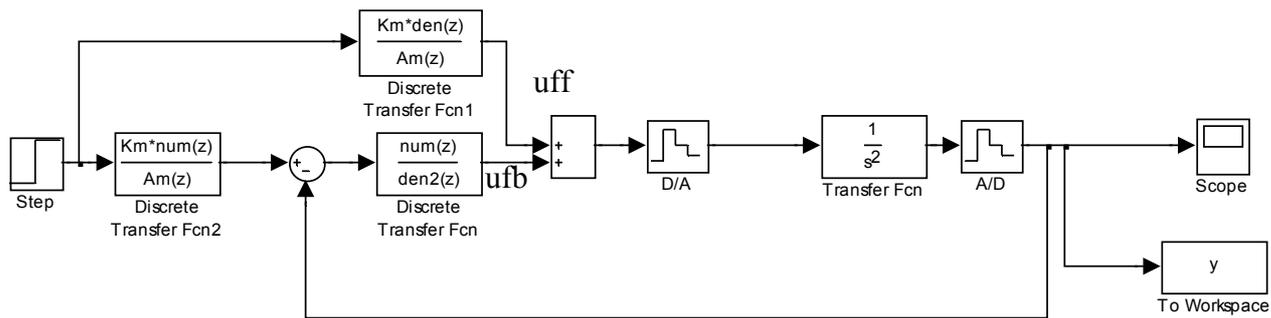


Figura. 4.2.2. Respuesta de un Controlador Para un Doble Integrador en Lazo Cerrado

El siguiente diagrama en Simulink representa un doble integrador en lazo cerrado junto con el feedforward:

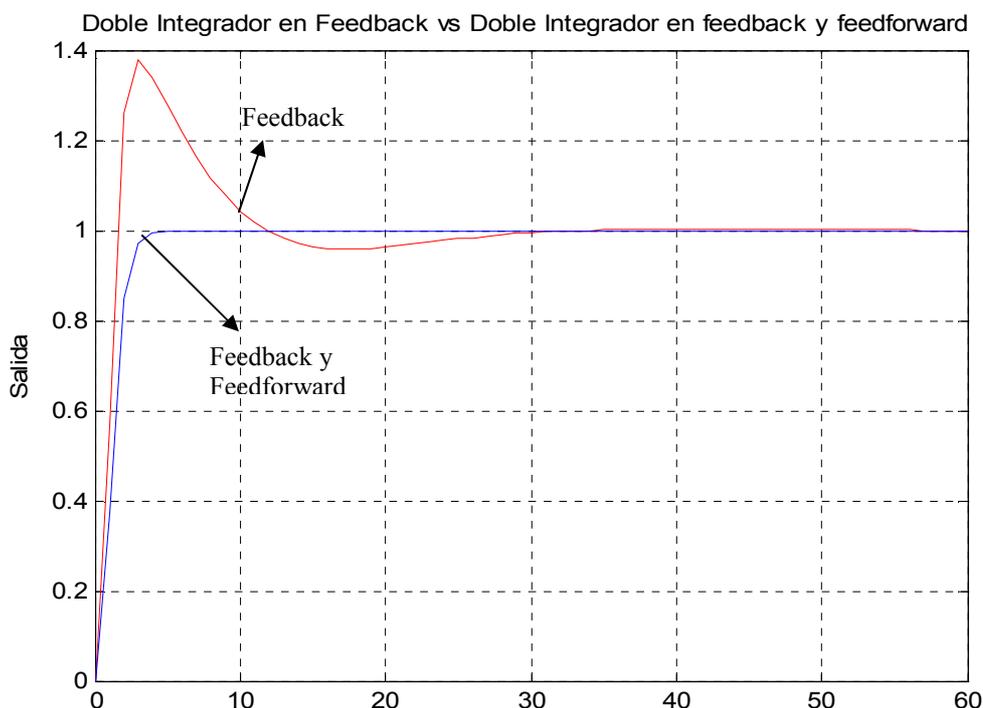


**Figura 4.2.3. Diagrama de un Controlador Para un Doble Integrador Digital en Feedforward y Feedback**



**Figura 4.2.4. Respuesta de un Controlador para un Doble Integrador Digital en Feedforward y Feedback**

En la figura 4.2.5 se puede apreciar la diferencia del Doble Integrador en lazo cerrado vs el doble integrador final; y una respuesta efectiva del controlador sobre la señal de entrada:

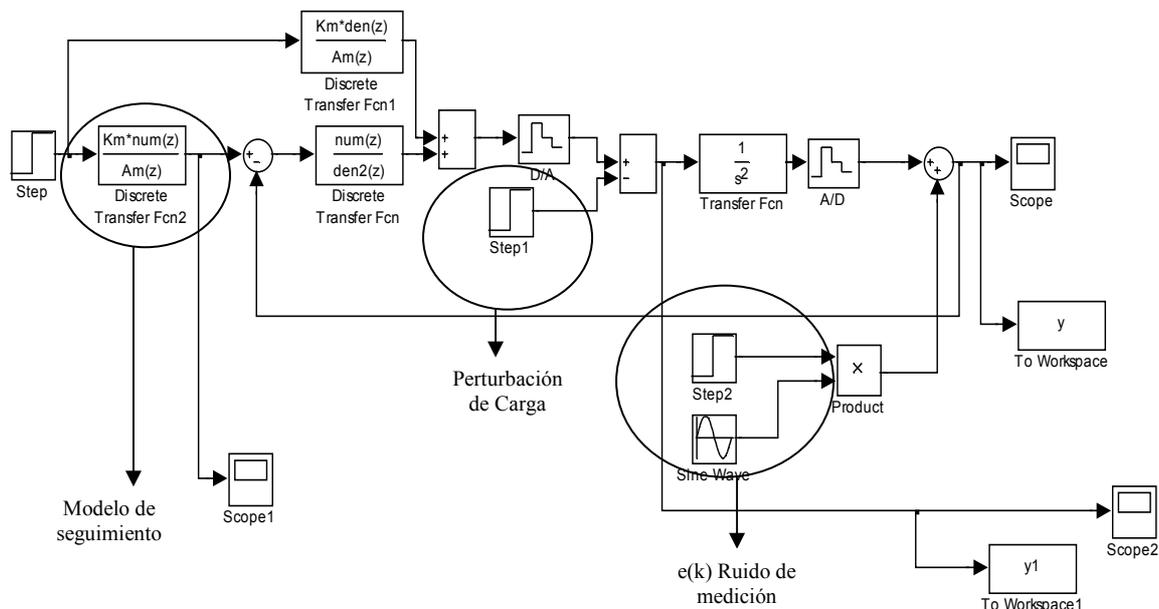


**Figura 4.2.5. Respuesta de un Controlador Para un Doble Integrador Digital en Feedback vs Respuesta de un doble Integrador en Feedforward y Feedback**

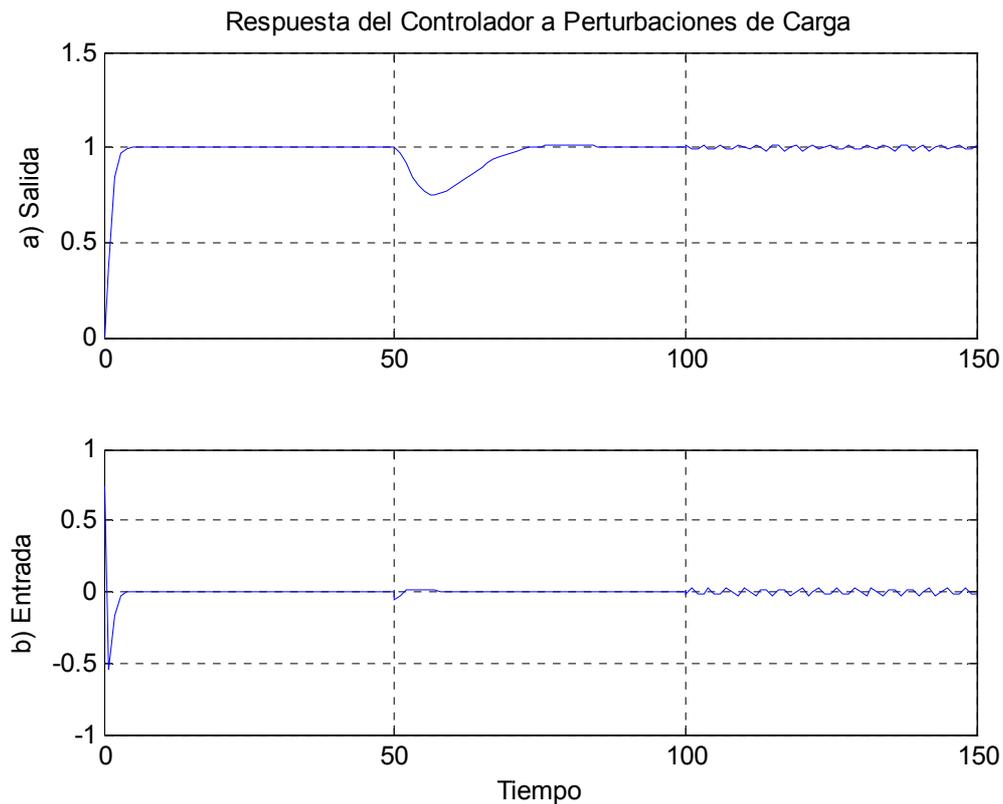
Como se puede apreciar en los resultados el doble integrador sigue claramente al modelo  $G_m(z)$  planteado en el capítulo anterior; los parámetros de diseño que tiene que escoger el usuario son los polinomios  $A_c$  y  $A_o$ , los mismos que especifican los polos en lazo cerrado o feedback y el tiempo de muestreo  $T$ . Los polos en lazo cerrado son parametrizados en términos de “ $\zeta$ ”, “ $\omega$ ” y “ $\alpha$ ”, los cuales son los equivalentes en tiempo continuo. Para los resultados presentados en las figuras 4.2.2 .y 4.2.4 los parámetros escogidos fueron:

$\zeta=0.707$ ,  $\omega=0.2$ ,  $\alpha=2$  y  $T=1$ . Estos valores indican que los polos del observador son de magnitud más rápida que los polos dominantes. El tiempo de muestreo es tomado en 1 de modo que  $\omega T=0.2$ . Con este período de muestreo escogido también se tiene que  $e^{-\alpha T} = 0.135$ . Con este valor se puede observar claramente que los polos escogidos del observador son cercanos al origen.

A continuación se procede a observar como el modelo responde claramente a comandos de señales, perturbaciones de carga y ruido en la medición. Para ello se aplica una señal de tipo escalón del valor de la unidad a la señal de comando del proceso, luego se aplica una perturbación de carga en forma de un escalón negativo con una amplitud de 0.05 a la entrada de la planta en el tiempo de 50, y por último se aplica una onda sinusoidal de alta frecuencia del tipo  $e(k) = 0.01\sin 2t$  para el tiempo 100 de medición para mostrar la respuesta a la medición de ruido de alta frecuencia. Las señales mencionadas se muestran en el diagrama de Simulink en la figura 4.2.6 y los resultados se muestran en la figura 4.2.7:



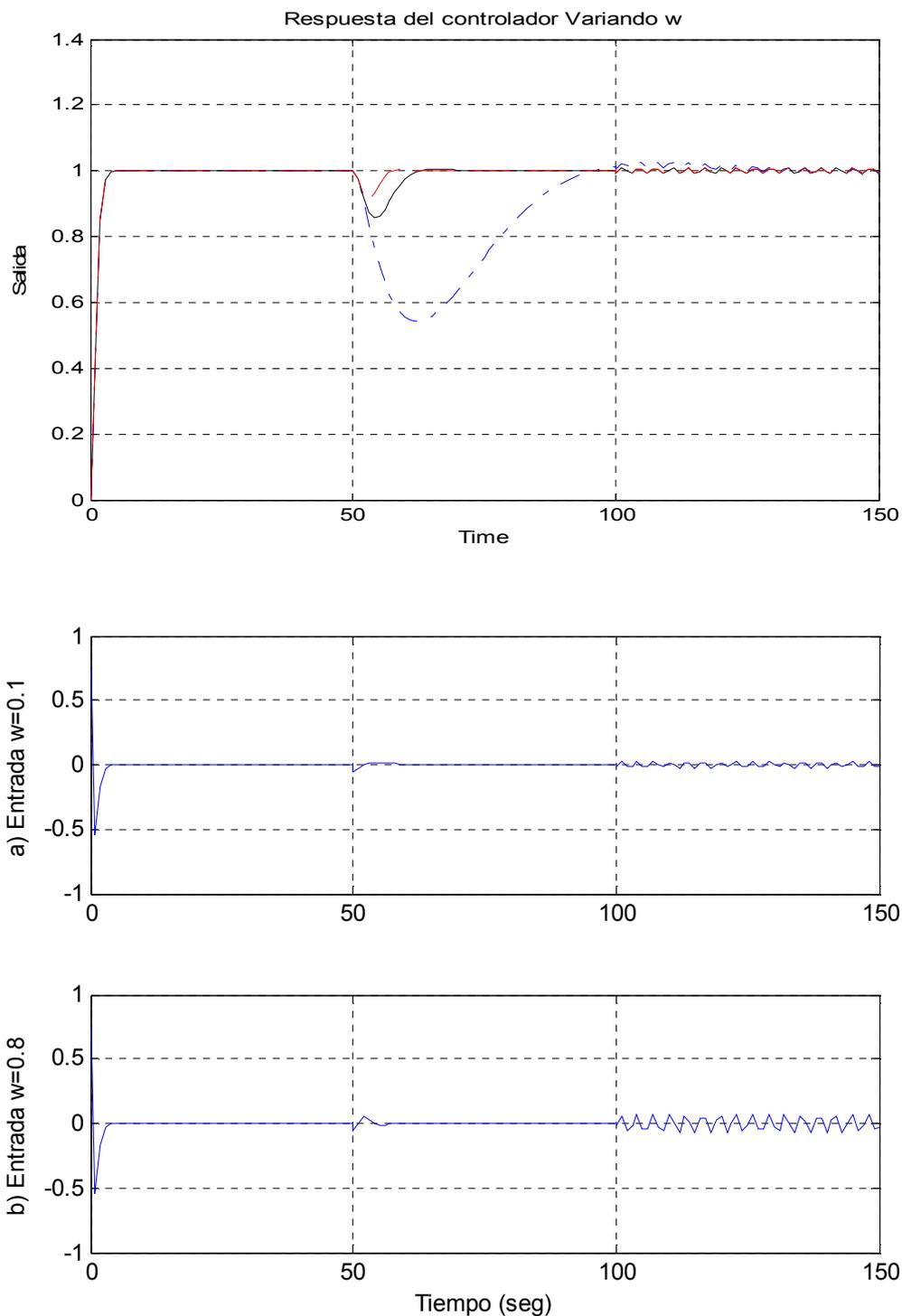
**Figura 4.2.6. Aplicación de Señal de Comando, Perturbación de Carga y Ruido de Alta Frecuencia.**



**Figura 4.2.7. Simulación del Diseño Nominal con Parámetros de**  
 $\omega = 0.2, \zeta = 0.707, \alpha = 2$  y  $T = 1$

#### 4.2.1 Modificando $\zeta$ y $\omega$ :

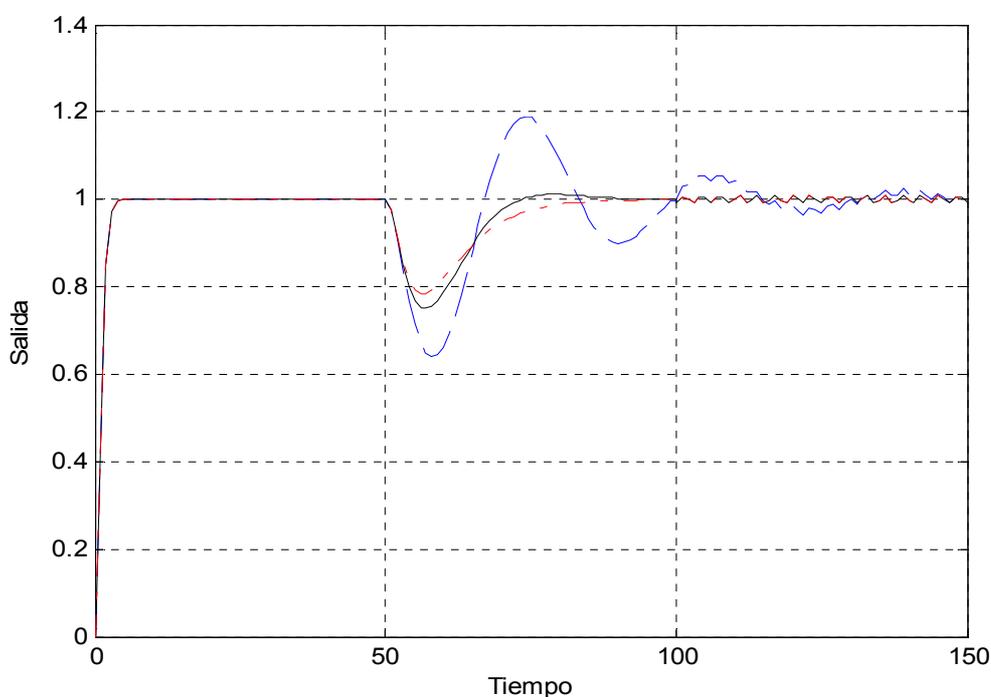
El polinomio  $A_c$  determina la respuesta al comando de señales, además genera una influencia en la respuesta a las perturbaciones de carga y los errores de medición



**Figura 4.2.1.1. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos con  $\zeta=0.707$  cuando se varía:**

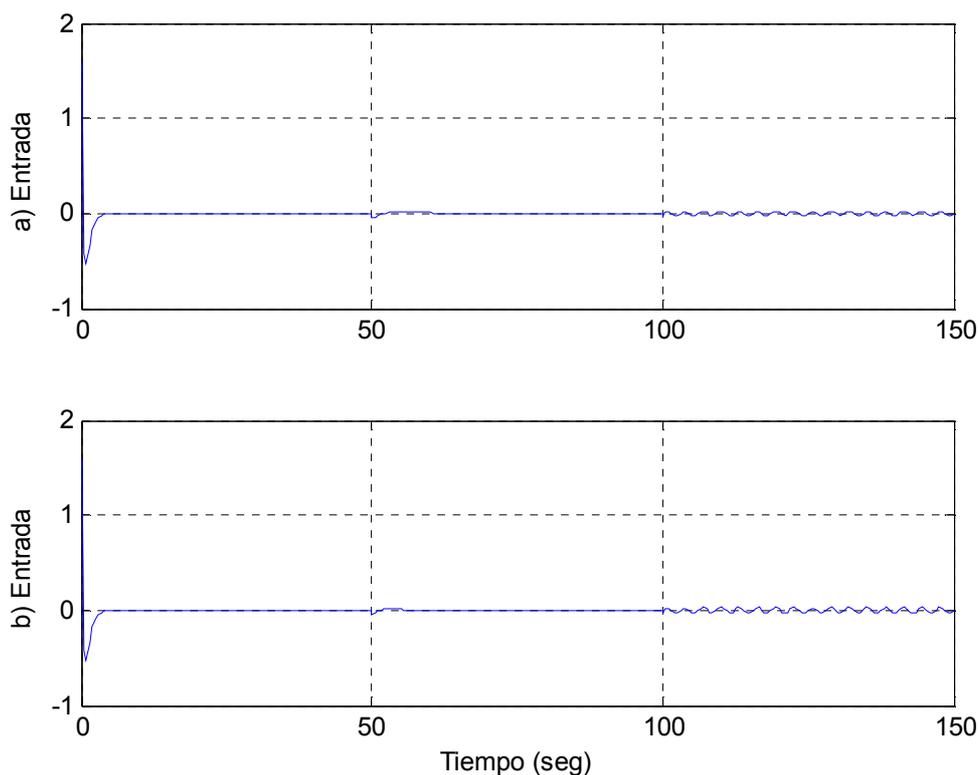
**a)  $\omega=0.1$  línea - (Punteda Entrecortada) en azul,  $\omega =0.4$  línea Continua en negro y b)  $\omega =0.8$  línea - -(Entrecortada) en rojo.**

Se puede apreciar claramente que el tiempo de respuesta y la señal de error debido a las perturbaciones de carga decrecen de manera inversamente proporcional al ancho de banda. Se observa que cuando el ancho de banda incrementa, la señal de comando también incrementa, por ello se puede deducir que la señal de comando es aproximadamente el cuadrado del ancho de banda. Si la señal de control se satura también se saturan los límites del admisible ancho de banda. Por lo que podemos observar si se aumenta  $\omega$  el controlador rechaza de manera más rápida o efectiva las perturbaciones de carga ya que los polos dominantes en lazo cerrado se hacen más rápidos, sin embargo las fluctuaciones en la señal de comando incrementan un poco cuando aumentamos  $\omega$ .



**Figura 4.2.1.2. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos cuando se varía  $\zeta$  y  $\omega=0.2$  :**

**$\zeta=0.2$  línea -- (Entrecortada) en azul,  $\zeta=0.707$  línea continua en negro y  $\zeta=1$  línea . - (Punteada Entrecortada) en rojo.**



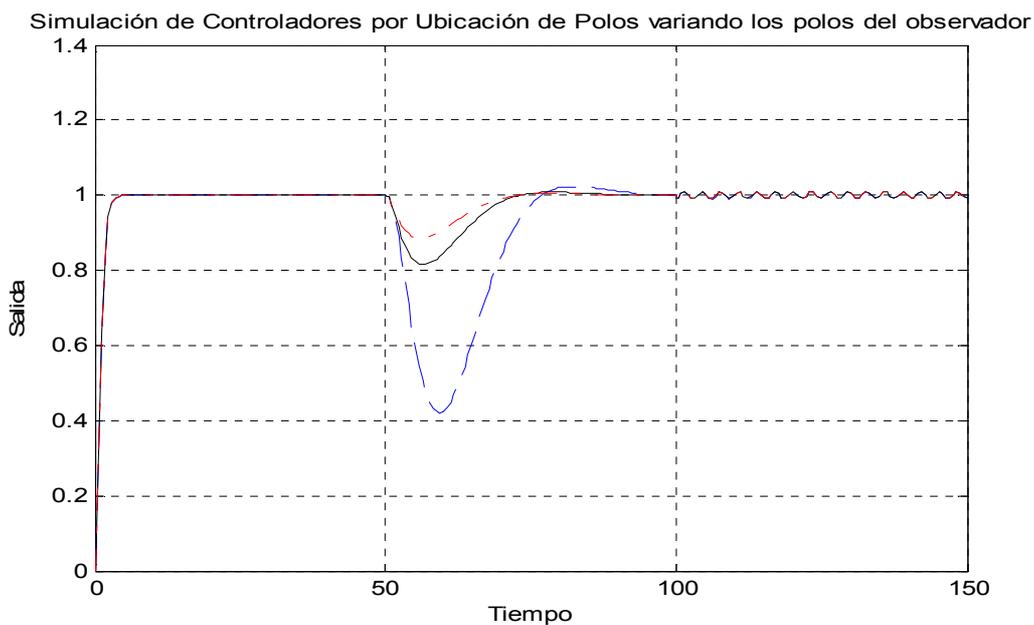
**Figura 4.2.1.3. Señales de Comando para:**

**a)  $\zeta = 0.2$  b)  $\zeta = 1$ .**

Se puede observar claramente que cuando  $\zeta < 1$  en el caso de 0.2 la respuesta en cuanto a tiempo de establecimiento es tardía pero cuando  $\zeta=1$  la respuesta se obtiene sin afectarse por el tiempo de establecimiento.

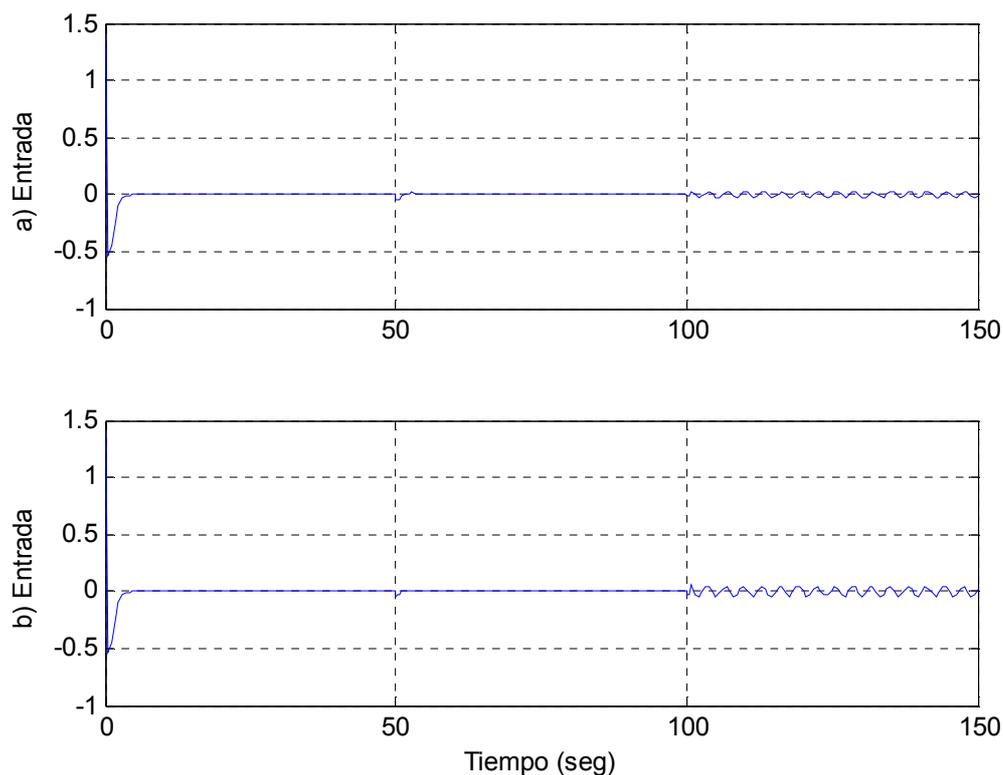
#### 4.2.2 Modificando los Polos del Observador:

Para el diseño del doble Integrador se obtuvo dos polos para el observador en  $z = e^{-\alpha h}$  siendo  $h$  el período de muestreo  $T$  lo que equivale en tiempo continuo a  $s = -\alpha$ . En el diseño nominal mostrado en la figura 4.2.7  $\alpha=2$ . La figura 4.2.2.1 a continuación muestra el efecto de la influencia de los polos del observador a la respuesta de perturbaciones de carga y al ruido de medición con parámetros de  $T=0.6$ ,  $\omega=0.2$  y  $\zeta=0.707$ , sin embargo la respuesta al comando de señales es la misma para todos los polinomios del observador sin importar que se modifique  $\alpha$ .



**Figura 4.2.2.1 Simulación del Controlador por Ubicación de Polos cuando se varían los Polos del Observador. Salida con línea entrecortada color azul para  $\alpha=0.5$ , con línea continua negra para  $\alpha=2$  y con línea entre punteada color rojo para  $\alpha=10$ .**

A continuación se analiza la entrada para el controlador observando que no actúa sobre la señal de comando ya que como se muestra en la figura 4.2.2.2 no varía:

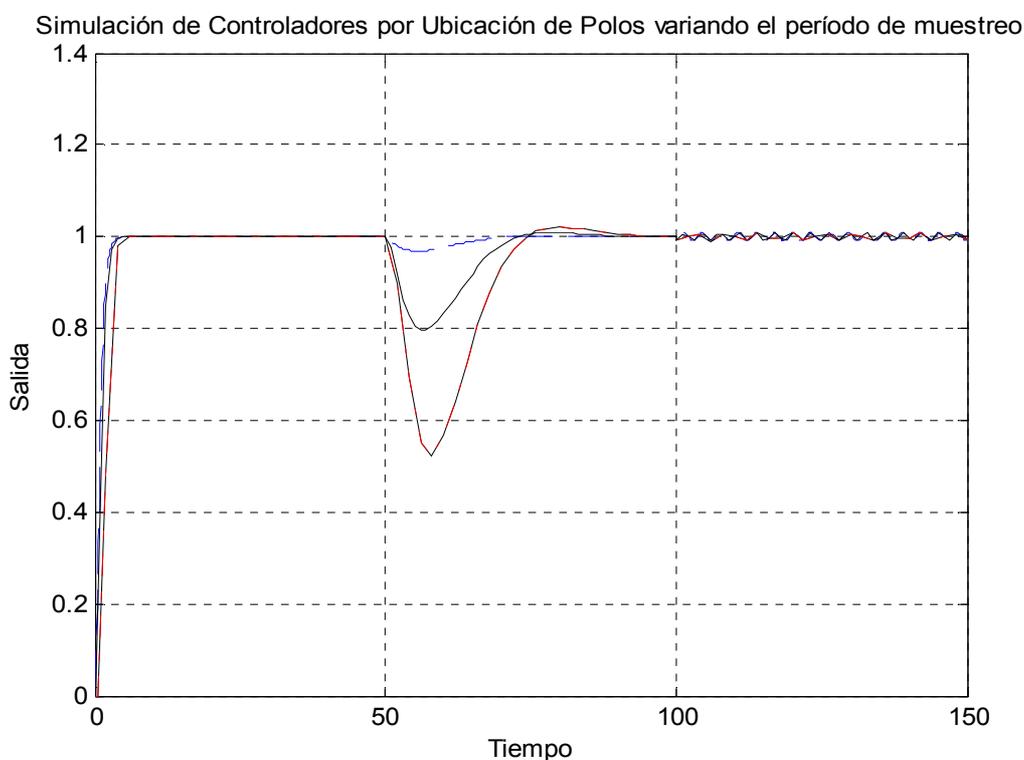


**Figura 4.2.2.2. Señal de comando para a)  $\alpha=2$  y b)  $\alpha=10$**

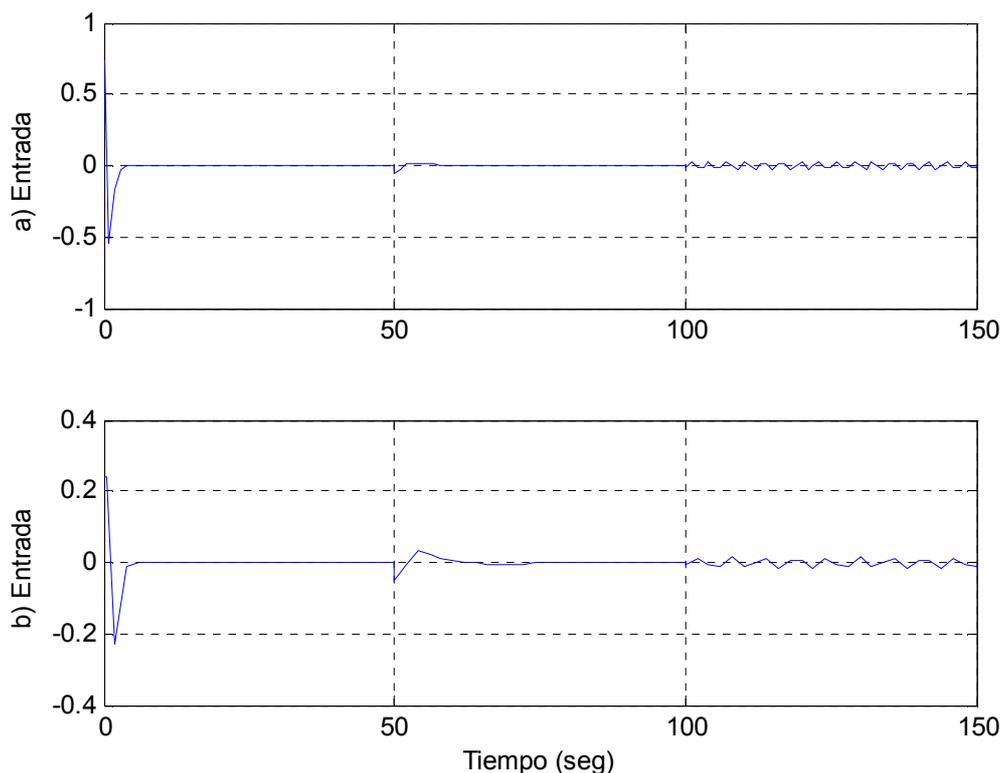
Como se pudo observar en la figura 4.2.2.1 la respuesta a perturbaciones de carga se mejora cuando el observador es más rápido en  $\alpha=10$ . Esto se debe a que cuando incrementa  $\alpha$  los polos del observador se acercan más al origen y la perturbación se observa más rápida, lo que implica que la señal de control responda más rápido para contrarrestar esta perturbación. Se observa claramente que cuando  $\alpha=2$  y  $\alpha=10$  la se mejora la respuesta a esta perturbación. La razón de esta respuesta es que para el período de muestreo escogido en este caso de 0.6 el observador en  $\alpha=2$  se encuentra más cercano al observador de banda muerta, por ello el controlador demora en responder ya que analiza las perturbaciones de carga cercanas a la banda muerta del observador. También se puede determinar que la influencia del ruido de medición decrece cuando el observador se hace más lento; es decir, cuando  $\alpha=2$  existe menos influencia del ruido de medición.

### 4.2.3 Modificando el Período de Muestreo T:

En el diseño nominal se escogió un período de muestreo en  $T=1$  ya que se desea que  $\omega h=0.2$  o de manera más clara  $\omega T=0.2$ , por este motivo  $\omega$  representa los polos dominantes del controlador en lazo cerrado. En la figura 4.2.3.1 a continuación se puede observar claramente que la variación del tiempo de muestreo tiene una gran influencia en la respuesta a perturbaciones de carga. En la figura 4.2.3.2 se muestra como varía la señal de comando cuando se modifica el período de muestreo.



**Figura 4.2.3.1 Simulación del Controlador por Ubicación de Polos cuando se varía el Período de Muestreo. Salida con línea entrecortada color azul para  $T=0.1$ , con línea continua negra para  $T=1$  y con línea entrepunteada color rojo para  $T=2$ .**



**Figura 4.2.3.2. Señal de Comando para a)  $T=1$  y b)  $T=2$**

Se puede apreciar claramente que la señal de error debido a las perturbaciones de carga incrementa cuando se incrementa el período de muestreo y viceversa, esto se debe a que con un tiempo de muestreo siempre se genera un tiempo de retardo al momento de observar la perturbación y actuar sobre ella, por ello si el período es más grande hay un retardo más grande. Se puede también observar que se ha impuesto una perturbación de carga de tipo rampa en el tiempo de 50 por ello si elegimos un período de muestreo en  $T=2$  el controlador actuará sobre la perturbación en  $t=52$ ; también se puede apreciar que el tiempo de establecimiento en la señal de comando es mucho más pequeña para períodos de muestreo más cortos. También hay que tener en cuenta que para períodos de muestreos cortos como 0.2 la respuesta a perturbaciones son determinadas inmediatamente por los polos del observador determinados por  $\alpha$ .

#### 4.2.4 Sensibilidad al Modelamiento de Errores:

En el proceso de diseño se tiene un parámetro el cual es la ganancia del proceso  $k$  dando como resultado la siguiente función:  $G(s) = \frac{k}{s^2}$ , en el diseño nominal se asumió a  $k=1$ . Con una ganancia del 20% se tiene un pequeño efecto sobre el sistema pero el incrementar o decrementar la ganancia en un factor de 2.5 no es aceptable, a continuación se observa como afecta al sistema si cambiamos esta ganancia de 1 con un período corto de muestreo:

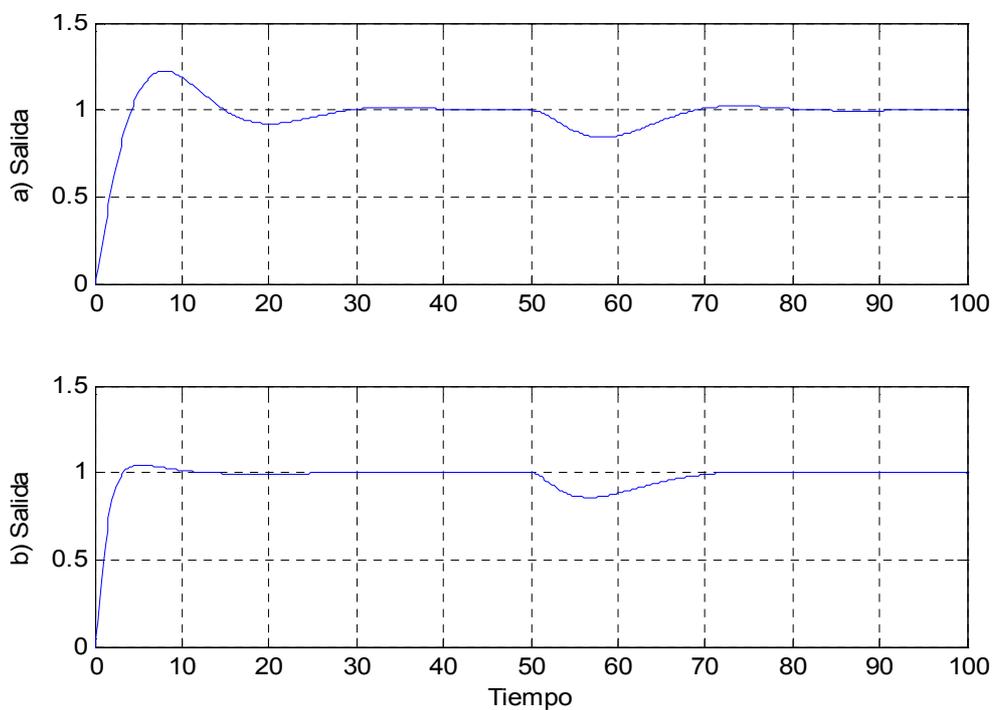


Figura 4.2.4.1. Salidas del Sistema cuando a)  $K=0.4$  y b)  $K=0.8$

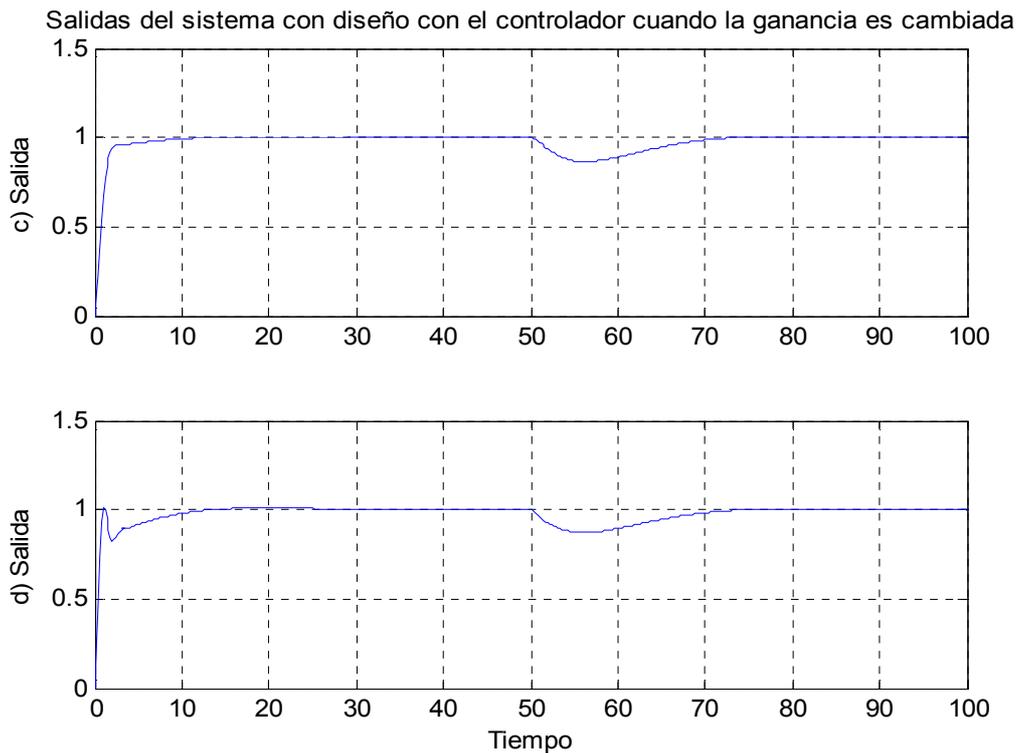
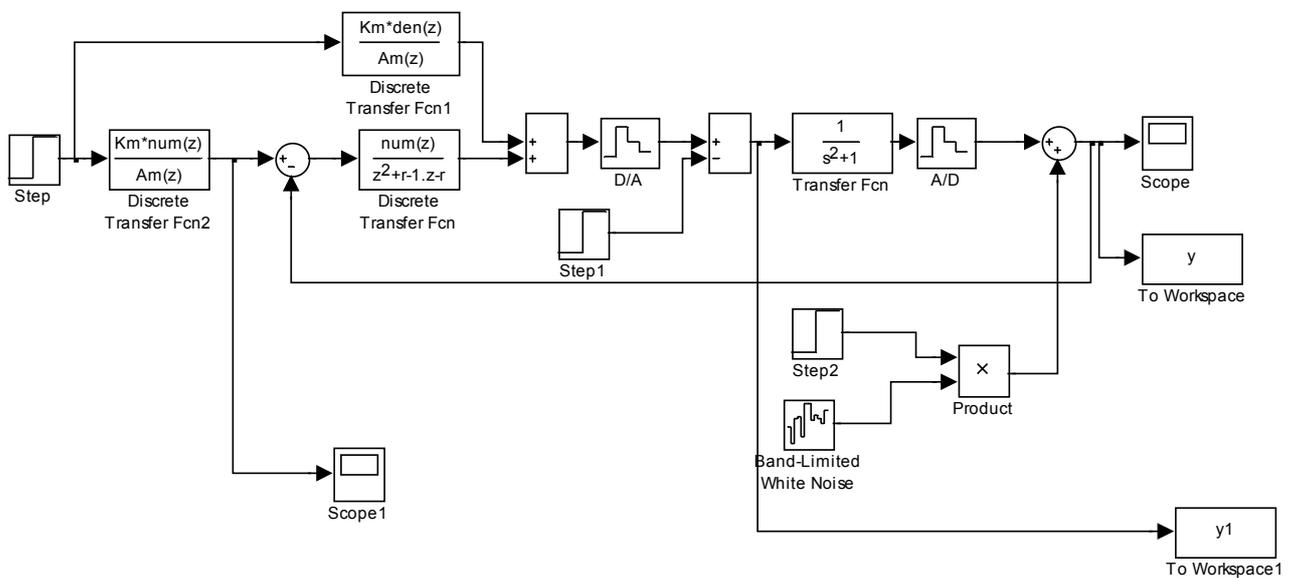


Figura 4.2.4.2. Salidas del Sistema cuando c)  $K=1.2$  y d)  $K=2.5$

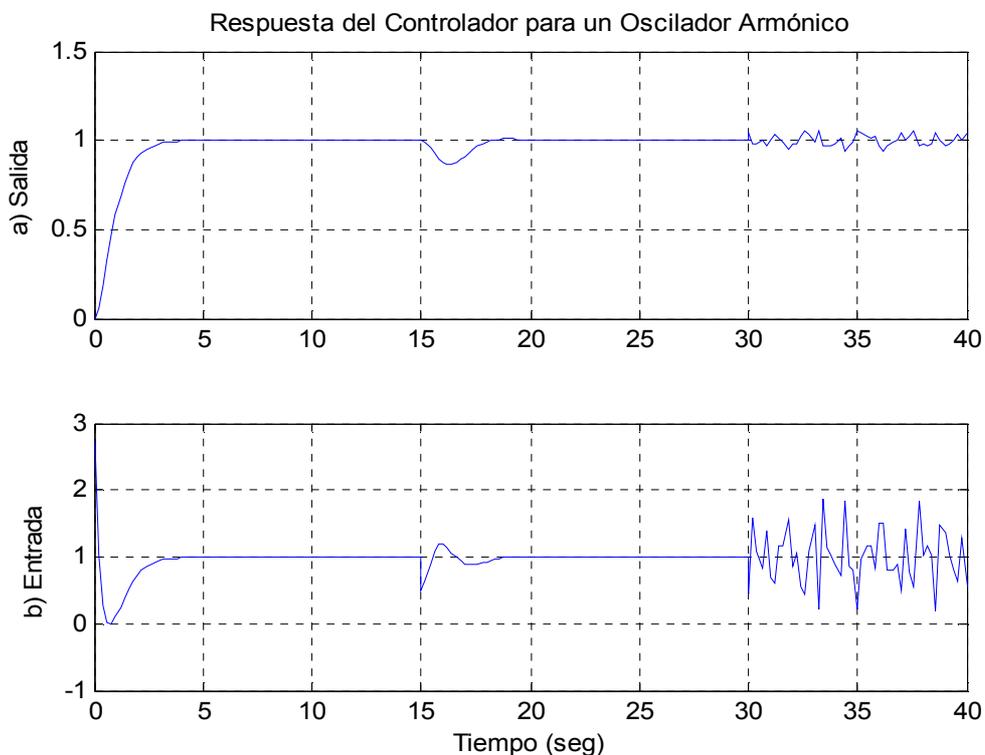
### 4.3 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO

Para la simulación del controlador para un Oscilador Armónico se analiza igual que para el controlador del doble integrador para eso se parte analizando la figura 4.3.1 pero con la función de transferencia  $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$  siendo  $\omega_0 = 1$  dando como resultado  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ , los valores escogidos para el diseño nominal son los siguientes:  $\zeta=0.7$ ,  $\omega=1.5$ ,  $\zeta_{\text{obs}}=0.7$ ,  $\omega_{\text{obs}}=3$ , con un tiempo de muestreo  $T=0.2$ , la razón por la que se escoge este tiempo de muestreo es que esto implica que  $\omega T=0.3$  y  $\omega_{\text{obs}} T=0.6$ , de modo que la regla de manejo queda que  $0.1 \leq \omega T \leq 0.6$  teniendo como resultado la figura (4.3.1.) y en la figura (4.3.2.) se indica la entrada y salida del sistema con una señal de referencia tipo rampa en el tiempo  $t=0$ , una perturbación tipo rampa de valor 0.5 a la entrada en  $t=15$  y un ruido

blanco de medición de tiempo discreto con desviación estándar de 0.01 en t=30 a continuación:



**Figura. 4.3.1. Diagrama de un Controlador para un Oscilador Armónico en Feedback y Feedforward**



**Figura. 4.3.2. Simulación del Diseño Nominal para un Oscilador Armónico con un Integrador en el controlador cuando  $\omega=1.5$ ,  $\omega_{obs}=3$ ,  $\zeta=\zeta_{obs}=0.7$  y  $T=0.2$**

### 4.3.1 Cambiando los Polos del Observador

La figura 4.3.1.1 indica lo que sucede si cambiamos los polos del observador del diseño nominal por  $\omega_{obs}=4$  y  $\omega_{obs}=8$ . Se puede apreciar claramente que la perturbación de carga se elimina rápidamente debido a las dinámicas de un observador más rápido pero también se aprecia que la sensibilidad al ruido incrementa:

Respuesta del Controlador para un Oscilador Armónico Variando los Polos del Observador

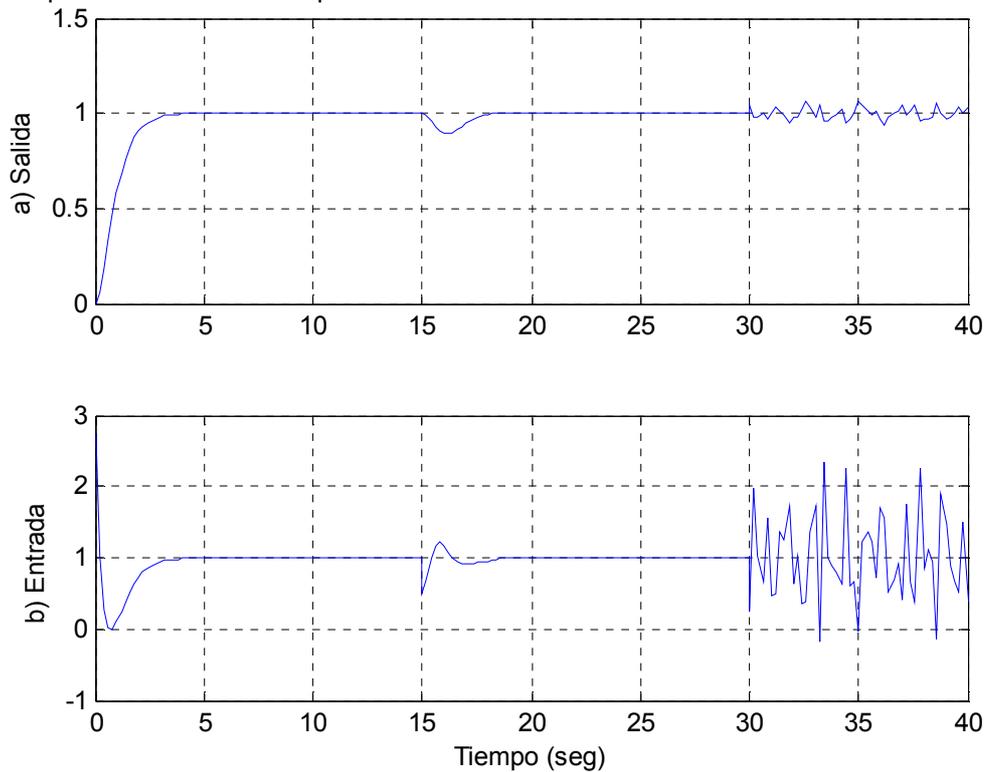


Figura. 4.3.1.1.  $\omega_{obs}=4$

Respuesta del Controlador para un Oscilador Armónico Variando los Polos del Observador

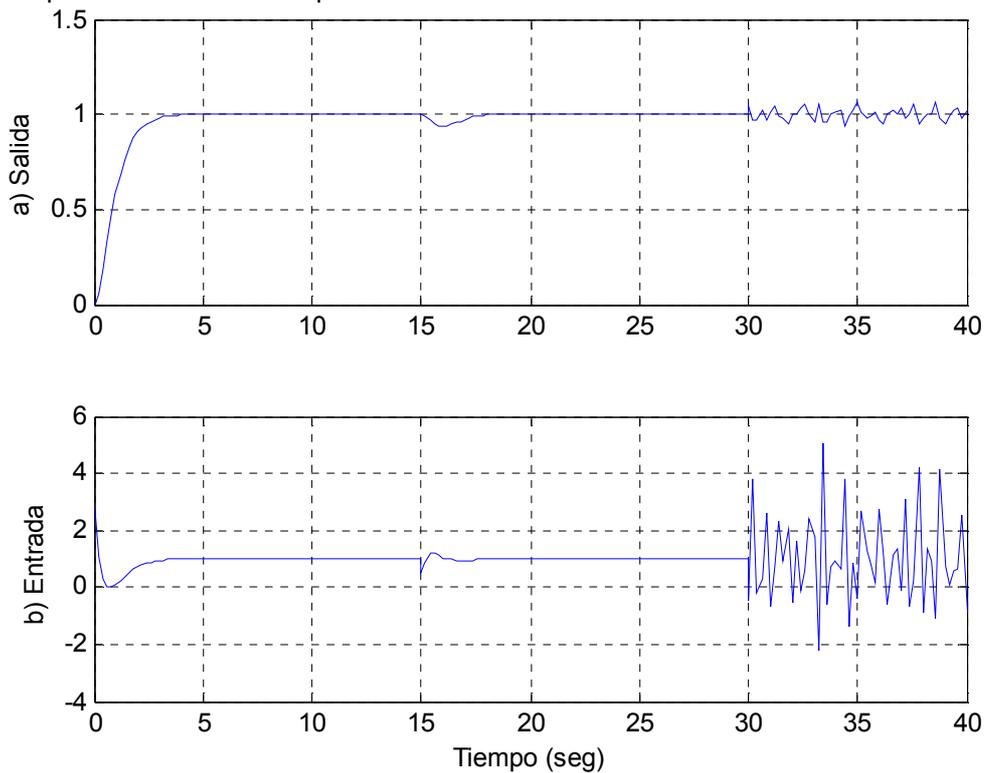


Figura. 4.3.1.2.  $\omega_{obs}=8$

### 4.3.2. Cambiando el Período de Muestreo

El período muestreo en el diseño nominal fue tomado como  $T=0.2$  de modo que  $\omega_{obs} \cdot T=0.6$ , en esta sección cambiaremos de un período de muestreo de  $T=0.1$  a uno de  $T=1$ , como se observó en el Doble Integrador el controlador responde rápidamente a las perturbaciones cuando el período de muestreo es más corto, un período de muestreo más grande incrementa la desviación después de perturbaciones de carga. Esto lo apreciamos a continuación:

Respuesta del Controlador para un Oscilador Armónico Variando el Período de Muestreo

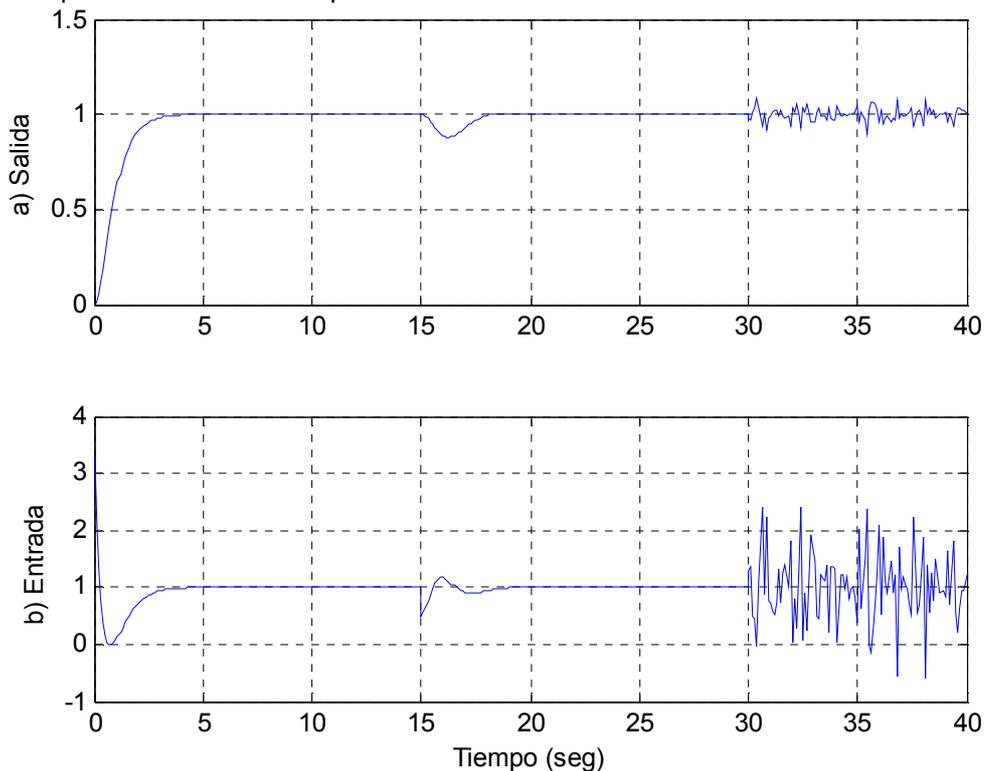


Figura. 4.3.2.1.  $T=0.1$

Respuesta del Controlador para un Oscilador Armónico Variando el Período de Muestreo

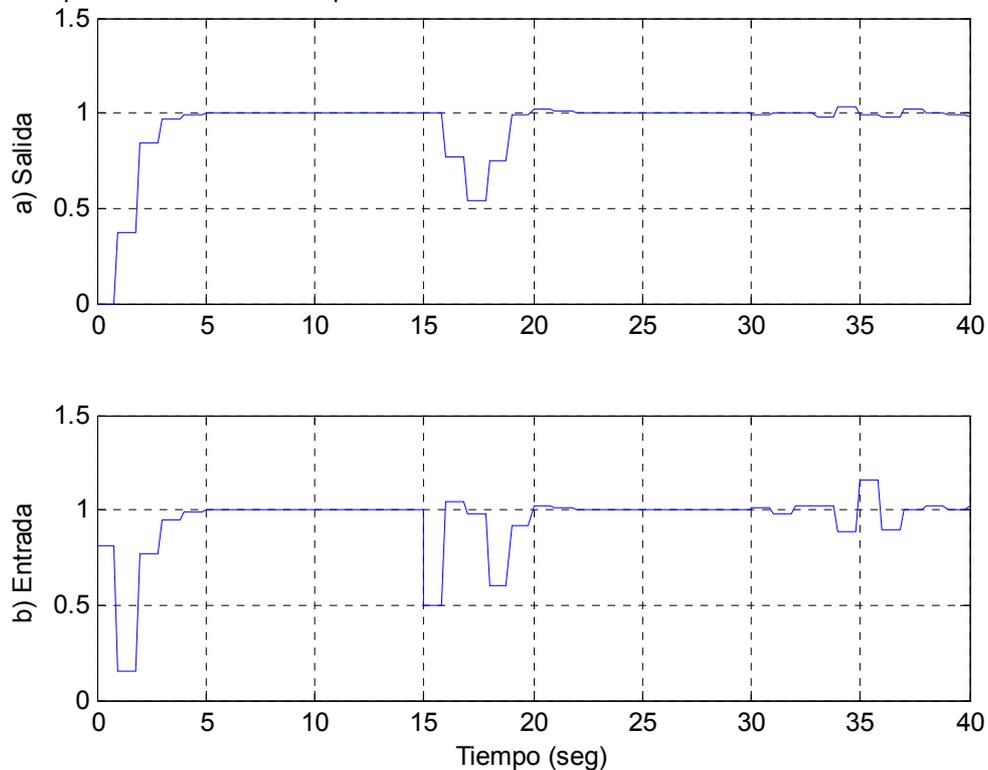


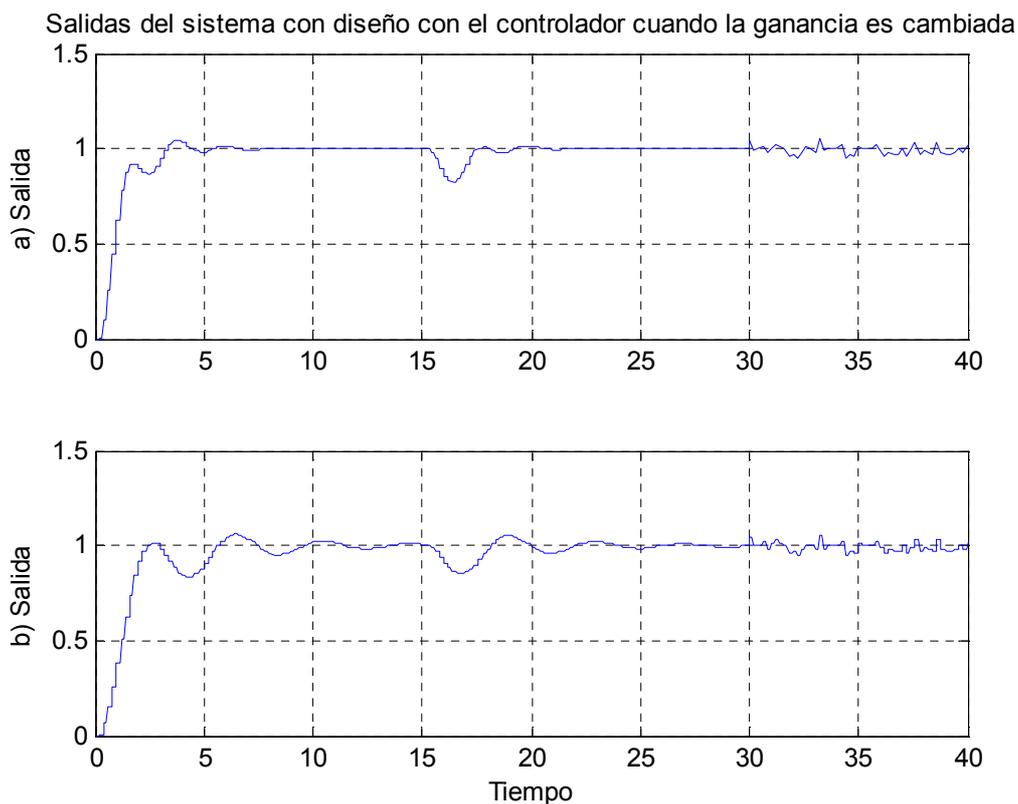
Figura. 4.3.2.2.  $T=1$

### 4.3.3. Robustez

Las consecuencias del modelamiento de errores no ha sido investigada, por ello se plantea que el proceso real tiene la siguiente función de transferencia:

$$G'(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \omega_o^2} \cdot \frac{k(a_d - s)}{a_d + s}$$

Esto significa que el sistema tiene una fase adicional de retraso la cual fue descartada en el diseño nominal, la figura a continuación indica la influencia de esta fase adicional con  $a_d = 15$  y  $a_d = 25$  cuando se utiliza el control nominal, se indica las variaciones cuando se aplican diferentes ganancias:



**Figura 4.3.3.1. Salidas del Sistema cuando a)  $K=1$  y  $a_d=15$  y b)  $K=0.5$  y  $a_d=25$**

Obteniendo las siguientes funciones de transferencia:

$$a)G(s) = \frac{-s+15}{s^3+15s^2+s+15}$$

$$b)G(s) = \frac{-0.5s+12.5}{s^3+25s^2+s+25}$$

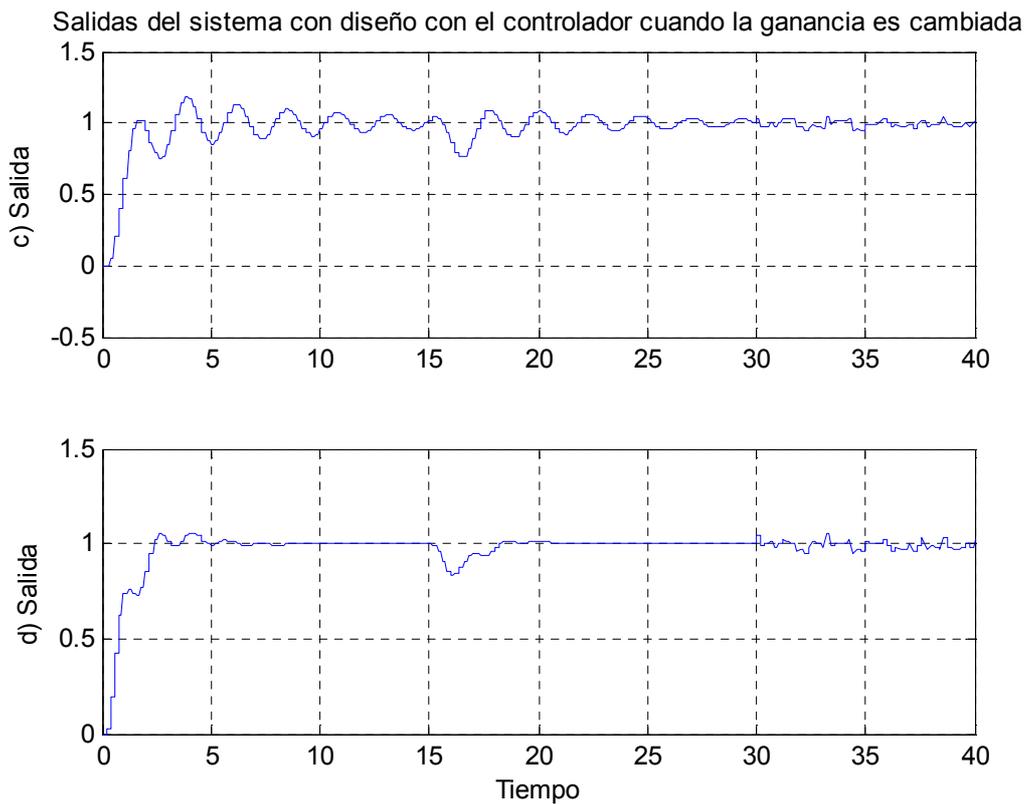


Figura 4.3.3.2. Salidas del Sistema cuando c)  $K=1$  y  $a_d=10$  y d)  $K=1.5$  y  $a_d=25$

Obteniendo las siguientes funciones de transferencia:

$$c)G(s) = \frac{-s+10}{s^3+10s^2+s+10}$$

$$b)G(s) = \frac{-1.5s+37.5}{s^3+25s^2+s+25}$$

#### 4.4 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PARA UN BRAZO ROBÓTICO FLEXIBLE.

Para analizar los resultados de simulación de este controlador tomamos en cuenta los parámetros expuestos en la sección 3.10 del capítulo anterior, de acuerdo a esa función en  $H(z)$  sin el seguimiento del modelo  $H_m(z)$  tenemos la siguiente respuesta en nuestro controlador:

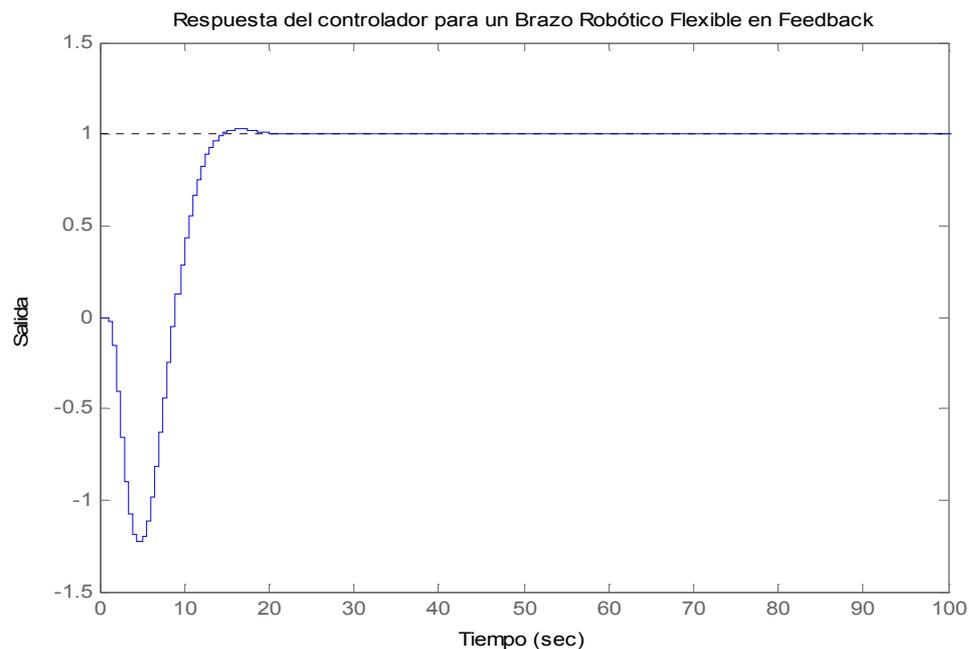
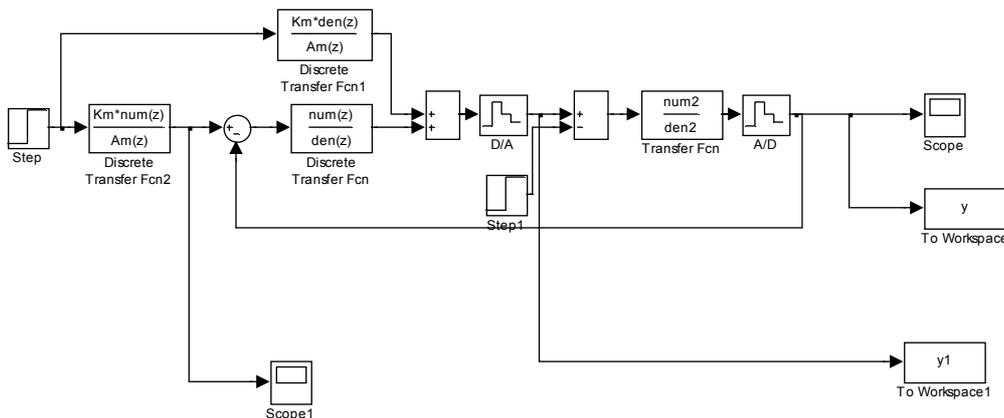
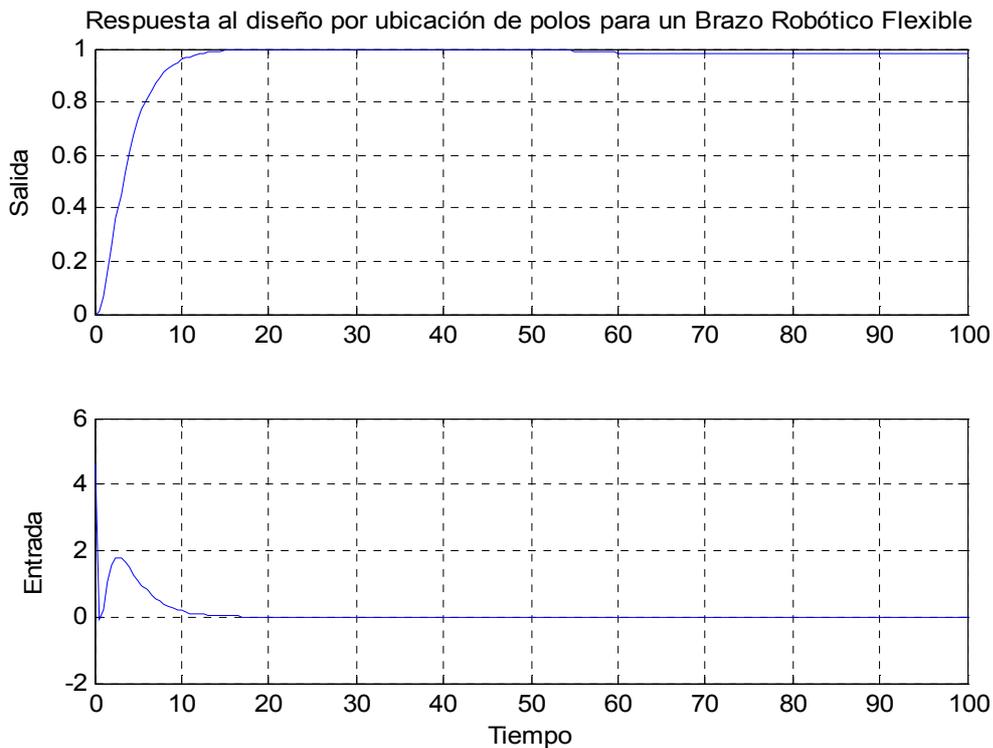


Figura 4.4.1. Respuesta del Controlador para un Brazo Robótico Flexible en Feedback

Los parámetros utilizados para el diseño nominal fueron de  $\alpha_0=2$ ,  $\alpha_1=2$ ,  $\omega_m=0.5$ ,  $\zeta_m=0.707$ ,  $T=0.5$ ; además se ingresó una perturbación de tipo escalón de valor 0.01 en el tiempo de 50 seg, esto lo podemos observar a continuación en el diagrama de bloques en Simulink; además se observa la respuesta del sistema en la figura 4.4.3:



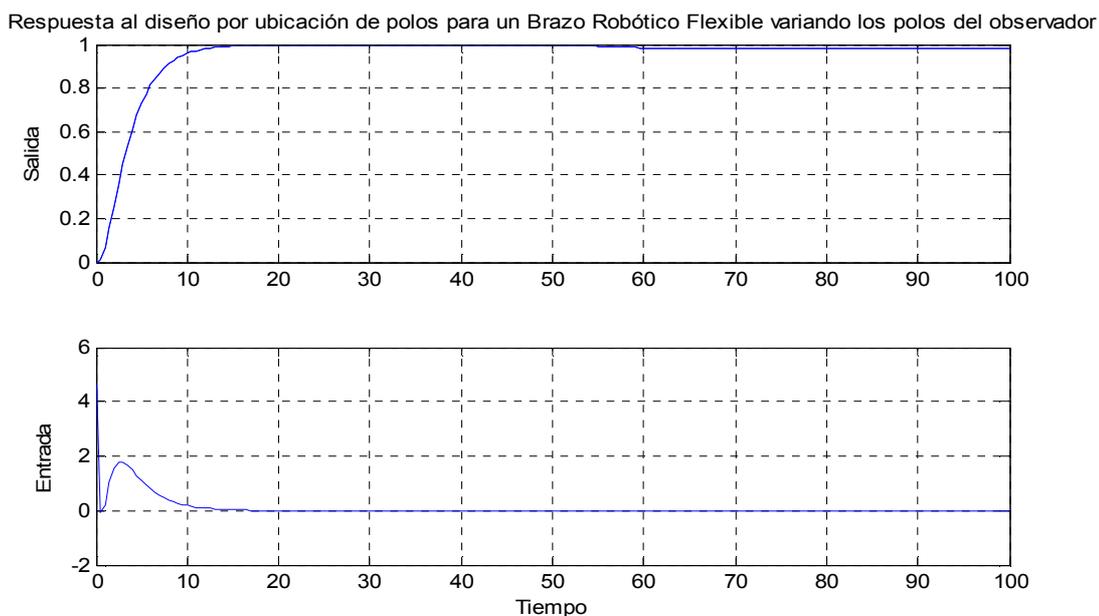
**Figura 4.4.2. Diagrama de Bloques en Simulink para el Diseño de un Brazo Robótico Flexible con una Perturbación.**



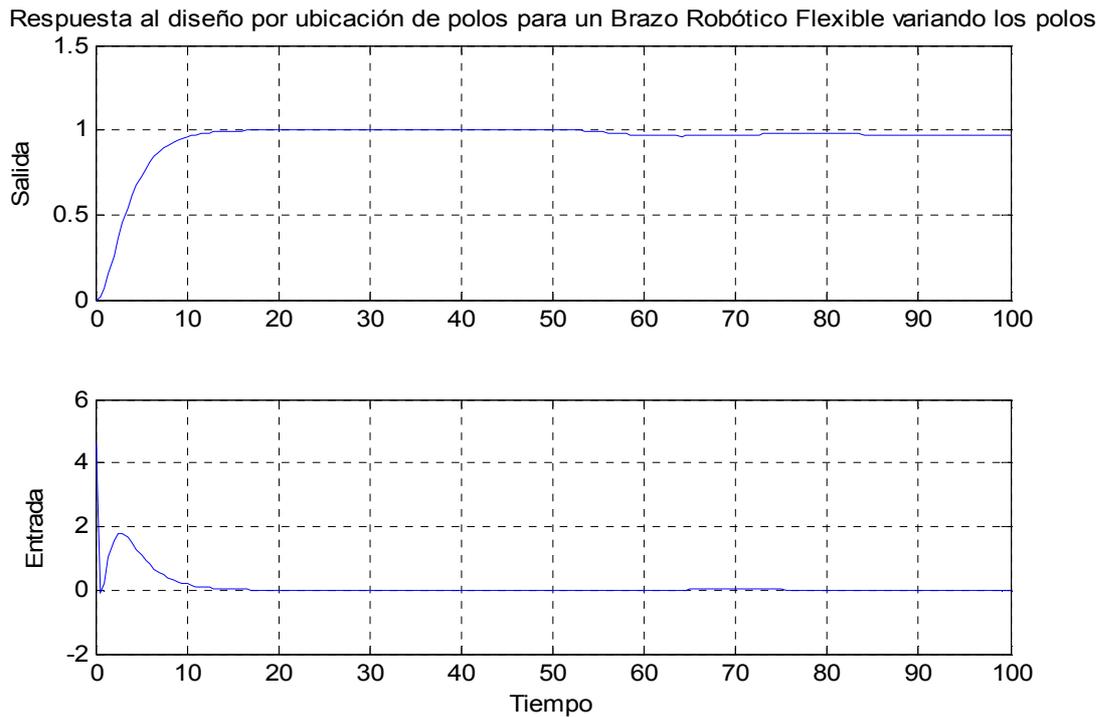
**Figura 4.4.3. Respuesta del Controlador para un Brazo Robótico Flexible con los Parámetros Nominales de Diseño.**

#### 4.4.1. Variando los Polos del Observador y del Polinomio Característico

En el diseño nominal se procedió a dar el valor de  $\alpha_0=2$ ,  $\alpha_1=2$ , a continuación veremos cual es el efecto de variar los polos del observador y del polinomio característico:



**Figura 4.4.1.1. Respuesta del Controlador para un Brazo Robótico Flexible Variando los Polos del Observador  $\alpha_0=10$ .**

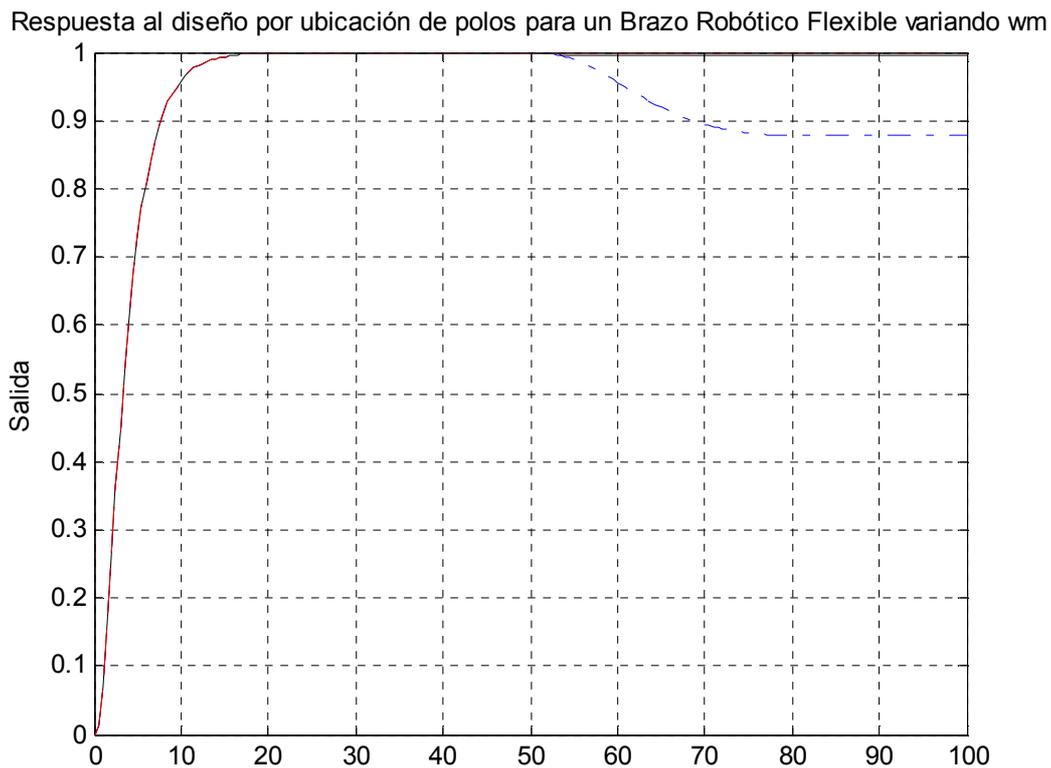


**Figura 4.4.1.2. Respuesta del Controlador para un Brazo Robótico Flexible Variando los Polos del Observador y del Polinomio Característico  $\alpha_0=0.5$  y  $\alpha_1=0.5$ .**

Como se pudo apreciar al igual que en los otros controladores cuando los polos del observador se hacen más grandes más rápida se hace la respuesta del controlador a las perturbación de carga, por lo que siguen de manera mucho más eficiente las señales de comando, por otro lado cuando se escoge polos más pequeños se observa claramente en la figura 4.4.1.2. que el controlador se vuelve un poco inestable al rechazo a perturbaciones.

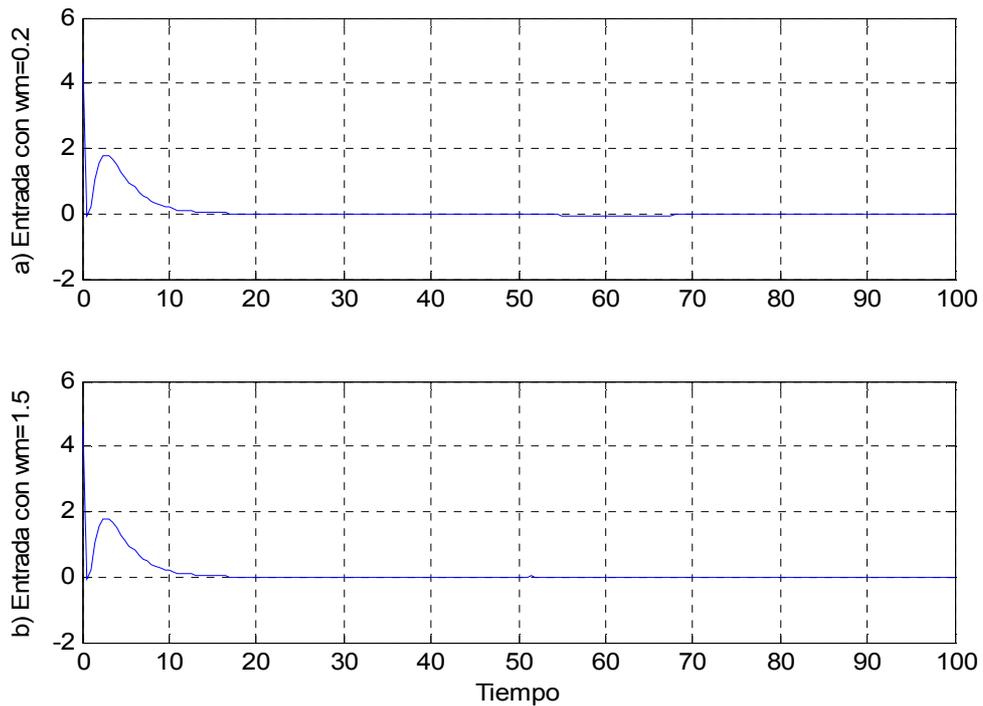
#### 4.4.2. Modificando $\zeta_m$ y $\omega_m$ :

El polinomio  $A_c$  determina la respuesta al comando de señales, además genera una influencia en la respuesta a las perturbaciones de carga y los errores de medición:



**Figura 4.4.2.1. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos con  $\zeta=0.707$  cuando se varía:**

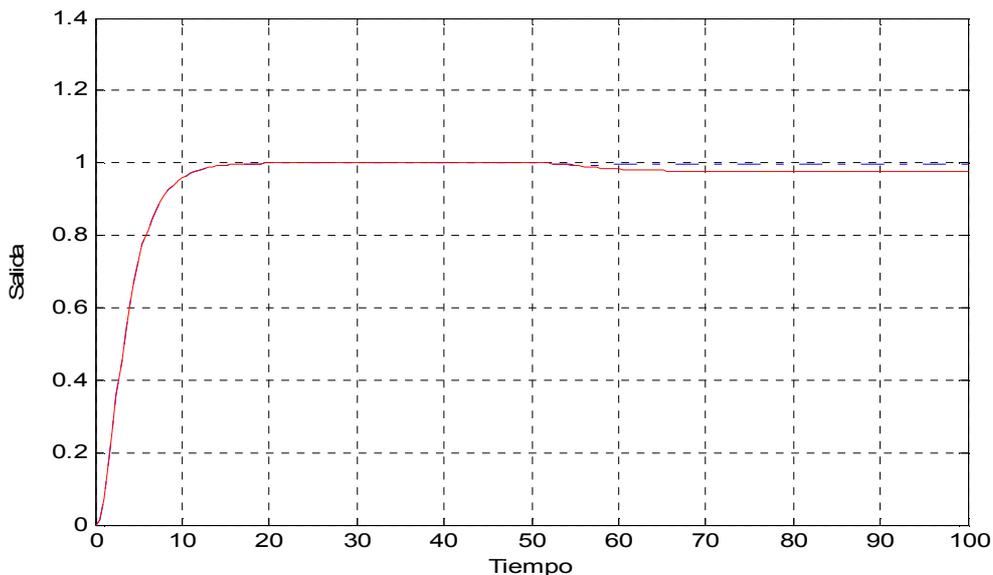
**$\omega=0.2$  línea .- (punteada entrecortada) en azul,  $\omega =0.8$  línea - -(Entrecortada) en rojo; línea continua en negro  $\omega =1.5$ .**



**Figura 4.4.2.2. Comando de Señal para**

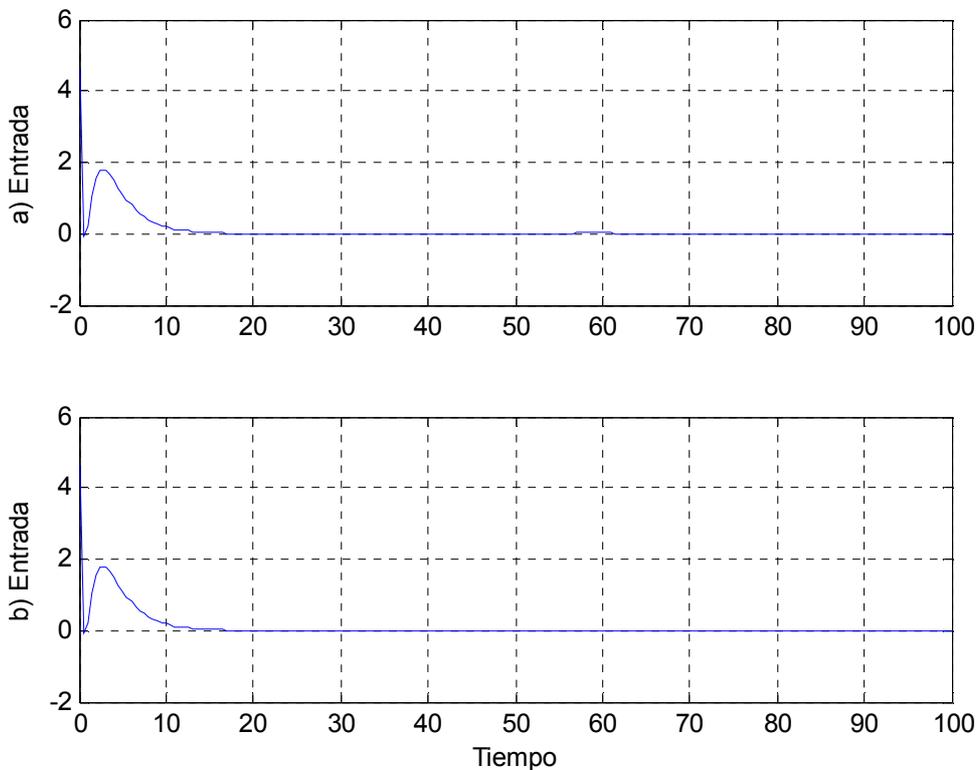
**$\omega_m=0.2$  línea , b)  $=1.5_m$ .**

Se puede apreciar lo mismo que hemos venido apreciando en los otros controladores; cuando  $\omega$  es más pequeño disminuye su rechazo a perturbación y le es más difícil seguir el por el contrario mientras más incrementemos  $\omega$  tiene un mejor seguimiento la señal de comando y mejora notablemente el rechazo a perturbaciones. .



**Figura 4.4.2.3. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos cuando se varía  $\zeta$  y  $\omega=0.5$  :**

$\zeta=0.2$  línea .- (Punteada entrecortada) en azul y  $\zeta=1$  línea --( entrecortada) en rojo.



**Figura 4.4.2.4. Señales de Comando para:**

**a)  $\zeta=0.2$  b)  $\zeta=1$ .**

Se puede observar claramente que cuando  $\zeta < 1$  en el caso de 0.2 tiene una mejor respuesta a perturbaciones y su tiempo de establecimiento es mucho mejor que cuando  $\zeta=1$ .

En este controlador no se pudo variar el tiempo de muestreo ya que el diseño original está elaborado para el período de muestreo de  $T=0.5$ , si se varía el tiempo de muestreo la función de transferencia en  $H(z)$  va a variar y no se va a controlar de manera adecuada, por esta razón no se ha expuesto gráficamente estos resultados.

#### 4.5 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PARA UN DOBLE INTEGRADOR MEDIANTE FUNCIONES.

Hasta el momento se han venido desarrollando controladores digitales los cuales se ha podido verificar su funcionamiento mediante simulaciones; la idea que se expone a continuación es la de llevar este proyecto a aplicaciones reales; es decir, exponer la idea de los controladores para llevarlas ya sea a un microprocesador, un DSP, etc. Por ello se explica a continuación como se desarrolló este programa mediante funciones para esto partimos del diagrama de bloques basado en Simulink de la figura 4.2.3. obteniendo:

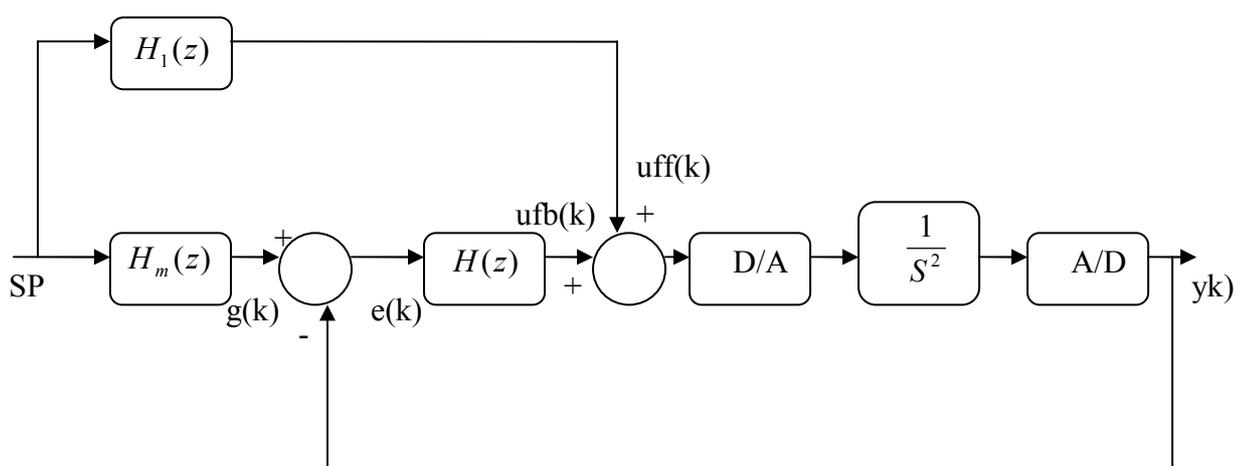


Figura 4.5.1. Diagrama de Bloques General del Controlador para un Doble Integrador

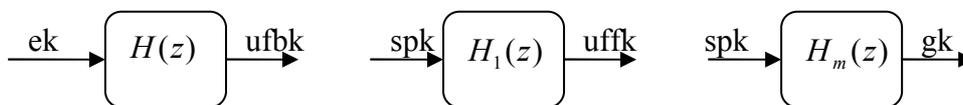
Las funciones de transferencia se las tomó con un tiempo de muestreo de  $T=0.6$  teniendo como resultado:

$$H_1(z) = \frac{1.3565(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - 0.6024z + 0.00907}$$

$$H_m(z) = \frac{1.3565(0.18z + 0.18)}{z^2 - 0.6024z + 0.00907}$$

$$H(z) = \frac{1.9144z^2 - 3.5569z + 1.6604}{z^2 - 0.7777z + 0.2223}$$

A partir de estas funciones de transferencia se realizó un algoritmo en el cual mediante una sola función genere la respuesta deseada del controlador con el fin de que esta función creada se lo pueda ingresar fácilmente en un microcontrolador y llevar el proyecto a un caso real para ello se utilizó el siguiente algoritmo el cual mediante un programa en Matlab permitió generar la respuesta deseada; el algoritmo desarrollado fue el siguiente:



**Figura 4.5.2. Entradas y Salidas de los Bloques a Implementar en una sola Función.**

Con este diagrama de bloques se tiene que:

$$H(z) = \frac{1.9144z^2 - 3.5569z + 1.6604}{z^2 - 0.7777z + 0.2223} = \frac{ufbk}{ek}$$

$$ufbk(z) - 0.7777z^{-1}ufbk(z) - 0.2223z^{-2}ufbk(z) = 1.9144ek(z) - 3.5569z^{-1}e(k) + 1.6604z^{-2}ek$$

$$ufbk = 0.7777 * uk1 + 0.2223 * uk2 + (ek * 1.9144) - (ek1 * 3.5569) + (ek2 * 1.6604)$$

$$H_1(z) = \frac{1.3565(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - 0.6024z + 0.00907} = \frac{uffk}{spk}$$

$$uffk(z) - 0.6024z^{-1}uffk(z) + 0.00907z^{-2}uffk(z) = 1.3565spk(z) - 2*1.3565z^{-1}spk(z) + 1.3565z^{-2}spk(z)$$

$$uffk = (0.6024 * uffk1) - (0.0907 * uffk2) + (1.3565 * spk) - (2 * 1.3565 * spk1) + (1.3565 * spk2)$$

$$H_m(z) = \frac{1.3565(0.18z + 0.18)}{z^2 - 0.6024z + 0.00907} = \frac{gk}{spk}$$

$$gk(z) - 0.6024z^{-1}gk(z) + 0.00907z^{-2}gk(z) = 1.3565 * 0.18(z^{-1}spk(z) + z^{-2}spk(z))$$

$$gk = (0.6024 * gk1) - (0.097 * gk2) + (0.18 * 1.3565) * (spk1 + spk2)$$

Con estos valores se procede a generar un código en Matlab el cual genera una función que permite generar el modelo deseado; el modelo en Matlab/Simulink se lo presenta a continuación:

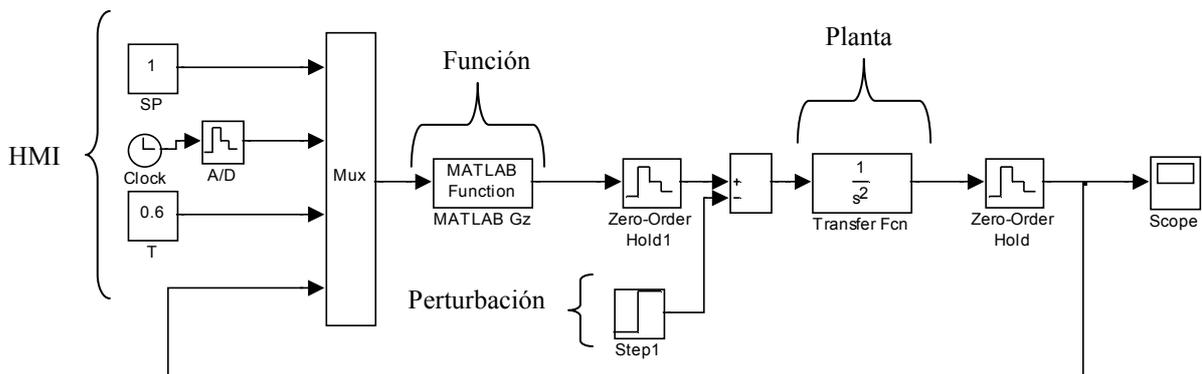
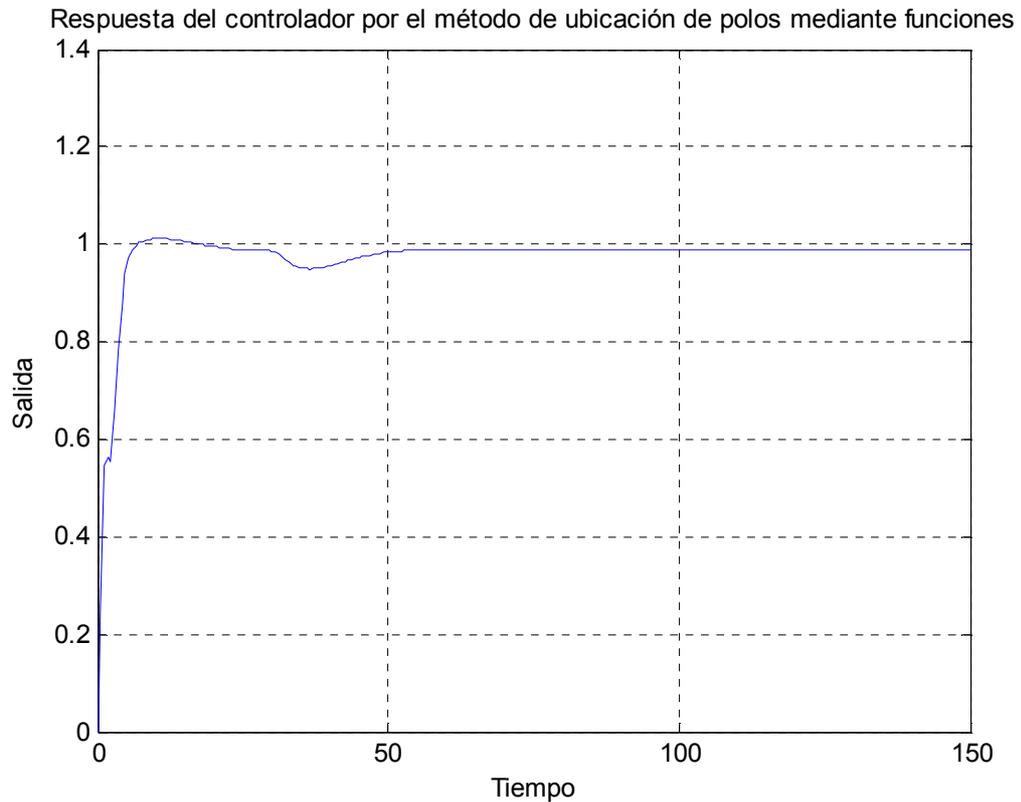


Figura 4.5.3. Diagrama de Bloques Esquemático Utilizando la Función Planteada.

Hay que tener en cuenta que este esquema se lo puede llevar a una aplicación real donde HMI representa la interfaz en la cual vamos a poder ingresar los parámetros deseados en el sistema a controlar, se puede ingresar el set-point esto lo podemos desarrollar en varios software que existen en el mercado por ejemplo In-touch con el cual estamos muy familiarizados en el estudio de la carrera, el clock representa la pulsación que se realiza mediante el teclado para

iniciar el proceso; lo que se requiere es un microcontrolador el cual tenga una entrada y una salida digital en el cual se puede programar fácilmente la función; por último se debe conectar el proceso a la planta a controlar y la perturbación que deseemos ingresar al proceso y vamos a tener la siguiente respuesta:



**Figura 4.5.4. Respuesta del Controlador por el Método de Ubicación de Polos Mediante Funciones con Perturbación de Carga en  $t=30$ .**

Se aprecia claramente que llegamos a la respuesta deseada y representada anteriormente mediante bloques en Simulink.

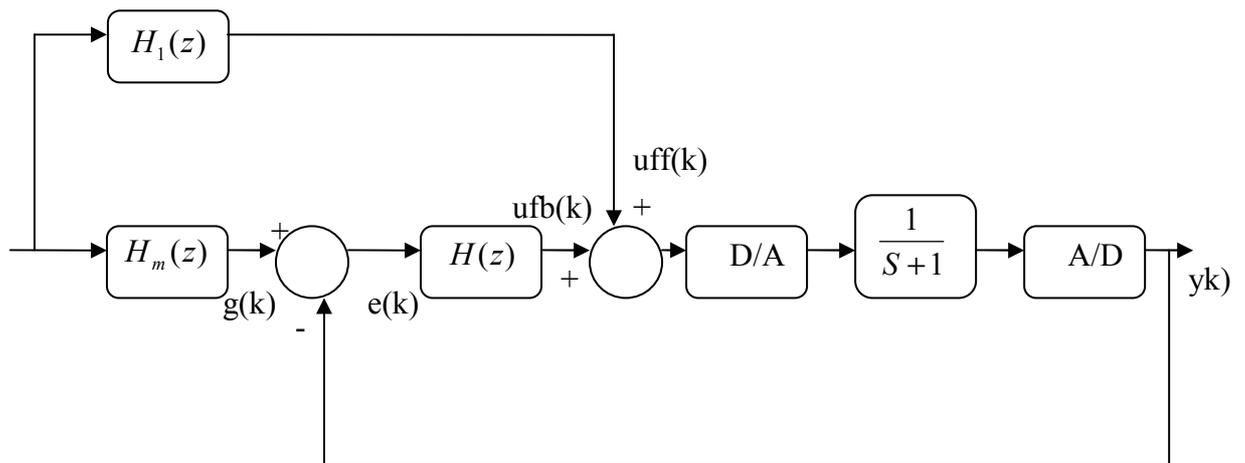
#### **4.6 ESQUEMA DE SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO MEDIANTE FUNCIONES.**

Se procede a realizar exactamente el mismo proceso planteado para el Doble Integrador obteniendo las siguientes funciones de transferencia para un período de muestreo de  $T=0.2$ :

$$H_1(z) = \frac{2.7263(z^2 - 1.9601z + 1)}{z^2 - 1.306z + 0.4493}$$

$$H_m(z) = \frac{2.7263(0.0199z + 0.0199)}{z^2 - 1.3406z + 0.4493}$$

$$H(z) = \frac{12.8309z^2 - 22.8644z + 10.4661}{z^2 - 1.0750z + 0.0750}$$



**Figura 4.6.1. Diagrama de Bloques General del Controlador para un Oscilador Armónico**

Se procede a procesar las señales de entrada – salida para cada una de las funciones de transferencia exactamente como se indicó en el ejemplo del doble integrador; con ello se realiza la función deseada y obtenemos la siguiente respuesta:



**Figura 4.6.2. Respuesta del Controlador por el Método de Ubicación de Polos Mediante Funciones con Perturbación de Carga en  $t=15$ .**

Con esto se observa claramente que se puede implementar un sistema con una aplicación real para cualquier planta que se desee controlar, para ello se deben obtener los parámetros de las funciones de transferencia calculadas mediante el programa en Matlab y se puede programar de una manera muy sencilla en cualquier microcontrolador la función obtenida en Matlab obteniendo excelentes resultados.

## CAPÍTULO V

### RELACIÓN CON OTROS MÉTODOS DE DISEÑO

#### 5.1 INTRODUCCIÓN

El diseño mediante ubicación de polos permite realizar un enfoque general en el diseño de sistemas de una entrada – una salida ; muchos métodos de diseño de controladores pueden ser interpretados como diseños mediante ubicación de polos. Por ello en este capítulo se podrá observar el parecido que tiene este método con respecto a varios métodos de diseño que existen, por ello se tendrá una nueva visión en cuanto al diseño de nuevos métodos, en particular se analizará la relación que existe con el método de Root – Locus y el Predictor – Smith.

#### 5.2 ROOT - LOCUS

Como se conoce el método de Root – Locus es una técnica clásica utilizada para el diseño de sistemas de control, tal cual lo analizamos en la carrera en Sistemas de Control II, la técnica se basa en la idea de intentar ubicar los polos en lazo cerrado en posiciones deseadas, por este motivo tiene relación con el método que se ha venido estudiando el de ubicación de polos; por ello en este método de Root – Locus los polinomios  $R$  y  $S$  son tomados al principio como lo que corresponde a un controlador proporcional, por ello se escoge  $R=1$  y  $S=k$  , debido a que la ganancia  $K$  puede ser cambiada, también las raíces de la ecuación característica:

$$A + KB = 0$$

Sin embargo si no se obtiene una ubicación de polos razonable se puede escoger los polinomios  $R$  y  $S$  de acuerdo a como los hemos venido escogiendo en los diseños anteriores de modo que cumplan con la ecuación Diophantina. Por ello el método de Root – Locus claramente se lo puede asociar con el de ubicación de polos, por esto al aplicar el método la complejidad del controlador requiere que el posicionamiento de sus polos puedan ser encontrados directamente. Con el método de ubicación de polos todos los polos se pueden posicionar con tan solo una operación. Por ello la complejidad del controlador es determinada de acuerdo a la complejidad del modelo del proceso utilizado en el diseño. A continuación presento un modelo diseñado en base a Root – Locus mediante el método de ubicación de polos:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \frac{hz}{z-1} = \frac{h}{z-1} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Como hemos venido haciendo en los otros métodos partimos de la ecuación:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_{cl}$$

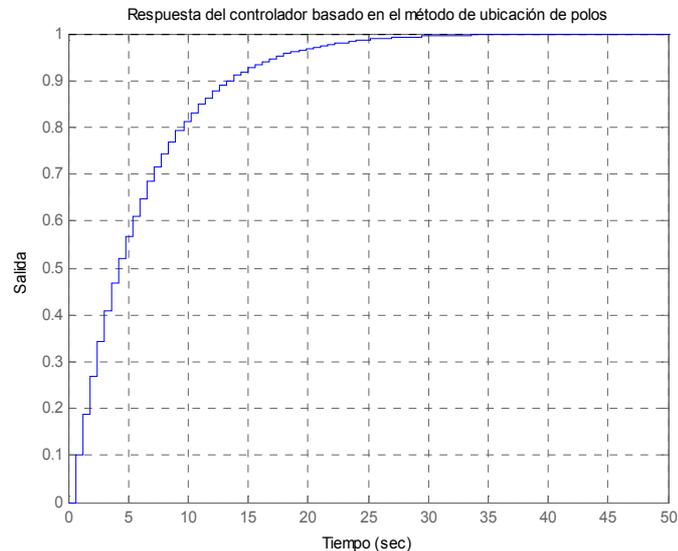
Si tomamos a  $R(z)=r_0$  y  $S(z)=KS_0$  tenemos que:

$$(z-1)r_0 + khs_0 = A_{cl}$$

Donde  $K$  es la ganancia que podemos ir variando resolviendo la ecuación se tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & kh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix}$$

Determinamos que los polinomios  $A_c = (z - e^{-sT})$  y  $A_o = 1$  para cumplir con la ecuación Diophantina y se obtiene la siguiente respuesta en el controlador:



**Figura. 5.2.1. Respuesta del Controlador Basado en la Ubicación de Polos.**

Como se puede apreciar en el diseño se parte de la idea del método basado en Root – Locus y lo resolvemos mediante el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial como lo hemos venido haciendo en los controladores expuestos en los capítulos anteriores.

### 5.3 PREDICTOR SMITH

El método basado en Predictor Smith es un modelo que trata básicamente sistemas con tiempo de retardo; el método viene representado en la figura a continuación:

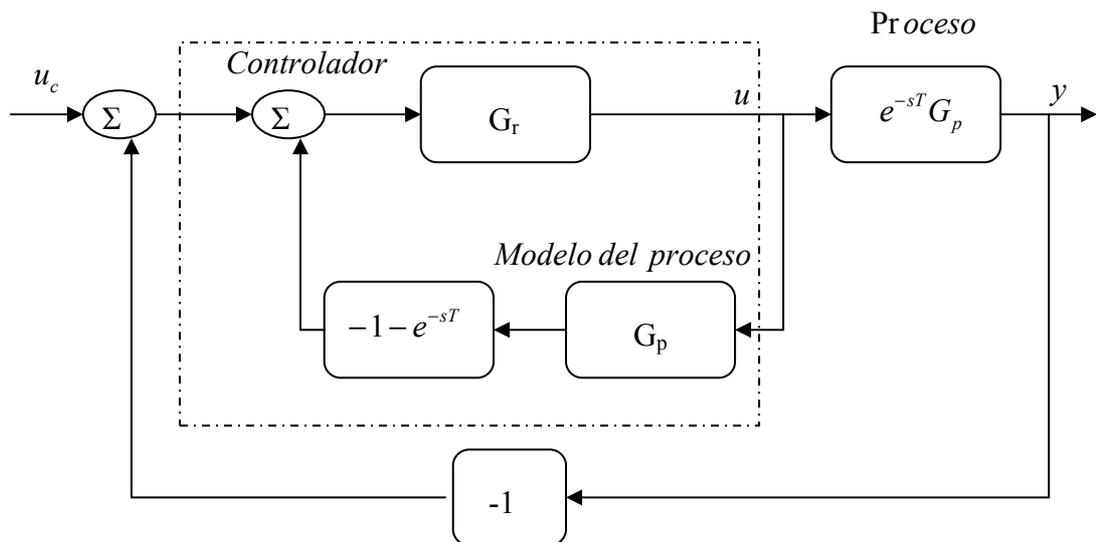


Figura. 5.3.1. Diagrama de Bloques del Modelo Predictor Smith.

El controlador consiste de un controlador  $G_r$  y un lazo cerrado el cual contiene al modelo del proceso. El controlador  $G_r$  es designado de acuerdo al tiempo de retardo  $T$  que se designe para que el controlador empiece a realizar el control, y con el lazo cerrado en el controlador aseguramos que el sistema tenga ese comportamiento. Además este controlador da una respuesta a las señales de comando.

Ahora se lleva el proceso al diseño mediante ubicación de polos, considerando que el proceso tenga una función de transferencia del tipo:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{z^d A'(z)} = \frac{B'(z)}{z^d A'(z)}$$

Donde el grado del polinomio  $A'(z)$  sea mayor al grado del polinomio  $B(z)$ , para ello se define la planta del proceso a controlar en tiempo continuo y su respectiva conversión en tiempo continuo a continuación:

$$Gp = \frac{2 * e^{-sT}}{s + 2}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} z^{-d} Z \left\{ \frac{2}{s(s+2)} \right\}$$

$$H(z) = z^{-d} \frac{1 - e^{-sT}}{z - e^{-sT}} = \frac{B'(z)}{A'(z)}$$

Donde  $d = \frac{T}{s}$ , por lo tanto en el ejemplo tomamos un tiempo de muestreo de  $T=0.4$  y  $s=0.2$ , por lo tanto  $d=2$  obteniendo:

$$H(z) = z^{-2} \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} = \frac{B'(z)}{A'(z)}$$

Por tanto el controlador va a tener un retardo de  $t=3$  como lo vamos a poder apreciar más adelante en la simulación, ahora se procede a diseñar el controlador que genere un sistema en lazo cerrado con polinomio característico del tipo:

$$z^d A(z) A_{cl}$$

$$AR + BS = z^d A(z) A_{cl}$$

Dado que consideramos el polinomio de  $A_{cl} = A_c A_o$  tomamos el polinomio  $A_c$  de la forma  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  y  $A_c=1$ , para cumplir con la condición e la ecuación dado que  $\deg A=3$ , escogemos un polinomio R de grado 3 y un polinomio S de grado 2 de la siguiente manera:

$$R(z) = z^3 + r_o z^2 + r_1 z + r_2$$

$$S(z) = s_o z^2 + s_1 z + s_2$$

De tal modo se obtiene la siguiente ecuación:

$$Acl(z) = z^2 (z - e^{-0.2}) (z^3 + r_o z^2 + r_1 z + r_2) + (1 - e^{-0.2}) (s_o z^2 + s_1 z + s_2)$$

Con ello se obtiene la ecuación del tipo:

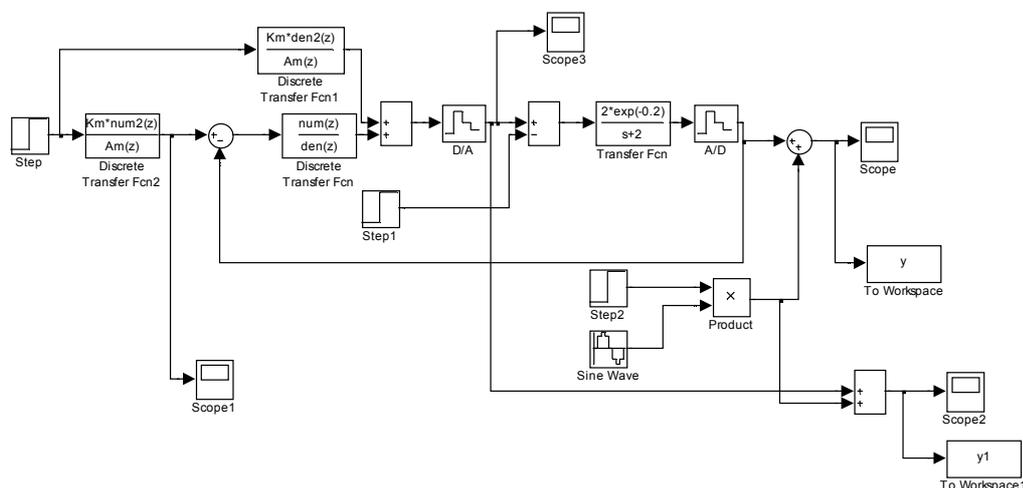
$$A_{cl} = z^6 + (-\exp(-2h) + r_0) z^5 + (-\exp(-2h) r_0 + r_1) z^4 + (-\exp(-2h) r_1 + r_2) z^3 + (-\exp(-2h) r_2 + (1 - \exp(-2h)) s_0) z^2 + (1 - \exp(-2h)) s_1 z + (1 - \exp(-2h)) s_2$$

$$A_{cl} = z^6 + p1z^5 + p2z^4 + p3z^3 + p4z^2 + p5z + p6$$

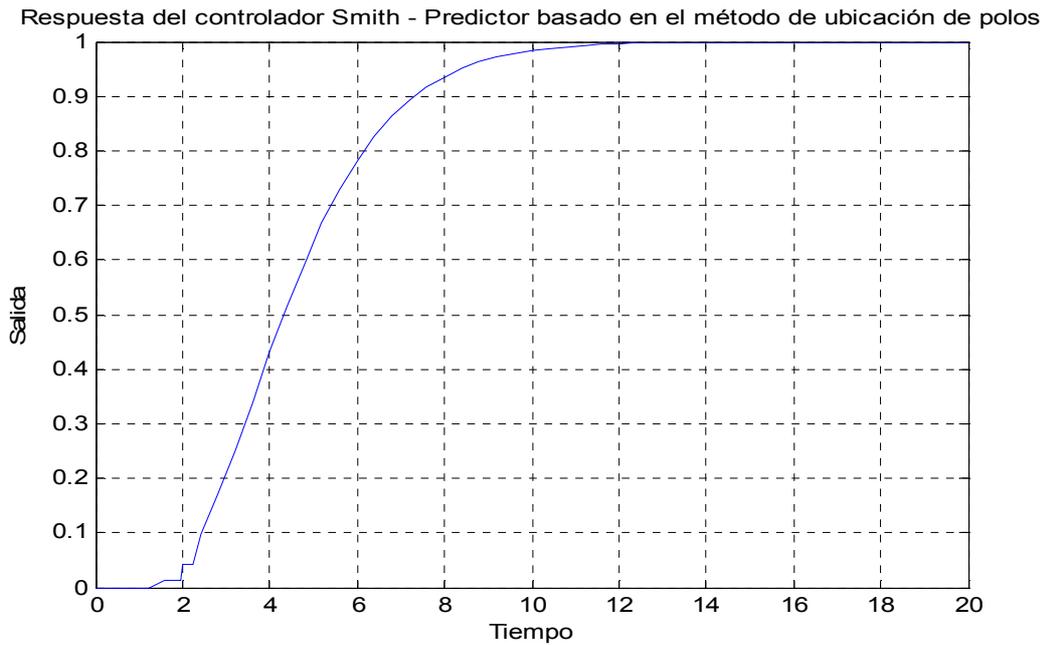
Generando la matriz a continuación y procediendo de igual manera como hemos realizado en los anteriores diseños tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2h} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2h} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2h} & -1 - e^{-2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 - e^{-2h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 - e^{-2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p1 - e^{-2h} \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la siguiente respuesta con su respectivo diagrama de bloque en Matlab/Simulink:

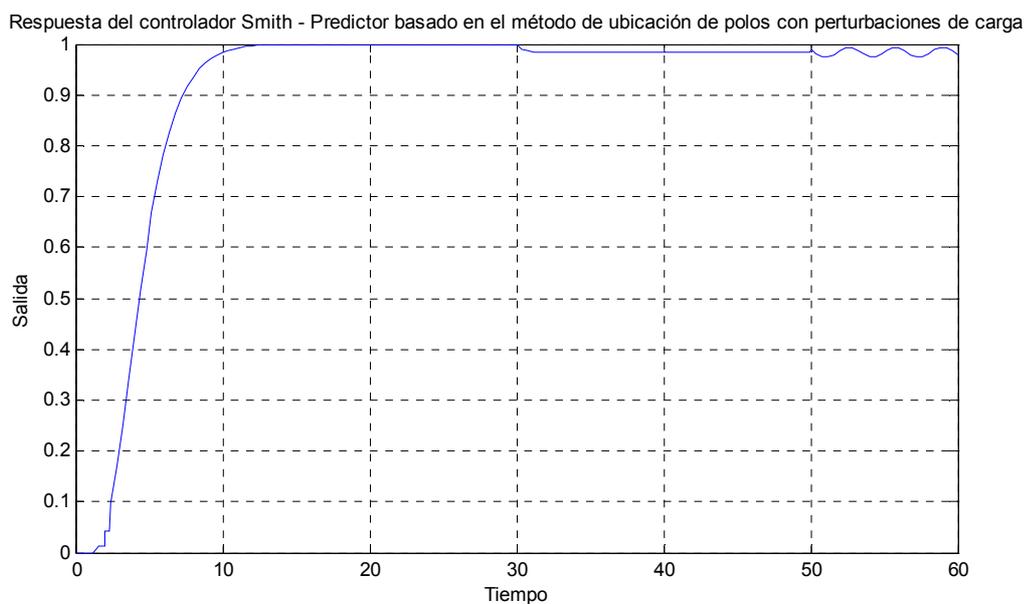


**Figura. 5.3.2. Diagrama de Bloques en Matlab/Simulink del modelo Predictor Smith Basado en el método de Ubicación de Polos con Perturbaciones de Carga y Ruido de Medición.**



**Figura. 5.3.3. Respuesta del Controlador Predictor Smith Mediante el Método de Ubicación de Polos.**

Se puede observar claramente que el sistema empieza a controlar a partir del tiempo  $t=2$ , tal como se propuso en su función de transferencia que tuviera un retardo de  $t=2$ .



**Figura. 5.3.4. Respuesta del Controlador Predictor Smith Mediante el Método de Ubicación de Polos con Perturbación de Carga en  $t=30$  y Ruido de Medición en  $t=50$ .**

Se puede concluir que el sistema responde perfectamente a la señal comando, perturbaciones de carga y ruido de medición.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 6.1 CONCLUSIONES

- ✓ La idea principal del diseño de controladores digitales basados en el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial es el de obtener un modelo discreto del sistema partiendo de un modelo continuo realizando el control de dicho sistema a través de la obtención de la Ley de Control la cual viene definida por  $A_{cl}(z) = A(z)R(z) + B(z)S(z)$ , este polinomio característico es determinado por el polinomio del controlador, el polinomio del observador y por los polinomios del sistema .
- ✓ Es muy importante realizar una selección apropiada del grado de los polinomios “R” y “S”, ya que la resolución de la ecuación Diophantina depende directamente de que se haga una buena elección del grado de estos polinomios de modo que cumplan con el grado de la ecuación característica del polinomio en lazo cerrado, una mala elección del grado de estos polinomios convertiría en irresoluble a esta ecuación y por tanto al sistema.
- ✓ Para la resolución del polinomio característico en lazo cerrado es muy importante que en la función de transferencia  $B(z)/A(z)$  dada por el modelo los polinomios  $B(z)$  y  $A(z)$  no tengan factores en común y que el grado del polinomio  $A(z)$  sea mayor al grado del polinomio  $B(z)$ .

- ✓ Se logró realizar diseño de controladores con dos grados de libertad, permitiendo la solución y separación de ambas problemáticas de control, la servo y la de regulación.
- ✓ La problemática servo de control se solucionó mediante el diseño del modelo Feedforward, con ello el sistema pudo realizar un correcto seguimiento del comando de señal.
- ✓ La problemática de regulación fue solucionada mediante el diseño de un modelo en lazo cerrado el mismo que permitió reducir las perturbaciones de carga y las fluctuaciones generadas por el ruido de medición inyectado al sistema.
- ✓ Es muy importante recalcar que los polos del polinomio característico  $A_c$  determinan la respuesta del sistema al comando de señales además de generar una gran influencia en la respuesta a las perturbaciones de carga y los errores de medición.
- ✓ Para obtener una buena estabilización del sistema es importante una buena selección de  $\zeta$  ya que mientras más pequeño sea el valor seleccionado más tardío va a ser su establecimiento y viceversa.
- ✓ Es muy importante realizar una correcta selección de los polos en el polinomio del observador ya que estos intervienen en la respuesta a perturbaciones de carga y en la inyección del ruido de medición, sin embargo no intervienen en la respuesta al comando de señales.
- ✓ La selección del período de muestreo toma un papel muy importante en el desempeño del controlador ya que la señal de error debido a las perturbaciones se incrementa cuando se incrementa el período de muestreo y viceversa, por ello la selección del período de muestreo debe

ser como máximo la mitad de la menor de las constantes de tiempo del sistema.

- ✓ Los controladores diseñados poseen sensibilidad al modelamiento de errores lo cual brinda una mayor robustez al sistema al momento en que se aplica una ganancia a la planta a controlar.
- ✓ Los controladores diseñados pueden ser implementados fácilmente de una manera práctica a través de un microcontrolador, un DSP, etc... mediante la programación de las funciones planteadas en el proyecto.
- ✓ El diseño de controladores digitales basados en el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial permiten el diseño, simulación e implementación para cualquier tipo de planta aplicando la ley de control y seleccionando polinomios de grado apropiado que permitan la solución de dicha ley, por ello se llevo a cabo una relación con otros métodos de diseño de control teniendo como resultado que a través de este método se puede controlar todo tipo de sistemas de control avanzado como lo son el Predictor Smith y el Root Locus.

## 6.2 RECOMENDACIONES

- ✓ Antes de emplear el método de ubicación de polos desde el enfoque polinomial es necesario partir de la ley de control obtenida analizando el sistema a controlar y determinando de una manera muy adecuada los polinomios “ $R$ ” y “ $S$ ” del controlador, de modo que se satisfaga la ecuación Diophantina y el proceso sea realizable, caso contrario es necesario buscar los polinomios que satisfagan esta ecuación generando la matriz cuadrada necesaria para la obtención de los coeficientes del controlador.
- ✓ Para obtener una correcta respuesta a perturbaciones, ruido de medición y un correcto seguimiento del comando de señal hay que tener muy en cuenta los polos del polinomio característico y del polinomio del observador, con ello al escoger un valor adecuado de ancho de banda  $\omega$  se obtendrá una adecuada respuesta a perturbaciones y ruido de medición sin tener presentes fluctuaciones en la señal de control.
- ✓ Es muy importante tener en cuenta los parámetros de diseño para el controlador como los son el ancho de banda  $\omega$  y  $\zeta$  para la obtención de los polos tanto del polinomio característico como los del observador, el período de muestreo a seleccionar, la ganancia que vaya a tener el sistema a controlar; de modo que una correcta selección de estos parámetros permitirán la obtención del comportamiento deseado del controlador y del sistema como lo son el seguimiento al comando de señal, el rechazo a perturbaciones y ruido de medición y por último una mayor robustez del sistema.

- ✓ Es de gran importancia seleccionar un adecuado ancho de banda  $\omega$  para el polinomio característico, debido a que las perturbaciones de carga decrecen de manera inversamente proporcional al ancho de banda y la señal de control incrementa en aproximadamente el cuadrado del ancho de banda, si se aumenta  $\omega$  el controlador rechaza de manera más rápida las perturbaciones de carga debido a que los polos dominantes del mismo se hacen más rápidos, pero hay que tener en cuenta que también se incrementan las fluctuaciones en la señal de control.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### Libros

1. ÄSTROM, Karl J., **Computer – Controlled Systems**, Tercera Edición, Prentice – Hall, 1997 en EEUU.
2. Ph.D. CONSTANTINE; Ph.D. LAMONT, Gary B., **Digital Control Systems, Theory, Hardware & Software**, Mc Graw Hill.
3. Ph.D. CHARLES, L. PHILIPS; Ph.D. TROY NAGLE, H., **Digital Control Systems Analysis and Design**, Prentice Hall.
4. C. NAGLE PHILIPS, T. **Digital Control Systems: Analysis and Design**, Tercera Edición, Prentice May, 1995.
5. OGATA, Katsuhiko, **Discrete – Time Control Systems**, Segunda Edición, Prentice Hall, 1995.
6. KUO, B.B, **Digital Control Systems**, Rinehart & Winston, 1980.
7. PHILLIPS, Charles L; HARBOR, Royce D, Tercera Edición, **Feedback Control Systems**, Prentice Hall.

### Internet

8. <http://www.control.lth.se/~kursdr/ifac.pdf>, Computer Control: An Overview.

9. <http://iaci.unq.edu.ar/Materias/Cont.Digital/Apuntes/ApuntePagina/17-UbicacionPolosEstados.pdf>, Diseño Basado en La Ubicación de Polos.
10. <http://iaci.unq.edu.ar/Materias/Cont.Digital/Apuntes/ApuntePagina/08-ControladoresContinuos.pdf>, Aproximación de Controladores Continuos.
11. <http://www.control-automatico.net/htm/PDF/Libro/12%20Capitulo%205.pdf>, Sistemas de Control discreto.
12. <http://iaci.unq.edu.ar/Materias/Cont.Digital/Apuntes/ApuntePagina/18-UbicacionPolosTransferencia.pdf>, Ubicación de Polos de Una Función de Transferencia.
13. [http://www.fi.uba.ar/materias/6665/material/Clase\\_07\\_Funcion\\_de\\_Transferencia.pdf](http://www.fi.uba.ar/materias/6665/material/Clase_07_Funcion_de_Transferencia.pdf), Ubicación de Polos de Una Función de Transferencia.
14. <http://200.13.98.241/~antonio/cursos/control/notas/siso/dcfc.pdf>, Sistemas de Control Feedback.
15. <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut2/Practica7.pdf>, Control Digital y Estocástico: Práctica No7: Diseño de Controladores en EE y Observadores.
16. <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut2/Practica8.pdf>, Control Digital y Estocástico: Práctica No8: Diseño por ubicación de polos en FT.
17. <http://isa.uniovi.es/~idiaz/SA/Teoria/04-05/SA.Tema4.pdf>, Funciones de Sensibilidad: Sistemas Automáticos.
18. [http://200.13.98.241/~javier/control\\_feedforward.pdf](http://200.13.98.241/~javier/control_feedforward.pdf), Control Feedforward (Prealimentación).

## **ANEXOS**

## **ANEXO A**

**ALGORITMO DE CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL  
MÉTODO DE UBIACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE  
POLINOMIAL PARA UN DOBLE INTEGRADOR**

```
clear all
```

```
%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%%%
```

```
alpha=2;      %Polos para el observador
si=0.707;     %Parámetros del polinomio característico
wn=0.2;      %
T=0.6;       %Tiempo de muestreo
```

```
%%% OBTENCIÓN DEL MODELO DISCRETO A PARTIR DEL MODELO EN
      TIEMPO CONTINUO %%%
```

```
gp=tf(1,[1 0 0])      %Planta del doble integrador en tiempo continuo
gz=c2d(gp,T);         %Modelo discreto de la planta
[num,den]=tfdata(gz,'v')
```

```
%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLOS CARACTERÍSTICO Y
      DEL OBSERVADOR %%%
```

```
[n,pcs]=ord2(wn,si)  %Genera el sistema de orden dos del polinomio
                      %característico
pc1s=roots(pcs)      %Obtiene las raíces del sistema
zc=exp(pc1s*T);
acz=poly(zc)         %Genera el polinomio característico
paux=-alpha;        %Tomamos el valor de alpha para los polos del
                    %observador
paux=exp(paux*T)     %Se genera para obtener el modelo del observador
                    %(z-e^ alpha*T)
polz=conv(acz,[1 -2*paux paux^2]) %Se obtiene el polinomio Acl
p1=polz(2)
p2=polz(3)
p3=polz(4)
p4=polz(5)
```

**%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLINOMIOS DEL  
CONTROLADOR %%%**

```

h=T;
h=h^2/2;
A=[1 h 0 0;-3 h h 0;3 0 h h;-1 0 0 h]; %Matriz generada por la ecuación
Acl=AR+BS
Ainv=inv(A);
I=[p1+3;p2-3; p3+1; p4] %Matriz que toma los valores de los polos
B=Ainv*I
clear h
r=B(1); %Toma el valor R para polinomio del controlador
So=B(2); %Toma los valores S para el polinomio del controlador
S1=B(3);
S2=B(4);

```

**%%% GENERACIÓN DEL MODELO DE SEGUIMIENTO DE COMANDO DE  
SEÑAL Bm/Am %%%**

```

gms=tf(4,[1 4 4]); %Sistema de referencia en tiempo continuo
Gmz=c2d(gms,T) %Sistema de referencia en tiempo discreto
[Bm,Am]=tfdata(Gmz,'v')
Gain=polyval(num,1)/polyval(Am,1) %Se obtiene la ganancia del proceso Km
Km=1/Gain;

den2=[1 r-1 -r]
Kz=tf([So S1 S2],[1 r-1 -r],T) % Se obtiene la función de transferencia del
%controlador
step(feedback(Kz*gz,1),50) %Grafica la salida del sistema discreto
%realimentado sin seguimiento del modelo

```

## **ANEXO B**

### **ALGORITMO DE CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE UBIACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO**

clear all

**%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%**

si=0.7;      %Parámetros para polos del polinomio característico  
 Wn=1.5;  
 siobs=0.7; %Parámetros para polos del polinomio del observador  
 Wobs=3;  
 T=0.6;      %Tiempo de muestreo

**%%% VALORES PARA GENERAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA %%%**

Wo=1;  
 Beta=cos(Wo\*T);  
 K=1-Beta;  
 gp=tf(1,[1 0 1]) %Función de transferencia  $G_s=1/s^2+1$  del Oscilador Armónico  
 gz=c2d(gp,T); %Función de transferencia en tiempo discreto  
 [num,den]=tfdata(gz,'v')

**%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLOS CARACTERÍSTICO Y  
 DEL OBSERVADOR %%%**

[n,pcs]=ord2(Wn,si) %Genera el sistema de orden dos del polinomio característico  
 pc1s=roots(pcs) %Obtiene las raíces del sistema  
 zc=exp(pc1s\*T);  
 acz=poly(zc) %Genera el polinomio característico  
 [nobs,pcobs]=ord2(Wobs,siobs) %Genera el sistema de orden dos del polinomio  
 del observador  
 pc1obs=roots(pcobs) %Obtiene las raíces del sistema  
 zcobs=exp(pc1obs\*T);  
 acobs=poly(zcobs) %Genera el polinomio del observador  
 polz=conv(acz,acobs) %Se obtiene el polinomio Acl  
 p1=polz(2)

p2=polz(3)

p3=polz(4)

p4=polz(5)

**%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLINOMIOS DEL  
CONTROLADOR %%%**

A=[1 K 0 0;-1-2\*Beta K K 0;1+2\*Beta 0 K K;-1 0 0 K]; %Matriz generada por la  
%ecuación  $Acl=AR+BS$

Ainv=inv(A);

l=[p1+1+2\*Beta;p2-1-2\*Beta; p3+1; p4] %Matriz que toma los valores de los polos

B=Ainv\*l

r=B(1); %Toma el valor R para polinomio del controlador

So=B(2); %Toma los valores S para el polinomio del controlador

S1=B(3);

S2=B(4);

**%%% GENERACIÓN DEL MODELO DE SEGUIMIENTO DE COMANDO DE  
SEÑAL Bm/Am %%%**

gms=tf(4,[1 4 4]); %Sistema de referencia en tiempo continuo

Gmz=c2d(gms,T) %Sistema de referencia en tiempo discreto

[Bm,Am]=tfdata(Gmz,'v')

Gain=polyval(num,1)/polyval(Am,1) %Se obtiene la ganancia del proceso Km

Km=1/Gain;

Kz=tf([So S1 S2],[1 r-1 -r],T) % Se obtiene la función de transferencia del  
%controlador

step(feedback(Kz\*gz,1),100) %Grafica la salida del sistema discreto  
%realimentado sin seguimiento del modelo

## **ANEXO C**

**ALGORITMO DE CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL  
MÉTODO DE UBIACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE  
POLINOMIAL PARA UN BRAZO ROBÓTICO FLEXIBLE**

```
clear all
```

```
%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%%%
```

```
wm=0.5;          %Parámetros del polinomio característico y del observador
sim=0.707;
alpha0=2;        %Polos para el observador y polinomio característico
alpha1=2;
T=0.5;           %Tiempo de muestreo
```

```
%%% VALORES PARA GENERAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA %%%
```

```
J1=10/9;
J2=10;
K=1;
d=0.1;
K1=1;
Wo=1;
alpha2=J1/(J1++J2);
beta1=d/(J1*Wo);
beta2=d/(J2*Wo);
gamma=1/(J1*Wo);
delta=1/(J1*Wo);
Ac=[0 1 -1;alpha2-1 -beta1 beta1;alpha2 beta2 -beta2];
Bc=[0; gamma; 0];
C=[0 0 Wo];
D=0;
sysc=ss(Ac,Bc,C,D); %Genera la matriz del sistema en espacio de estados
sysc=tf(sysc);      % Genera la función de transferencia en tiempo continuo
[num2,den2]=tfdata(sysc,'v');
gz=c2d(sysc,T);     % Genera la función de transferencia en tiempo discreto
zpk(gz)
[num,den]=tfdata(gz,'v');
```

**%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLOS CARACTERÍSTICO Y  
DEL OBSERVADOR %%%**

```
[n,pcs]=ord2(wm,sim) %Genera el sistema de orden dos del polinomio
                        %característico
pc1s=roots(pcs)        %Obtiene las raíces del sistema
zc=exp(pc1s*T);
acz=poly(zc)
paux=-alpha1*wm;
paux=exp(paux*T)
pol1=conv(acz,[1 paux]) %Genera el polinomio característico del sistema
                        %(s^2+2Si*Wms+wm^2)(s+alpha1*wm)
[nob,pcsob]=ord2(wm*alpha0,sim*alpha0) %Genera el sistema de orden dos del
                                        % polinomio del observador
pc2s=roots(pcsob)     %Obtiene las raíces del sistema
pc2s=roots(pcsob)
zcobs=exp(pc2s*T);
aczobs=poly(zcobs)
paux2=-alpha1*alpha0*wm;
paux2=exp(paux2*T)
pol2=conv(aczobs,[1 paux2]) %Genera el polinomio característico del sistema
                        %(s^2+2Si*Wm*alpha0s+(alpha0*wm^2)(s+alpha1*alpha0*wm)
polz=conv(pol1,pol2);   %Se obtiene el polinomio Acl
p1=polz(2)
p2=polz(3)
p3=polz(4)
p4=polz(5)
p5=polz(6)
p6=polz(7)
```

**%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLINOMIOS DEL  
CONTROLADOR %%%**

```

a=0.0029126 ; %Valores obtenidos de la planta en tiempo discreto
b=2.338;
c=0.1054;
d=1.712;
e=0.9512;
f=(a*b)+(a*c);
A=[1 0 0 0 0 0;-1-d 1 0 a 0 0;d+e -1-d 1 f a 0;-e d+e -1-d a*b*c f a;0 -e d+e 0 a*b*c
f;0 0 -e 0 0 a*b*c]; %Matriz generada por la ecuación Acl=AR+BS
Ainv=inv(A);
l=[p1+d+1;p2-d-e;p3+e;p4;p5;p6] %Matriz que toma los valores de los polos
B=Ainv*I
r0=B(1); %Toma el valor R para polinomio del controlador
r1=B(2);
r2=B(3);
So=B(4); %Toma los valores S para el polinomio del controlador
S1=B(5);
S2=B(6);

```

**%%% GENERACIÓN DEL MODELO DE SEGUIMIENTO DE COMANDO DE  
SEÑAL Bm/Am %%%**

```

gms=tf(1,[1 4 4 1]); %Sistema de referencia en tiempo continuo
Gmz=c2d(gms,T) %Sistema de referencia en tiempo discreto
[Bm,Am]=tfdata(Gmz,'v')
Gain=polyval(num,1)/polyval(Am,1) %Se obtiene la ganancia del proceso Km
Km=1/Gain;
Kz=tf([So S1 S2],[1 r0 r1 r2],T) % Se obtiene la función de transferencia del
%controlador
step(feedback(Kz*gz,1),100) %Grafica la salida del sistema discreto
%realimentado sin seguimiento del modelo

```

## **ANEXO D**

### **ALGORITMO DE CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE UBIACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL PARA UN DOBLE INTEGRADOR MEDIANTE FUNCIONES**

```
function u=funcionGz(X); %Nombra la función que es llamada desde Simulink
```

```
global gk1 gk2 spk1 spk2 uk2 uk1 ek1 ek2 uffk1 uffk2 spk1 spk2 ek gk ufbk
```

```
%%Lee los parámetros que ingresan al vector X desde Simulink%%
```

```
spk=X(1); %Set point
```

```
t=X(2); %Tiempo del clock
```

```
T=X(3); %Tiempo de muestreo
```

```
yk=X(4); %Variable de salida realimentada
```

```
%%Generaliza el valor que toman las variables en el tiempo = 0 obtenidas
```

```
%% a través de los valores obtenidos de las funciones entrada - salida
```

```
%%en los bloques de Simulink para el doble integrador en un tiempo de
```

```
%%muestreo T=0.6
```

```
if t==0
```

```
    spk=spk;
```

```
    gk=0;
```

```
    ek=gk-yk;
```

```
    uffk=1.365*spk;
```

```
    ufbk=1.9194*ek;
```

```
    uk=ufbk+uffk;
```

```
    uffk2=0;
```

```
    uffk1=uffk;
```

```
    uk2=0;
```

```
    uk1=ufbk;
```

```
    ek2=0;
```

```
    ek1=ek;
```

```
    spk2=0;
```

```
    spk1=spk;
```

```
    gk2=0;
```

```

gk1=gk;

end

%%Generaliza el valor que toman las variables en el tiempo > 0 obtenidas
%% a través de los valores obtenidos de las funciones entrada - salida
%%en los bloques de Simulink para el doble integrador en un tiempo de muestreo
%%T=0.6

if t>0
    spk=spk ;
    ek=gk-yk;
    gk=(0.6024*gk1)-(0.097*gk2)+(0.18*1.3565)*(spk1+spk2);
    uffk=(0.6024*uffk1)-(0.0907*uffk2)+(1.4*spk)-(2*1.4*spk1)+(1.4*spk2);
    ufbk=0.7777*uk1+0.2223*uk2+(ek*1.9144)-(ek1*3.5569)+(ek2*1.6604);
    gk2=gk1;
    gk1=gk;
    uffk2=uffk1;
    uffk1=uffk;
    spk2=spk1;
    spk1=spk;
    uk2=uk1;
    uk1=ufbk;
    ek2=ek1;
    ek1=ek;
    uk=uffk+ufbk;
end

u=uk;

```

## **ANEXO E**

### **ALGORITMO DE CONTROLADOR DIGITAL BASADO EN EL MÉTODO DE UBIACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL PARA UN OSILADOR ARMÓNICO MEDIANTE FUNCIONES**

```

function u=funcionOdcilador(Y); %Nombra la función que es llamada desde
                               %Simulink

global gk1 gk2 spk1 spk2 uk2 uk1 ek1 ek2 uffk1 uffk2 spk1 spk2 ek gk ufbk

%%Lee los parámetros que ingresan al vector X desde Simulink%%

spk=Y(1); %Set point
t=Y(2); %Tiempo del clock
yk=Y(4); %Variable de salida realimentada

%%Generaliza el valor que toman las variables en el tiempo = 0 obtenidas
%% a través de los valores obtenidos de las funciones entrada - salida
%%en los bloques de Simulink para el doble integrador en un tiempo de
%%muestreo T=0.5
if t==0
    spk=spk;
    gk=0;
    ek=gk-yk;
    uffk=2.7263*spk;
    ufbk=12.8309*ek;
    uk=ufbk+uffk;
    uffk2=0;
    uffk1=uffk;
    uk2=0;
    uk1=ufbk;
    ek2=0;
    ek1=ek;
    spk2=0;
    spk1=spk;
    gk2=0;
    gk1=gk;

end

```

```

%%Generaliza el valor que toman las variables en el tiempo > 0 obtenidas
%% a través de los valores obtenidos de las funciones entrada - salida
%%en los bloques de Simulink para el doble integrador en un tiempo de muestreo
%%T=0.5

```

```

if t>0
    spk=spk ;
    ek=gk-yk;
    gk=(1.3406*gk1)-(0.4493*gk2)+(0.0199*2.7263)*(spk1+spk2);
    uffk=(1.3406*uffk1)-(0.4493*uffk2)+(2.7263*spk)-
    (1.9601*2.7263*spk1)+(2.7263*spk2);
    ufbk=1.0750*uk1-0.0750*uk2+(ek*12.8309)-(ek1*22.8644)+(ek2*10.4661);
    gk2=gk1;
    gk1=gk;
    uffk2=uffk1;
    uffk1=uffk;
    spk2=spk1;
    spk1=spk;
    uk2=uk1;
    uk1=ufbk;
    ek2=ek1;
    ek1=ek;
    uk=uffk+ufbk;
end

u=uk;

```

## **ANEXO F**

### **ALGORITMO DE CONTROLADOR PARA EL MÉTODO DE ROOT – LOCUS BASADO EN EL MÉTODO DE UBICACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL**

```
clear all
```

```
%%%%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS %%%%%%%%%%%%%%
```

```
alpha=2; %Polos del polinomio característico
k=4; % Valor que se le asigna al polinomio K
si=0.707; %Parámetros del polinomio característico
wn=0.2; %
T=0.6; %Tiempo de muestreo
```

```
%%% OBTENCIÓN DEL MODELO DISCRETO A PARTIR DEL MODELO EN
TIEMPO CONTINUO%%%
```

```
gp=tf(1,[1 0])
gz=c2d(gp,T);
[num,den]=tfdata(gz,'v')
```

```
%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLOS CARACTERÍSTICO Y
DEL OBSERVADOR%%%
```

```
paux=-alpha;
paux=exp(paux*T)
polz=[1 -2*paux paux^2];
p1=polz(1);
p2=polz(2);
```

```
%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLINOMIOS DEL
CONTROLADOR %%%
```

```
h=T;
A=[1 0;-1 k*h];
Ainv=inv(A);
l=[p1;p2];
```

```
B=Ainv*I  
clear h  
ro=B(1);  
So=B(2);
```

```
%%% GENERACIÓN DEL MODELO DE SEGUIMIENTO DE COMANDO DE  
SEÑAL Bm/Am %%%
```

```
gms=tf(1,[1 1]);  
Gmz=c2d(gms,T)  
[Bm,Am]=tfdata(Gmz,'v')  
Gain=polyval(num,1)/polyval(Am,1)  
Km=1/Gain;  
Kz=tf([So],[ro],T)  
step(feedback(Kz*gz,1),50)
```

## **ANEXO G**

### **ALGORITMO DE CONTROLADOR PARA EL MÉTODO DE PREDICTOR – SMITH BASADO EN EL MÉTODO DE UBICACIÓN DE POLOS DESDE EL ENFOQUE POLINOMIAL**

```
clear all
```

```
%%%%%%%%%% LECTURA DE PARÁMETROS%%%%%%%%%%
```

```
si=0.707; %Parámetros del polinomio característico
```

```
wn=0.8;
```

```
T=0.4; %Tiempo de muestreo
```

```
%%% OBTENCIÓN DEL MODELO DISCRETO A PARTIR DEL MODELO EN TIEMPO CONTINUO%%%
```

```
gp=tf([2*(-1+exp(-0.2))],[1 2]) %Planta de Smith Predictor en tiempo continuo
```

```
gp2=tf([2*exp(-0.2)],[1 2])
```

```
gz=c2d(gp,T); %Modelo discreto de la planta
```

```
gz2=c2d(gp2,T)
```

```
[num,den]=tfdata(gz2,'v')
```

```
[num2,den2]=tfdata(gz,'v')
```

```
den=conv(den,[1 0 0 0])
```

```
%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLOS CARACTERÍSTICO Y DEL OBSERVADOR %%%
```

```
[n,pcs]=ord2(wn,si)
```

```
pc1s=roots(pcs)
```

```
zc=exp(pc1s*T);
```

```
acz=poly(zc)
```

```
acz2=conv(den,acz)
```

```
p1=acz2(2)
```

```
p2=acz2(3)
```

```
p3=acz2(4)
```

```
p4=acz2(5)
```

```
p5=acz2(6)
```

```
p6=acz2(7)
```

```
%%% OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS POLINOMIOS DEL CONTROLADOR %%%
```

```
h=T;
```

```
A=[1 0 0 0 0 0;-exp(-2*h) 1 0 0 0 0;0 -exp(-2*h) 1 0 0 0; 0 0 -exp(-2*h) 1-exp(-2*h) 0 0;0 0 0 0 1-exp(-2*h) 0;0 0 0 0 0 1-exp(-2*h)];
```

```
Ainv=inv(A);
```

```
l=[p1+exp(-2*h);p2;p3;p4;p5;p6]
```

```
B=Ainv*l
```

```
clear h
```

```
ro=B(1);
```

```
r1=B(2);
```

```
r2=B(3);
```

```
So=B(4);
```

```
S1=B(5);
```

```
S2=B(6);
```

**%%% GENERACIÓN DEL MODELO DE SEGUIMIENTO DE COMANDO DE  
SEÑAL Bm/Am %%%**

```
gms=tf(1,[1 4 6 4 1]);  
Gmz=c2d(gms,T)  
[Bm,Am]=tfdata(Gmz,'v')  
Gain=polyval(num,1)/polyval(Am,1)  
Km=1/Gain;  
Kz=tf([So S1 S2],[1 ro r1 r2],T)  
con=feedback(Kz*gz,1);  
step(feedback(con*gz2,1),20);
```

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

### CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

<b>FIGURA No</b>	<b>PÁG</b>
Figura.2.1.1.1. Diagrama Típico de un Sistema de Control.....	9
Figura.2.2.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Tiempo Continuo Conectado a Convertidores A-D y D-A.....	10
Figura.2.2.2. Diagrama de Bloques de un Sistema Realimentado con Estructura de dos Grados De Libertad. ....	11
Figura.2.2.3. Diagrama de Bloques de un Sistema Realimentado.....	12
Figura.2.2.4. Diagrama de Bloques de un Controlador Lineal Realimentado.....	16
Figura.2.3.2. Mapeo de Polos Estables del Plano Z donde la Región D son los Puntos en el Diagrama que Tienen la Mínima Amortiguación Relativa y Absoluta. ....	25
Figura.2.4.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado que Indica una Completa Separación entre la Respuesta al Comando de Señales y a las Perturbaciones.....	26
Figura.2.4.2. Modelo de Controlador en Tiempo Continuo.....	27
Figura.2.4.3. Controlador Basado en la Ubicación de Polos en Lazo Cerrado y Feedforward Utilizando el Artificio $U_{ff}$ .....	29
Figura.2.5.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado con Señales de Comando, Perturbaciones de Carga y Errores de Medición.....	30

### CAPÍTULO 3: DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

Figura.3.2.1. Controlador Basado en la Ubicación de Polos en Lazo Cerrado ....	44
Figura.3.4.1. Diagrama de un Brazo Robótico Flexible.....	49

### CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Figura.4.2.1. Diagrama de un Controlador Para un Doble Integrador en Lazo Cerrado.....	58
Figura.4.2.2. Respuesta de un Controlador Para Un Doble Integrador en Lazo Cerrado.....	58
Figura.4.2.3. Diagrama de un Controlador Para un Doble Integrador Digital en Feedforward y Feedback .....	59
Figura.4.2.4. Respuesta de un Controlador Para un Doble Integrador Digital en Feedforward y Feedback .....	59
Figura.4.2.5. Respuesta de un Controlador Para un Doble Integrador Digital en Feedback Vs Respuesta de un Doble Integrador en Feedforward Y Feedback .....	60
Figura.4.2.6. Aplicación de Señal de Comando, Perturbación de Carga y Ruido de Alta Frecuencia.....	61
Figura.4.2.7. Simulación del Diseño Nominal con Parámetros de $\omega = 0.2, \zeta = 0.707, \alpha = 2$ y $T = 1$ .....	62
Figura.4.2.1.1. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos con $Z=0.707$ Cuando se Varía: a) $\Omega=0.1$ Línea .- (Punteada Entrecortada) En Azul, $\Omega =0.4$ Línea Continua En Negro Y b) $\Omega =0.8$ Línea - -(Entrecortada) En Rojo.....	63
Figura.4.2.1.2. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos Cuando se Varía $\zeta$ y $\omega=0.2$ : $\zeta =0.2$ Línea -- (Entrecortada) en Azul, $\zeta =0.707$ Línea Continua en Negro y $\zeta =1$ Línea . -(Punteada Entrecortada) en Rojo. ....	64
Figura.4.2.1.3. Señales de Comando Para: a) $\zeta =0.2$ b) $\zeta = 1$ .....	65
Figura.4.2.2.1 Simulación del Controlador por Ubicación de Polos Cuando se Varían los Polos del Observador. Salida con Línea Entrecortada	

Color Azul Para $\alpha=0.5$ , Con Línea Continua Negra Para $\alpha =2$ y Con Línea Entre Punteada Color Rojo Para $\alpha =10$ .....	66
Figura.4.2.2.2. Señal de Comando Para a) $\alpha =2$ y b) $\alpha =10$ .....	67
Figura.4.2.3.1 Simulación del Controlador por Ubicación de Polos Cuando se Varía el Período de Muestreo. Salida Con Línea Entrecortada Color Azul Para $T=0.1$ , Con Línea Continua Negra Para $T=1$ y Con Línea Entre Punteada Color Rojo Para $T=2$ . ....	68
Figura.4.2.3.2. Señal de Comando Para a) $T=1$ y b) $T=2$ .....	69
Figura.4.2.4.1. Salidas del Sistema Cuando a) $K=0.4$ y b) $K=0.8$ .....	70
Figura.4.2.4.2. Salidas del Sistema Cuando c) $K=1.2$ y d) $K=2.5$ .....	71
Figura.4.3.1. Diagrama de un Controlador Para un Oscilador Armónico en Feedback y Feedforward .....	72
Figura.4.3.2. Simulación del Diseño Nominal Para un Oscilador Armónico con un Integrador en el Controlador Cuando $\omega =1.5$ , $\omega_{obs}=3$ , $\zeta = \zeta_{obs}=0.7$ y $T=0.2$ .....	72
Figura.4.3.1.1. $\omega_{obs}=4$ .....	73
Figura.4.3.1.2. $\omega_{obs}=8$ .....	74
Figura.4.3.2.1. $T=0.1$ .....	75
Figura.4.3.2.2. $T=1$ .....	75
Figura.4.3.3.1. Salidas del Sistema Cuando a) $K=1$ $a_d =15$ y b) $K=0.5$ $a_d =25$ ...	76
Figura.4.3.3.2. Salidas del Sistema Cuando c) $K=1$ $a_d =10$ y d) $K=1.5$ $a_d =25$ ....	77
Figura.4.4.1. Respuesta del Controlador Para un Brazo Robótico Flexible en Feedback .....	78
Figura.4.4.2. Diagrama de Bloques en Simulink Para el Diseño de un Brazo Robótico Flexible con una Perturbación. ....	79
Figura.4.4.3. Respuesta del Controlador Para un Brazo Robótico Flexible con los Parámetros Nominales de Diseño. ....	79
Figura.4.4.1.2. Respuesta del Controlador Para un Brazo Robótico Flexible Variando los Polos del Observador y Del Polinomio Característico $\alpha_0=0.5$ Y $\alpha_1=0.5$ .....	81
Figura.4.4.2.1. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos con $\zeta =0.707$ Cuando se Varía: $\omega =0.2$ Línea .- (Punteada Entrecortada) en Azul, $\omega$	

=0.8 Línea - -(Entrecortada) en Rojo; Línea Continua en Negro $\omega$ =1.5.....	82
Figura.4.4.2.2. Comando de Señal Para $\omega_m=0.2$ Línea , B) =1.5 $m$ .....	83
Figura.4.4.2.3. Simulación de Controladores por Ubicación de Polos Cuando se Varía $\zeta$ Y $\omega =0.5$ : $\zeta =0.2$ Línea .- (Punteada Entrecortada) en Azul y $\zeta =1$ Línea --( Entrecortada) en Rojo.....	84
Figura.4.4.2.4. Señales de Comando Para: a) $\zeta =0.2$ b) $\zeta = 1$ .....	84
Figura.4.5.1. Diagrama de Bloques General del Controlador Para un Doble Integrador .....	85
Figura.4.5.2. Entradas y Salidas de Los Bloques a Implementar en una Sola Función.....	86
Figura.4.5.3. Diagrama de Bloques Esquemático Utilizando la Función Planteada. .....	87
Figura.4.5.4. Respuesta del Controlador por el Método de Ubicación de Polos Mediante Funciones con Perturbación de Carga En $t=30$ .....	88
Figura.4.6.1. Diagrama de Bloques General del Controlador Para un Oscilador Armónico.....	89
Figura.4.6.2. Respuesta del Controlador por el Método de Ubicación de Polos Mediante Funciones con Perturbación de Carga En $t=15$ .....	90

## **CAPÍTULO 5: RELACIÓN CON OTROS MÉTODOS DE DISEÑO**

Figura.5.2.1. Respuesta del Controlador Basado en la Ubicación de Polos. ....	93
Figura.5.3.1. Diagrama de Bloques del Modelo Predictor Smith.....	94
Figura.5.3.2. Diagrama de Bloques en Matlab/Simulink del Modelo Predictor Smith Basado en el Método de Ubicación de Polos con Perturbaciones ce Carga y Ruido de Medición.....	96
Figura.5.3.3. Respuesta del Controlador Predictor Smith Mediante el Método de Ubicación de Polos. ....	97
Figura.5.3.4. Respuesta del Controlador Predictor Smith Mediante el Método de Ubicación de Polos con Perturbación de Carga en $t=30$ y Ruido de Medición en $t=50$ .....	97

19 de Mayo del 2008

---

Ing. Víctor Proaño

COORDINADOR DE LA CARRERA DE INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA,  
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

---

José Santiago Villalba Orellana  
AUTOR