UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

LA MANZANA DE TYCHO BRAHE

Andrango M.; Arévalo M.; Enríquez G.;Íñiguez S.; Latorre O.; Marcillo J.; Miranda R.; Ordóñez F.; Prieto M.; Pugarín P.; Tinizaray V. y Zapata G.

CIENCIAS EXACTAS

LA MANZANA DE TYCHO BRAHE

40 problemas resueltos
del Cálculo Diferencial e Integral

Mónica Andrango
Gabriel Enríquez
Oswaldo Latorre
Raquel Miranda
Mauricio Prieto
Vicente Tinizaray
Marlon Arévalo
Servio Íñiguez
José Marcillo
Fabián Ordóñez
Patricio Pugarín
Gabriel Zapata

La manzana de Tycho Brahe
Andrango M.; Arévalo M.; Enríquez G.; Íñiguez S.; Latorre O.; Marcillo J.; Miranda R.; Ordóñez F.; Prieto M.; Pugarín P.; Tinizaray V. y Zapata G.
Primera edición electrónica. Diciembre de 2014
ISBN: 978-9978-301-10-4
Par revisor: Paúl Medina, Ph.D.

Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE
Grab. Roque Moreira Cedeño
Rector
Crnl. Francisco Armendáriz Saénz
Vicerrector Académico General
Crnl. Ricardo Urbina
Vicerrector de Investigación

Publicación autorizada por:
Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE

Edición:
Margarita Kostikova

Ilustración:
Andrea Galarza; Luis Miguel Moncayo

Producción
David Andrade Aguirre
Pablo Zavala A.

Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.
htpp//www.espe.edu.ec

Prólogo

“El problema más grande de nuestro siglo, —solía decir Ludwig Wittgenstein,— es la brecha entre la Ciencia y la Vida. ¡No parecen tener nada en común! La Ciencia cree estar por encima de la Vida, cuando, en realidad, es solo una parte de ella. La Ciencia se ha apartado de la Vida, ha despreciado la Vida, y, como resultado, se ha quedado sin vida. No hace más que hablar de la manzana en vez de probarla”.

El libro *La manzana de Tycho Brahe* es un intento de remediar esa situación. El Cálculo Diferencial e Integral es una hermosa disciplina que nació de la Vida para celebrarla. Queremos que las historias y las leyendas de este libro inyecten vida a las fórmulas matemáticas y las llenen de aroma y sabor.

La Vida es una rica fruta. Sin embargo, durante muchos años la enseñanza de la matemática se había contentado con tan solo hablar de ella. Hoy queremos que cada uno de nuestros estudiantes la pruebe por sí mismo.

Sección I

Máximos y mínimos

LO JUSTO SIN LO INJUSTO

Un abogado francés resolvió dedicar su vida a erradicar la injusticia.

—Es tan imposible como delimitar un jardín rectangular de 7 yardas cuadradas con una soga de 10 yardas, —le dijo su amigo Jean D'Alembert[1].

—¿Por qué es imposible abarcar un jardín rectangular de 7 yardas cuadradas con una soga de 10 yardas? —preguntó el abogado, curioso.

—¡Averígualo tú mismo! —dijo D'Alembert.

El jurista tuvo que ponerse a pensar. ¡Ayúdale en esa difícil misión, por favor!

Sean x el ancho en yardas del terreno; $(5-x)$ será su largo. Entonces, el área del jardín se puede expresar de este modo:

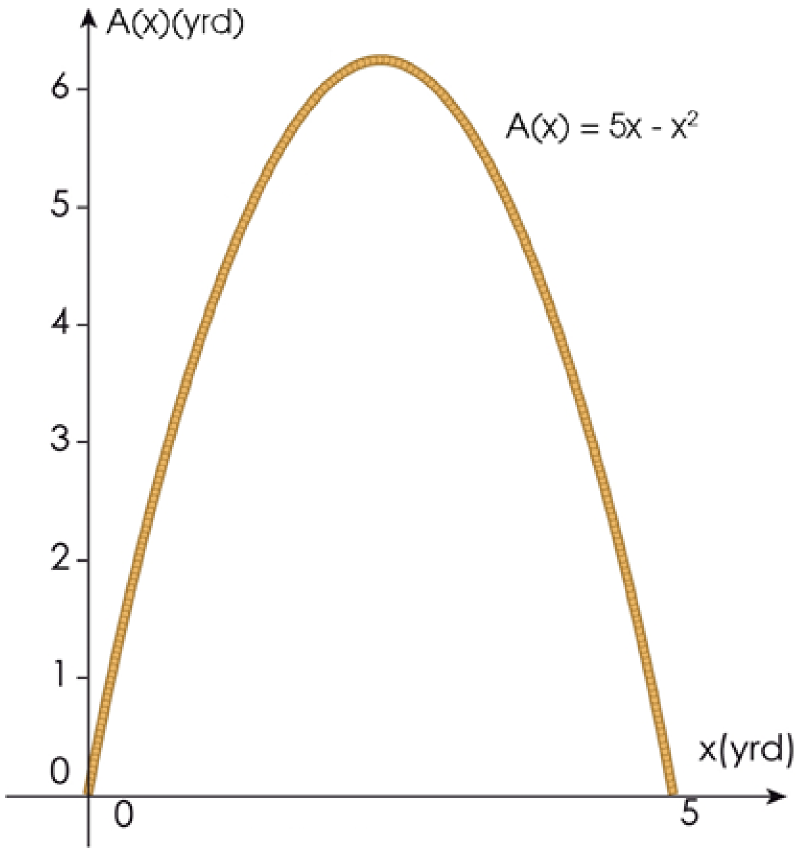
$$A(x)=x(5-x)\,yrd^2.$$

En otras palabras,

[1] Famoso matemático francés que vivió entre los años 1717 y 1783.

$$A(x) = 5x - x^2.$$

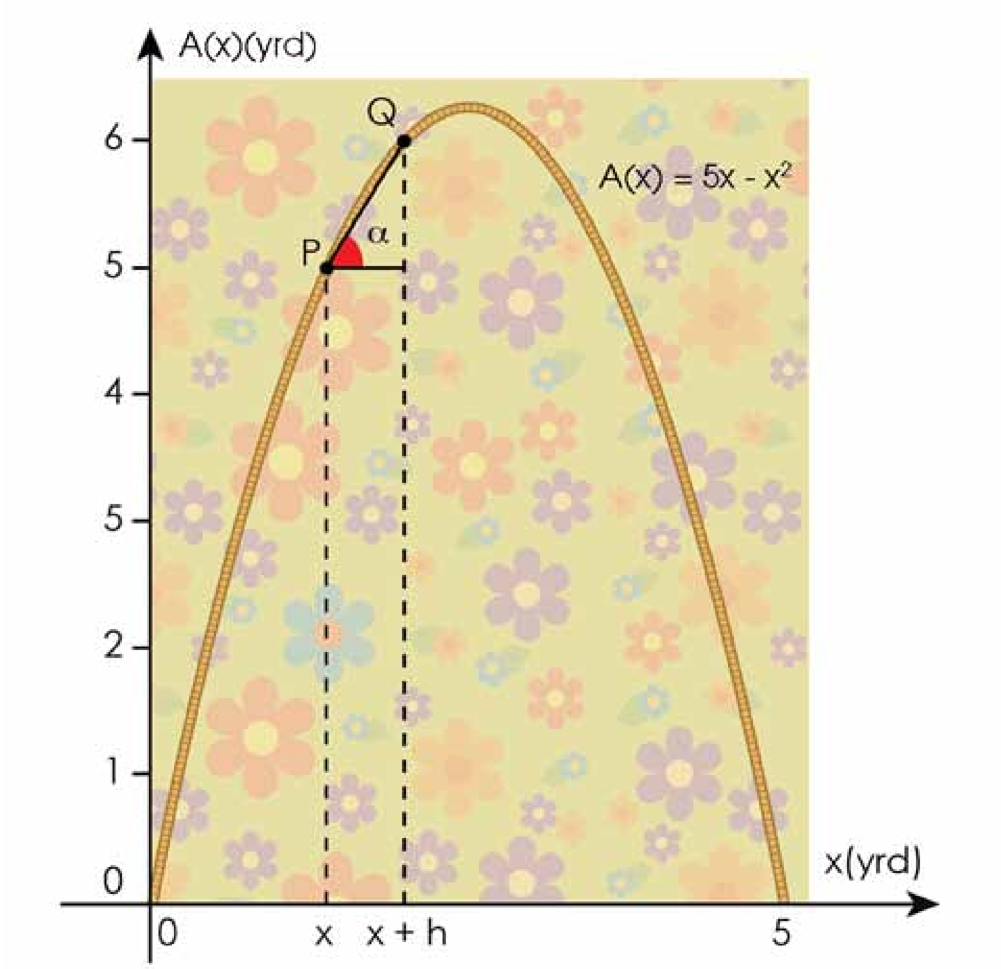
Puesto que tanto x como $A(x)$ no deben ser negativos, x debe tomar valores entre 0 y 5. Es decir, el dominio de la función área es el intervalo $[0,5]$.



Estás interesado en conocer el máximo de la parábola del área. Siguiendo las enseñanzas de Isaac Newton, Jean D'Alembert te sugiere la siguiente idea.

Escoge dos puntos cercanos $P(x,A(x))$ y $Q(x+h,A(x+h))$ en el gráfico de la función A, y considera el cociente de diferencias

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}.$$



(Aquí h es un pequeño incremento de la coordenada x). ¿Qué representa este cociente? Por supuesto: ¡la tangente del ángulo α de la secante PQ! Si ahora D'Alembert hace que h tienda a 0, este cociente se convertirá... ¡en la tangente del ángulo que forma con la horizontal la tangente de la parábola en el punto P! El matemático francés llama a este límite *derivada de la función* A, y la representa así:

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}.$$

De este modo D'Alembert definió la derivada de una función como límite de la razón entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente. ¿Qué es lo que mide la derivada? ¡La tangente del ángulo que forma con la horizontal la tangente de la función!

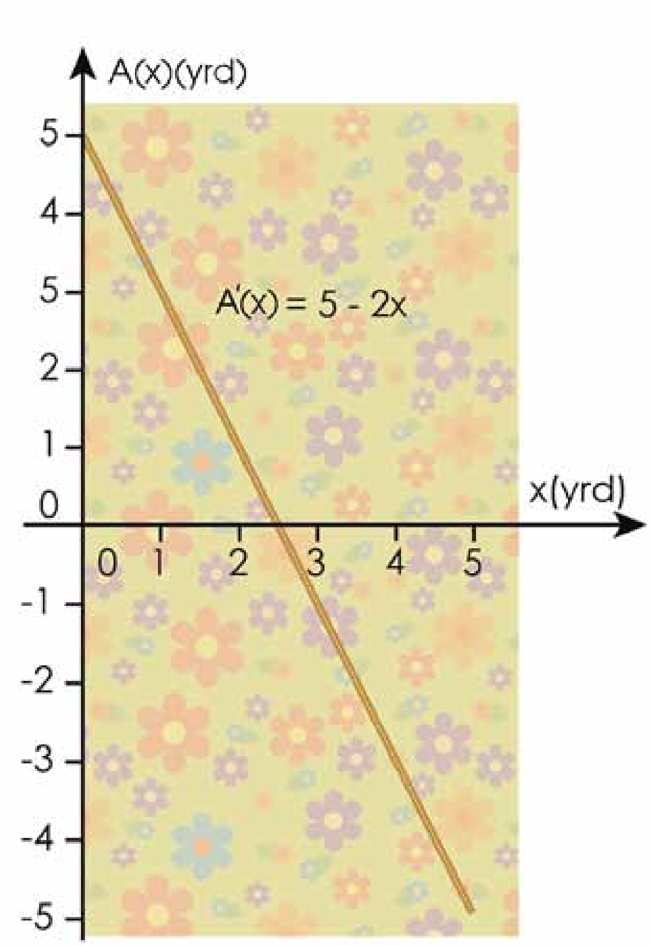
¿Cuál es la utilidad de este concepto? ¡Te permitirá conocer los máximos y los mínimos de cualquier función! Porque, como puedes darte cuenta, en los máximos y en los mínimos la tangente se vuelve horizontal, y, por consiguiente, el valor de la derivada es cero.

Como estás interesado en conocer el máximo de la parábola del área, usa la definición de derivada que acabas de descubrir con D'Alembert. Averiguarás que

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5(x+h)-(x+h)^2)-(5x-x^2)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5x+5h-x^2-2xh-h^2-5x+x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h-2xh-h^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(5-2x-h)=5-2x.$$



Los valores de la gráfica de la derivada te indican, en cada punto, cuánto mide la tangente del ángulo que forma la tangente de la función A con la horizontal.

Para conocer el valor máximo del área, iguala la derivada a 0:

$$5-2x=0.$$

Ya lo sabes:

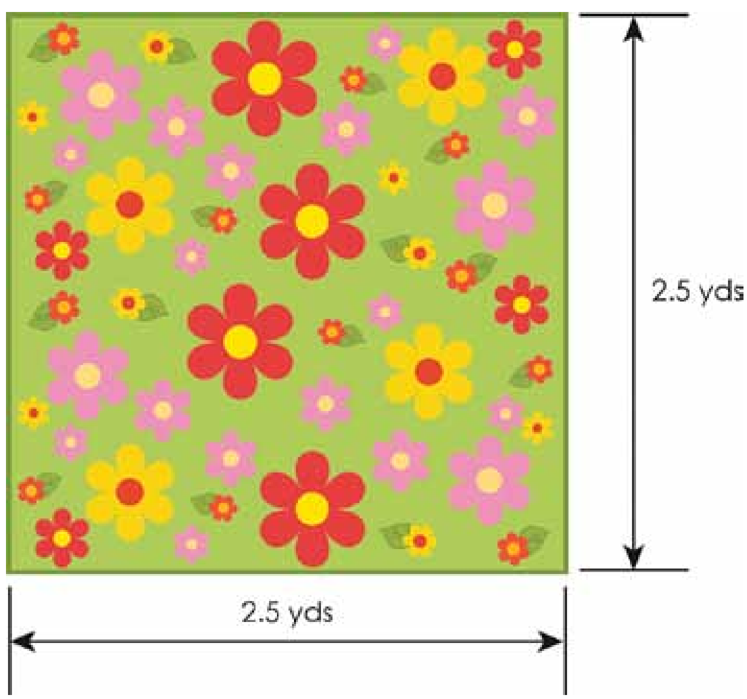
$$x=2.5\,\text{yrd}.$$

Es el ancho del jardín rectangular. Y también conoces su largo:

$$5-x=5-2.5=2.5\,\text{yrd}.$$

¡Se obtuvo un cuadrado! En él se alcanza el máximo de la función área. ¿Cuál es ese valor? Calcúlalo:

$$A(2.5)=5\cdot 2.5-2.5^2=6.25\,\text{yrd}^2.$$



Anota tu respuesta:

el máximo jardín rectangular que se puede delimitar con una soga de 10 yardas, se consigue en el cuadrado de 2.5 yardas por 2.5 yardas. Su área es de 6.25 yardas cuadradas. D'Alembert tiene razón: ¡con una soga de 10 yardas, no hay cómo delimitar un jardín de 7 yardas cuadradas!

¡La derivada es muy útil para conocer el máximo valor de una función!, ¿verdad?.

—¡Ya entendí por qué no hay cómo delimitar un jardín de 7 yardas cuadradas con una soga de 10 yardas! —exclamó el abogado.— Pero ¿por qué es imposible erradicar la injusticia?

—Porque Dios puso la injusticia en el mundo con un propósito, —dijo D'Alembert:— para que podamos apreciar la justicia. El que no ha visto lo negro, no puede reconocer lo blanco; el que no ha probado lo amargo, no es capaz de percibir lo dulce; el que no ha sufrido una injusticia, no puede valorar la justicia. ¡Lo injusto es absolutamente necesario para descubrir que todo es justo!

Después del invierno disfrutas más la primavera.

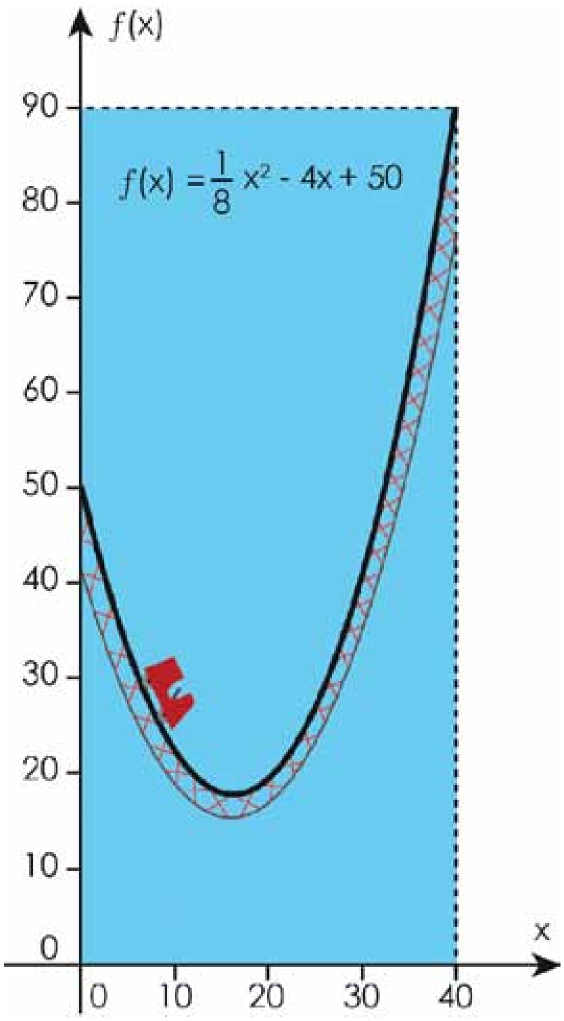
LA MONTAÑA RUSA

La montaña rusa debe su nombre a las diversiones, desarrolladas durante el invierno en Rusia. Allí se construían grandes toboganes de madera por los que se descendía con trineos deslizables sobre la nieve. También fueron conocidos en Francia, donde se les agregaron los carros de tren en vías en desuso, y, finalmente, llegaron a Estados Unidos donde se les llama *Roller coaster*, y son una popular atracción en parques y ferias.

Una montaña rusa es un sistema de rieles formando una pista que sube y baja en circuitos diseñados a propósito, algunas veces con una o más inversiones. El más conocido es el rizo que brevemente deja al viajero cabizbajo.

Un diseñador de montañas rusas desea que su modelo, en uno de sus tramos, describa un arco de parábola

$$y = \frac{1}{8}x^2 - 4x + 50, \quad 0 \le x \le 40\,\text{m}.$$



Aquí x es la distancia horizontal del coche desde la base del punto inicial de la caída, y f(x) es su altura desde el suelo.

—¿En qué momento el coche se encontrará más cerca del suelo? —se preguntó el diseñador.— ¿Y cuándo estará más cerca del cielo?

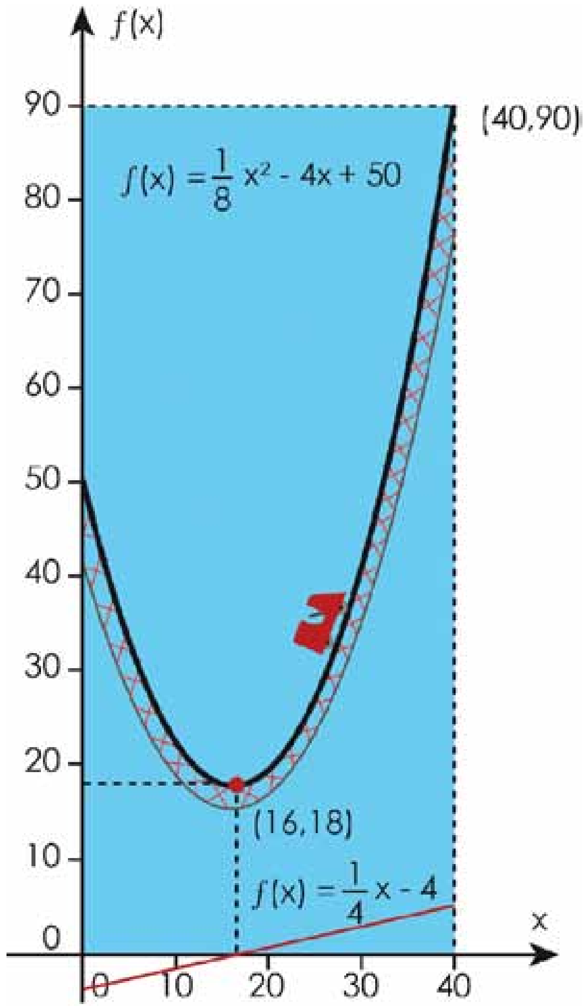
Y se puso a calcular. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

Estás interesado en conocer el mínimo y el máximo de la parábola de la montaña rusa. Para ello encuentra su derivada usando la definición de D'Alembert:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{8}(x+h)^2-4(x+h)+50\right)-\left(\frac{1}{8}x^2-4x+50\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}xh+\frac{1}{8}h^2-4x-4h+50-\frac{1}{8}x^2+4x-50}{h}=$$

$$\lim_{h \to 0}\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}h - 4\right) = \tfrac{1}{4}x - 4.$$



Ahora iguala la derivada a 0:

$$\tfrac{1}{4}x - 4 = 0.$$

Ya lo sabes:

$$x = 16\,\text{m}.$$

Allí, por supuesto, se alcanza el mínimo (pues el coeficiente principal de la parábola es positivo). ¿Cuál es su valor? Calcúlalo:

$$y(16) = 18\,\text{m}.$$

¿Y el máximo? Como la derivada no se anula en ningún otro punto, el máximo se debe alcanzar en uno de los dos extremos del intervalo. Calcula los valores de la altura en ellos:

$y(0) = 50\,m, \quad y(40) = 90\,m.$

Anota tu respuesta:

el coche se encontrará más cerca del suelo a la altura de 18 metros, cuando se haya desplazado 16 metros desde el punto inicial de la caída; y se encontrará más cerca del cielo a la altura de 90 metros, cuando se haya desplazado desde el punto inicial 40 metros.

¡La derivada resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

—¿Por qué hizo ese tramo en forma de parábola? —preguntaron al diseñador.

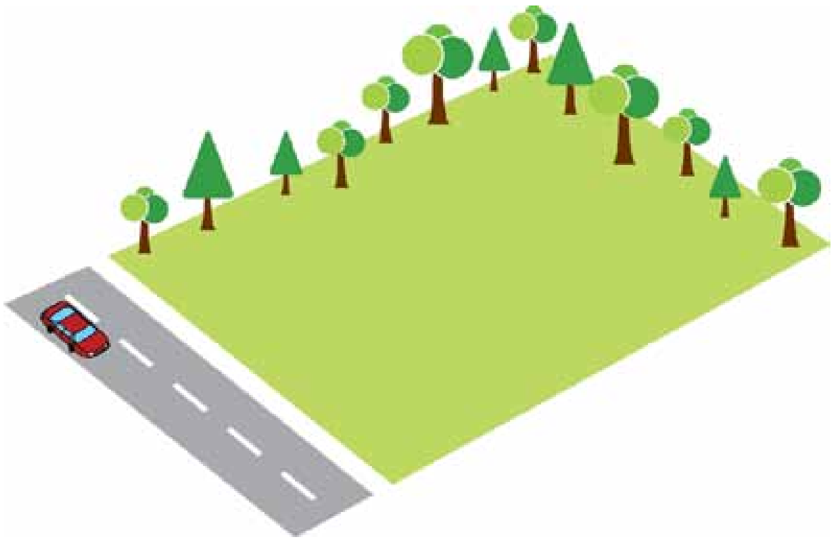
—Porque la montaña rusa es una parábola de la vida, —respondió él.— En la vida también hay altos y bajos, emociones de gozo y de terror; pero todo termina donde había comenzado.

La vida es una montaña rusa.

EL JARDÍN DE DALIAS

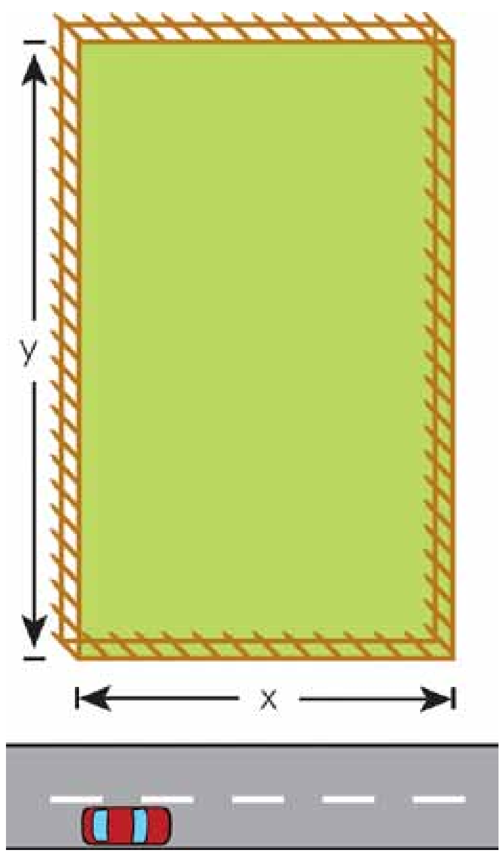
Un hombre, propietario de un campo grande, desea delimitar en él un espacio para sembrar un jardín rectangular de dalias. Para fabricar la cerca, dispone de $6000. Como el campo da a la carretera, la cerca para los lados paralelos a ésta debe ser de un material más resistente; su valor es de $15 el metro, mientras que el material para cercar los otros lados cuesta únicamente $10 el metro.

El hombre se puso a pensar: ¿de qué dimensiones le conviene delimitar el jardín para que las dalias tengan la mayor área posible? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!



Sean x la longitud en metros de los lados del terreno no paralelos a la carretera, y la longitud de los lados paralelos a ésta, y A el área del terreno. Entonces,

$$A = xy.$$



Como el costo del material para cada lado no paralelo a la carretera es de $\$10$ el metro, y la longitud de estos lados es $2x$, el costo total de esta parte de la cerca sería de $\$20x$. De manera similar, el costo de la cerca de los lados paralelos a la carretera es de $\$15$, por lo tanto, el costo total de la cerca para esos lados sería de $\$30y$:

$$20x+30y=6000.$$

Con el fin de expresar A en términos de una sola variable, despeja a la variable y:

$$y=200-\frac{2}{3}x.$$

Entonces, puedes escribir:

$$A(x)=200x-\frac{2}{3}x^2.$$

Puesto que tanto x como $A(x)$ no deben ser negativos, x debe tomar valores entre 0 y 300:

$$A(x)=x(200-\frac{2}{3}x)\geq 0 \;\text{ ssi }\; x\geq 0 \;\text{ o }\; 200-\frac{2}{3}x\geq 0.$$

En otras palabras, el dominio de la función área es el intervalo $[0,300]$.

Estás interesado en conocer el mínimo y el máximo de la parábola del jardín de dalias. Para ello encuentra su derivada usando la definición de D'Alembert:

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(200(x+h)-\frac{2}{3}(x+h)^2)-(200x-\frac{2}{3}x^2)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{200x+200h-\frac{2}{3}(x^2+2xh+h^2)-200x+\frac{2}{3}x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{200h-\frac{4}{3}xh-\frac{2}{3}h^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(200-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}h)=200-\frac{4}{3}x.$$

Ahora iguala la derivada a 0:

$$200-\frac{4}{3}x=0.$$

Ya lo sabes:

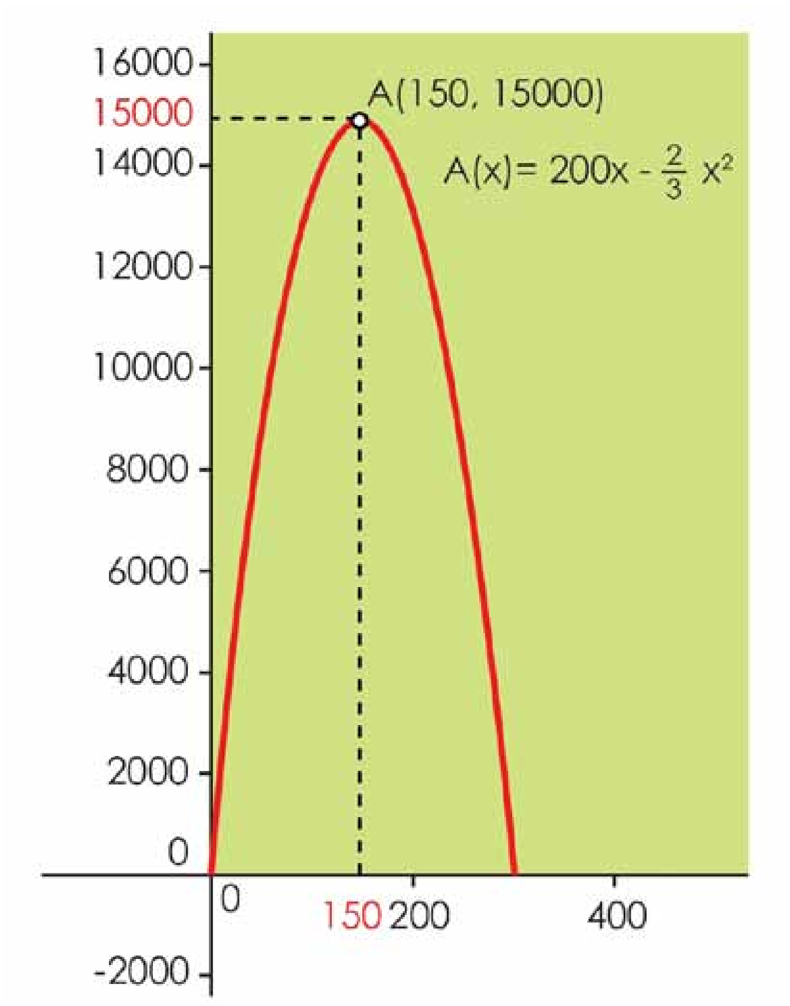
$$x = 150\,\text{m}.$$

Y también conoces el valor de y:

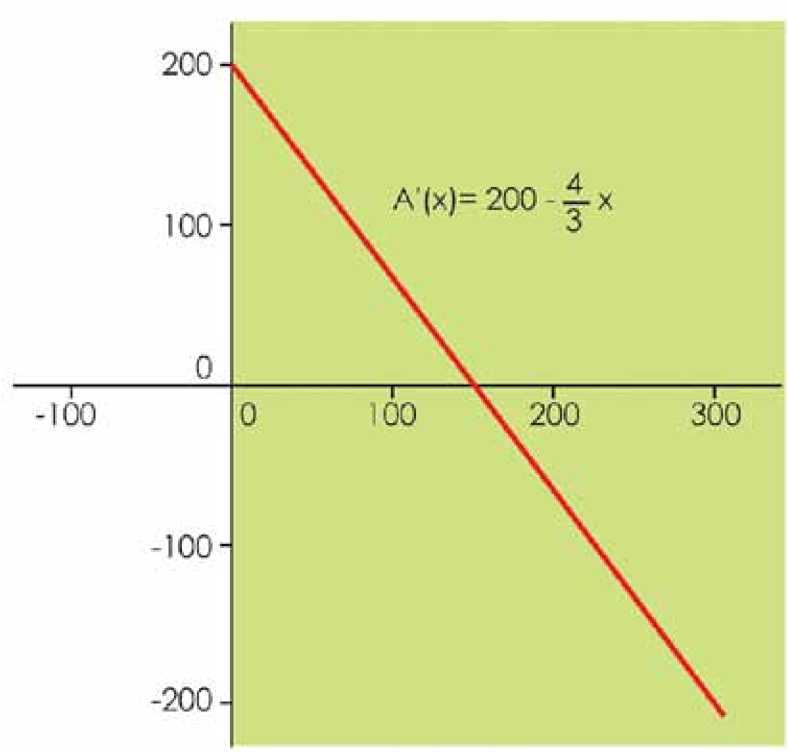
$$y = 200 - \frac{2}{3} \cdot 150 = 100\,\text{m}.$$

En esos valores de las variables, por supuesto, se alcanza el máximo de la función área (pues la parábola tiene el coeficiente principal negativo). ¿Cuál es ese valor máximo? Calcúlalo:

$$A(150) = 200 \cdot 150 - \frac{2}{3} \cdot 150^2 = 15000\,\text{m}^2.$$



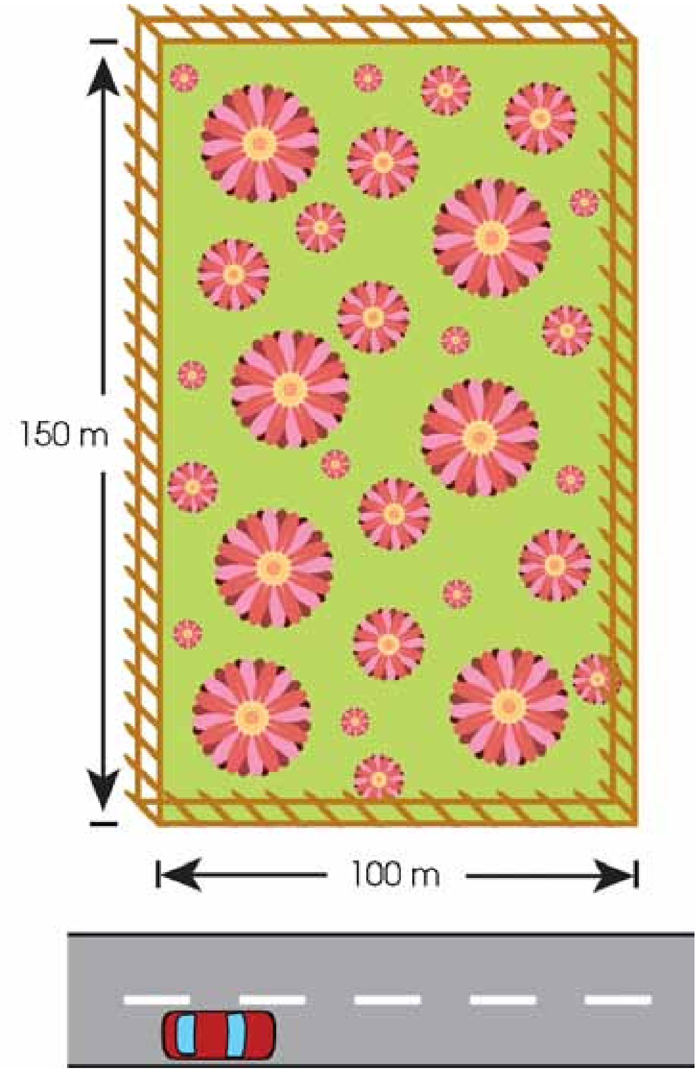
16000
15000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
-2000
A(150, 15000)
A(x)= 200x - 2/3 x²
0
150
200
400



200
100
0
-100
-200
A'(x)= 200 - 4/3 x
-100
0
100
200
300

Anota tu respuesta:

para que las dalias tengan la mayor área posible, conviene delimitar el jardín de dimensiones 150m por 100m (los lados paralelos a la carretera de 100 metros, y los otros de 150 metros).



¡La derivada puede ayudar mucho en el arte de la jardinería!, ¿no crees?.

LA MEDICINA MILAGROSA

Un rey se enfermó gravemente.

—¿Hay alguna medicina que me pueda curar? —preguntó al médico de palacio.

—Sí, majestad, —dijo el médico, — hay una. Pero, para que la sanación sea efectiva, se debe cumplir una condición.

—¿Cuál? —exclamó el rey.— ¡La cumpliré sin dilaciones! Tengo muchos súbditos que harán por mí lo que sea.

—Esta es, precisamente, la condición, — dijo el médico:— que su majestad debe conseguir la medicina por sí solo.

—¿Qué debo hacer?

—Vaya su majestad hasta el lindero del bosque y busque la planta que da florecitas amarillas. Debe llenar con ella una caja, elaborada a partir de una placa de bronce. Si hace con ella un té y se lo bebe, se aliviará.

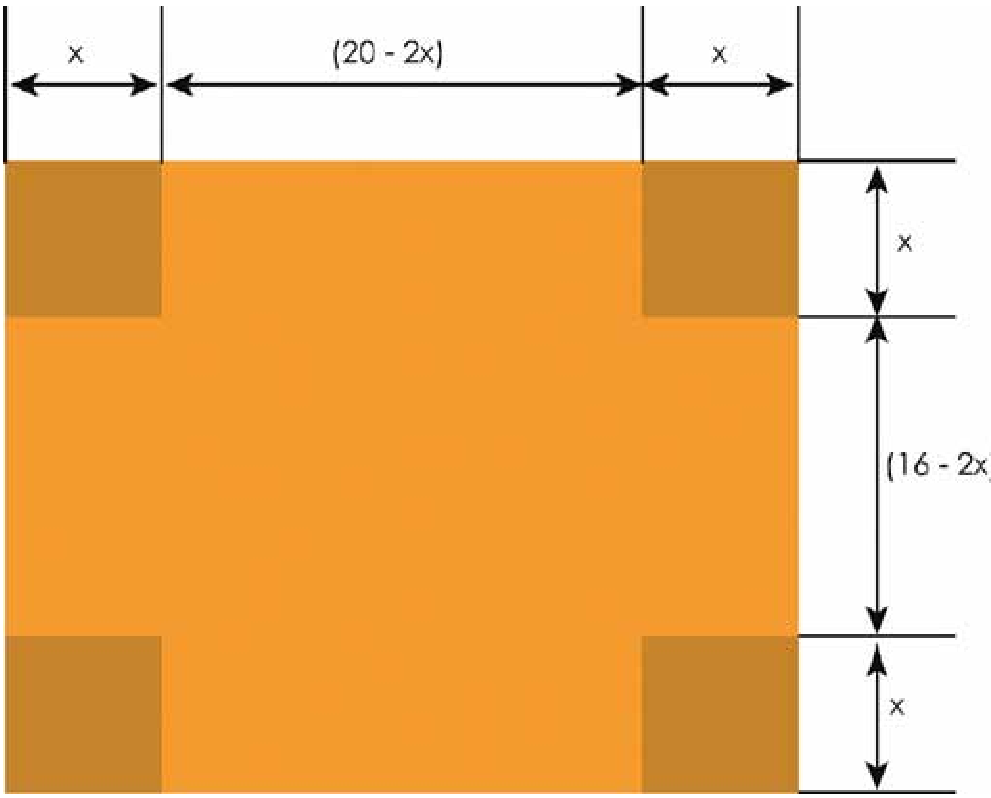
El rey fue a la cerrajería, escogió una placa de bronce de 20 palmos[2] por 16 palmos y se puso a pensar: ¿de qué tamaño le conviene recortar las esquinas para que la caja tenga el mayor volumen posible? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

---

[2] Un palmo mide 8 cm.

Si recortas de cada esquina de la placa un cuadradito de x cm por x cm, obtendrás una caja cuyo volumen será

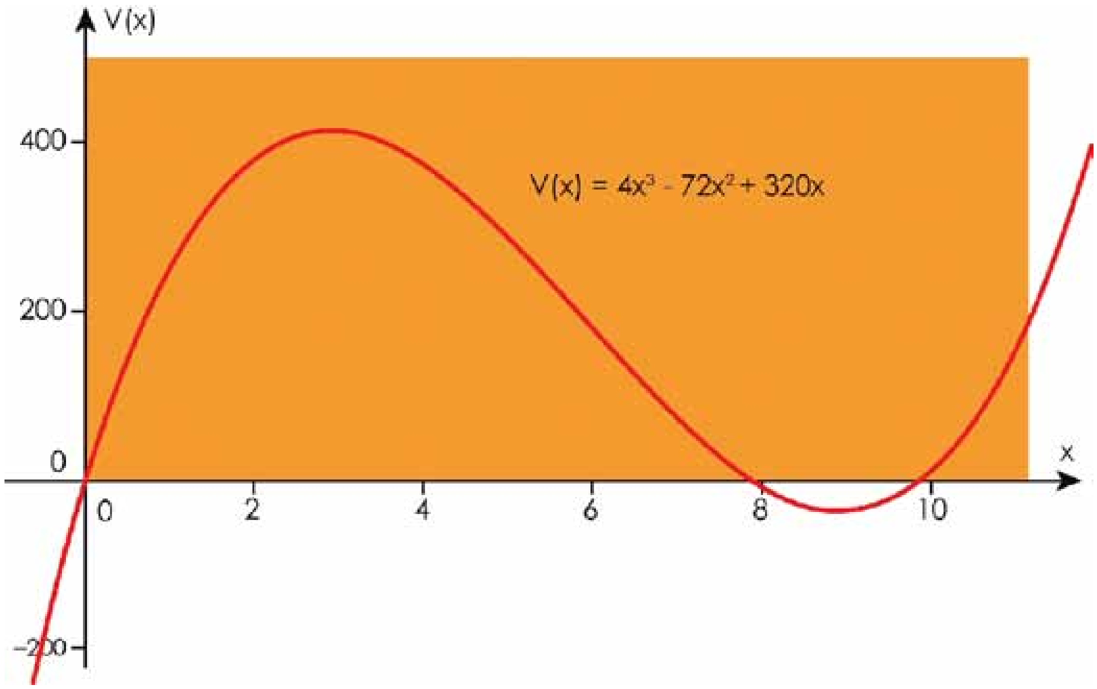
$$V(x)=(20-x)(16-x)x \text{ plm}^3, \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ plm}.$$



En otras palabras,

$$V(x)=4x^3-72x^2+320x.$$

¡Realiza la gráfica de esta función!

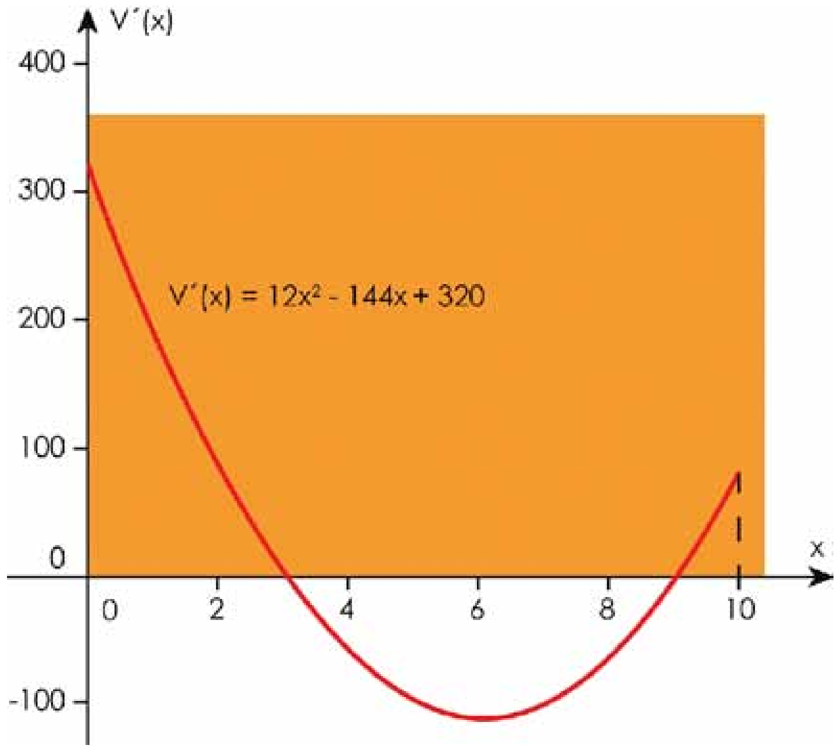


Estás interesado en conocer el máximo de esta parábola cúbica. Para ello encuentra su derivada usando la definición de D'Alembert:

$$V'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4(x+h)^3-72(x+h)^2+320(x+h))-(4x^3-72x^2+320x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3-144xh-72h^2+320h}{h}=12x^2-144x+320.$$

¡Ya puedes realizar la gráfica de la derivada!



Para encontrar el máximo volumen de la caja, iguala la derivada a 0:

$$12x^2 - 144x + 320 = 0.$$

Obtuviste ecuación cuadrática. Encuentra sus dos raíces:

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Calcula sus valores aproximados:

$$x_1 \simeq 9.055 \text{ plm}, \quad x_2 \simeq 2.944 \text{ plm}.$$

El valor 9.055 está fuera del dominio de la función: ¡con él no se puede construir ninguna caja! Entonces, el máximo se alcanza en el punto 2.944 palmos. ¿Cuál es su valor? Calcúlalo:

$$V_{max}(2.944) \simeq 420.11 \text{ plm}^3.$$

Anota tu respuesta:

> el máximo volumen que el rey puede conseguir de la placa de bronce de 20 plm por 16 plm, recortando las esquinas cuadradas, es de 420 palmos cúbicos.

¡La derivada resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

El rey elaboró la caja, recogió en ella la planta, se preparó el té y se lo bebió.

—¿De qué se dio cuenta? —le preguntó el médico.

—De que en la placa de bronce, tal y como era, no hubiera podido traer la planta, pero, doblegando sus bordes, se formó una caja que contuvo la medicina sin dificultad.

—Y así es la mente, —dijo el médico.— Cuando dispersa sus propias imágenes, se enferma; pero, cuando aprende a concentrarlas, se cura.

Solo una mente concentrada es sana.

EL ESTUCHE Y LA JOYA

Un matemático de nombre Ottavio y su sobrino Dioniso caminaban por la playa del mar Jonio en la ciudad de Siracusa. Ottavio vivía en esa antigua ciudad donde nació y murió Arquímedes. Dioniso acababa de llegar de Palermo, donde cursaba el último año de ingeniería y por esta razón no era feliz, pues era amante de las matemáticas, y la ingeniería no satisfacía su deseo de investigar formas puras.

—¿Has mirado el mapa de Sicilia?— preguntó Ottavio.— ¿Sabes cómo se llamaba nuestra isla en la antigüedad? *La Tinacria*, es decir, *la Tierra con tres puntos*: el cabo Pelore al noreste, el Lilibeo al oeste, y el Pachynus al sureste. Un auténtico triángulo, cada uno de cuyos lados mira hacia un mar diferente: al Tirreno, al Mediterráneo y al mar que se extiende ante nosotros, el mar Jónico.

Dioniso guardaba silencio.

—Así que hemos nacido en una isla geométrica, —añadió Ottavio.

—Me hubiera gustado ser geómetra, —dijo Dioniso.— Pero ya mismo me gradúo de ingeniero, y es tarde cambiar de carrera.

—Esto solo lo puede decidir la vida, —dijo Ottavio.— ¡Y creo que ella quiere hacerte una pregunta ahora mismo!

—¿Qué pregunta?

—Una muy sencilla, —dijo Ottavio:— ¿podrías inscribir un área de 25700 kilómetros cuadrados en un círculo de 130 kilómetros de radio?

—¡Por supuesto que sí! —respondió Dioniso.— Porque el área de ese círculo sería aproximadamente de 53000 kilómetros cuadrados, es decir, más que el doble del área que mencionas. ¡No hace falta ser matemático para asegurar que ese círculo sería capaz de circunscribir los 25700 kilómetros cuadrados sin ningún problema!

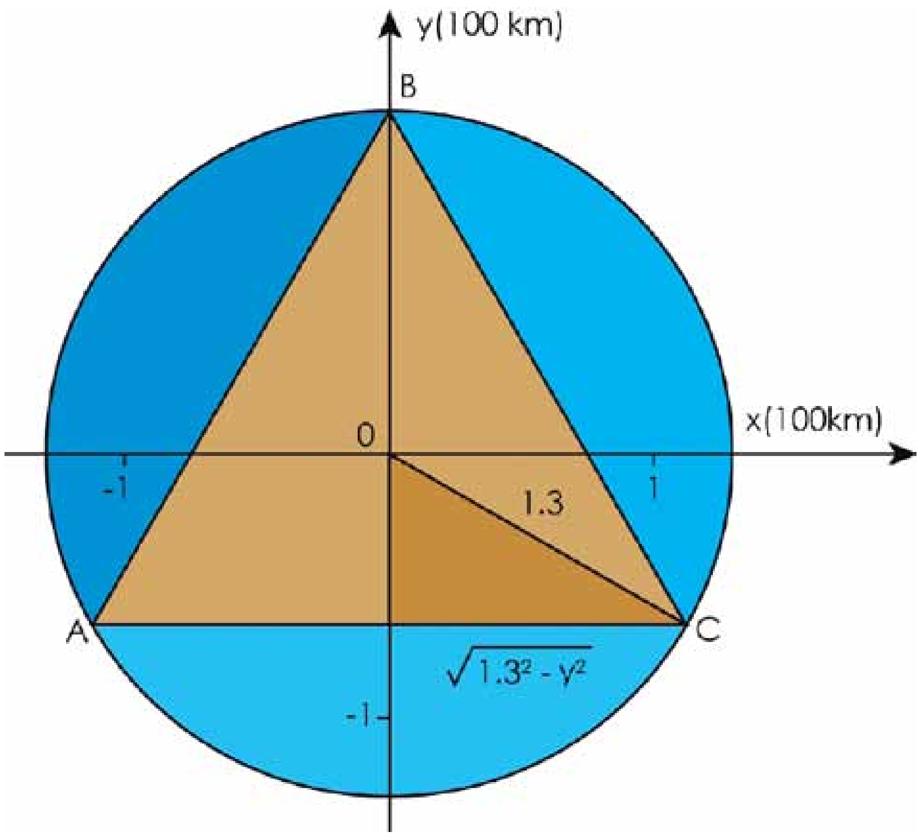
—Pero no creo que sigas manteniendo la misma opinión si te revelo que esa área pertenece a nuestra isla, —dijo Ottavio con una sonrisa.— Como puedes ver, Sicilia tiene la forma de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales son los que dan hacia el Tirreno y el Mediterráneo. Y también debes saber que su área es de 25700 kilómetros cuadrados.

—¡Oh, si se trata de la isla de Sicilia, por supuesto que no podré inscribirla dentro de un círculo tan pequeño! —exclamó Dioniso.— ¿No ves que, dentro de un círculo de 130 kilómetros de radio, a lo mucho cabe un triángulo isósceles de 22000 kilómetros cuadrados de superficie?

—¿Cómo lo sabes? —preguntó Ottavio, asombrado.

Y Dioniso dio a su tío la siguiente explicación. ¡Ayúdale con ella, por favor!

La isla de Sicilia es el triángulo isósceles al cual se desea inscribir dentro de una circunferencia de radio 130 km.



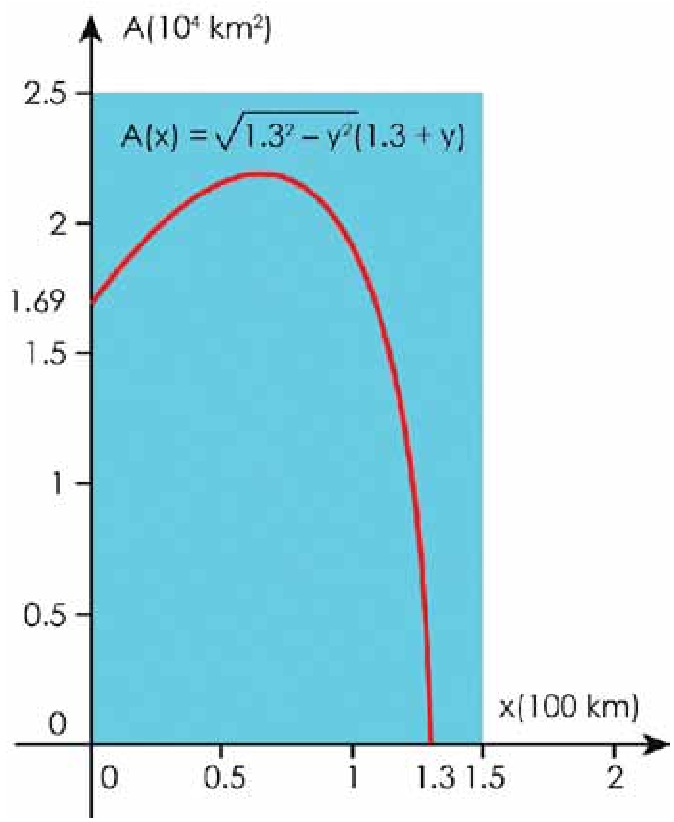
Si llamas y a la coordenada vertical de su vértice C, en cientos de kilómetros cuadrados el área del triángulo se escribirá de este modo:

$$A(y)=\sqrt{1.3^2-y^2}\,(1.3+y).$$

El dominio de la función A será el siguiente:

$$0\leq y\leq 1.3.$$

Deseas conocer el máximo de esta función.



Para lograrlo, encuentra su derivada usando la definición de D'Alembert:

$$A'(y)=\lim_{h\to 0}\frac{A(y+h)-A(y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1.3^2-(y+h)^2}\,(1.3+(y+h))-\sqrt{1.3^2-y^2}\,(1.3+y)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1.3^2-(y+h)^2}-\sqrt{1.3^2-y^2}\right)(1.3+y)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1.3^2-(y+h)^2}\,h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(-2y-h)(1.3+y)}{\left(\sqrt{1.3^2-(y+h)^2}+\sqrt{1.3^2-y^2}\right)}+\lim_{h\to 0}\sqrt{1.3^2-(y+h)^2}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(-2x)(1.3+y)}{2\sqrt{1.3^2-y^2}}+\sqrt{1.3^2-y^2}=$$

$$\frac{(-y)(1.3+y)}{\sqrt{1.3^2-y^2}}+\sqrt{1.3^2-y^2}=\frac{-2y^2-1.3y+1.3^2}{\sqrt{1.3^2-y^2}}.$$

¡Iguala la derivada a cero!

$$\frac{-2y^2-1.3y+1.3^2}{\sqrt{1.3^2-y^2}}=0.$$

Sabrás que

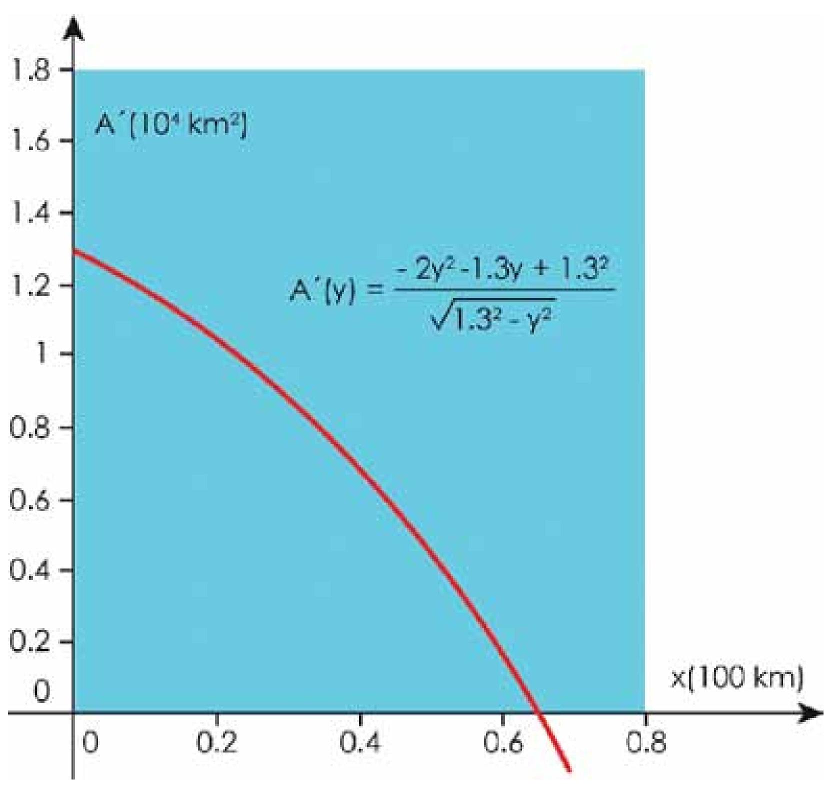
$$2(y+1.3)(y-0.65)=0.$$

Por lo tanto,

$$y_1=0.65, \quad y_2=-1.3.$$

El valor -1.3 está fuera del dominio de la función; entonces, el máximo del área se alcanza en el punto 0.65 cientos de kilómetros. ¿Cuál es el valor de ese máximo? Calcúlalo:

$$A_{max}(0.65)\simeq 2.195374\ (100km)^2.$$



Anota tu respuesta:

> el área máxima de un triángulo isósceles que se puede inscribir dentro del círculo de radio 130 kilómetros, es de 21953.74 kilómetros cuadrados. ¡Por lo tanto, la isla de Sicilia, cuya área es de 25700 kilómetros cuadrados, no puede ser inscrita allí!

¡La derivada resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

—Como ves, la isla de Sicilia no puede ser inscrita dentro de un círculo tan pequeño, —concluyó Dioniso su exposición.

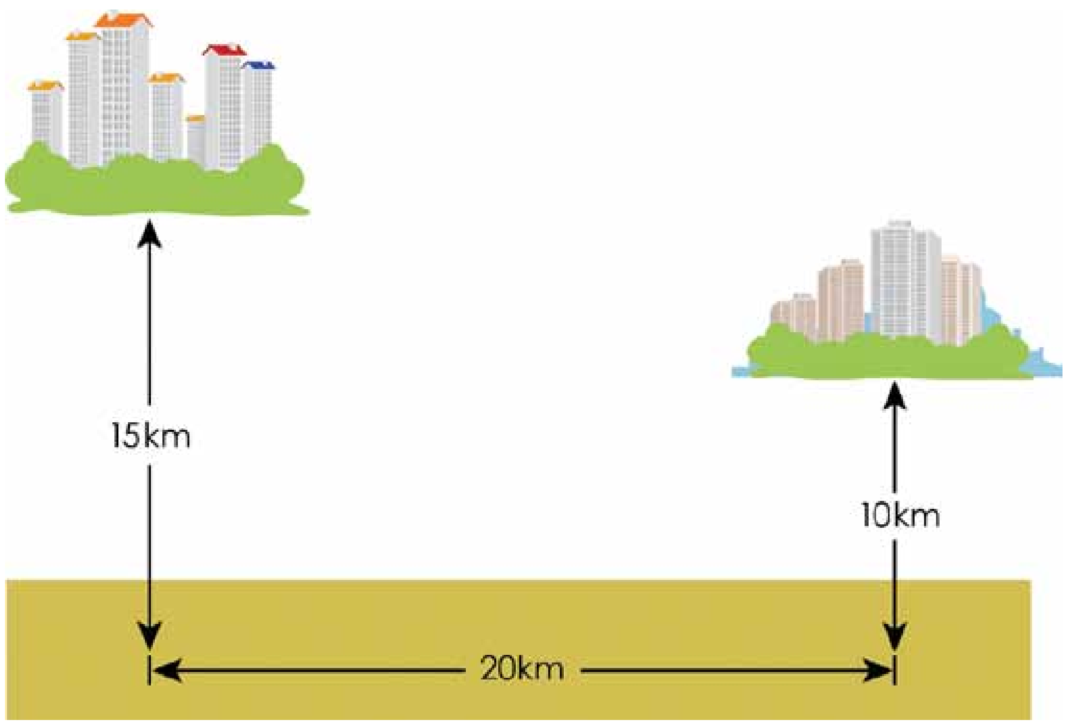
—Y del mismo modo no puedes inscribir un talento dentro de un título universitario, —dijo Ottavio.— Tu amor por la matemática es tan grande que no necesitas que ninguna universidad lo confirme. ¡La vida lo acaba de certificar!

El título es sólo un estuche. ¡Busca la joya!

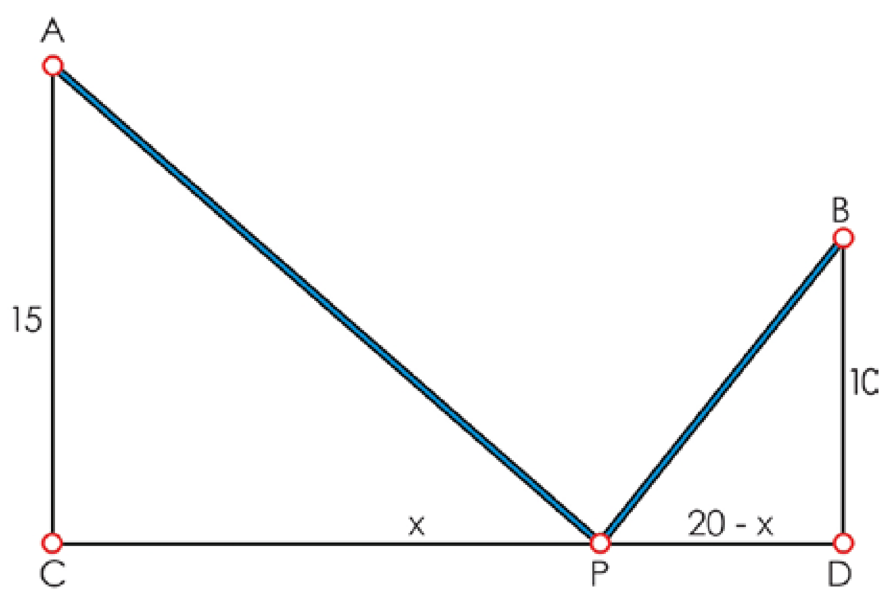
LA ESTACIÓN DE BOMBEO

En cierta ocasión dos ciudades se quedaron sin abastecimiento de agua. Los alcaldes, como eran muy amigos, decidieron instalar una estación de bombeo que abasteciera de agua a las dos ciudades. Luego de una larga plática, se pusieron de acuerdo en que la estación se ubicaría en la orilla de un río que pasaba a 15 km de la primera ciudad y a 10 km de la segunda.

Midieron en el mapa los puntos del río más cercanos a las dos ciudades, y también averiguaron que la distancia entre ellas era de 20 km. Luego de ello se pusieron a pensar: ¿dónde se debería ubicar la estación de bombeo, para que se emplee la menor cantidad de tubería posible? ¡Ayúdales a averiguarlo, por favor!



Llama A y B a las dos ciudades, y C y D a los puntos de la orilla más cercanos. Sea P el punto donde se desea ubicar la estación de bombeo, y x su distancia del punto C.



Entonces, la longitud de la tubería se escribirá de este modo:

$$T(x) = AP + PB = \sqrt{x^2 + 15^2} + \sqrt{(20-x)^2 + 10^2}\,.$$

El dominio de la función T será el siguiente:

$$0 \leq x \leq 20 \text{ km}.$$

Deseas conocer el mínimo de esta función.

Para lograrlo, encuentra su derivada usando la definición de D'Alembert:

$$T'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{T(x+h)-T(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+15^2}+\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}\right)-\left(\sqrt{x^2+15^2}+\sqrt{(20-x)^2+10^2}\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+15^2}-\sqrt{x^2+15^2}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}-\sqrt{(20-x)^2+10^2}}{h}.$$

¡Calcula estos dos límites por separado!

Racionaliza el primero:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+15^2}-\sqrt{x^2+15^2}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+15^2}+\sqrt{x^2+15^2}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+15^2}+\sqrt{x^2+15^2}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+15^2-x^2-15^2}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+15^2}+\sqrt{x^2+15^2}\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+15^2}}.$$

Ahora racionaliza el segundo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}-\sqrt{(20-x)^2+10^2}\right)\left(\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}+\sqrt{(20-x)^2+10^2}\right)}{h\left(\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}+\sqrt{(20-x)^2+10^2}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(20-(x+h))^2+10^2-(20-x)^2-10^2}{h\left(\sqrt{(20-(x+h))^2+10^2}+\sqrt{(20-x)^2+10^2}\right)}=\frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2+10^2}}.$$

Entonces, ya descubriste la derivada:

$$T'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+15^2}}+\frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2+10^2}}.$$

Como deseas conocer el mínimo de la función-tubería, ¡iguala su derivada a cero! Así:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+15^2}}+\frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2+10^2}}=0.$$

Escríbelo de este modo:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+15^2}} = \frac{20-x}{\sqrt{(20-x)^2+10^2}}.$$

Elevando todo al cuadrado y simplificando, te enterarás que se cumple la siguiente igualdad:

$$1+\frac{100}{(20-x)^2} = 1+\frac{225}{x^2}.$$

En otras palabras,

$$\frac{10}{20-x} = \frac{15}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación lineal, descubrirás que

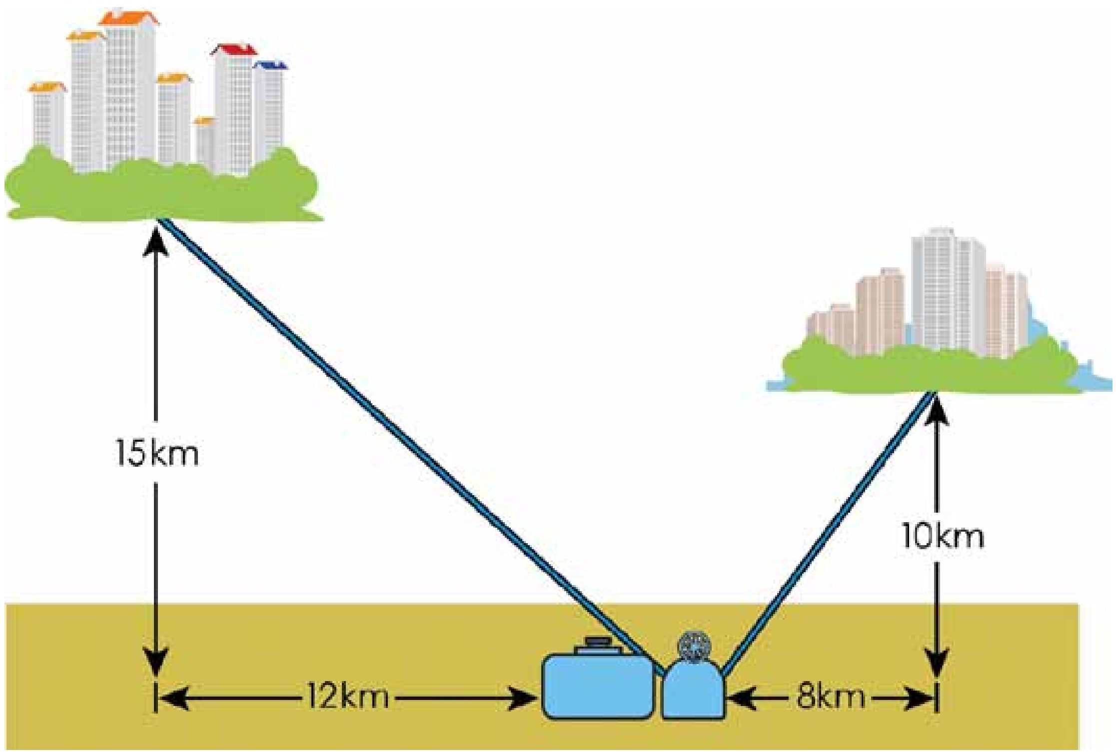
$$x = 12 \text{ km}.$$

¡La mínima longitud de tubería se alcanza en el punto que dista de la primera ciudad 12 kilómetros! ¿Cuál es el valor de esa longitud? Calcúlalo:

$$T_{mín}(12)= \sqrt{12^2+15^2} + \sqrt{8^2+10^2} = \sqrt{369} + \sqrt{164} \simeq 32.016 \text{ km}.$$

Anota tu respuesta:

para emplear la menor cantidad de tubería, la estación de bombeo debe ubicarse a 12 kilómetros de la ciudad A y a 8 kilómetros de la ciudad B. La longitud de la tubería será de 32 kilómetros con 16 metros.



¡La derivada es muy útil para resolver problemas de abastecimiento!, ¿verdad?.

Sección II

Áreas

LA VIGILIA Y EL SUEÑO

Martin Mersenne soñó que un ángel le decía:

—Lo que vives en vigilia es solo la tercera parte de ti; las otras dos terceras partes pertenecen al sueño. Es lo que nos enseña la parábola.

Apenas se levantó, Mersenne hizo la consulta a Blaise Pascal:

—¿Qué me quiso decir el ángel?

—Que en el sueño somos más auténticos que en vigilia, —dijo Pascal.— Y que la parábola separa la tercera parte del rectángulo correspondiente.

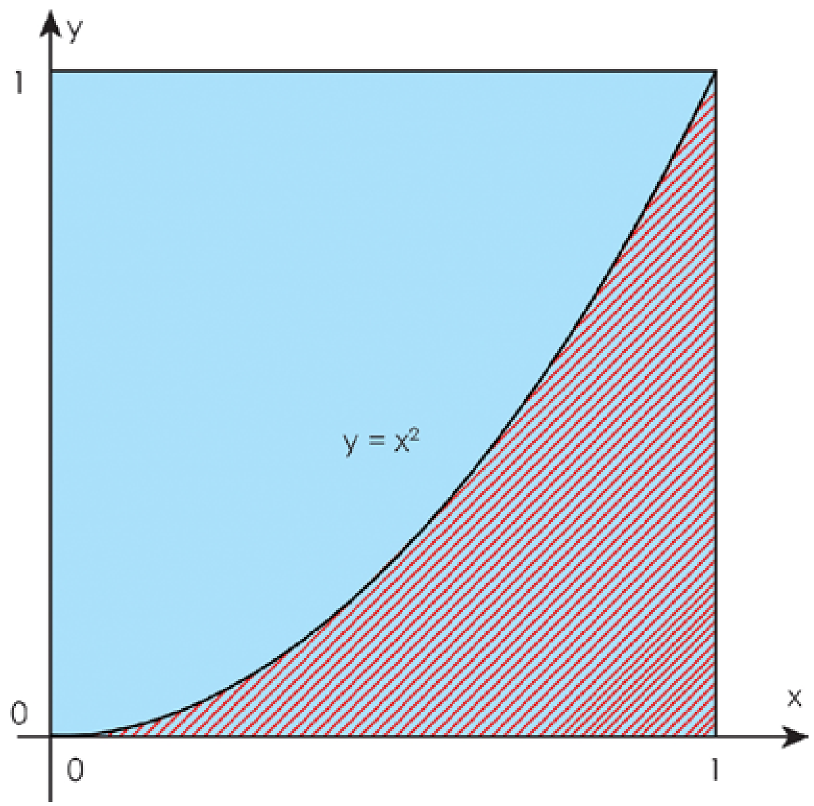
Y dio a Mersenne la siguiente explicación. ¡Ayúdale con ella, por favor!

Aquí puedes ver la parábola

$$y(x)=x^2,$$

definida sobre un intervalo $[0,1]$ (¡por ti mismo realiza el análisis para el caso de un intervalo cualquiera!). Lo que Blaise Pascal sostiene es que el área que delimita la parábola es un tercio del cuadrado (cuya área mide 1 unidad cuadrada):

$$A = \frac{1}{3}.$$



Para calcular esta área, Pascal divide el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales de longitud $\frac{1}{n}$: $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], \ldots$ $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1]$, y reemplaza el área debajo de la parábola por los n rectángulos cuya base mide $\frac{1}{n}$ y la altura es la ordenada de la parábola. Así, la altura del primer rectángulo mide $\frac{1}{n^2}$ unidades; la altura del segundo rectángulo mide $\frac{4}{n^2}$ unidades; del tercero, $\frac{9}{n^2}$, etc. Pascal procede a calcular la suma de las áreas de estos rectángulos:

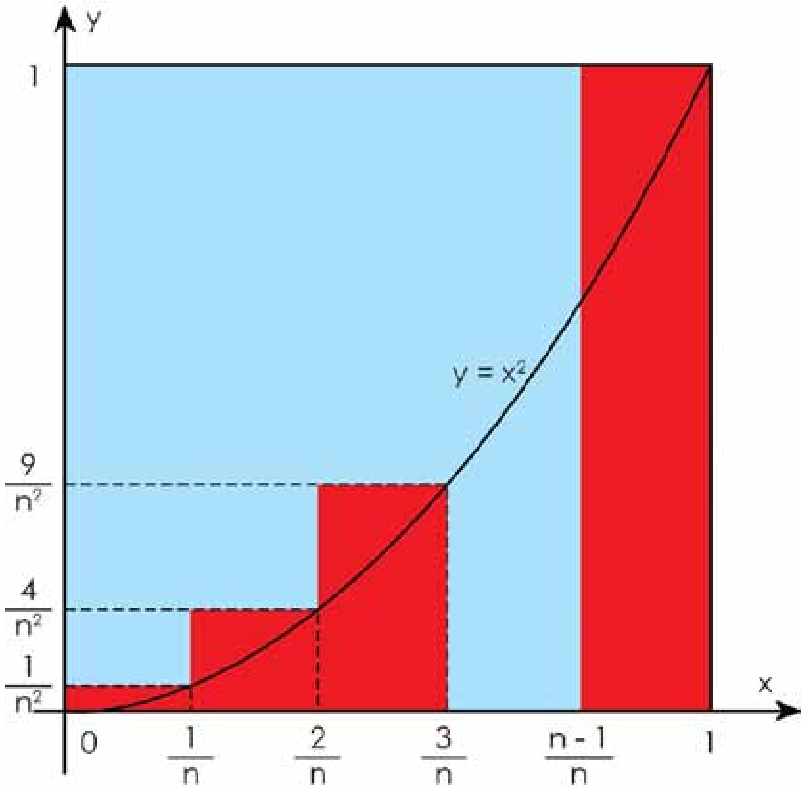
$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{9}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \cdot [1 + 4 + 9 + \ldots + n^2].$$

El matemático francés conoce que la suma de los cuadrados de los primeros números naturales se calcula por la fórmula

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La escribe de esta forma:

$$1+4+9+...+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$



Esto simplifica muchísimo la expresión del área de los rectángulos:

$$A_n=\frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

¿A dónde tiende esta suma cuando el número de los rectángulos aumenta al infinito? Por supuesto: ¡a $\frac{1}{3}$!

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}=\frac{1}{3}.$$

Anota la respuesta de Blaise Pascal:

la parábola recorta la tercera parte del cuadrado.

Como puedes ver, lo que ayudó a calcular el área debajo de la parábola fue el hecho de que la suma de los cuadrados de los números naturales puede ser expresada por medio de una fórmula. Esto alentó a los investigadores del Cálculo a buscar métodos similares para otras curvas. Y, aunque aquello no resultó ser posible en la mayoría de los casos, el ejemplo de la parábola siguió inspirando a los científicos.

Así, posteriormente Bernhard Riemann definió el área debajo de una curva como la siguiente integral:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x.$$

De este modo nació una nueva rama de la matemática: el Cálculo de áreas.

EL PRODIGIO

En una clase de cálculo Isaac Barrow preguntó a los estudiantes:

—¿Pueden decirme qué área posee esta hoja de álamo? Observen que sus contornos se describen por las ecuaciones

$$y(x)=x^2 \quad \text{y} \quad y(x)=\sqrt{x}, \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 1\,\text{palmo}.^3$$

—Un tercio de palmo cuadrado, —contestó Isaac Newton.— La hoja de álamo delimita un tercio de palmo cuadrado.

—¿Cómo lo calculó tan rápido? —se sorprendió Barrow.— ¿De qué modo logró sumar infinitos rectángulos?

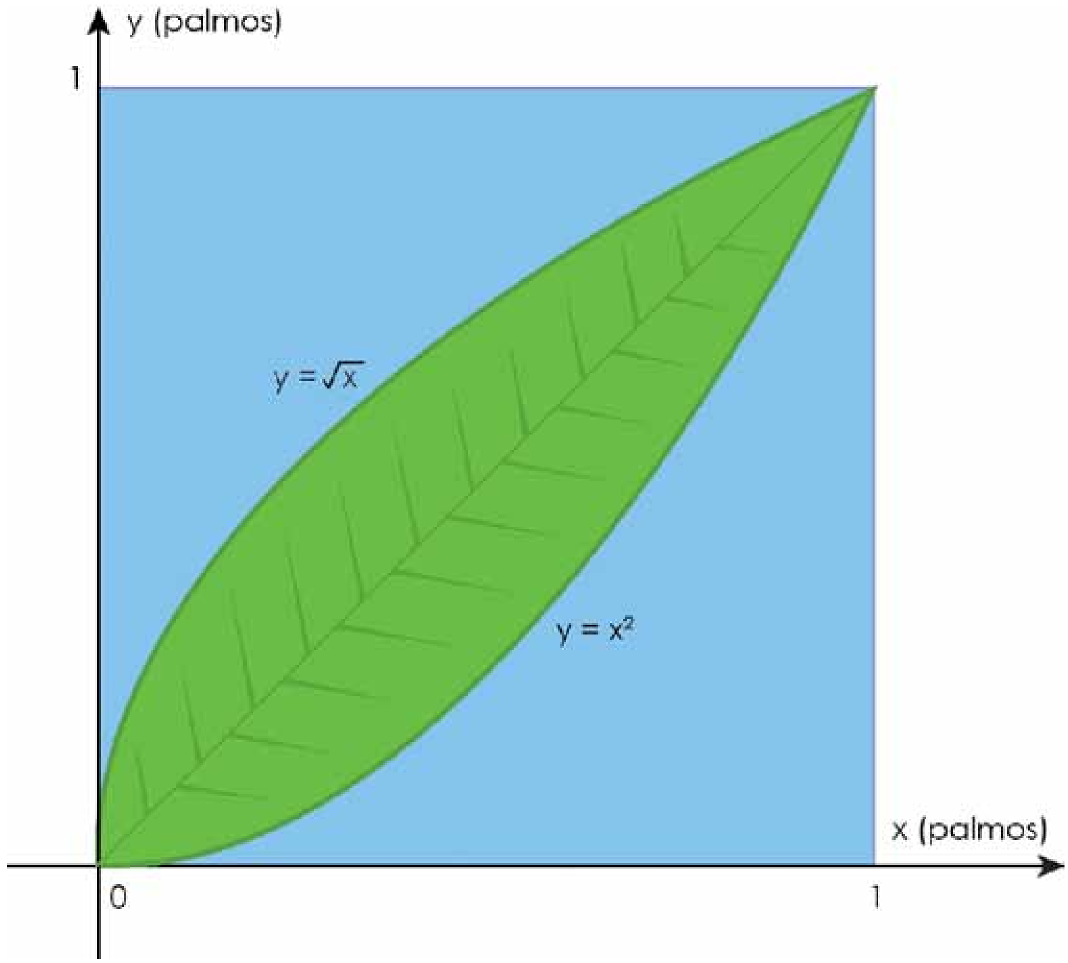
—No necesité hacerlo, profesor, — respondió Newton.— En vez de ello me imaginé que los contornos de la hoja son gráficos de la velocidad con la que se desplaza un asteroide, y calculé la distancia que tal astroide recorre.

—¿Podría explicárnoslo con más detalle, por favor? —pidió Barrow.

Newton pasó a la pizarra y dio a los presentes la siguiente explicación. ¡Ayúdale con ella, por favor!

Aquí puedes ver la hoja de álamo:

[3] Un palmo mide 8 cm.



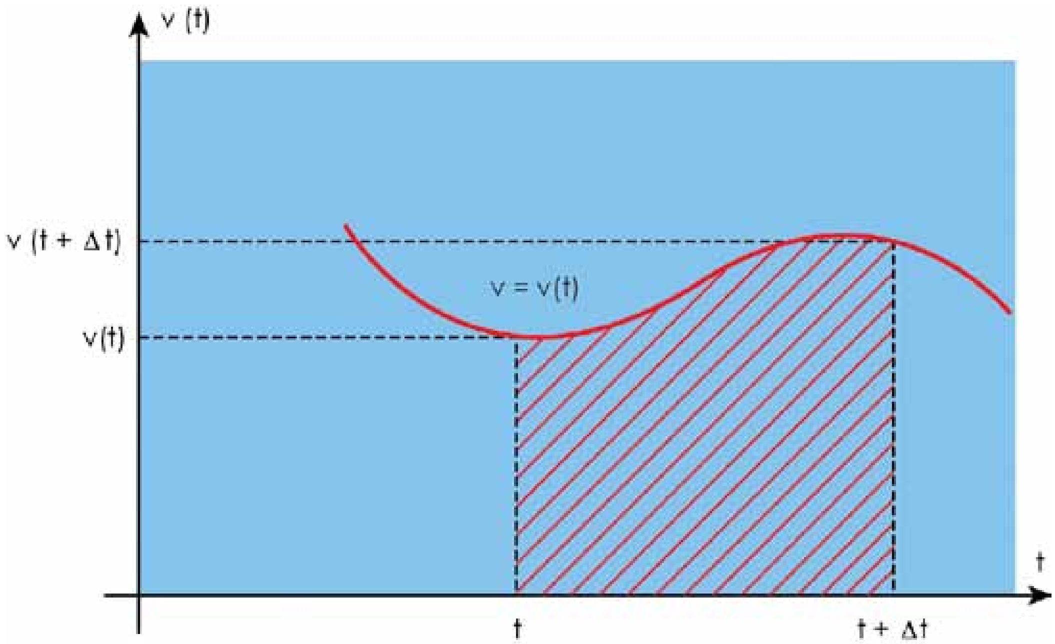
Pero, para Isaac Newton, sus contornos no delimitan la materia verde de la hoja, sino que representan la velocidad con la que se desplaza un asteroide. Newton desea calcular la distancia que éste recorre.

Para que se pudiera entender mejor su idea, Newton dibuja el gráfico de una función arbitraria $v(t)$ que representará la velocidad del asteroide, y fija en él un punto t, también arbitrario. En el momento t la velocidad que alcanza el asteroide es $v(t)$. Ahora Newton proporciona al momento t un pequeño incremento Δt. Al finalizar el instante $t+\Delta t$, el asteroide habrá alcanzado la velocidad $v(t+\Delta t)$.

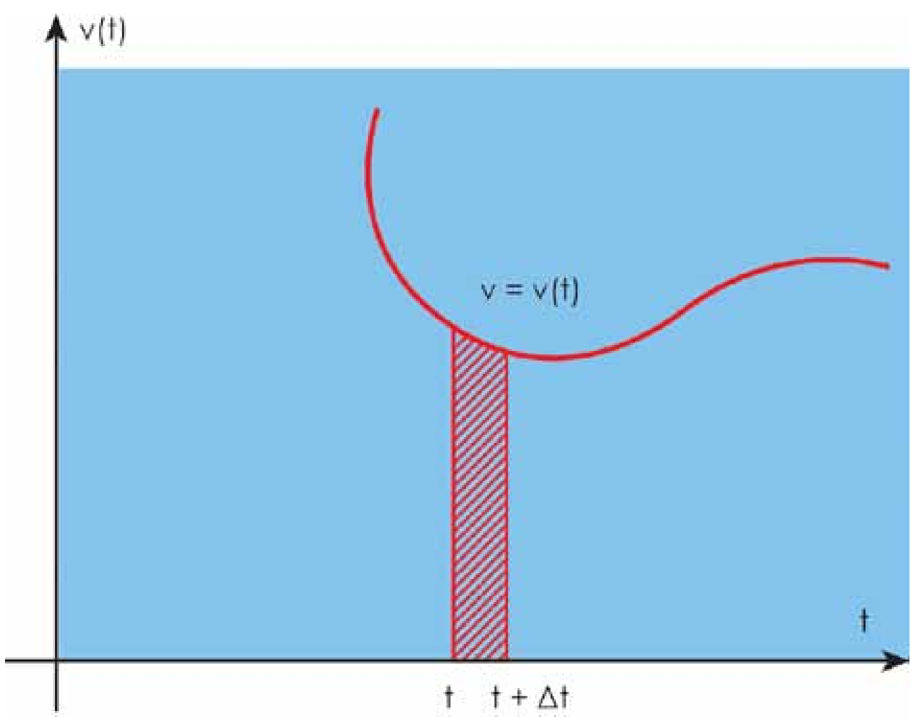
—¿Cómo varía el área $A(t)$ debajo de la función $v(t)$? —se pregunta Newton.

Para averiguarlo, el matemático inglés deriva la función área:

$$A'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}. \qquad (*)$$



Como puedes ver, la diferencia que hay en el numerador representa el área bajo la curva sobre el intervalo $[t, t+\Delta t]$. ¿Qué sucederá con ella cuando Δt empiece a tender a 0? Tendrá esta apariencia:



¡La figura del área se hace parecida a un rectángulo cuya base es el intervalo Δt! ¿Y qué sucede cuando el área de un rectángulo se divide para su base, como lo hace la fórmula $(^*)$? Por supuesto: ¡se obtiene la altura del rectángulo! ¿Y cuál es ésta? ¡Es la velocidad $v(t)$! Isaac Newton acaba de demostrar que

$$A'(t)=v(t).$$

¡Pero la velocidad de un móvil es siempre la derivada del espacio recorrido $s(t)$! En efecto, por la definición de la velocidad puedes escribir:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t).$$

Si comparas las dos últimas fórmulas, te darás cuenta que

$$v(t)=s'(t)=A'(t).$$

Y esto significa que tanto $s(t)$ como $A(t)$, ambas, son primitivas de la función velocidad. ¡Entonces, la diferencia entre ellas debe ser una constante! Anótalo:

$$A(t)=s(t)+c.$$

Es decir,

$$A(a)=s(a)+c,\quad A(b)=s(b)+c.$$

Y si deseas calcular el área debajo de la curva sobre el intervalo $[a,b]$, la constante c desaparecerá, pues

$$A(b)-A(a)=(s(b)+c)-(s(a)+c)=s(b)-s(a).$$

Si representas el área debajo de la función velocidad como la integral definida

$$A(a,b)=\int_a^b v(t)dt,$$

puedes anunciar tu descubrimiento así:

$$\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a),$$

donde $s(t)$ es cualquier función cuya derivada es $v(t)$. ¡Y esto es lo que se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo! Anótalo:

Teorema Fundamental del Cálculo

Para calcular el área debajo de una curva f(x), solo necesitas determinar una función G(x) cuya derivada sea f(x), y formar la diferencia de sus valores en b y en a:

$$\int_a^b f(x)dt = G(b) - G(a).$$

—Como la primitiva de la función $f(x)=x^2$ es la función $G(x)=\frac{1}{3}x^3$, y la primitiva de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es la función $G(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, —dijo Newton,— ya sabemos que

$$\int_0^1 x^2dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{3},$$

y que

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

Restando los dos valores, obtenemos el área delimitada por la hoja de álamo:

$$A_{hoja} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\,\text{plm}^2.$$

Anótalo:

el área que delimita la hoja de álamo es la tercera parte del cuadrado circunscrito, es decir, un tercio de palmo cuadrado.

¿Te gustó el método de Isaac Newton para calcular el área que encierra una curva? ¡Es ingenioso!, ¿verdad?.

—¡Le felicito! —exclamó Isaac Barrow al terminar Newton su exposición.— ¡De ahora en adelante no necesitaremos sumar infinitos rectángulos para conocer el área que delimita una curva! ¡Nos bastará con encontrar aquella función cuya derivada sea igual a nuestra curva!

De este modo el Teorema Fundamental del Cálculo formó parte de arsenal matemático.

EL VALIENTE PERSEO

Kornei Chukovski cuenta el mito de Perseo de este modo.

En cierta ciudad de la isla de Serifos sucedió una gran desgracia: de alguna parte llegó volando una mujer con alas, de nombre Medusa Gorgona. Caminaba lentamente por las calles, y cualquiera que la miraba, en el mismo instante se convertía en piedra.

En vez de cabellos Medusa Gorgona tenía largas serpientes negras que se movían y siseaban todo el tiempo.

Medusa fijaba su mirada silenciosa y triste en los ojos de cada transeúnte, y éste enseguida se convertía en una estatua. Y si un pájaro, volando en el cielo, miraba a Medusa Gorgona, caía a tierra como una piedra.

En la misma ciudad, dentro de un espléndido palacio vivía el rey Polidectes. Este rey era cobarde y tonto: tenía tanto miedo de Medusa Gorgona que huyó del palacio y se escondió con sus cortesanos en un sótano, profundamente bajo tierra.

—En este lugar puedo estar sin temer a Medusa Gorgona, —se decía riendo.— ¡Aquí ella nunca me encontrará!

En el sótano había mucho vino y comida. Todos los días el rey se sentaba a la mesa y se daba un banquete con sus cortesanos. ¿Qué le importaba que en la ciudad, allá arriba, las personas murieran una tras otra, sin poder salvarse de la cruel hechicera?

Afortunadamente, en esa ciudad vivía el valiente Perseo. Todos lo querían mucho, pues él nunca tenía miedo a nadie.

Cuando la espantosa Medusa caminaba por las calles, él no estaba en la ciudad. Pero una noche Perseo regresó, y los vecinos le contaron sobre Medusa Gorgona.

—¡Horrible bruja sin corazón! —exclamó él.— Iré a matarla.

Los vecinos movieron tristemente la cabeza y dijeron:

—Hubo muchos valientes que quisieron combatir a Medusa Gorgona, pero ninguno de ellos regresó: ella les convirtió a todos en piedras.

—¡Pero no puedo quedarme sentado, con los brazos cruzados! —dijo Perseo.— Ella va a exterminar a todas las personas de nuestra ciudad, a todos mis parientes y amigos. ¡Hoy mismo me vengaré de ella por sus malvados actos!

Y Perseo corrió por las calles preguntando a cada uno con quien se encontraba dónde vivía Medusa Gorgona.

Pero nadie le respondía. Cada uno lloraba sobre alguna piedra.

Por el camino Perseo echaba una mirada en cada casa: ¿no estará ahí Medusa Gorgona?

Pasando junto al sótano, pensó: "¡Tal vez, esté allí!" Bajó corriendo las escaleras... ¡y vio en el sótano al rey!

Polidectes estaba sentado delante de la mesa en su trono, y alegremente se daba un banquete con sus súbditos.

—¡Oye, tú! —gritó a Perseo.— ¡Espero que no hayas venido con las manos vacías! ¿Tal vez, deseas regalarme algunos peces exóticos? ¿O unas jugosas bayas y dulces frutos?

—¡No! —dijo Perseo.— No tengo nada —ni peces, ni frutos, ni bayas. Pero pronto te traeré un inapreciable regalo que alegrará tu corazón.

De la codicia al rey le brillaron los ojos.

—¡Querido joven! —dijo con voz amable.— Acércate un poco más y dime qué inapreciable regalo piensas hacerme. ¿Quizás, encontraste en el fondo del mar una perla, o una corona de oro?

—No, —respondió Perseo.— Mi regalo es más valioso que el oro, más valioso que las mejores perlas.

—Entonces ¿qué regalo es ése? ¡Dímelo!

—La cabeza de Medusa Gorgona, —contestó Perseo con voz sonora.— ¡Sí, te regalaré la cabeza de Medusa Gorgona! Yo mataré a esa malvada hechicera. ¡Yo salvaré de ella a mi ciudad!

El rey dio un puñetazo en la mesa:

—¡Vete de aquí, pobre loco! ¿Acaso no sabes que miles de mis guerreros más nobles trataron de aniquilar a Medusa, pero ella convirtió a muchos en piedras, y los demás huyeron de ella como de una fiera salvaje?

—¡Tus guerreros son tan cobardes como tú! —respondió Perseo con indignación.— Pero yo no tengo miedo a nadie. ¡Yo no correré de Medusa Gorgona! Y tú recibirás de mí su cabeza.

Se dio la vuelta y con pasos rápidos salió del sótano.

Olvidándose de todo el mundo, Perseo rezó a Atenea. La Diosa apareció ante él y le dijo:

—Medusa vive no muy lejos, al pie de una alta montaña junto al riachuelo. ¡Pero nadie puede vencerla si la mira!, pues antes se convertirá en piedra. Voy a hacer un escudo pulido que te servirá de espejo. Entonces podrás matar a Medusa viéndola por el espejo, sin mirarla directamente.

Y Atenea pidió al Dios herrero Hefesto que fabricara un escudo de bronce en forma de un cuadrado de 4 cuartas[4] por 4 cuartas.

—Su región central debe estar formada por todos los puntos cuya distancia al centro del escudo sea menor que la distancia a su borde, —le dijo.— Quiero que la pulas como un espejo. Solo así Perseo podrá matar a la horrible Medusa.

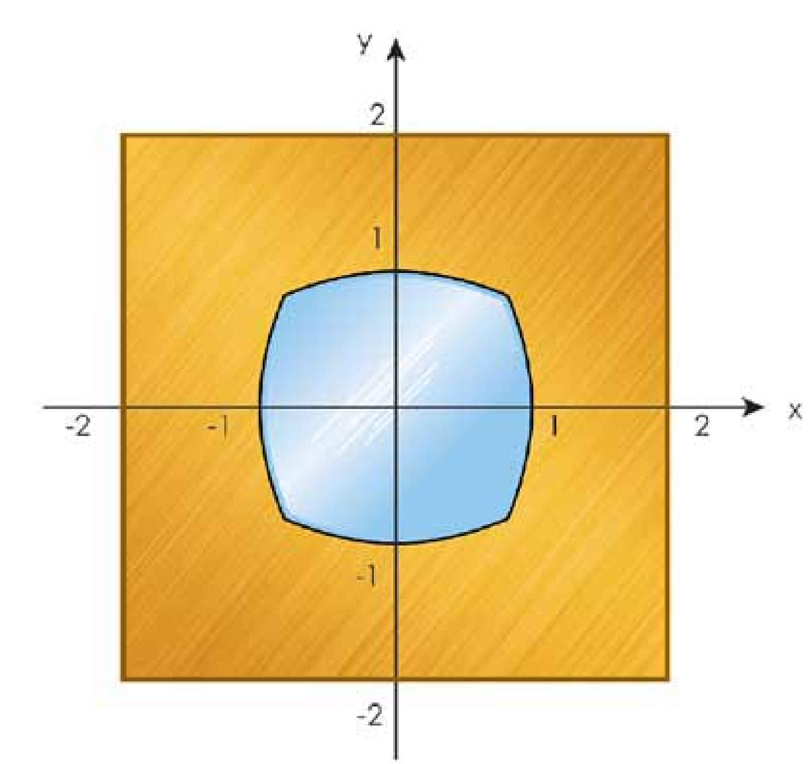
Hefesto se levantó y se dirigió al yunque. Puso en un arcón de plata las herramientas y, dirigiéndose a Atenea, dijo:

—¡Tendrás un escudo espléndido! Su área central será un espejo de 3 cuartas cuadradas y media.

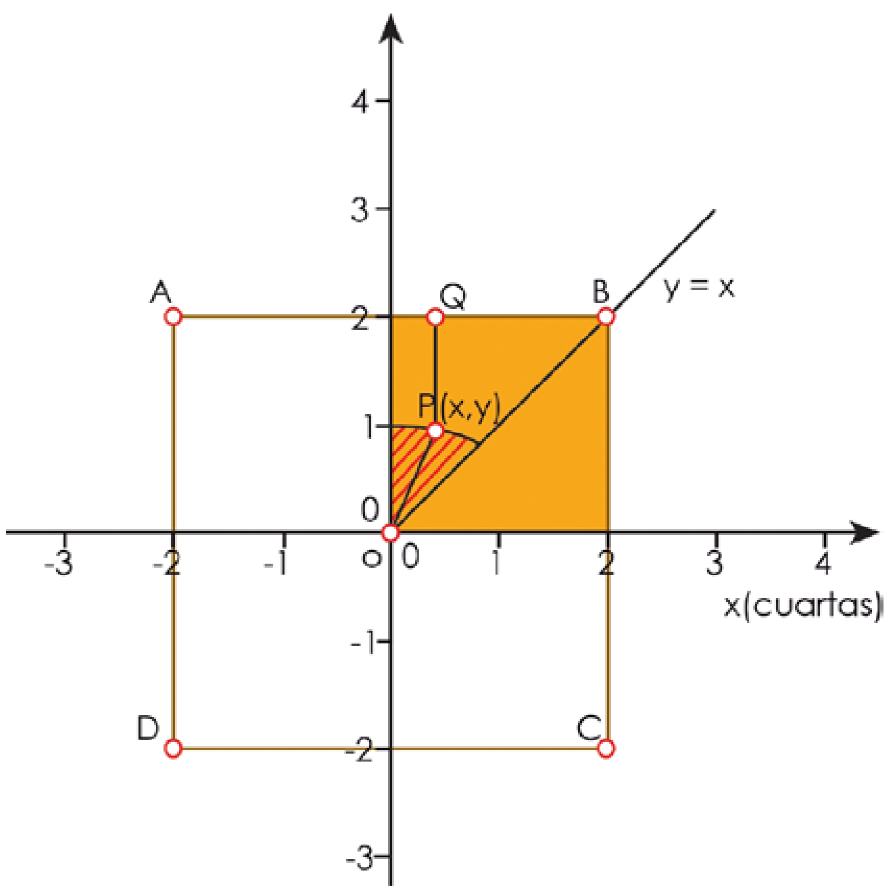
¿Estás de acuerdo con esta apreciación?

Deseas calcular el área central del siguiente escudo:

[4] Una cuarta mide 23 cm.



Por la simetría de la figura puedes calcular solamente la mitad del área del primer cuadrante:



Por la condición de Atenea puedes escribir:

$$PO = PQ.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2-y.$$

En otras palabras,

$$y = 1-\tfrac{x^2}{4}.$$

¡Es la ecuación del borde del espejo!

Determina ahora el punto de intersección de esta curva con la recta $y = x$:

$$x = 1-\tfrac{x^2}{4}.$$

En otros términos, la incógnita está escondida dentro de la ecuación

$$x^2+4x-4=0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, sabrás que

$$x = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Y, por supuesto, deberás tomar la raíz positiva:

$$x = -2+2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, el área del espejo será ocho veces el área encerrada entre la parábola $y = 1-\tfrac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$, entre $x = 0$ y $x = -2+2\sqrt{2}$. ¡Calcúlala!

$$A_{espejo} = 8\int_0^{-2+\sqrt{2}} \left(1-\tfrac{x^2}{4}-x\right)dx = 8\left[x-\tfrac{x^3}{12}-\tfrac{x^2}{2}\right]_0^{-2+\sqrt{2}} =$$

$$\tfrac{16}{3}(4\sqrt{2}-5) \simeq 3.5\,crt^2.$$

Anota tu respuesta:

la estimación de Hefesto es correcta: el área del espejo pulido será de 3.5 cuartas cuadradas.

¡El Cálculo Integral resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Con el escudo de Atenea, Perseo llegó a la alta montaña, y vio que en su pendiente, debajo de los árboles, entre piedras grises dormía con un sueño imperturbable la Medusa Gorgona.

Perseo desenvainó la espada y empezó a subir corriendo por las terrazas de la montaña. Levantó su escudo de bronce, reluciente y liso, y se miró en él como en un espejo. En el escudo se reflejaban los árboles y las piedras que estaban en la pendiente de la montaña. Y también se reflejaba una mujer dormida que tenía serpientes negras alrededor de la cabeza. Con la ayuda de su escudo Perseo logró ver a Medusa Gorgona sin mirarla.

Las alas de Medusa brillaban como un arco iris, y su rostro joven era tan hermoso, triste y pensativo, que Perseo sintió pena de matarla. Pero en ese momento vio que en la cabeza de Medusa empezaban a moverse las venenosas serpientes, recordó a cuántas personas inocentes mató esa malvada, cuántos niños, felices y alegres, convirtió en piedras muertas. Y con más fuerza que antes quiso aniquilarla con sus propias manos.

Mirando por el escudo, en el cual se reflejaba la Medusa, Perseo corrió hacia ella, y con un solo golpe de su espada cortó su horrible cabeza.

La cabeza voló a un lado y rodó hacia el riachuelo. Pero ni siquiera entonces Perseo la miró, porque ella aún lo podía convertir en piedra. Tomó su bolso, cocido de piel de cabra, echó en él la cabeza de Medusa, y corrió rápidamente por las montañas. Pronto llegó al desierto. La sangre de la cabeza de Medusa goteaba sobre la arena caliente, y cada gota se convertía en una serpiente. En el corazón de Perseo había alegría. ¡Muerta, Medusa Gorgona está muerta! ¡Nunca más hará daño a nadie!

Cuando llegó a la ciudad, el rey Polidectes aún estaba escondido en el sótano con sus cortesanos. Apenas vio a Perseo, se rió y vociferó:

—¡Ven acá, fanfaroncillo! A ver, ¿dónde está tu Medusa Gorgona? ¡Parece que es más fácil prometer que cumplir!

—Yo cumplí mi promesa, majestad, —dijo Perseo.— Te traje el maravilloso regalo, la cabeza de Medusa Gorgona. Pero es mejor que no la mires.

—¿Por qué no? —protestó el rey.— ¡Muéstramela! Yo no confío en ti. ¡Eres un farolero y un mentiroso!

—Su cabeza está aquí, en esta bolsa gris.

—¡Mientes, no te creo! —porfiaba el rey.— Allí tienes una calabaza común y corriente.

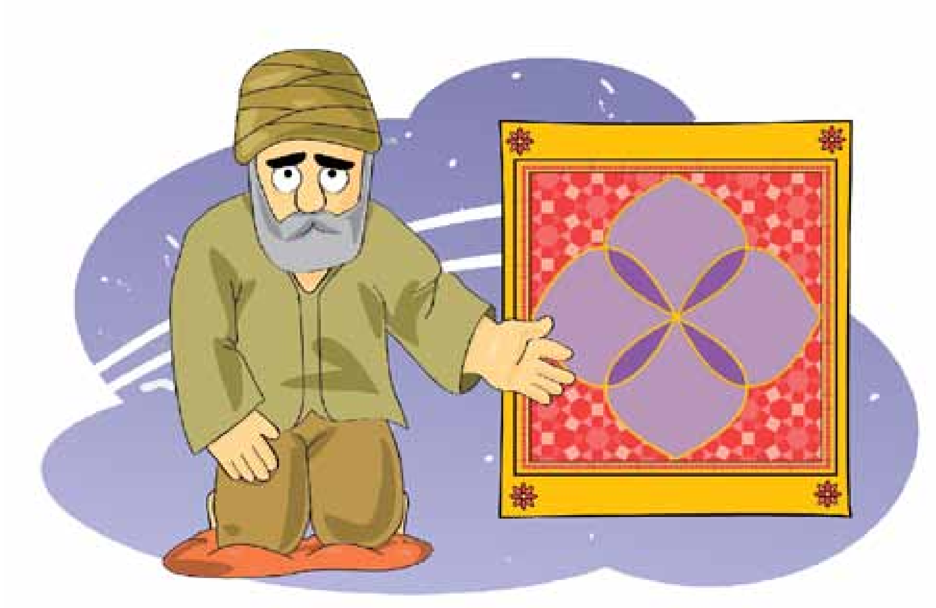
—¡Bueno, si no me crees, mírala! —gritó, riendo, Perseo.

Sacó del bolso la cabeza de Medusa Gorgona y, cerrando los ojos para no mirarla, la mostró al rey y a los cortesanos.

Todos quisieron levantarse y huir, pero no pudieron, y se quedaron paralizados en el sitio, convertidos en un montón de piedras.

Este mito te enseña que no se debe luchar contra el mal directamente. ¡Míralo por el Espejo de la Sabiduría! Es la única forma de derrotarlo.

LA FLOR DE LOTO



En cierta ocasión un Maestro Sufí indicó a sus discípulos la alfombra, en el centro de la cual había una flor de loto, y les preguntó:

—¿Qué me pueden decir acerca de esta flor de loto?

Ellos estuvieron contemplándola en silencio durante un rato.

Luego el primer discípulo dijo:

—Esta flor es bordada por un tejedor muy hábil.

El segundo discípulo respondió:

—Esta flor ocupa el 55 por ciento de la alfombra.

La alfombra medía 16 codos[5] por 16 codos, y los pétalos de la flor eran delimitados por la parábola

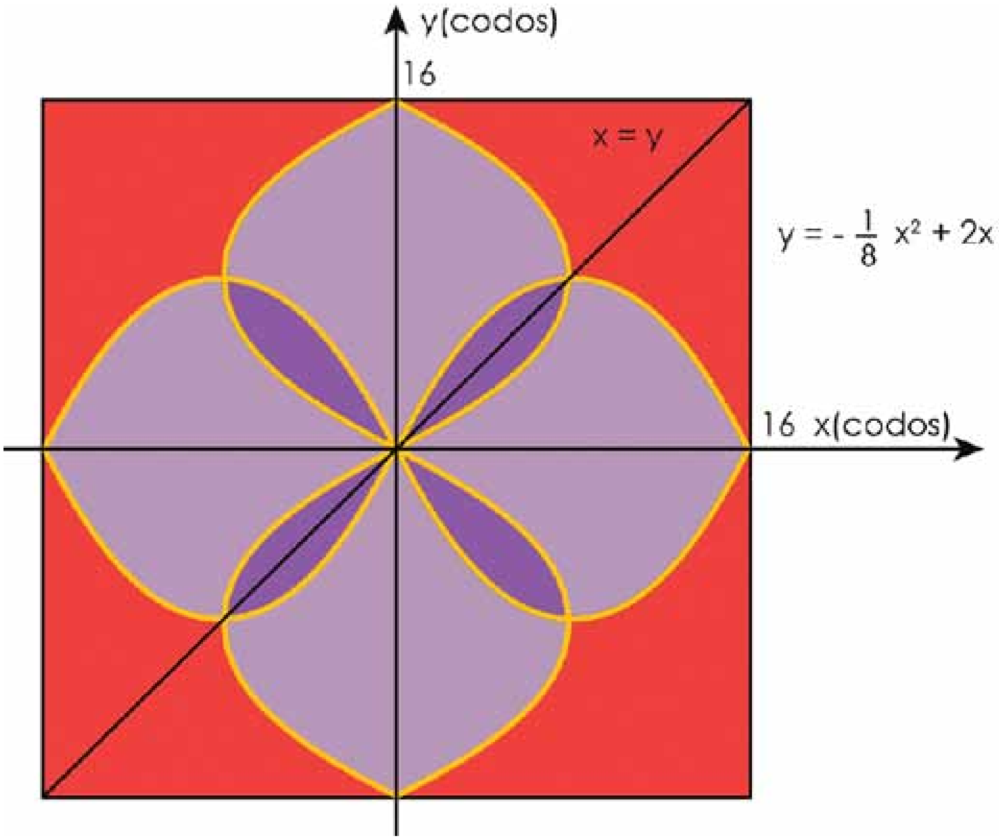
$$y = -\tfrac{1}{8}x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 8\,cd,$$

y por sus reflejos simétricos. ¿Crees que la apreciación del segundo discípulo es correcta?

Calcula el área de la intersección de los pétalos:

$$\tfrac{1}{2}A_{\text{interesección}} = \int_0^4 \left(-\tfrac{1}{8}x^2 + 2x - x\right)dx = \left[-\tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{x^2}{2}\right]_0^4 = \tfrac{32}{3}\,cd^2.$$

[5] Un codo mide 50 cm.



Entonces, el área de las cuatro intersecciones será el óctuplo de esta cantidad:

$$4A_{intereección} = \frac{256}{3}cd^2.$$

Ahora conoce el área que encierran los pétalos (las 8 parábolas):

$$A_{pétalos} = 16\int_0^4(-\tfrac{1}{8}x^2 + 2x)dx = 16[-\tfrac{1}{24}x^3 + x^2]_0^4 = \frac{2048}{3}cd^2.$$

Como el área de la flor de loto es la diferencia de las dos cantidades calculadas, obtendrás:

$$A_{flor\,de\,loto} = \frac{2048}{3} - \frac{256}{3} = \frac{1792}{3}cd^2.$$

¡Encuentra el porcentaje del área de la flor respecto de la alfombra!

$$\frac{A_{flor\,de\,loto}}{A_{alfombra}} = \frac{1792}{3} \div 32^2 = \frac{7}{12} \simeq 58.3\%.$$

Ésta es tu respuesta:

la flor de loto ocupa el 58.3% de la alfombra.

¡El Cálculo Integral resolvió el problema exitosamente!

El tercer discípulo dijo:

—Esta flor de loto solo existe cuando yo la miro.

El Maestro dijo:

—El primer discípulo vive en el cuerpo, el segundo en el intelecto, y el tercero en el corazón. El cuerpo ve lo obvio, el intelecto ve lo invisible; pero el corazón ve la unidad de todo lo que existe.

LOS TRES CAÑONAZOS

Un cañón se enorgullecía de dividir, con el vuelo de sus balas, el espacio en dos partes.

En cierta ocasión disparó tres cañonazos con una velocidad inicial de 50 metros por segundo: el primero bajo el ángulo de 30 grados, el segundo bajo el ángulo de 45 grados, y el tercero bajo el ángulo de 75 grados. Cuando se restableció el silencio, preguntó:

—¿Cuál de las tres balas delimitó la mayor área?

Pero nadie le respondió.

¿Puedes decirlo tú?

Como recordarás de la física, el movimiento horizontal de una bala se describe por la ecuación

$$x = (v_0 \cos\theta)t,$$

y el movimiento vertical por la ecuación

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta t - \frac{1}{2}\cdot 9.8t^2,$$

si x e y se miden en metros y t en segundos. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que describe la bala? Despeja t de la primera ecuación:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta},$$

y reemplaza su expresión en la segunda:

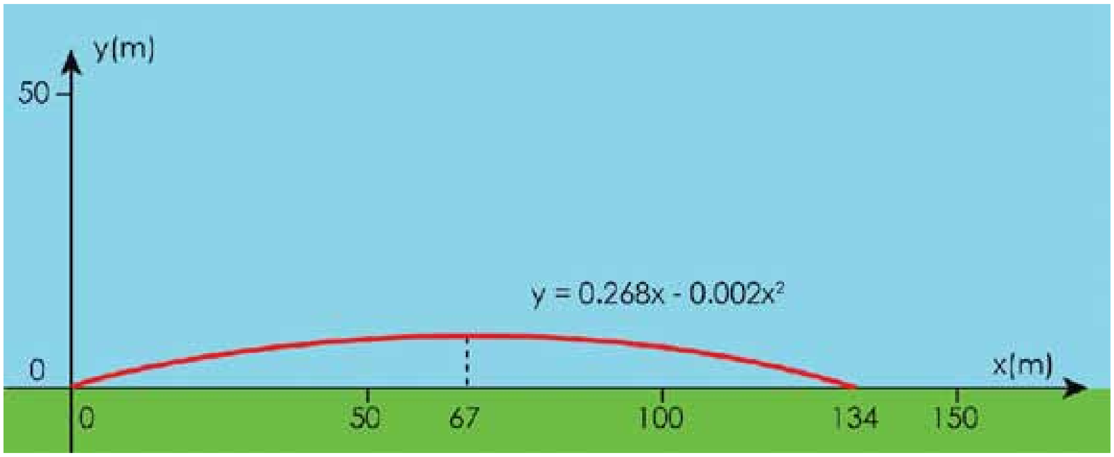
$$y = tg\theta \cdot x - 4.9 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}.$$

¡Esta es la ecuación de cada una de las tres parábolas! Explicítala en los tres casos.

En el primer caso conocerás que la trayectoria de la bala es

$$y = tg15° \cdot x - 4.9 \frac{x^2}{2500 \cos^2 15°} \simeq 0.268x - 0.002x^2,$$

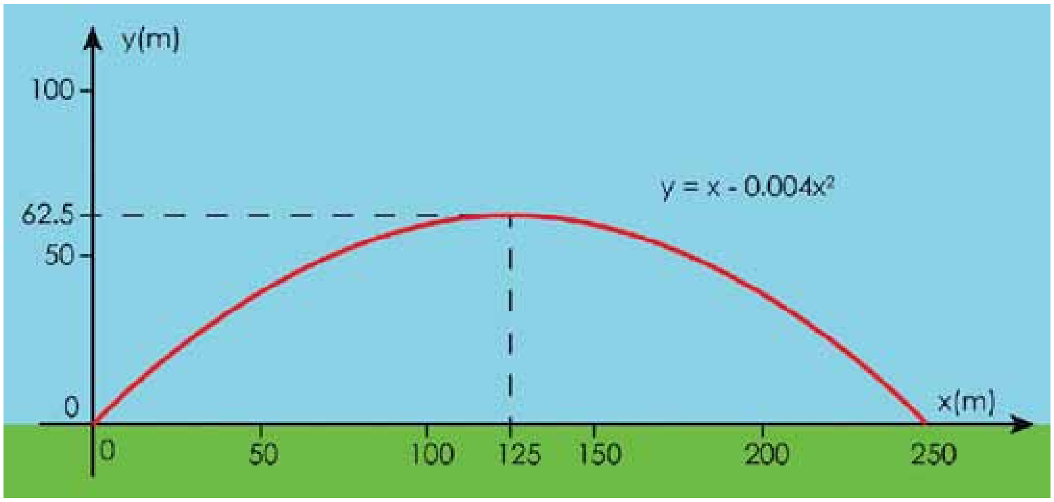
desplazándose la bala desde $x = 0$ hasta $x = 134$ metros.



En el segundo caso

$$y = tg45° \cdot x - 4.9 \frac{x^2}{2500 \cos^2 45°} \simeq x - 0.004x^2,$$

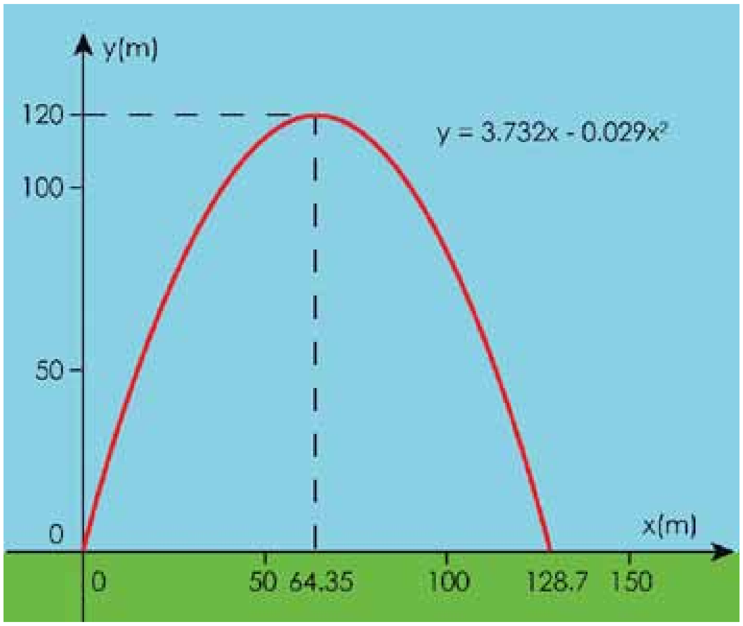
desplazándose la bala desde $x = 0$ hasta $x = 250$ metros.



Y en el tercer caso la trayectoria es la siguiente:

$$y = tg75^\circ \cdot x - 4.9\frac{x^2}{2500\cos^2 75^\circ} \simeq 3.732x - 0.029x^2,$$

desplazándose la bala desde $x = 0$ hasta $x \simeq 128.7$ metros.



¡Ahora calcula cada una de sus áreas!

En el primer caso el área se determina como la siguiente integral:

$$A = \int_0^{134} (0.268x - 0.002x^2)dx = \left[\frac{0.268}{2}x^2 - \frac{0.002}{3}x^3\right]_0^{134} \simeq 802\,m^2.$$

En el segundo caso la integral es ésta:

$$A = \int_{0}^{250} (x - 0.004x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{0.004}{3}x^3\right]_0^{250} \simeq 10417\,m^2.$$

Y en el tercero ésta:

$$A = \int_{0}^{128.7} (3.732x - 0.029x^2)dx = \left[\frac{3.732}{2}x^2 - \frac{0.029}{3}x^3\right]_0^{128.7} \simeq 10301\,m^2.$$

Anota tus respuestas:

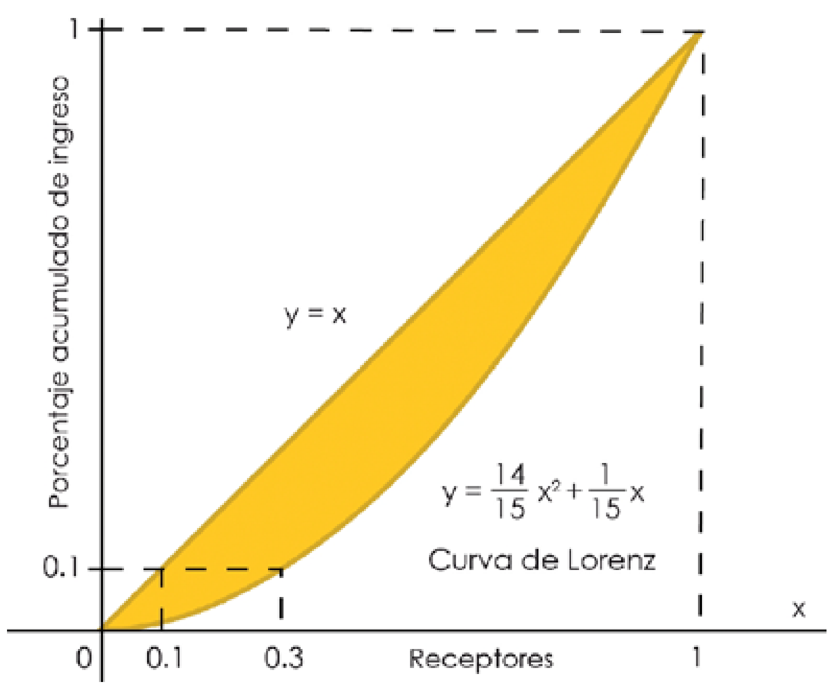
> la primera bala delimitó 802 metros cuadrados, la segunda 10417 metros cuadrados, y la tercera 10301.

¡El Cálculo Integral determinó las tres áreas de manera brillante!, ¿verdad?.

—Es cierto que cada una de las tres balas separó un área, —dijo el búho que estaba en la copa de un árbol.— ¡Pero el espacio sigue entero! Incluso cuando pasa una estrella fugaz, el cielo permanece indiviso. ¡Qué decir de una bala!

LA CURVA DE LORENZ

Max Lorenz, un economista estadounidense, ideó la siguiente representación de la distribución de la riqueza en la sociedad:



Consideraba que la igualdad en la distribución de ingresos se conseguiría en la recta

$$y = x.$$

Así, por ejemplo, el 10% de la gente debería recibir el 10% del ingreso total, el 20% de la gente debería recibir el 20% del ingreso total, etc.

—Pero, lamentablemente, —decía,— la distribución real dista mucho de la distribución ideal. En vez de definirse por la recta de la igualdad, se define por la siguiente parábola:

$$y = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x.$$

¡De este modo, el 30% de la gente solo recibe el 10.4% del ingreso total! Lorenz definió el coeficiente de desigualdad como el área que existe entre la parábola y la recta, dividida para el área debajo de la recta:

$$\textit{Coeficiente de desigualdad} = \frac{\text{el área entre la parábola y la recta}}{\text{el área debajo de la recta}}.$$

¿Puedes decir qué valor tiene el coeficiente de desigualdad?

¡Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo! Averiguarás que

$$A_{\text{entre la parábola y la recta}} = \int_0^1 (x - (\tfrac{14}{15}x^2 + \tfrac{1}{15}x))dx =$$

$$\int_0^1 (-\tfrac{14}{15}x^2 + \tfrac{14}{15}x))dx = [-\tfrac{14}{45}x^3 + \tfrac{7}{15}x^2]_0^1 = \tfrac{7}{45}.$$

Y también sabrás que

$$A_{\text{bajo la recta}} = \int_0^1 x dx = [\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = \tfrac{1}{2}.$$

Ahora calcula el cociente entre estas dos cantidades:

$$\frac{A_{\text{entre la parábola y la recta}}}{A_{\text{bajo la recta}}} = \frac{7}{45} \div \frac{1}{2} = \frac{14}{45} \simeq 0.3111\ldots.$$

Anota tu respuesta:

> el coeficiente de desigualdad en la distribución de ingresos es de 0.311.

¡El Teorema Fundamental del Cálculo resolvió el problema brillantemente!

Lorenz muchas veces se preguntaba por la razón de esta desigualdad. “¿Por qué unos reciben más y otros menos? —pensaba.— ¿No deberíamos todos ser igualmente ricos?”

Lorenz tenía dos tíos: ambos habían sido pobres en su juventud, pero luego uno de ellos llegó a ser un rico comerciante, mientras que el otro seguía siendo pobre. Para la sorpresa de Lorenz, el tío rico se volvió aburrido y falto de vida, mientras que el otro estaba lleno de vitalidad.

—Me mantiene emocionado mi esperanza, —solía decir el tío pobre.— ¡Algún día llegaré a ser rico!

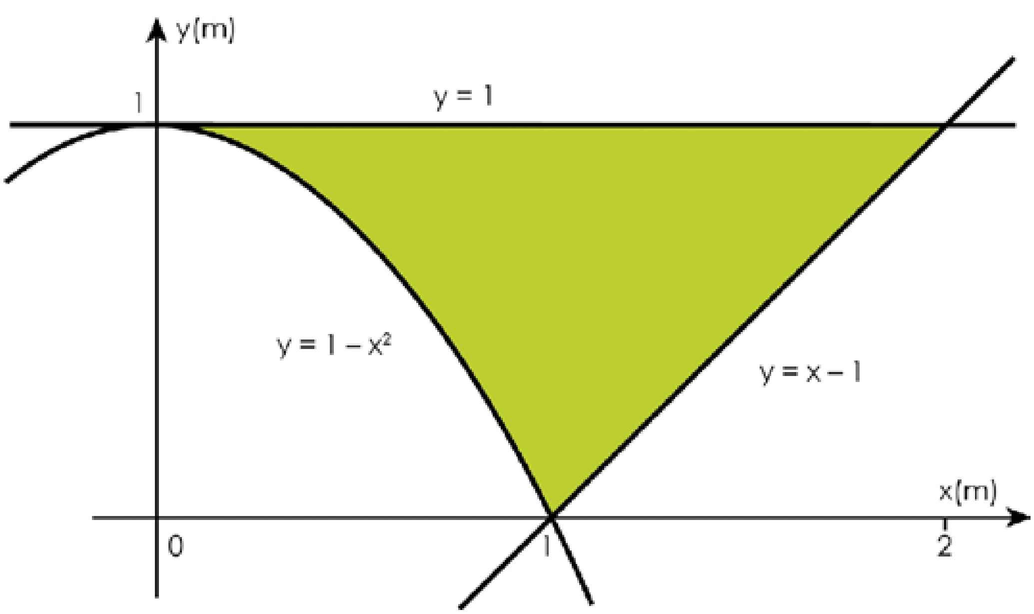
“Ser pobre no es malo, —comprendió Lorenz.— Nos inyecta alegría, y eso, sin lugar a dudas, es algo muy valioso. ¿De qué sirve ser rico y triste?”

La alegría pertenece a aquellos que aún no han alcanzado su meta.

UNA LECCIÓN PARA LEIBNIZ

En cierta ocasión Gottfried Leibniz soñó que un ángel le preguntaba:

—Si trazas la parábola $y = 1 - x^2$ y las rectas $y = 1$, $y = x - 1$, ¿qué área delimitarán?



—Es una pregunta muy simple, —contestó Leibniz inmediatamente:— delimitarán $\frac{5}{6}$ de unidad cuadrada.

¿Estás de acuerdo con esta apreciación?

¡Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo! Sabrás que

$$A_{buscada} = \int_0^1 (1-(1-x^2)dx + \int_1^2 (1-(x-1))dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[2x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{1}{3} + 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{6}.$$

Anota tu respuesta:

las tres curvas delimitan cinco sextos de unidad cuadrada.

¡El Teorema Fundamental del Cálculo resolvió el problema exitosamente!, ¿no te parece?.

—¡No es cierto! —exclamó el ángel, muy contento de que el gran matemático se haya equivocado en la respuesta.— ¡Las tres curvas no delimitarán ningún área!

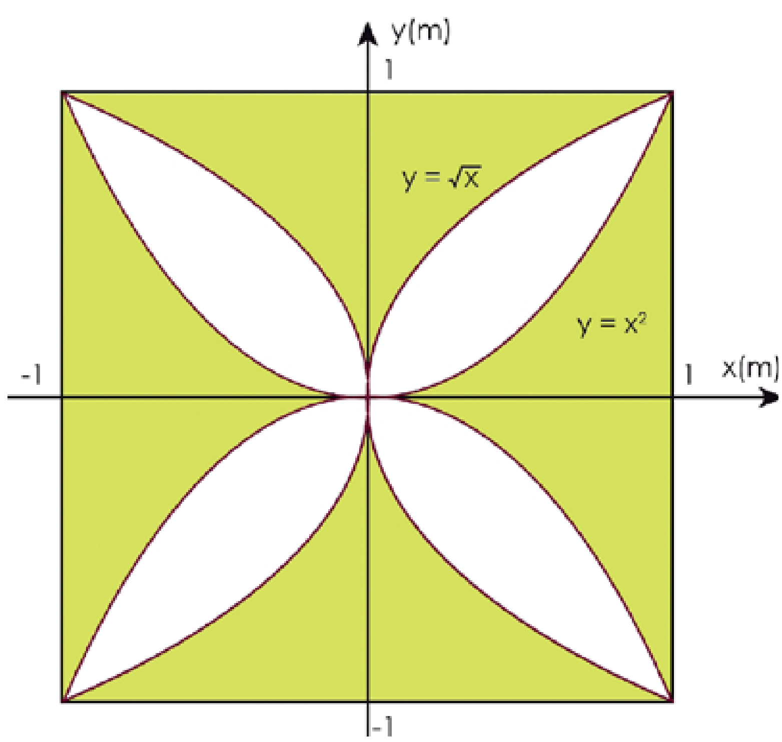
—¿Por qué dices eso? —se asombró Leibniz.

—Porque el área total del plano sigue siendo infinita, —ponderó el ángel.— No tiene sentido hablar del área interior sin mencionar el área exterior. Y, como puedes ver, juntas las dos áreas forman el plano infinito.

Leibniz despertó sudando frío.

¿HAY SUFICIENTE PINTURA?

Dentro de un panel cuadrado de 2 metros por 2 metros, deseas pintar de color rojo esta flor:



Sus pétalos son delimitados por las parábolas

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x},$$

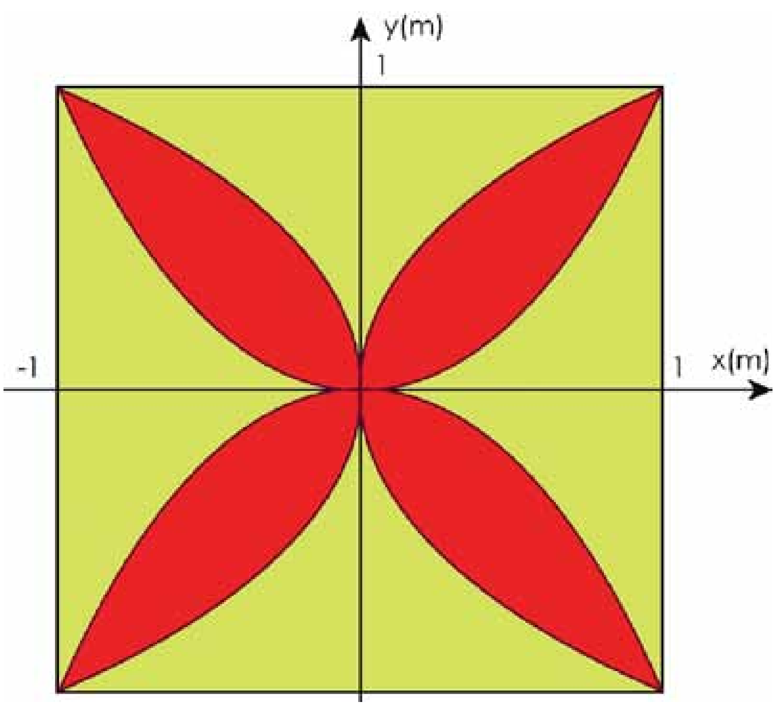
y por sus reflejos simétricos. Dispones de un tarro de pintura suficiente para cubrir un área de 1.5 metros cuadrados. ¿Crees que te alcance la pintura para realizar el trabajo?

¡Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo! Sabrás que

$$A_{flor} = 4\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = 4\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,m^2.$$

Como esta cantidad es menor que 1.5 metros cuadrados, puedes anotar tu respuesta:

hay suficiente pintura para realizar el trabajo.



¡El Teorema Fundamental del Cálculo te ayudó a salir de dudas!, ¿verdad?.

LOS JUEGOS OLÍMPICOS

Víctor y Pablo miraban por la televisión la iniciación de los Juegos Olímpicos.

—¿Sabías que el lema olímpico es “Más rápido, más alto, más fuerte”? —preguntó Víctor al amigo.

—¡Sí! —suspiró Pablo.— ¡Es fácil para alguien que ama el deporte! ¿Pero cómo se vuelve más rápido y más fuerte alguien que ama las matemáticas?

Decía así porque los amigos habían decidido dedicar su vida al estudio de esa antigua ciencia.

—¡Muy fácil! —exclamó Víctor.— La matemática también nació en Grecia, igual que los Juegos Olímpicos, y en este mismo instante podemos realizar una Olimpiada Matemática.

—¿Una Olimpiada Matemática? ¿Cómo?

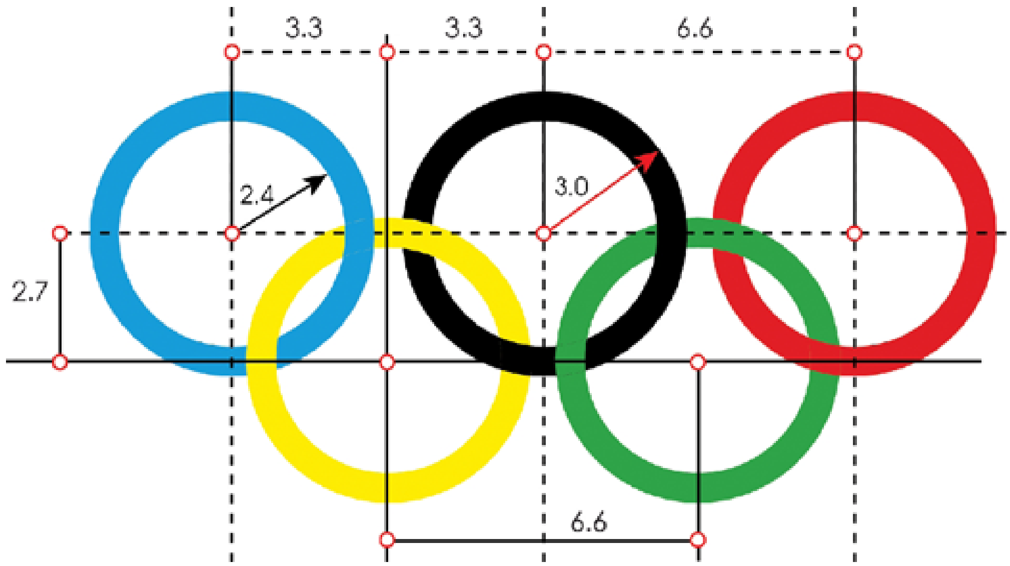
—Por ejemplo, ¿conoces qué área ocupa la intersección de dos anillos entrelazados en la bandera olímpica? —preguntó Víctor.

—¡No tengo idea!

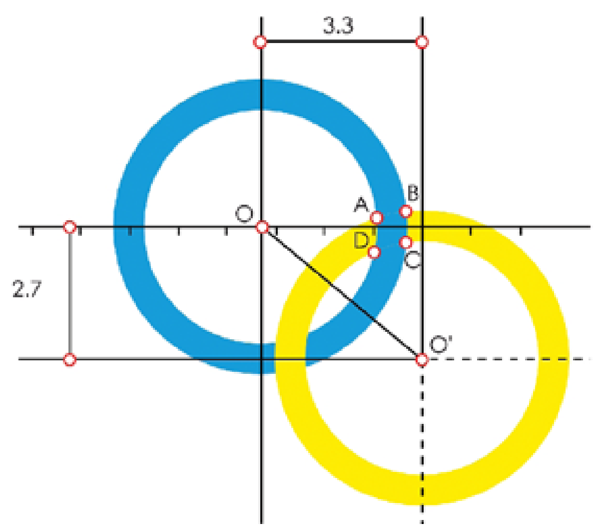
—¡Entonces, descubrámoslo! —propuso Víctor.— Será un interesante ejercicio para la mente.

Y los dos amigos se pusieron a calcular. ¡Ayúdales en esta difícil tarea, por favor!

La posición de los anillos olímpicos en la bandera es la siguiente:



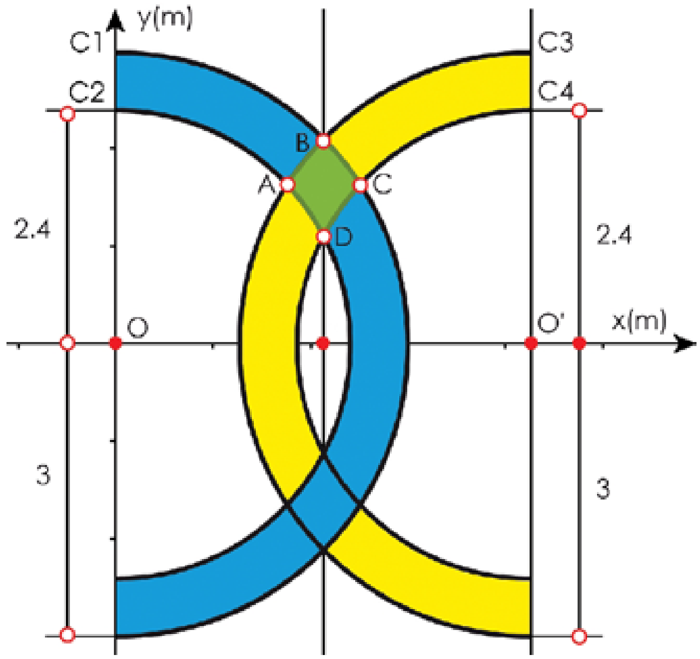
(Las medidas están dadas en metros). Lo que quieres conocer es el área del trapecio curvilíneo $ABCD$.



La distancia OO' te revela su valor:

$$OO' = \sqrt{2.7^2 + 3.3^2} = 0.3\sqrt{202} \simeq 4.264\,\text{m}.$$

Elige los ejes de las coordenadas de esta manera:



Entonces, los círculos C_1, C_2, C_3 y C_4 obedecerán a las siguientes ecuaciones:

$$C_1: \; x^2 + y^2 = 3^2,$$

$$C_2: \; x^2 + y^2 = 2.4^2,$$

$$C_3: \; (x - 4.264)^2 + y^2 = 3^2,$$

$$C_4: \; (x - 4.264)^2 + y^2 = 2.4^2.$$

¡Determina las coordenadas de los vértices A, B, C y D del trapecio que te interesa!

El punto A se encuentra en la intersección de los círculos C_2 y C_3:

$$y^2 = 2.4^2 - x^2 = 3^2 - (x - 4.264)^2.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, sabrás que

$$A \simeq (1.752, 1.640).$$

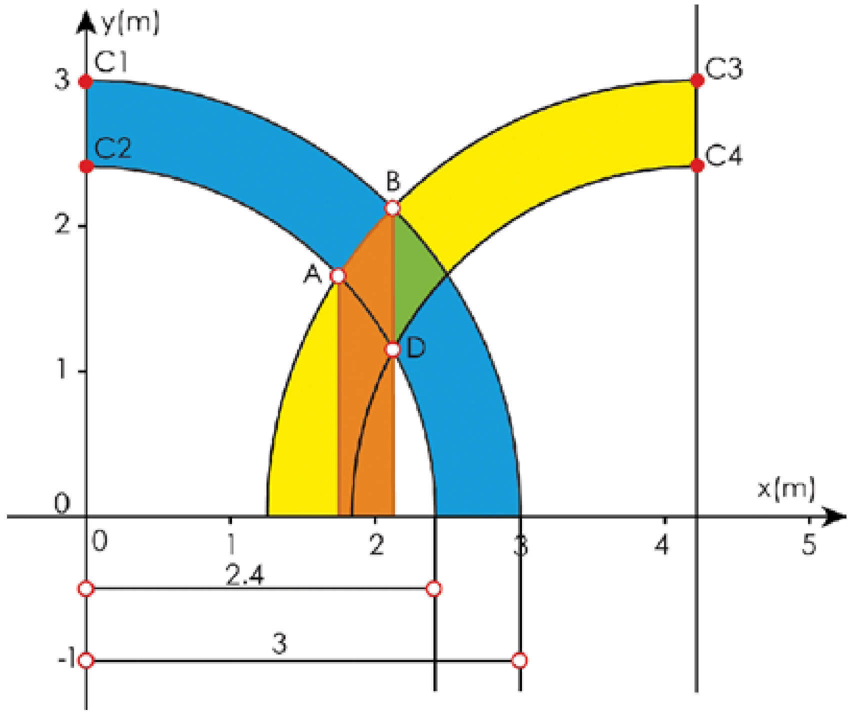
Del mismo modo averiguarás que las coordenadas del vértice B son las siguientes:

$$B \simeq (2.132, 2.111).$$

Como el trapecio $ABCD$ es simétrico respecto de la recta BD, ¡calcula el área del triángulo curvilíneo ABD que constituye su mitad!

Puedes ver que

$$A_{ABD} = \int_{x_A}^{x_B} (C_3 - C_2)dx.$$



Es decir,

$$A_{ABD} = \int_{1.752}^{2.132} (\sqrt{9-(x-4.264)^2} - \sqrt{5.76 - x^2})dx.$$

¡Calcula el valor de esta integral!

Se trata de restar dos integrales de tabla. El minuendo es igual a

$$\int \sqrt{9-(x-4.264)^2}\, dx =$$

$$\tfrac{1}{2}(x-4.264)\sqrt{9-(x-4.264)^2} + \tfrac{9}{2}\operatorname{arcsen}(\tfrac{x-4.264}{3}),$$

y el sustraendo a

$$\int \sqrt{5.76 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{5.76 - x^2} + \frac{5.76}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2.4}\right).$$

Ya puedes conocer el valor que te interesa:

$$A_{ABD} \simeq \int_{1.752}^{2.132} \left(\sqrt{9-(x-4.264)^2} - \sqrt{5.76 - x^2}\right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x - 4.264)\sqrt{9-(x-4.264)^2} + \frac{9}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-4.264}{3}\right)\right]_{1.752}^{2.132} -$$

$$\left[\frac{1}{2} x \sqrt{5.76 - x^2} + \frac{5.76}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2.4}\right)\right]_{1.752}^{2.132} \simeq 0.1878\, m^2.$$

Por lo tanto, el área que ocupa la intersección de los dos aros en la bandera olímpica abarca el doble de este valor:

$$A_{ABCD} \simeq 0.3756\, m^2 = 3756\, cm^2.$$

Anota tu respuesta:

> la intersección de cada par de anillos en la bandera olímpica ocupa 3 metros cuadrados con 756 centímetros cuadrados.

¡Las técnicas de integración resolvieron el problema brillantemente!, ¿verdad?.

La matemática es un excelente ejercicio para que tu mente se vuelva más inteligente, más rápida, más fuerte.

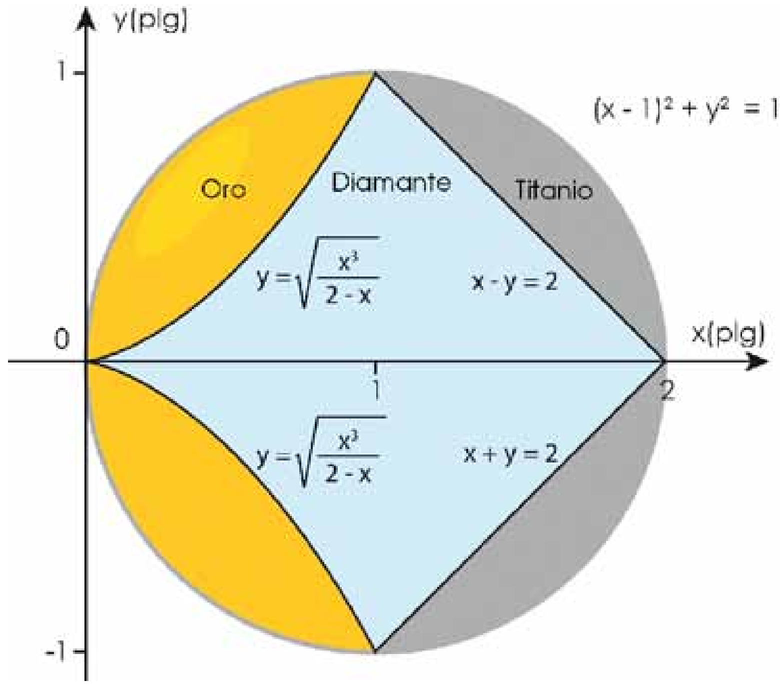
EL REMEDIO PARA LA TRISTEZA

Hace mucho tiempo vivía un rey que amaba a su esposa. Pero un día la reina se sintió triste, y ninguna medicina lograba sanarla de ese mal.

—¿Qué puedo hacer para que la reina vuelva a ser alegre? —preguntó el rey a sus consejeros.

—Si su majestad le regala una joya elaborada de oro, titanio y diamante, la reina se aliviará del mal que le acosa, —dijo el consejero principal.— Porque el oro nunca se oxida, el titanio nunca se corroe, y el diamante es tan duro que corta incluso el vidrio. Al mirar la joya, la reina descubrirá en su interior aquello que nunca se oxida y nunca se corroe. ¡Entonces, su tristeza desaparecerá para siempre!

El rey pidió al orfebre que elaborara una medalla de oro, titanio y diamante. Las curvas de su unión debían obedecer las siguientes ecuaciones:



—De este modo el titanio ocupará el 15%, el oro el 25%, y el diamante el 60% de la medalla, —se dijo el rey.

¿Estás de acuerdo con esta apreciación?

¡Calcula el área de cada uno de los preciosos metales y piedras!

El área que ocupará el oro se encuentra dentro de la siguiente integral:

$$A_{oro}=2\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-2\int_0^1\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}\,dx.$$

El área que ocupará el titanio se halla dentro de la integral

$$A_{titanio}=2\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-2\int_1^2(2-x)dx.$$

¡El resto de la medalla pertenecerá al diamante! Solo necesitas conocer estas tres primitivas:

$$\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx,\quad \int\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}\,dx,\quad \int(2-x)dx.$$

¡Calcúlalas por separado!

Para la primera primitiva usa el cambio de variable

$z = x - 1.$

Se obtiene una integral de tabla:

$$\int \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \int \sqrt{1-z^2}\,dz = \tfrac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \tfrac{1}{2}\text{arcsen}z =$$

$$\tfrac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \tfrac{1}{2}\text{arcsen}(x-1).$$

Por lo tanto,

$$2\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = 2\Big[\tfrac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \tfrac{1}{2}\text{arcsen}(x-1)\Big]_0^1 =$$

$$2(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Para la segunda integral usa el cambio de variable

$z^2 = x.$

Se obtiene la siguiente integral:

$$\int \sqrt{\tfrac{x^3}{2-x}}\,dx = 2\int \frac{z^4}{\sqrt{2-z^2}}dz.$$

Te conviene este cambio de variable:

$z = \sqrt{2}\,\text{sen}t.$

Tu integral adquiere la siguiente forma:

$$2\int \frac{z^4}{\sqrt{2-z^2}}dz = 8\int \text{sen}^4 t dt = 8\int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t)^2 t dt =$$

$$3t - 2\text{sen}2t + \tfrac{1}{4}\text{sen}4t.$$

Por consiguiente,

$$-2\int_0^1 \sqrt{\tfrac{x^3}{2-x}}\,dx = -2[3t - 2\text{sen}2t + \tfrac{1}{4}\text{sen}4t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 - \tfrac{3\pi}{2}.$$

Entonces, ya conoces el área que ocupará el oro:

$$A_{oro} = \frac{\pi}{2} + (4 - \frac{3\pi}{2}) = 4 - \pi \simeq 0.8584\,plg^2.$$

La tercera primitiva se calcula de modo directo:

$$\int (2-x)dx = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$A_{titanio} = 2\int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx - 2\int_1^2 (2-x)dx =$$

$$2\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}(x-1)\right]_1^2 - 2\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}) - 2((4-2)-(2-\frac{1}{2})) = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0.571\,plg^2.$$

Y también conoces el área que ocupará el diamante:

$$A_{diamante} = \pi \cdot 1^2 - (4-\pi) - (\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{3}{2}\pi - 3 \simeq 1.7124\,plg^2.$$

En cuanto a la totalidad de la medalla, el oro ocupará el 27%:

$$\frac{A_{oro}}{A_{medalla}} = \frac{0.8584}{\pi} \simeq 27\%,$$

el titanio el 18%:

$$\frac{A_{titanio}}{A_{medalla}} = \frac{0.571}{\pi} \simeq 18\%,$$

y el diamante, los restantes 65%. Anota tu respuesta:

> la estimación del rey es bastante precisa: el titanio ocupará el 18% de la totalidad de la medalla, el oro el 27%, y el diamante, los restantes 65%.

¡Las técnicas de integración resolvieron el problema brillantemente!, ¿verdad?.

El rey obsequió la medalla a su esposa diciéndole:

—¡Mi reina! El oro nunca se oxida, el titanio nunca se corroe, y el diamante es tan duro que corta incluso el vidrio. Quiero que esta medalla te ayude a descubrir en tu interior aquello que representan estos preciosos elementos.

La reina meditó en las palabras del rey, y pronto su tristeza desapareció por completo.

—¿Qué es lo que nunca se oxida? —le preguntó el rey.

—La Conciencia, —respondió la reina.

—¿Qué es lo que nunca se corroe?

—La Conciencia.

—¿Y qué es tan duro que corta incluso el vidrio?

—La Conciencia.

Lo que nos entristece es olvidar que somos Eternos.

EL GIGANTE Y EL ENANO

Cuando los gigantes Danavas habían conquistado casi todos los reinos y dominios de los Dioses, éstos pidieron auxilio a Visnú. El Dios accedió a ayudarlos y reencarnó en la Tierra bajo la forma de un enano de nombre Vamana.

Vamana se dirigió al campamento de Bali, el jefe de los ejércitos de los Danavas, y solicitó audiencia.

—¿Qué has venido a hacer aquí, hombrecillo? —preguntó el gigante.

—Quiero averiguar hasta dónde llega tu generosidad, —respondió el enano descaradamente.— ¿Puedes concederme lo que quiero? ¿O careces de poder para hacerlo?

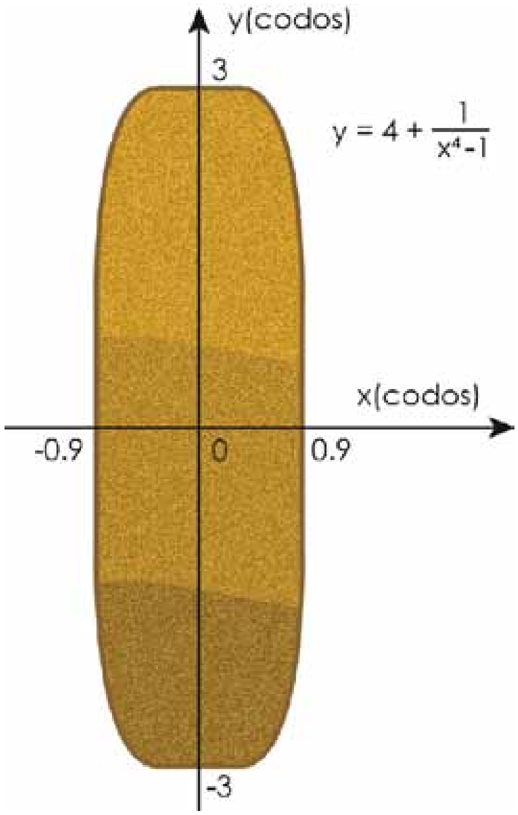
—Soy el señor de los tres mundos: Tierra, Cielos y Paraíso, —rugió Bali, divertido.— Puedo darte todo lo que yo quiera. Pide lo que desees.

—Entonces, concédeme el territorio que yo pueda recorrer en tres pasos.

Bali se echó a reír:

—¡Qué terreno tan escaso podrás recorrer en tres pasos, si todo tú caves dentro de esta curva!

Y dibujó esto:



¿A cuánto crees que asciende la estimación de Vamana por Bali? En otras palabras, ¿cuántos codos[6] cuadrados encierra la curva que trazó el jefe de los ejércitos de los gigantes?

¡Calcula la primitiva de la curva usando la técnica de descomposición en fracciones simples! Ésta consiste en descomponer el denominador de una función racional en factores lineales o cuadráticos irreducibles, y luego integrarlos por separado. En el caso que te interesa la descomposición tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

¡Encuentra los valores de A, B, C y D!

Hallando el denominador común, te resultará lo siguiente:

[6] Un codo mide 50 cm.

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Esto significa que los numeradores deben ser iguales entre sí:

$$A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)=1.$$

Desarrollando, averiguarás que

$$Ax^3-Ax^2+Ax-A+Bx^3+Bx^2+Bx+B+Cx^3+Dx^2-Cx-D=1.$$

Es decir,

$$A+B+C=0,\quad -A+B+D=0,\quad A+B-C=0,\quad -A+B-D=1.$$

De aquí deducirás fácilmente que

$$A=-\tfrac{1}{4},\quad B=\tfrac{1}{4},\quad C=0,\quad D=-\tfrac{1}{2}.$$

¡Ya puedes integrar!

Necesitas calcular las siguientes tres primitivas:

$$\int\frac{1}{x^4-1}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}.$$

La primera es un logaritmo:

$$-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx=-\frac{1}{4}\ln(1+x),$$

y también lo es la segunda:

$$\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx=\frac{1}{4}\ln(x-1).$$

La tercera primitiva es un arco tangente:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Entonces, ya conoces el resultado:

$$A_{curva}=4\int_0^{0.9}\left(4+\frac{1}{x^4-1}\right)dx=$$

$$[16x - \ln(1+x) + \ln\ |x-1|\ - 2\operatorname{arctg} x]_0^{0.9} = 9.9899 \simeq 10\, cd^2.$$

Anota tu respuesta:

la curva que trazó Bali delimita cerca de 10 codos cuadrados.

¡El método de fracciones simples resolvió el problema de manera simple!, ¿verdad?.

Bali dejó de reír cuando Vamana dio una zancada con la que atravesó toda la Tierra, una segunda con la que recorrió los Cielos de punta a punta, y una tercera que le llevó de un extremo a otro del Paraíso. A Bali no le quedaron más que las regiones del Infierno, adonde se retiró, comprendiendo que había sido derrotado honrosamente por alguien más poderoso que él.

Privados de la dirección de Bali, los demás Danavas pronto fueron vencidos por los Dioses.

Y Visnú pudo volver a descansar sobre los anillos de la serpiente Vasuki, flotando apaciblemente sobre el gran Océano Cósmico.

EL ESPEJO DE LA LONGEVIDAD

Un sultán preguntó a su astrólogo:

—¿Cuántos años viviré?

El astrólogo miró la bola mágica y contestó:

—La cantidad de decímetros cuadrados que caben en su espejo, majestad.

El sultán llamó de inmediato al matemático de la corte:

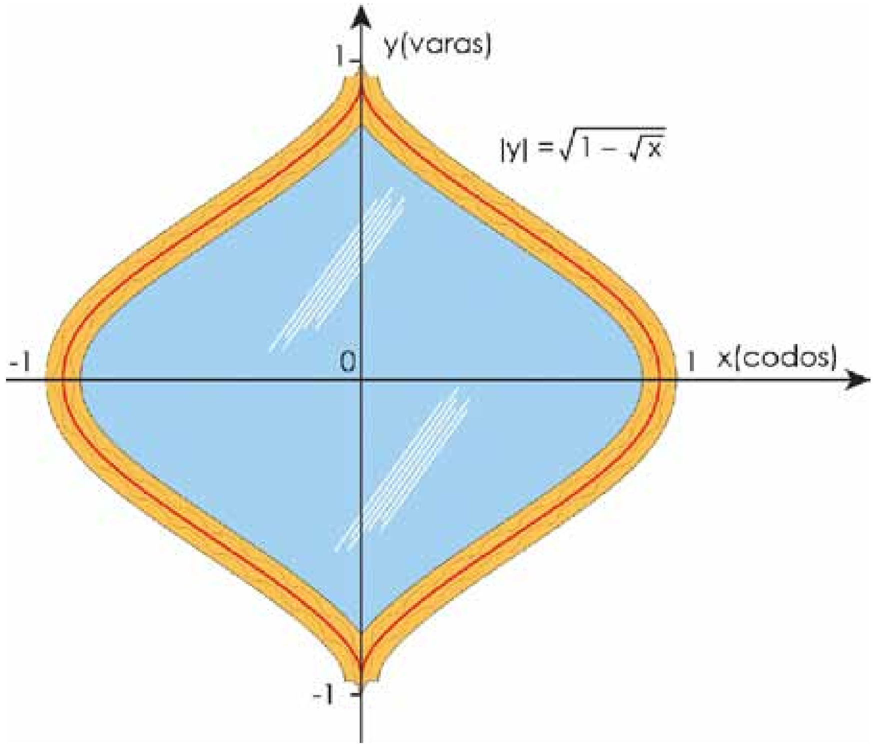
—¿Cuántos decímetros cuadrados hay en mi espejo?

El matemático hizo las mediciones pertinentes, averiguando que el espejo tenía los contornos

$$|y| = \sqrt{1-\sqrt{|x|}}, \quad -1 \leq x \leq 1\,codo,$$ [7]

y en seguida se puso a calcular. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

[7] Un codo mide 5 dm.



Es suficiente que consideres la cuarta parte del espejo, por ejemplo, la parte que pertenece al primer cuadrante. Aquí la ecuación de su contorno es la siguiente:

$$y = \sqrt{1-\sqrt{x}}\ , \quad 0 \le x \le 1cd.$$

Entonces, te interesa calcular la siguiente integral:

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\ dx.$$

Realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = cos^4\theta, \quad dx = -4sen\theta \cdot cos^3\theta d\theta.$$

Tu integral adquiere la siguiente forma:

$$A = -4\int \sqrt{1-\sqrt{cos^4\theta}}\ sen\theta \cdot cos^3\theta d\theta =$$

$$-4\int \sqrt{1-cos^2\theta}\, sen\theta \cdot cos^3\theta d\theta = -4\int sen^2\theta \cdot cos^3\theta d\theta =$$

$$-4\int(1-cos^2\theta)\cdot cos^3\theta d\theta = 4\int(cos^5\theta - cos^3\theta)d\theta =$$

$$4\int cos^5\theta d\theta - 4\int cos^3\theta d\theta = 4\int cos^4\theta \cos\theta d\theta - 4\int cos^2\theta \cos\theta d\theta =$$

$$4\int cos^4\theta d(sen\theta) - 4\int cos^2\theta d(sen\theta).$$

Reemplazando el coseno en función del seno, obtendrás:

$$A = 4\int(1-sen^2\theta)^2 d(sen\theta) - 4\int(1-sen^2\theta)d(sen\theta) =$$

$$4\int(1-2sen^2\theta + sen^4\theta)d(sen\theta) - 4\int(1-sen^2\theta)d(sen\theta) =$$

$$4sen\theta - \tfrac{8}{3}sen^3\theta + \tfrac{4}{5}sen^5\theta - 4sen\theta + \tfrac{4}{3}sen^3\theta =$$

$$-\tfrac{4}{3}sen^3\theta + \tfrac{4}{5}sen^5\theta.$$

Ahora observa cómo han cambiado los límites de integración:

$$0 \le x = cos^4\theta \le 1,$$

así que

$$\tfrac{\pi}{2} \ge \theta \ge 0.$$

Por consiguiente,

$$A = [-\tfrac{4}{3}sen^3\theta + \tfrac{4}{5}sen^5\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{8}{15}\,cd^2.$$

Es decir, el área total de espejo de la longevidad es

$$4A = \tfrac{32}{15}\,cd^2 = \tfrac{160}{3}\,dm^2 = 53\tfrac{1}{3}\text{ años} = 53\text{ años } 4\text{ meses}.$$

Anota tu respuesta:

el sultán vivirá 53 años con 4 meses.

¡La integral de Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

—¿Solo viviré 53 años? —exclamó el sultán con amargura, pues ya contaba 50 años de edad.— ¿No puedo vivir algo más?

—Sí, puede, majestad, —contestó el astrólogo que era un hombre sabio.— Pero deberá cumplir una condición.

—¿Cuál? ¡Haré lo que sea!

—Su mente debe volverse como este espejo.

—¿Qué quiere decir?

—Que no debe usted ni anhelar ni abominar, —dijo el astrólogo.— Trate las cosas como lo hace este espejo: las refleja, pero no rechaza ni se aferra a ninguna de ellas.

La mente de un sabio es Conciencia sin elección.

LA CAPILLA Y EL JARDÍN

Un hombre se acercó al Maestro y le preguntó:

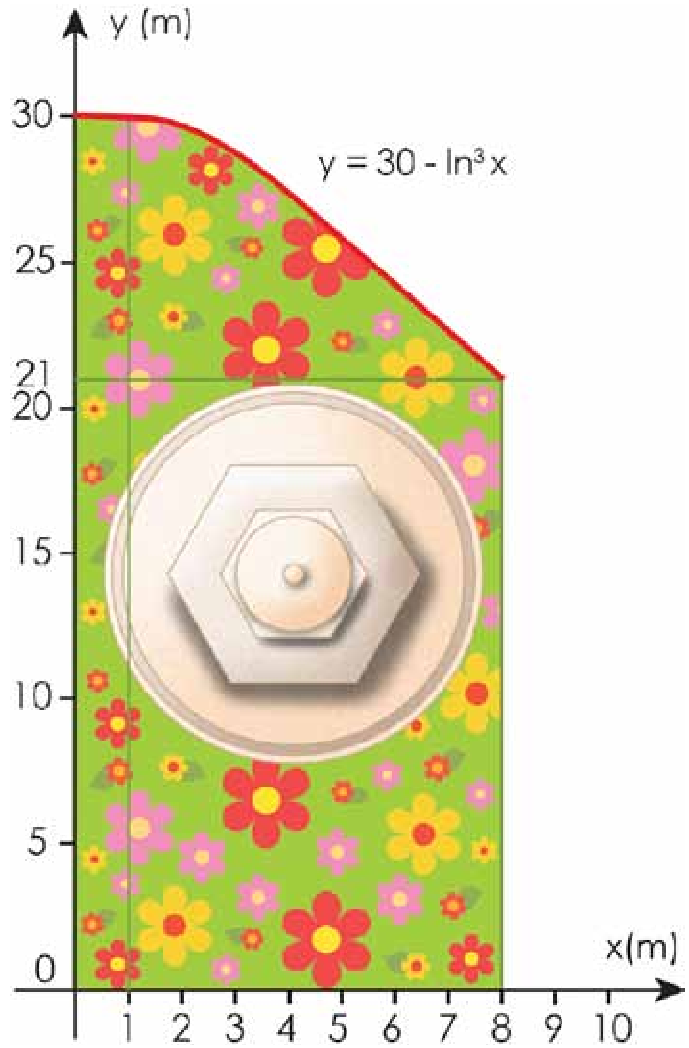
—¿Dónde puedo encontrar a Dios? He visitado las montañas, el desierto, los monasterios y las chozas de los pobres; ¡pero no Lo he encontrado! ¿Hay algún lugar especial donde Él está?

—Sí, lo hay, —contestó el Maestro.— Es la capilla y el jardín que usted va a construir para Él.

—¡Haré lo que sea! —exclamó el hombre.— ¿De qué dimensiones debo hacerlos?

—De las dimensiones que sean, —dijo el Maestro,— pero la capilla debe estar en el centro, y el jardín alrededor.

Detrás de su casa el hombre tenía un terreno, y resolvió para la construcción de una capilla redonda y un jardín alrededor de ella. ¿De qué radio le aconsejas hacer la capilla, si se quiere que su área forme la sexta parte del terreno?



Para descubrir las dimensiones de la capilla, necesitas conocer el área total del terreno. Ésta se halla escondida dentro de la siguiente expresión:

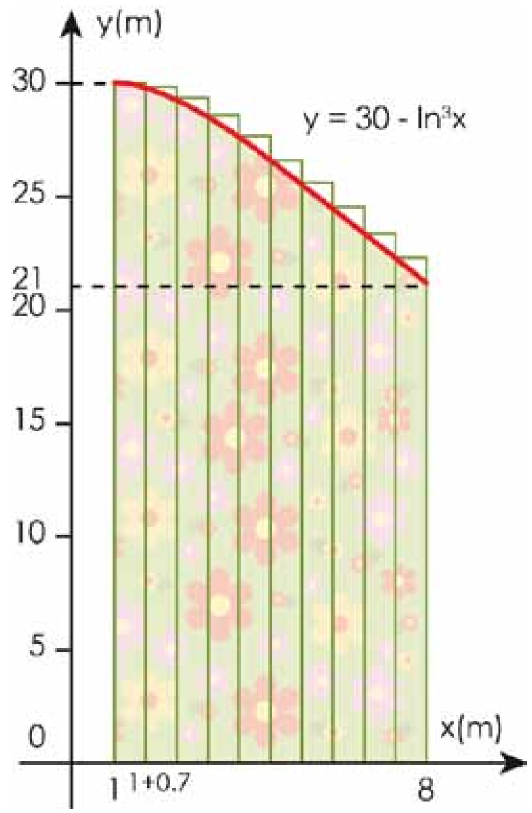
$$A_{terreno} = 30 \cdot 1 + \int_1^8 (30 - \ln^3 x)dx.$$

¿Cómo piensas integrar el cubo del logaritmo? Si deseas, puedes encontrar su primitiva. Sin embargo, como recordarás, Bernhard Riemann dio una definición de la integral que sirve incluso cuando la función no tiene primitiva:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x.$$

¡Aplícala ahora!

Grafica la función integrando:



Divide el intervalo $[1,8]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1\cdot 7$, y reemplaza al área debajo de la curva por la de los 10 rectángulos, cuya base mide $0.1\cdot 7$ y la altura es la ordenada de la curva. Así, la altura del primer rectángulo medirá

$$30-\ln^3(1)\text{ m};$$

del segundo

$$30-\ln^3(1+0.7)\text{ m};$$

del tercero,

$$30-\ln^3(1+2\cdot 0.7)\text{ m};$$

etc. Procede a calcular la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$A_{10} = 0.7 \cdot \sum_{n=0}^{9}(30 - \ln^3(1 + n \cdot 0.7)) = 187.11\ldots \text{km}^2.$$

Del mismo modo calcula las sumas más finas:

$$A_{100} = 0.07 \cdot \sum_{n=0}^{99}(30 - \ln^3(1 + n \cdot 0.07)) = 184.34\ldots \text{km}^2,$$
$$A_{1000} = 0.007 \cdot \sum_{n=0}^{999}(30 - \ln^3(1 + n \cdot 0.007)) = 184.062\ldots \text{km}^2,$$

etc. Si perseveras, sabrás que el valor del límite de estas sumas es $184.031\ldots$ km. ¡Entonces, la capilla deberá ocupar un área de 35.67 metros cuadrados!, pues

$$A_{capilla} = \frac{1}{6} \cdot (30 + 184) = \frac{1}{6} \cdot 214 \simeq 35.67\,\text{m}^2.$$

Y, como debe cumplirse la igualdad

$$\pi R^2 = 35.67\,\text{m}^2,$$

el radio de la capilla deberá medir

$$R = \sqrt{\frac{35.67}{\pi}} \simeq 3.37\,\text{m}.$$

Anota tu respuesta:

el radio de la capilla debe medir 3m con 37 cm.

¡La integral de Riemann resolvió el problema de manera exitosa!, ¿verdad?.

El hombre construyó la capilla y cultivó el jardín a su alrededor. Todas las mañanas, mientras rezaba dentro de la capilla, olía las flores perfumadas del jardín, pero no veía a Dios.

Una tarde entró en la capilla. El sol poniente la inundaba con sus rayos de luz dorada. Decenas de gorriones gorjeaban felices sobre las ramas de una higuera del jardín. A lo lejos se podía escuchar el peculiar ruido de la carretera.

“¡Esto es Dios! —comprendió el hombre.— Él me rodea por todas partes como el jardín a la capilla.”

Tú eres el templo, Dios es el jardín a tu alrededor.

Sección III

Longitud de curva

EL CORDERO Y EL LOBO

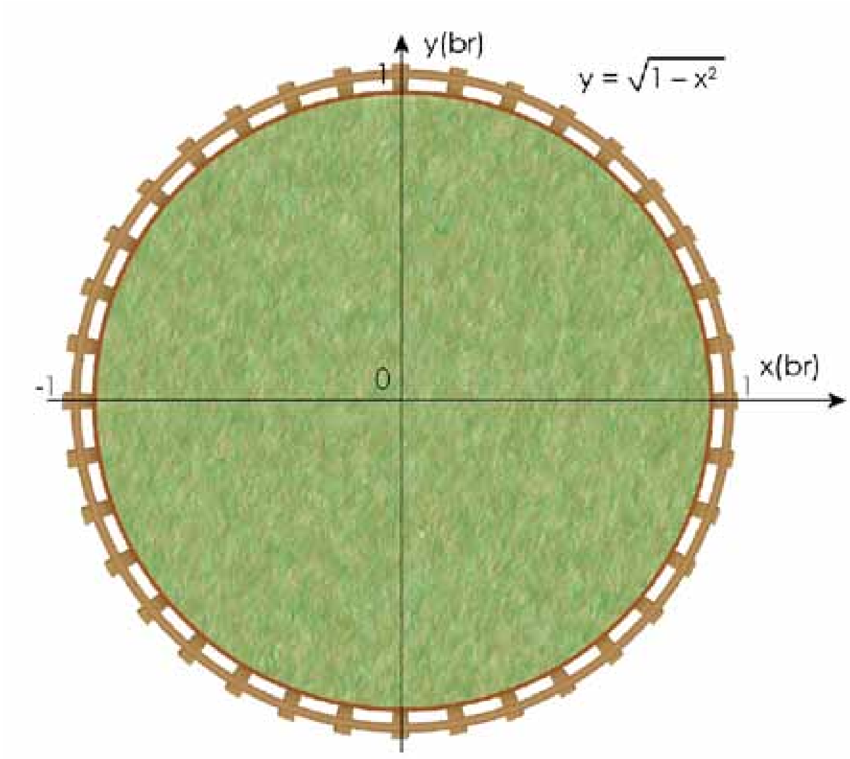
Un corderillo tenía mucho miedo del lobo, así que le pidió a su dueño:

—Por favor, hazme un corral.

El dueño decidió hacer el corral en forma de un círculo de 1 braza[8] de radio, y se puso a pensar: ¿cuántas brazas de cerca se necesitan para fabricar el corral? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Deseas conocer la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 1 braza.

[8] Una braza mide 1.83 m.



Para lograrlo, Bernhard Riemann te sugiere el siguiente método.

Para simplificar el trabajo, es suficiente que calcules la longitud de un cuarto de la circunferencia. La idea de Riemann consiste en aproximar a una curva, cuya longitud se desea conocer, por pedacitos de recta (y por esta razón el método se llama *rectificación*).

Riemann divide el intervalo $[a, b]$, donde está definida la curva, en n partes iguales, y reemplaza a la longitud de la curva por la de las n cuerdas. La longitud de cada cuerda medirá

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}\,.$$

Riemann da, entonces, la siguiente definición de la longitud de un arco:

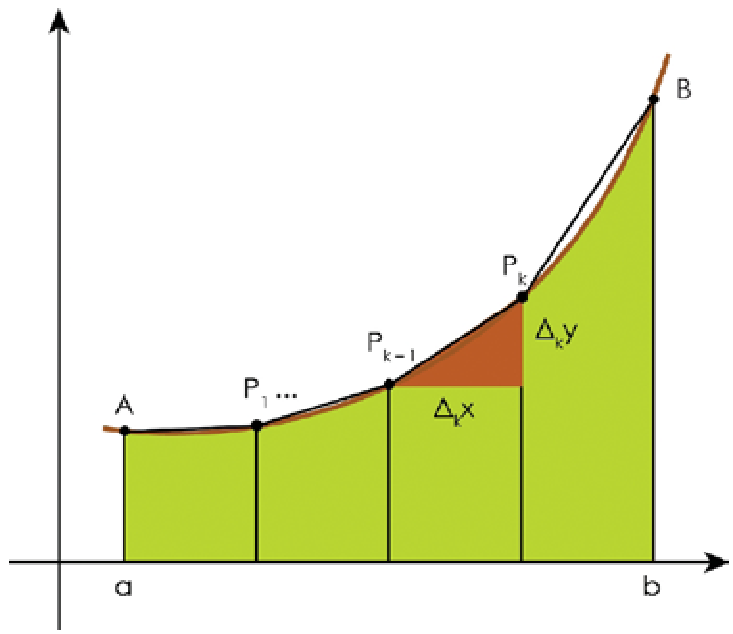
Definición

La longitud de un arco AB es el límite de las sumas de las longitudes de un conjunto de cuerdas consecutivas $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$ que unen puntos del arco, cuando el número de puntos crece indefinidamente de forma que la longitud de cada cuerda tiende a cero. Es decir,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}\,.$$

Si existe la derivada de la función que describe la curva, por el teorema del valor medio sabes que existe al menos un punto sobre el arco $P_{k-1}P_k$ en el que la pendiente de la tangente se hace igual a la pendiente $\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ de la cuerda $P_{k-1}P_k$. En virtud de ello Riemann puede escribir:

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\,\Delta_k x = \sqrt{1+y'(x_k)^2}\,\Delta_k x.$$



Y, por supuesto, la longitud del arco debe ser el límite de estas sumas, el cual, por definición, es igual a la siguiente integral:

$$AB = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+y'(x_k)^2}\,\Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Entonces, puedes calcular la longitud de un arco de este modo:

Si $A=(a,b)$ y $B=(c,d)$, la longitud del arco AB viene dada por la siguiente integral:

$$AB = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

En el caso de que la curva fuera dada paramétricamente por las ecuaciones

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad t_1 \le t \le t_2,$$

usando la técnica del cambio de variable, Riemann obtiene una nueva fórmula que permite calcular la longitud del arco AB:

$$AB=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\cdot x'(t)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Anótalo:

> Si $A(t=t_1)$ y $B(t=t_2)$ son dos puntos de una curva definida paramétricamente por las ecuaciones $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\leq t\leq t_2$, la longitud del arco AB viene dada por la siguiente integral:
>
> $$AB=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

¡Puedes utilizar estas fórmulas para conocer la longitud de cualquier curva!

Para calcular la longitud de la circunferencia del corral, usa la primera definición. Representa la cuarta parte de la circunferencia por su ecuación

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad 0\leq x\leq 1.$$

Entonces, su longitud será igual a la siguiente integral:

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Ésta es una integral de tabla:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\text{arcsen}x.$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, puedes escribir:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=[\text{arcsen}x]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

Y, por supuesto, la longitud de la circunferencia será el cuádruple de este valor:

$$L_{circunferencia} = 4 \cdot \tfrac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Anota tu respuesta:

el perímetro de una circunferencia de radio 1 mide 2π.

Para usar la segunda definición, Riemann representa la cuarta parte de la circunferencia con la parametrización

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

Entonces, su longitud será igual a la siguiente integral:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \tfrac{\pi}{2}.$$

Y, por supuesto, la longitud de la circunferencia será el cuádruple de este valor:

$$L_{circunferencia} = 4 \cdot \tfrac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Anota tu respuesta:

el perímetro de una circunferencia de radio 1 braza mide 2π brazas. Así que el corral necesita, aproximadamente, 6.28 brazas de cerca.

¿Qué te pareció la definición de Bernhard Riemann para calcular la longitud de arco? ¡Es genial!, ¿verdad?.

El dueño fabricó el corral, y, cuando el lobo pasó por allí, el cordero empezó a burlarse de él. El lobo lo miró y dijo:

—No eres tú quien se burla de mí, sino la cerca que nos separa.

La burla no proviene de las personas, sino de las fronteras que trazamos.

CAMBIANDO DE CASA

Norbert Wiener, un matemático estadounidense, es conocido como el fundador de la cibernética. Vivió en los años 1894-1964, y acuñó el término *cibernética* en su libro *Cibernética o el control y comunicación en animales y máquinas*, que fue publicado en el año 1948. ¡Era el típico matemático despistado!

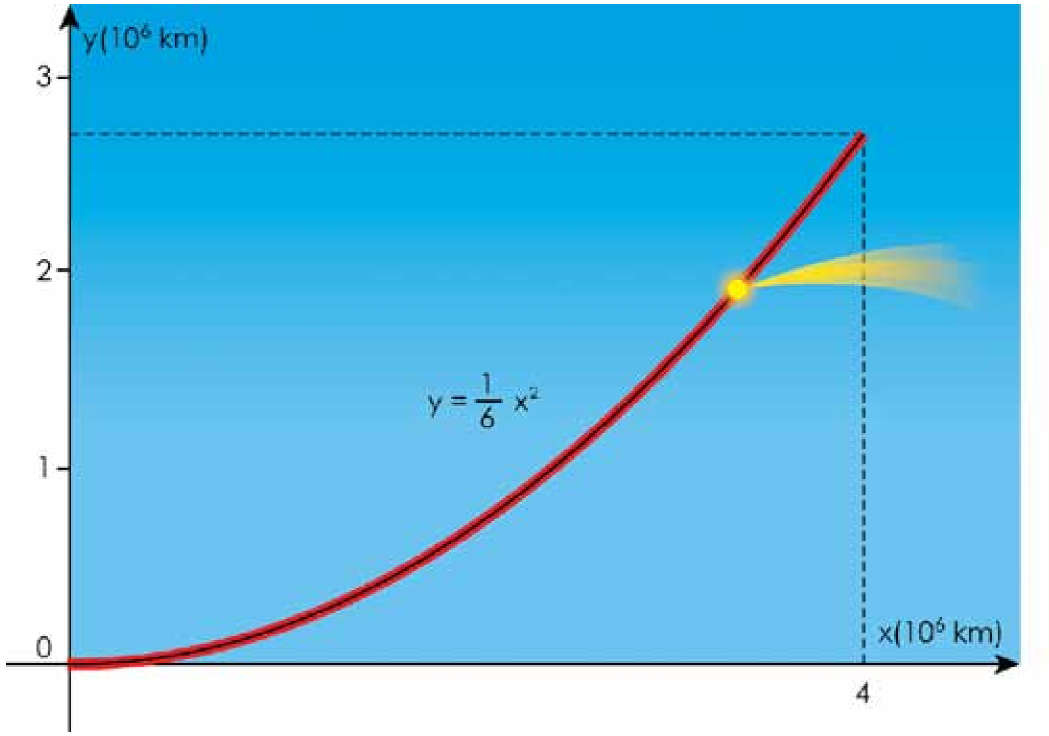
En cierta ocasión su familia se mudó a un pueblo cercano. Su esposa, conociéndole, se encargó de la mudanza. Cuando, como todos los días, Wiener salía hacia el Instituto Tecnológico de Massachusetts, ella le dio una hoja de papel con la nueva dirección, porque estaba segura de que no la recordaría.

Al llegar al Instituto, un colega astrónomo dijo a Wiener:

—Un cometa que estoy observando se ha desplazado por la parábola

$$y = \frac{1}{6}x^2,$$

donde x varía entre 0 y 4 millones de kilómetros. Tú eres matemático, ¿me puedes decir qué longitud recorrió el cometa?



—Con gusto, —dijo Wiener.

Tomó la hoja que le había dado su esposa, y se puso a escribir en ella la solución. ¿Le ayudas?

Se trata del siguiente límite:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta_k x)^2+(\Delta_k y)^2}\,.$$

Para calcularlo, divide el intervalo $[0,4]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1\cdot4$, y reemplaza la curva por las 10 cuerdas. Así, la longitud de la primera cuerda medirá

$$\sqrt{(0.1\cdot4)^2+\tfrac{1}{36}((0\cdot0.1\cdot4)^2-(1\cdot0.1\cdot4)^2)^2}\ \text{millones de km;}$$

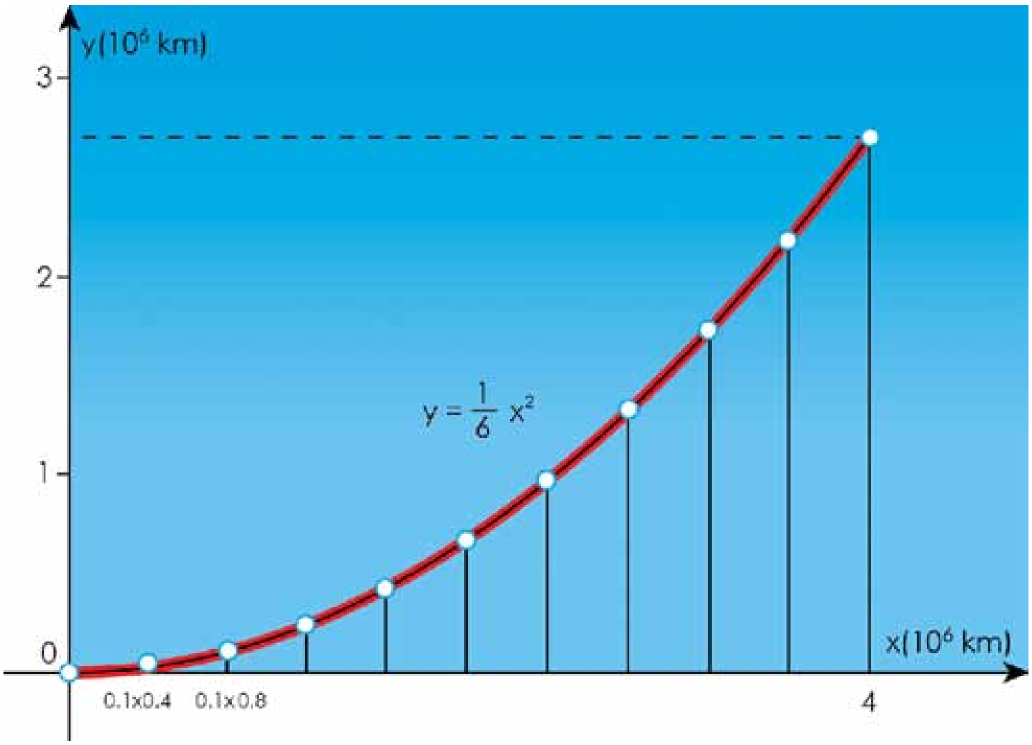
la de la segunda

$$\sqrt{(0.1\cdot4)^2+\tfrac{1}{36}((1\cdot0.1\cdot4)^2-(2\cdot0.1\cdot4)^2)^2}\ \text{millones de km;}$$

la de la tercera,

$$\sqrt{(0.1\cdot 4)^2+\tfrac{1}{36}((2\cdot 0.1\cdot 4)^2-(3\cdot 0.1\cdot 4)^2)^2};$$

etc.



¡Procede a calcular la suma de estas longitudes!

$$L_{10}=\sum_{n=0}^{9}\sqrt{(0.1\cdot 4)^2+\tfrac{1}{36}((n\cdot 0.1\cdot 4)^2-((n+1)\cdot 0.1\cdot 4)^2)^2}\simeq 4.9795.$$

Ahora divide el intervalo $[0,4]$ en 100 partes iguales de longitud $0.01\cdot 4$, y reemplaza la curva por las 100 cuerdas. Así, la longitud de la primera cuerda medirá

$$\sqrt{(0.01\cdot 4)^2+\tfrac{1}{36}((0\cdot 0.01\cdot 4)^2-(1\cdot 0.01\cdot 4)^2)^2}\ 10^6\text{km};$$

la de la segunda

$$\sqrt{(0.01\cdot 4)^2+\tfrac{1}{36}((1\cdot 0.01\cdot 4)^2-(2\cdot 0.01\cdot 4)^2)^2}\ 10^6\text{km};$$

la de la tercera,

$$\sqrt{(0.01\cdot 4)^2+\tfrac{1}{36}((2\cdot 0.01\cdot 4)^2-(3\cdot 0.01\cdot 4)^2)^2}\ 10^6\text{km};$$

etc. La suma de estas longitudes es igual a

$$L_{10} = \sum_{n=0}^{99} \sqrt{(0.01 \cdot 4)^2 + \frac{1}{36}((n \cdot 0.01 \cdot 4)^2 - ((n+1) \cdot 0.01 \cdot 4)^2)^2} \simeq 4.9812.$$

Si prosigues del mismo modo, sabrás que

$$L_{1000} \simeq 4.98125 \cdot 10^6 \simeq 4981250 \, \mathrm{km}.$$

Anota tu respuesta:

el cometa recorrió 4′981250 kilómetros.

¡El método de rectificación resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?. (En este caso también podrías obtener la respuesta por técnicas de integración).

Cuando Wiener volvió por la tarde a su casa, se olvidó de que su familia se había mudado. “¡Nos habrán robado!” —pensó, al encontrar la casa vacía.

Entonces recordó lo de la mudanza. Pero tampoco conseguía recordar a dónde se habían mudado, pues había dejado la hoja con la dirección a su colega astrónomo.

Salió a la calle, y de pronto vio a una chica que se acercaba. Le dijo:

—Perdone, pero es que yo vivía antes en esa casa y ahora no consigo recordar...

Antes de que pudiese terminar la frase, la chica lo interrumpió:

—No te preocupes, papá: mamá me ha mandado a recogerte.

El hombre conoce la trayectoria de los cuerpos celestes, pero no recuerda el camino a su propia casa.

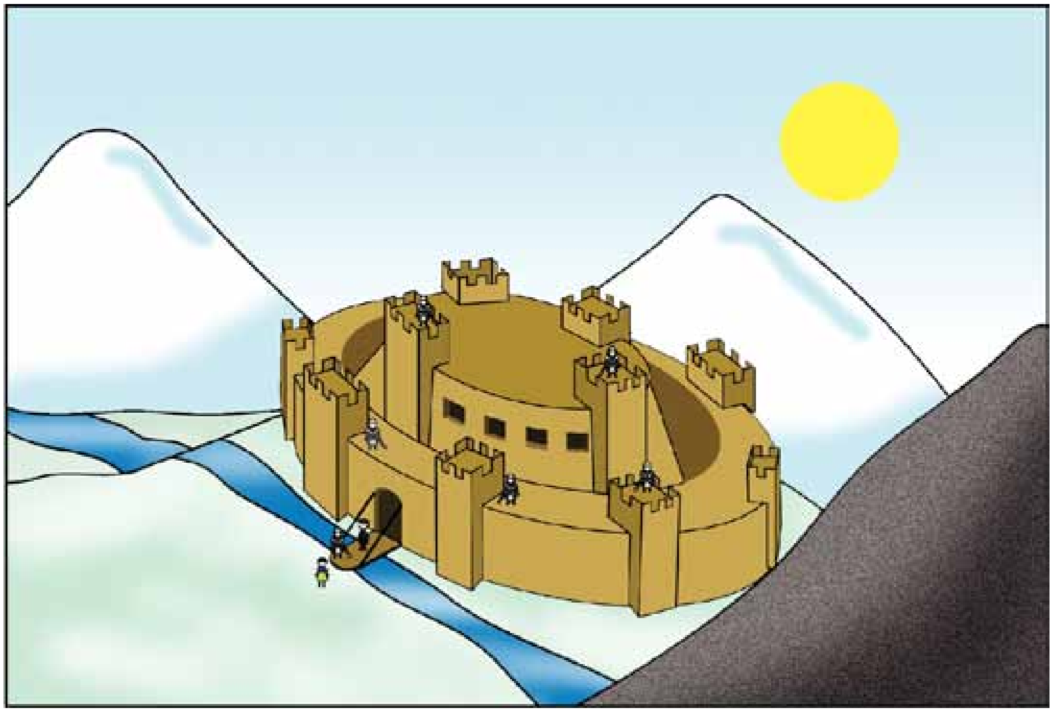
LA ASTUCIA DEL VIEJO DE LA MONTAÑA

Elbruz es una larga cadena de montañas que se levanta al sur del mar Caspio. Sus cimas más altas alcanzan los seis mil metros.

A finales del siglo XI, Hasán, el famoso "Viejo de la montaña", hombre culto e inteligente, se encontraba perseguido por las tropas de Nizam, el gran visir del sultán Alp Arslan. En medio de su persecución, Hasán oyó hablar de un fortín perdido en la montaña, y decidió ir allí a refugiarse.

Se marchó acompañado por un grupo de seguidores. Entre nieve y hielo, tras haber pasado por caminos abruptos y bordes afilados, vio, colgado en lo alto de la montaña, a la fortaleza de Alamut.

Estaba rodeada por fosos llenos de agua gélida, y había un solo camino para entrar en ella: un puente levadizo tendido sobre barrancas cortadas a pico.



Hasán comprendió que la fortaleza era inexpugnable, pero decidió hacerla suya. Y, como no podría lograrlo por la fuerza, resolvió usar la astucia.

Echó un vistazo y se dio cuenta que la base de la fortaleza tenía la forma de una elipse de unas 100 varas[9] de largo por 40 varas de ancho. Tras un día de meditación, ordenó a sus compañeros que se escondieran, avanzó solo con un hombre y solicitó que el comandante de la plaza le recibiese.

Bajaron el puente levadizo, el cual ascendió de nuevo tras su paso. Hasán habló al comandante de la plaza:

—Aquí tengo una piel de buey.

La desplegó: ¡había pertenecido a un animal enorme!

—Te daré cinco mil piezas de oro si me vendes tanto terreno como pueda delimitar con esta piel.

El comandante no daba crédito a sus oídos.

—¡Quiero ver el oro!

Hasán se lo enseñó. El comandante hizo contar las piezas: ¡cinco mil!

Convencido de que trataba con un insensato, aceptó la proposición:

—Dame el oro y te cederé el emplazamiento que escojas.

Hasán se dirigió hacia el pie de la muralla de la fortaleza y señaló el suelo con el dedo. Sin embargo, en lugar de extender la piel en el sitio

[9] Una vara mide 83.6 cm.

escogido, plantó una estaca, y con ayuda de su compañero cortó la piel en 80 tiras finas de un poco más de 3 varas de longitud cada una. Las anudó, ató el extremo de la cuerda que acababa de confeccionar a la estaca, y anduvo a lo largo de la muralla sosteniendo el otro extremo.

El comandante no salía de su asombro.

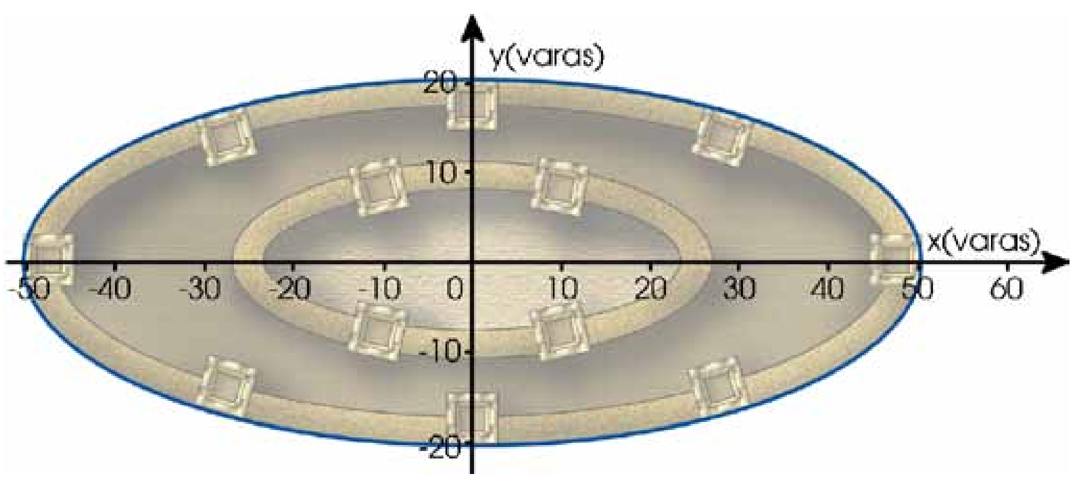
—¡Eres muy hábil, Hasán! ¡Pero, aun así, no creo que puedas cercar toda la fortaleza!

—¡Tengo confianza en mis cálculos! —respondió Hasán.— Estas tiras rodearán toda tu muralla.

¿Crees que la confianza de Hasán es justificada?

Deseas conocer la longitud de la elipse que delimita la muralla de la fortaleza. La ecuación de la elipse es la siguiente:

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1.$$



Para calcular su longitud, puedes restringirte al cuadrante positivo, pues allí se encuentra la cuarta parte de la curva. ¡Despeja a la coordenada y en términos de la coordenada x! Obtendrás:

$$y = \frac{2}{5}\sqrt{50^2 - x^2}\,.$$

Intenta integrarle por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Como

$$y'(x) = -\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{50^2 - x^2}},$$

tu integral tendrá esta forma:

$$L = 4\int_0^{50} \sqrt{1 + \left(-\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{50^2 - x^2}}\right)^2}\, dx.$$

¡Pero esta función se hace infinita en $x = 50$!

Para remediarlo, usa este cambio de variable:

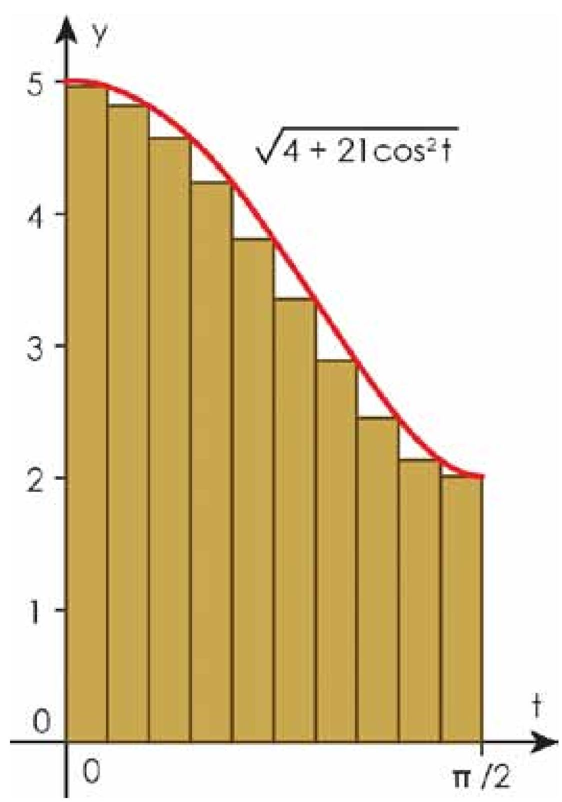
$$x = 50\,\text{sen}\,t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Entonces, tu integral adquiere esta forma:

$$L = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 21\,\text{sen}\,t^2}\, dt = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 + 21\cos^2 t}\, dt.$$

¡Es una integral elíptica!, y, por lo tanto, no tiene primitiva. ¡Usa la definición de la integral que descubriste con Bernard Riemann!

Divide el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 10 partes iguales, de $(0.1 \cdot \frac{\pi}{2})$ varas de longitud cada una:



Entonces, el área debajo de la función $f(t)=\sqrt{4+21\cos^2 t}$ se aproximará por la cantidad

$$A_{10}=0.1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{10}\sqrt{4+21\cos^2(0.1\cdot\frac{\pi}{2}n)}=5.5177\ldots$$

Si divides el intervalo en 100 partes iguales, obtendrás la respuesta con una exactitud mayor:

$$A_{100}=0.01\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{100}\sqrt{4+21\cos^2(0.01\cdot\frac{\pi}{2}n)}=5.7297\ldots$$

Ésta es una precisión mayor aun:

$$A_{1000}=0.001\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{1000}\sqrt{4+21\cos^2(0.001\cdot\frac{\pi}{2}n)}=5.7509\ldots$$

Si sigues así, averiguarás que el valor de la integral es de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4+21\cos^2 t}\,dt=5.75327\ldots.$$

Entonces, ya conoces el perímetro de la fortaleza:

$$L_{elipse}=40\cdot 5.753\ldots\simeq 230\ \text{varas}.$$

¡Anota su respuesta!

El perímetro de la fortaleza mide 230 varas.

Como las tiras que cortó Hasán daban una longitud de 240 varas, pronto dio la vuelta a la muralla: ¡la había cercado con la piel de un buey!

¡La fortaleza era suya! El ex comandante tuvo que abandonar la plaza con los cinco mil piezas de oro.

Los sufíes cuentan esta historia para mostrar que la piel de un buey puede encerrar una fortaleza. ¡Cuánto más la piel de un hombre!

LAS MANZANAS DE ORO

Como regalo de bodas la Madre Tierra regaló a la diosa Hera un árbol que producía manzanas de oro. Hera encargó que las Hespérides, hijas del titán Atlas, lo sembraran en su jardín en el Lejano Occidente.

—Rodearemos el árbol con un muro infranqueable, —resolvieron las Hespérides,— y lo cuidaremos personalmente. Ladón, el dragón que no duerme, se enroscará a su alrededor y no permitirá que nadie se acerque. ¡Tus manzanas de oro, reina Hera, estarán a salvo!

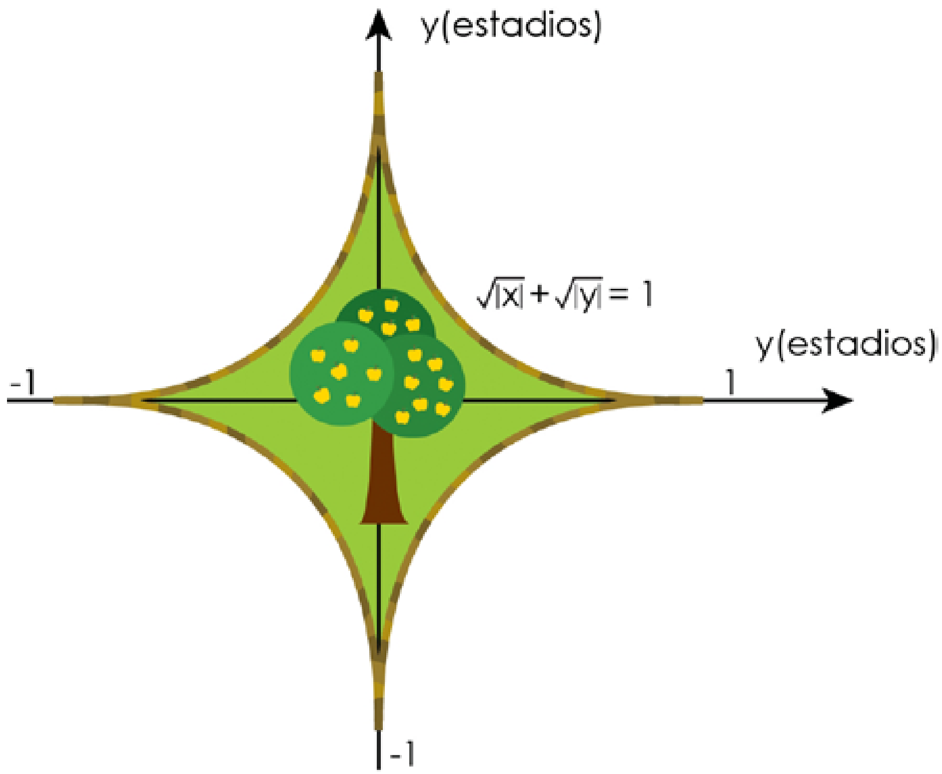
Decidieron que el muro seguiría la curva

$$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1, \quad -1\leq x\leq 1 \text{ estadio,}$$ [10]

y se pusieron a pensar: ¿cuántos estadios medirá el muro? ¡Ayúdales a averiguarlo, por favor!

Aprovechando la simetría del muro, puedes calcular tan solo la cuarta parte de su longitud, por ejemplo, la que se ubica en el primer cuadrante:

[10] Un estadio mide 200 m.



Aquí la ecuación del muro es la siguiente:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\quad 0\leq x\leq 1.$$

Esto significa que

$$y=1-2\sqrt{x}+x.$$

¡Usa la definición de longitud de arco que descubriste junto con Bernhard Riemann!

La fórmula que te interesa es ésta:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Como

$$y'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}},$$

la longitud del muro será igual al cuádruple de la siguiente integral:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx.$$

Realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = \cos^4\theta, \quad dx = -4 sen\theta \cdot \cos^3\theta d\theta.$$

Tu integral adquiere la siguiente forma:

$$-\int \sqrt{1 + \left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}\right)^2}\, sen\theta \cdot \cos^3\theta d\theta =$$

$$-4\int \sqrt{sen^4\theta + sen^4\theta}\, \cdot sen\theta \cdot \cos\theta d\theta =$$

$$-2\int \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2}\, \cdot sen 2\theta d\theta.$$

Ahora haz otro cambio de variable:

$$tgz = \cos 2\theta, \quad \sec^2 z dz = -2 sen 2\theta d\theta.$$

Usando la tabla de primitivas, obtendrás la siguiente información:

$$-2\int \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2}\, \cdot sen 2\theta d\theta =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \sqrt{1+tg^2 z}\, \cdot \sec^2 z dz =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \sec^3 z dz = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sec z \cdot tgz + \ln(\sec z + tgz)).$$

Observa cómo han cambiado los límites de integración:

$$0 \le x = \cos^4\theta \le 1,$$

así que

$$\frac{\pi}{2} \ge \theta \ge 0.$$

Por consiguiente,

$$-1 \le tgz = \cos 2\theta \le 1,$$

y

$$-\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ya puedes calcular tu integral:

$$L = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sec z \cdot \operatorname{tg} z + \ln\left(\sec z + \operatorname{tg} z\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 1.62322524\ldots$$

Es decir, la longitud total del muro es

$$4L = 6.4929\ldots \simeq 6.5\,est.$$

Anota tu respuesta:

para rodear el árbol de las manzanas de oro, hay que traer piedras para construir 6 estadios y medio de muro.

¡La definición de Bernhard Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Sin embargo, y a pesar de todas las medidas de seguridad, las manzanas de oro fueron robadas. Sucedió así.

Euristeo, el rey supremo de Grecia, encargó a Heracles que le trajera tres manzanas de oro. Heracles visitó el Cáucaso y pidió consejo a Prometeo.

—No cojas las manzanas tú mismo, —le dijo Prometeo,— porque cualquier mortal que lo haga caerá muerto en el acto. Convence a algún inmortal que te las coja.

Heracles se marchó al lugar en que Atlas, el titán rebelde, sostenía los cielos.

—Si yo te relevo durante una hora, ¿estarías dispuesto a coger tres manzanas del árbol de tus hijas? —le preguntó Heracles.

—Desde luego, —dijo Atlas,— si tú matas primero al dragón que no duerme.

Heracles echó mano de su arco y, por encima del muro del jardín, disparó una flecha contra Ladón. Después se puso detrás de Atlas y, abriendo bien las piernas, tomó todo el peso de los cielos sobre su cabeza y sobre sus hombros. Atlas trepó por el muro, robó las manzanas y le gritó a Heracles:

—Si no te importa, quédate ahí un poco más, mientras llevo estas manzanas a Euristeo. Con mis enormes piernas estaré de vuelta en una hora.

Heracles sabía que Atlas jamás entregaría las manzanas, sino que iría directamente a rescatar a los demás titanes con el fin de empezar una nueva revolución, pero simuló que le creía.

—Será un placer, —le contestó,— si tienes la bondad de volver a sostener el peso un momento, mientras yo doblo esta piel de león y me hago con ella una almohadilla para la cabeza, a fin de estar más cómodo.

Atlas dejó en el suelo las manzanas e hizo lo que le había pedido Heracles. Entonces Heracles cogió las manzanas y se marchó riendo.

—Tú has intentado engañarme, —le dijo,— pero he sido yo quien te engañó a ti. ¡Adiós!

De este modo Heracles pudo entregar las manzanas de oro a Euristeo.

¿CUÁNTOS HIJOS TIENE USTED?

Alguien preguntó a Leonardo Euler:

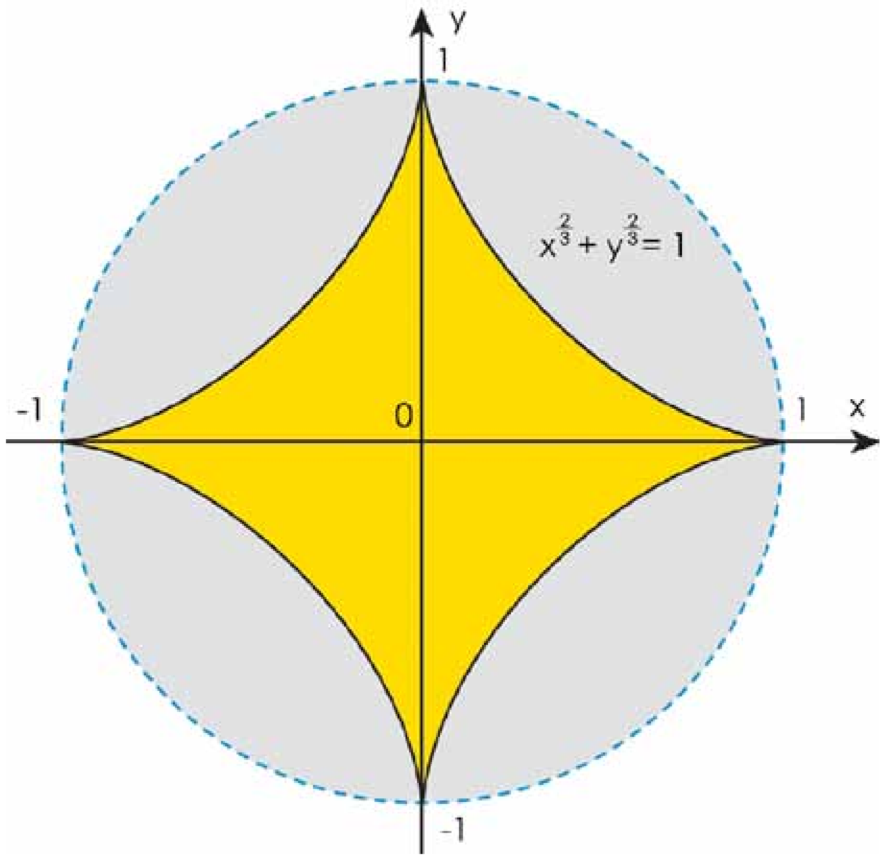
—¿Cuántos hijos tiene usted?

—Exactamente el número de veces que el radio calza en la astroide, lo sabrá, —contestó Euler.

¿Puedes descifrar esta respuesta?

Deseas calcular la longitud de la astroide de radio 1. Su ecuación en el primer cuadrante es la siguiente:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$



Para mayor facilidad, puedes parametrizar la curva de este modo:

$$x = Cos^3 t,\ \ y = sen^3 t,\ \ 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

En efecto, ésta es una parametrización de la astroide, pues

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (Cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (Sen^3 t)^{\frac{2}{3}} = Cos^2 t + Sen^2 t = 1.$$

¡Usa la definición de longitud de arco que descubriste junto con Bernhard Riemann!

La fórmula que te interesa es ésta:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

La longitud de la astroide será, entonces, igual al valor de la siguiente integral:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3Cos^2t(-Sent))^2 + (3Sen^2t(Cost))^2}\, dt =$$

$$12\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cost \cdot Sent\sqrt{Cos^2t + Sen^2t}\, dt =$$

$$12\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cost \cdot Sentdt = [12 \cdot \tfrac{1}{2}Sen^2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

Anota tu respuesta:

el radio calza en la astroide 6 veces. ¡Euler tiene 6 hijos!

¡La definición de Bernhard Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Euler no se detuvo en el número 6, y llegó a tener 13 hijos. Cuando le preguntaban por la causa de tan abundante progenie, contestaba:

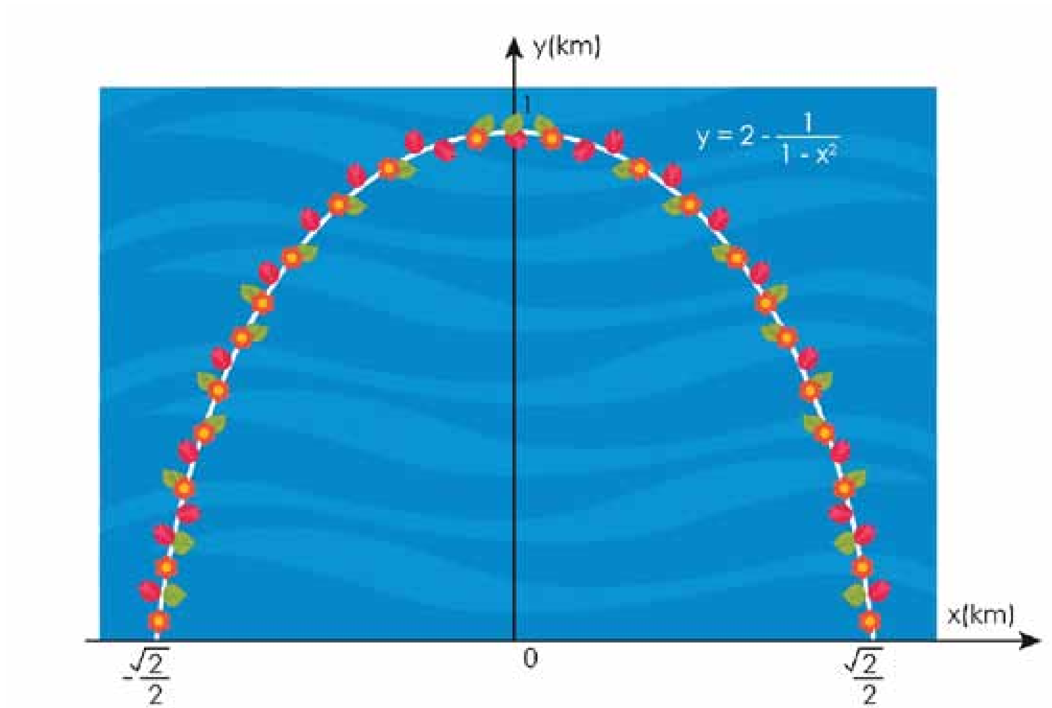
—Me gustan hacer cuentas y contar cuentos. Hacer cuentas matemáticas es divertido en solitario, pero los cuentos siempre se cuentan a alguien. ¡Y, como usted puede imaginar, con trece hijos nunca me quedo sin público!

EL NACIMIENTO DE LAKSHMI

En los comienzos de la Creación, los Dioses habían notado que sus poderes estaban empezando a desvanecerse a causa de una maldición lanzada por un hechicero. Acudieron a consultar al Dios Supremo, Visnú, quien les aconsejó que batieran el Océano Celestial para así obtener el Néctar Vitalizador.

Los Dioses siguieron el consejo. Pronto las olas comenzaron a agitarse, y flotando en lo alto vieron una flor de loto. De esta forma salió la Diosa Lakshmi y, al revelarse su belleza, hasta los Cielos entonaron canciones de alabanza, y las danzarinas celestiales bailaron para ella. Todos los ríos y arroyos del mundo fluyeron hacia ella, y los elefantes celestiales absorbieron las cristalinas aguas con sus trompas para bañar a la exquisita Diosa.

Cuando hubo concluido su baño, Lakshmi se vistió con ropas y adornos cuya belleza desafiaba toda descripción. Entonces el Océano le ofreció su regalo particular: una guirnalda de capullos perfumados que jamás se marchitan. La guirnalda formaba sobre el Océano un arco que tenía esta forma:



¿Puedes decir qué área delimitaba y qué longitud poseía la guirnalda de capullos perfumados?

Primero calcula el área del arco. Se trata de la siguiente integral:

$$A_{arco} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2 - \frac{1}{1-x^2}\right)dx.$$

Para hallar su valor, usa la técnica de descomposición en fracciones simples. Descompón el denominador de la función racional en factores lineales:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}.$$

¡Encuentra los valores de A y B!

Hallando el denominador común, te resultará lo siguiente:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{1-x^2}.$$

Esto significa que los numeradores deben ser iguales entre sí:

$$A - Ax + B + Bx = 1.$$

Es decir,

$$-A + B = 0, \;\; A + B = 0.$$

De aquí deducirás fácilmente que

$$A = B = \tfrac{1}{2}.$$

¡Ya puedes integrar!

Obtendrás lo siguiente:

$$A_{arco} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2 - \tfrac{1}{1-x^2})dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+x} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-x})dx =$$

$$[4x - \ln(1+x) + \ln(1-x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1.066...km^2.$$

Anota tu primera respuesta:

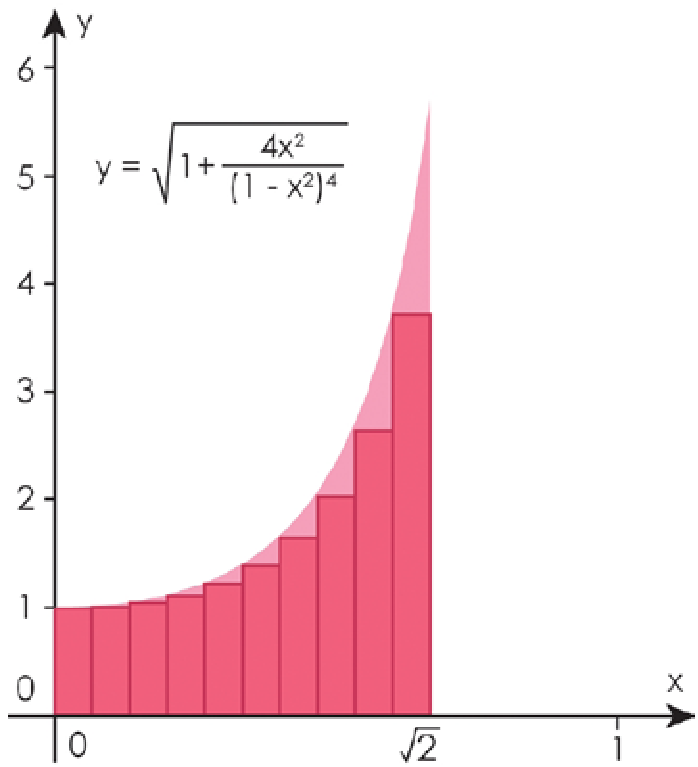
la guirnalda de capullos perfumados delimitaba 1.066 kilómetros cuadrados.

¡El método de fracciones simples realizó el cálculo de manera simple!, ¿verdad?.

Ahora calcula la longitud de la guirnalda. Se trata de la siguiente integral:

$$L_{guirnalda} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + ((2 - \tfrac{1}{1-x^2})')^2}\, dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \tfrac{4x^2}{(1-x^2)^4}}\, dx.$$

Para calcular esta integral, divide el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, y reemplaza el área debajo de la curva por los 10 rectángulos, cuya base mide $0.1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ y la altura es la ordenada de la curva.



Así, la altura del primer rectángulo medirá

$$\sqrt{1+\frac{4\cdot(0\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(0\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} \text{ km;}$$

la del segundo

$$\sqrt{1+\frac{4\cdot(1\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(1\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} \text{ km;}$$

la del tercero,

$$\sqrt{1+\frac{4\cdot(2\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(2\cdot 0.1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} \text{ km;}$$

etc. Calcula la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$A_{10} = 0.1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{9} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot (n \cdot 0.1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(n \cdot 0.1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} = 2.3629 \ldots \text{km}^2.$$

Ahora divide el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ en 100 partes iguales de longitud $0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, y reemplaza el área debajo de la curva por los 100 rectángulos, cuya base mide $0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ y la altura es la ordenada de la curva. Así, la altura del primer rectángulo medirá

$$\sqrt{1 + \frac{4 \cdot (0 \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(0 \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} \text{ km;}$$

del segundo

$$\sqrt{1 + \frac{4 \cdot (1 \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(1 \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} \text{ km;}$$

etc. Calcula la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$A_{100} = 0.01 \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{99} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot (n \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1-(n \cdot 0.01 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}} = 2.6327 \ldots \text{km}^2.$$

Si prosigues del mismo modo, sabrás que

$$L \simeq 2.666 \ldots \text{km}.$$

Anota tu respuesta:

la guirnalda de capullos perfumados medía 2 kilómetros con 666 metros.

¡La integral de Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Lakshmi sigue gozando de regalos y atenciones celestiales hasta el día de hoy.

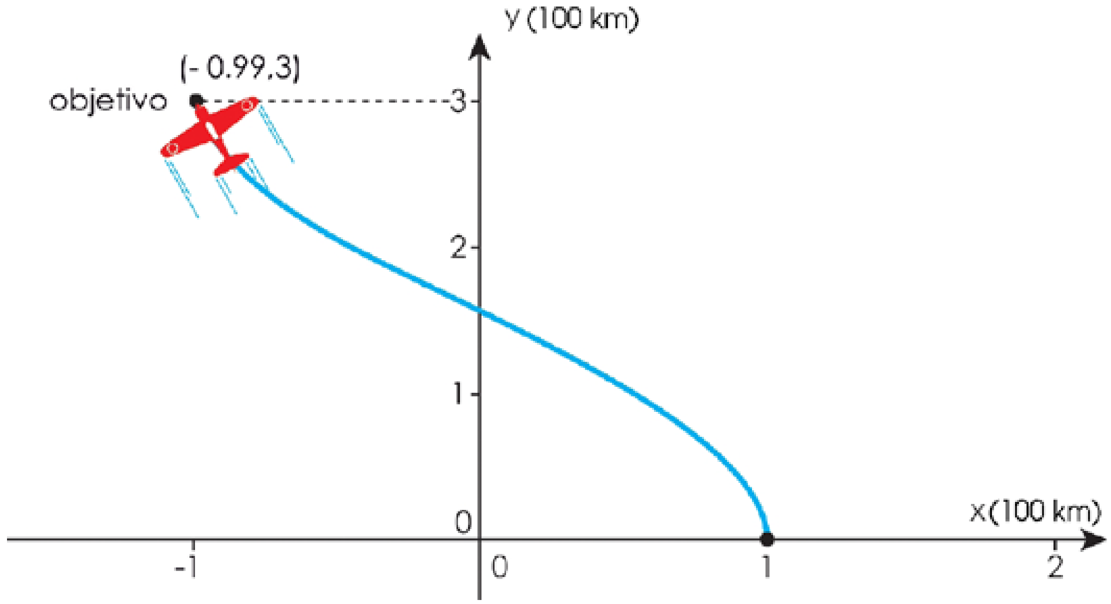
Es la Diosa más popular de la India, pues, cuando se deja convencer por sus adoradores, les concede dones de amor, riqueza y buena suerte. Pero, aunque resulta fácil atraer sus favores, nada impide que se deje tentar por otro adorador que se muestre más expresivo que el primero. Y cuando ella se va, sus dones suelen irse con ella. A causa de su volubilidad, se la llama *La Inconstante*.

Lakshmi es la adorable Diosa que nunca se queda mucho tiempo con nadie y sigue vagando eternamente.

LA ÚLTIMA RUTA

La palabra *kamikaze* se volvió común durante el final de la Segunda Guerra Mundial. Se utilizaba para designar al piloto japonés que dirigía su avión cargado de explosivos, hacia un blanco enemigo, y se estrellaba contra él en una envestida mortal. Preferiblemente se lo hacia contra un barco de guerra.

A Asakka Kobayashi se le designó como piloto suicida. Un día del año 1945, estando ya en la cabina de mandos de su avión en Tokio, esperaba la orden de despegue para emprender una misión de la que sabía que no iba a regresar. El piloto tenía ante sus ojos la trayectoria de su última ruta. Tenía la forma de la función arco coseno:



¿Puedes decir qué longitud tenía la última ruta del piloto kamikaze?

Se trata del siguiente límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}\,.$$

Para calcularlo, divide el intervalo $[-0.99,1]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1\cdot 1.99$, y reemplaza la curva por las 10 cuerdas. Así, la longitud de la primera cuerda medirá

$$\sqrt{(0.1\cdot 1.99)^2 + (\arccos(-0.99) - \arccos(-0.99 + 0.1\cdot 1.99))^2}$$

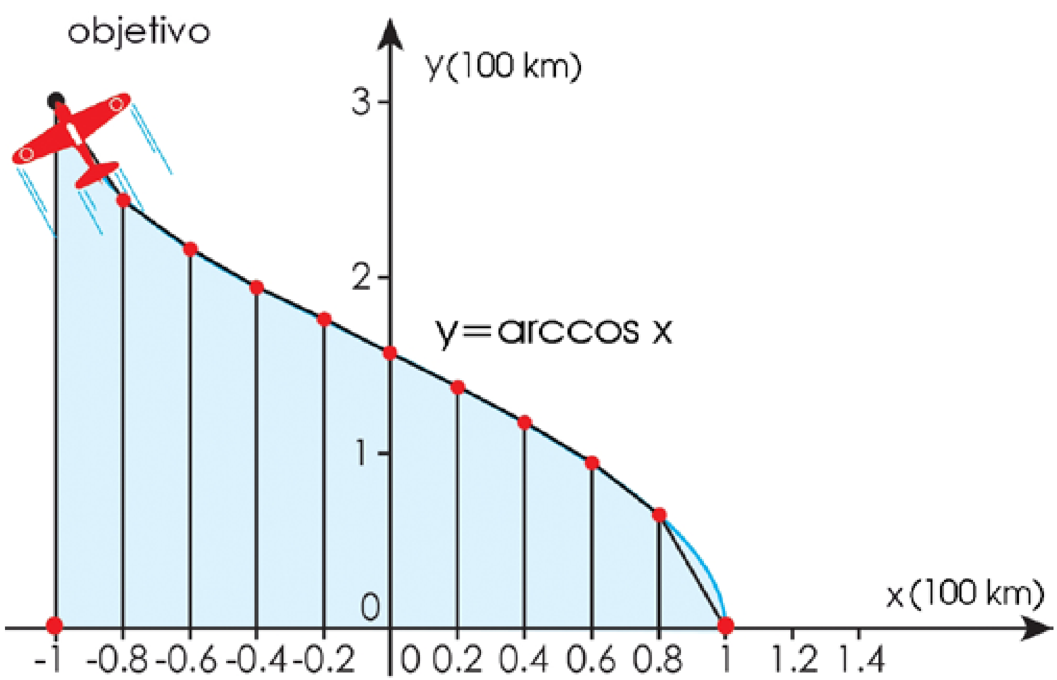
centenas de km; la de la segunda cuerda,

$$\sqrt{(0.1\cdot 1.99)^2 + (\arccos(-0.99 + 0.1\cdot 1.99) - \arccos(-0.99 + 2\cdot 0.1\cdot 1.99))^2}$$

centenas de km; la de la tercera,

$$\sqrt{(0.1\cdot 1.99)^2 + (\arccos(-0.99 + 2\cdot 0.1\cdot 1.99) - \arccos(-0.99 + 3\cdot 0.1\cdot 1.99))^2}$$

centenas de km; etc.



¡Procede a calcular la suma de estas longitudes!

$$L_{10} = \sum_{n=0}^{9} \sqrt{(0.1 \cdot 1.99)^2 + (\arccos(-0.99 + n \cdot 0.1 \cdot 1.99) - \arccos(-0.99 + (n+1) \cdot 0.1 \cdot 1.99))^2} \simeq$$

$$\simeq 3.6651.$$

Ahora divide el intervalo $[-0.99, 1]$ en 100 partes iguales de longitud $0.01 \cdot 1.99$, y reemplaza la curva por las 100 cuerdas:

$$L_{100} = \sum_{n=0}^{99} \sqrt{(0.01 \cdot 1.99)^2 + (\arccos(-0.99 + n \cdot 0.01 \cdot 1.99) - \arccos(-0.99 + (n+1) \cdot 0.01 \cdot 1.99))^2} \simeq$$

$$\simeq 3.6777.$$

Si prosigues del mismo modo, sabrás que

$$L_{ruta} \simeq 3.6782 \cdot 100 \text{ km}.$$

Anota tu respuesta:

la última ruta del piloto kamikaze mide 367 kilómetros con 820 metros.

¡La definición de Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Asakka Kobayashi cuenta:

—Los motores ya estaban calentando cuando llegó la noticia de que Japón se había rendido y que debía abortar la misión.

No hay enemigos externos. ¡El único blanco enemigo al cual necesitas estrellar es tu ego!

LA MARIQUITA

En un espléndido día de verano, unas niñas se preparan para saltar a la soga. Una mariquita, que está en un extremo de la soga, piensa: "¡Qué cómodo este puente! Por él cruzaré al otro lado sin dificultad."

Y empieza la travesía. Si las dos niñas que sostienen la soga se encuentran a una distancia de 2 metros la una de la otra, y el punto más bajo de la soga se halla a la altura de 1 metro del piso, ¿puedes decir qué tan largo será el camino de la mariquita?

Para calcular la longitud de la soga, utiliza el siguiente conocimiento de la física:

> La ecuación de la curva, asumida por una cadena flexible y uniforme que cuelga bajo su propio peso es
>
> $y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$, donde $y(0) = \frac{1}{a}$.

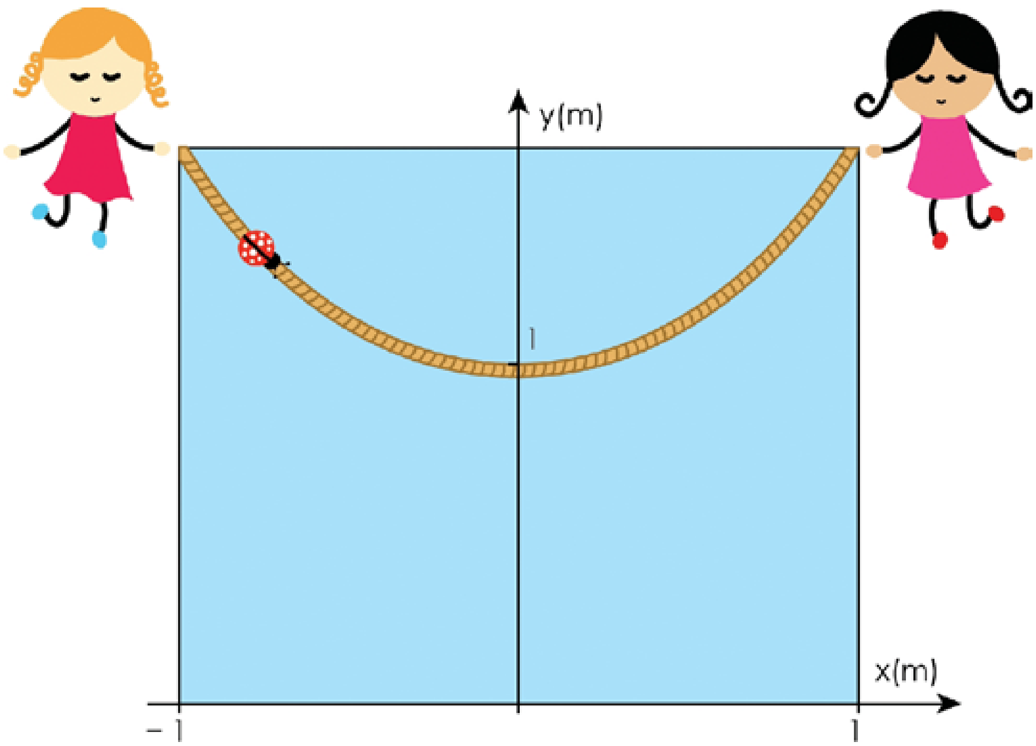
Esta curva se denomina *catenaria*, por la palabra latina *cadena*, que significa *catena*. ¿Cuál es la ecuación de la catenaria en el caso de la mariquita?

Primero descubre el valor del parámetro a:

$$y(0)=\frac{1}{a}=1.$$

Por lo tanto,

$$a=1.$$



Es decir, la ecuación de la catenaria que tiene que recorrer la mariquita es la siguiente:

$$y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}).$$

Como la curva es simétrica, es suficiente que calcules la longitud de su mitad positiva:

$$y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),\quad 0\leq x\leq 1\,m. \qquad (*)$$

Entonces, la longitud de la soga será igual a la siguiente integral:

$$L=2\int_{0}^{1}\sqrt{1+(y'(x))^{2}}\,dx.$$

¡Encuentra la derivada de la función (*)!

Realiza el cálculo:

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Ahora puedes conocer la parte principal de la función integrando:

$$1+(y'(x))^2 = 1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Reemplaza esta expresión en la fórmula de longitud:

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e - \frac{1}{e} = 2.350\ldots m.$$

Anota tu respuesta:

la soga mide 2 metros con 35 centímetros.

¡La integral de Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

Pero, antes de que la mariquita haya realizado la mitad de la travesía, las niñas empezaron a girar la soga. ¡Qué agitación, qué desasosiego!

—¿Qué será de mí? —pensó la mariquita, y en ese mismo instante salió volando por los aires. ¡Solo entonces recordó que tenía alas!

Las tribulaciones de la vida tienen por objetivo hacerte acuerdo que sabes volar.

El CABALLO VOLADOR

Sucedió una vez que un emperador chino condenó a muerte a su primer ministro. El día en que el primer ministro iba a ser ahorcado, el emperador fue a verle para despedirse.

Cuando llegó a la celda, vio que el primer ministro estaba llorando.

—Eres un hombre valiente, —dijo el emperador,— no puedo creer que estés llorando porque vas a morir esta tarde. ¿De qué se trata?

—No es mi muerte, —dijo el primer ministro,— porque el hombre tiene que morir algún día; pero estoy llorando porque he visto su caballo ahí afuera.

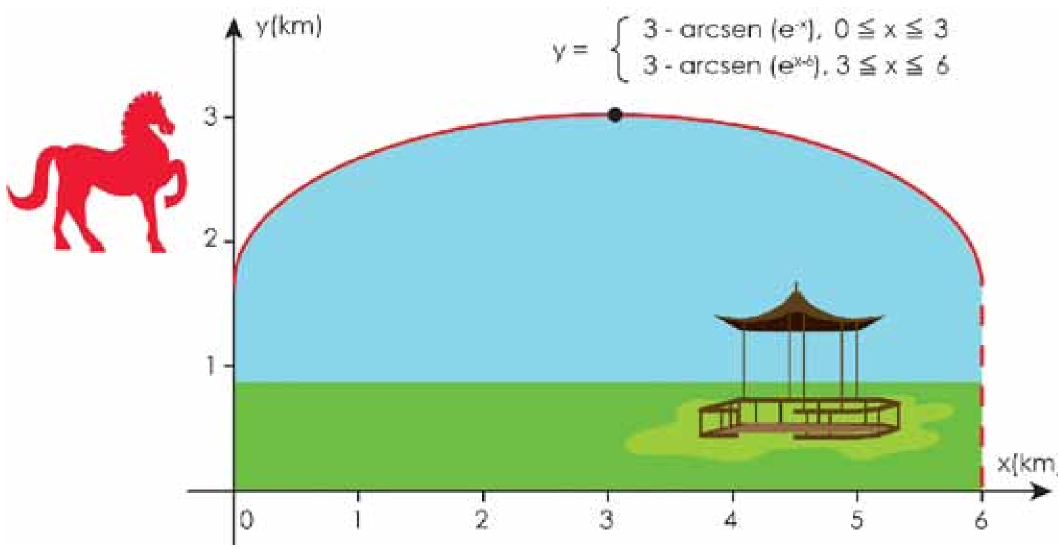
—¿Debido al caballo? ¿Por qué?

—Toda mi vida he estado buscando este tipo de caballo porque conozco un antiguo secreto de cómo enseñar a volar a un caballo; pero solo a un tipo en particular. Éste es el tipo, y éste es mi último día. No estoy preocupado por mi muerte, sino porque un antiguo arte se perderá conmigo. Por eso estoy llorando.

El emperador se excitó mucho.

—¿Cuántos días tardarías? —preguntó.

—Por lo menos un año, y este caballo empezará a volar. Incluso le puedo mostrar la curva que describirá en el aire. Será ésta:



¿Puedes decir qué longitud recorrerá por el cielo el caballo volador?

Como la curva es simétrica respecto del punto $x = 3$, puedes calcular tan solo la mitad de la trayectoria celestial. Se trata del siguiente límite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}\,.$$

Para calcularlo, divide el intervalo $[0,3]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1 \cdot 3$, y reemplaza la curva por las 10 cuerdas. Así, la longitud de la primera cuerda medirá

$$\sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + ((3 - \operatorname{arcsen}(e^{-0})) - (3 - \operatorname{arcsen}(e^{-0.1 \cdot 3}))^2} =$$

$$\sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-0}) - \operatorname{arcsen}(e^{-0.1 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

la de la segunda

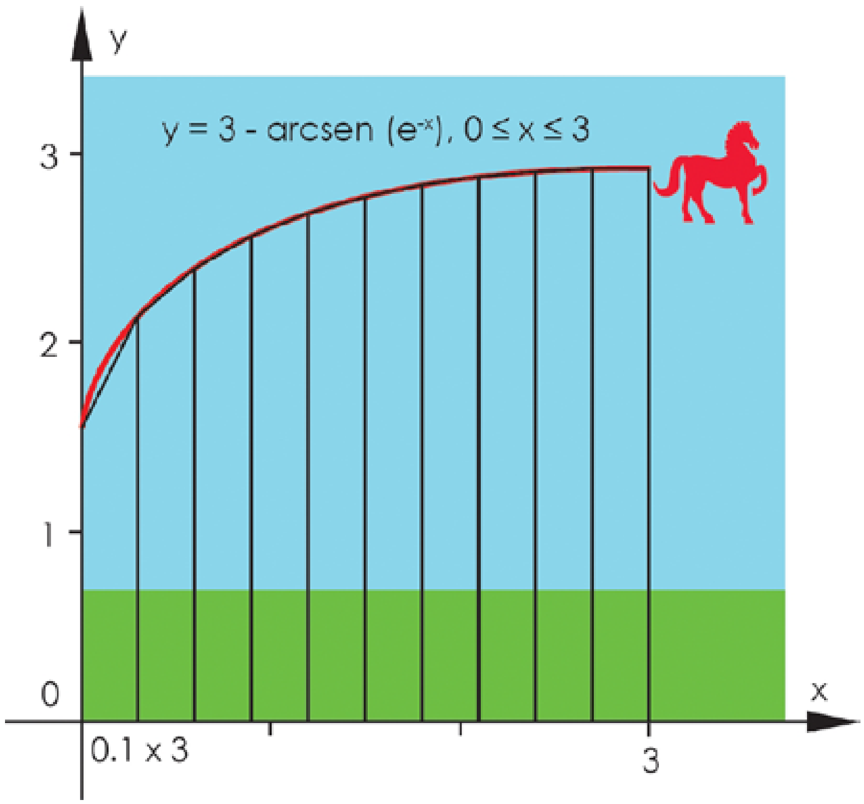
$$\sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + ((3 - \operatorname{arcsen}(e^{-0.1 \cdot 3})) - (3 - \operatorname{arcsen}(e^{-2 \cdot 0.1 \cdot 3}))^2} =$$

$$\sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-0.1 \cdot 3}) - \operatorname{arcsen}(e^{-2 \cdot 0.1 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

la de la tercera,

$$\sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-2 \cdot 0.1 \cdot 3}) - \operatorname{arcsen}(e^{-3 \cdot 0.1 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

etc.



¡Ahora calcula la suma de estas longitudes!

$$L_{10} = \sum_{n=0}^{9} \sqrt{(0.1 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-n \cdot 0.1 \cdot 3}) - \operatorname{arcsen}(e^{-(n+1) \cdot 0.1 \cdot 3}))^2} \simeq 3.6721.$$

Luego divide el intervalo $[0,3]$ en 100 partes iguales de longitud $0.01 \cdot 3$, y reemplaza la curva por las 100 cuerdas. Así, la longitud de la primera cuerda medirá

$$\sqrt{(0.01 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-0}) - \operatorname{arcsen}(e^{-0.01 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

de la segunda,

$$\sqrt{(0.01 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-0.01 \cdot 3}) - \operatorname{arcsen}(e^{-2 \cdot 0.01 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

de la tercera,

$$\sqrt{(0.01 \cdot 3)^2 + (\operatorname{arcsen}(e^{-2 \cdot 0.01 \cdot 3}) - \operatorname{arcsen}(e^{-3 \cdot 0.01 \cdot 3}))^2} \text{ km;}$$

La suma de estas longitudes será igual a

$$L_{100} = \sum_{n=0}^{99} \sqrt{(0.01 \cdot 3)^2 + (\text{arcsen}(e^{-n \cdot 0.01 \cdot 3}) - \text{arcsen}(e^{-(n+1) \cdot 0.01 \cdot 3}))^2} \simeq 3.6918.$$

Y del mismo modo sabrás que

$$L_{1000} \simeq 3.6925,$$
$$L_{trayectoria} \simeq 2 \cdot 3.6925 \simeq 7.385 \, \text{km}.$$

Anota tu respuesta:

el caballo volador recorrerá por el cielo 7 kilómetros con 385 metros.

¡El método de rectificación resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?. (En este caso también podrías obtener la respuesta usando técnicas de integración).

—Te pondré en libertad un año, —dijo el emperador al primer ministro.— Pero recuerda: si en un año el caballo no vuela, serás condenado de nuevo y ahorcado. Y, si el caballo vuela, serás perdonado y te daré la mitad de mi reino. ¡Porque seré el primer emperador de la historia que tiene un caballo volador! Así que sal de la prisión y no llores.

El primer ministro se montó en el caballo y fue a la casa feliz y riéndose. Su mujer estaba llorando.

—La noticia ha llegado antes que tú, —le dijo,— pero ¿solo un año? Y sé que no conoces ningún arte, y este caballo no puede volar. Esto es solo un truco, un engaño, así que si pudiste pedir un año, ¿por qué no pediste diez años?

El primer ministro dijo:

—¡Eso sería demasiado! El caballo volando ya es demasiado, y luego pedir diez años habría sido obvio que era un truco. ¡Pero no llores!

—Me entristece todavía más que estaré viviendo contigo y después de un año te ahorcarán. ¡Este año va a ser un tormento!

El primer ministro dijo:

—Ahora te diré un antiguo secreto que no conoces. En este año el rey puede morir, el caballo puede morir, yo puedo morir. O, —¿quién sabe?— ¡puede que el caballo aprenda a volar!

El hombre vive mediante la esperanza.

UNA LÍNEA EN EL VACÍO

Arthur Eddington[11] se paseaba con un amigo por la playa. De pronto tomó una concha y trazó una línea en la arena.

—¿Cuánto mide esta línea? —preguntó.

La línea seguía la ecuación

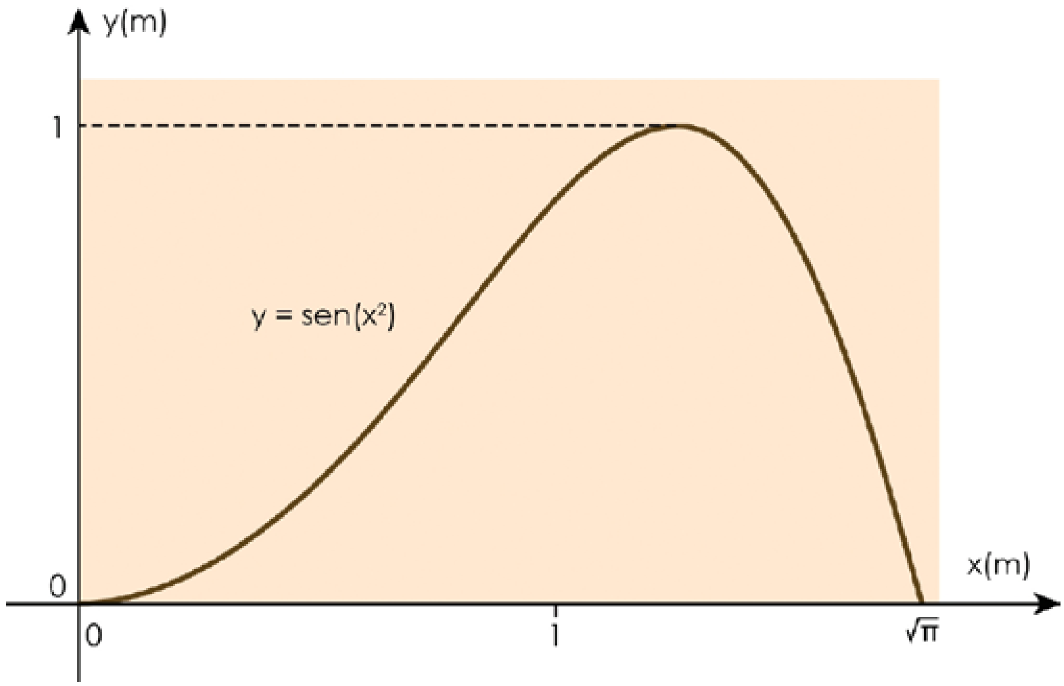
$$y = \operatorname{sen}(x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}\ \text{m},$$

de modo que el amigo tuvo que ponerse a pensar. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

¡Usa la definición de longitud de arco que descubriste junto con Bernhard Riemann! La fórmula que te interesa es ésta:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

[11] Astrónomo y físico británico que vivió en los años 1882-1944.



Como

$$y'(x) = 2x\cos(x^2),$$

la longitud de la línea, trazada en la arena, será igual a

$$L = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{1+4x^2\cos^2(x^2)}\,dx.$$

Como esta función no tiene primitiva elemental, ¡realiza el cálculo de las sumas de Riemann!

Primero divide el intervalo $[0, \sqrt{\pi}\,]$ en 10 partes iguales. Entonces, la suma de las áreas de los diez rectángulos será la siguiente:

$$A_{10} = 0.1\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{9}\sqrt{1+4(0.1\sqrt{\pi}\,n)^2\cos^2((0.1\sqrt{\pi}\,n)^2)} = 2.5971\ldots \text{m}.$$

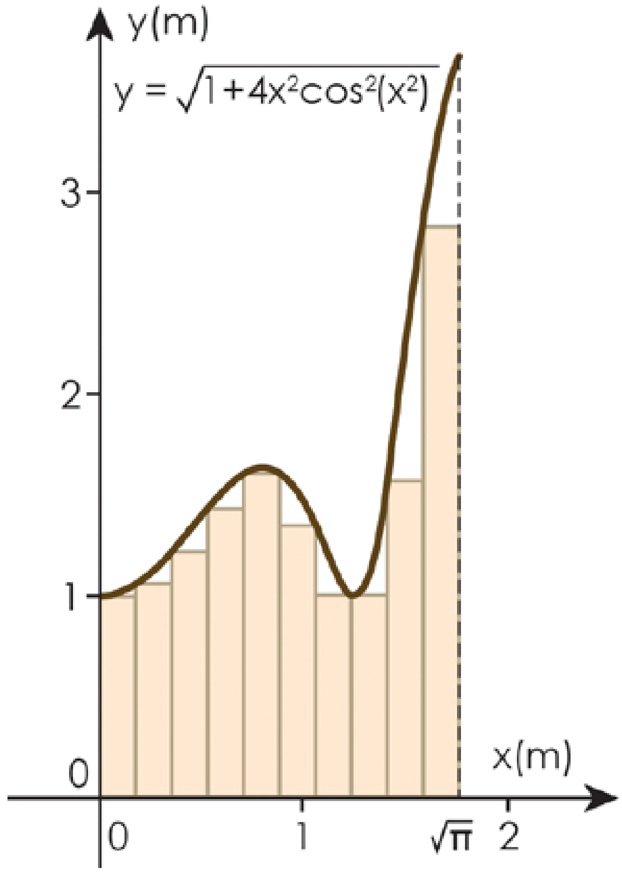
Ahora divide el intervalo $[0, \sqrt{\pi}\,]$ en 100 partes iguales. Sabrás que

$$A_{100} = 0.01\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{99}\sqrt{1+4(0.01\sqrt{\pi}\,n)^2\cos^2((0.01\sqrt{\pi}\,n)^2)} = 2.806\ldots \text{m}.$$

Si procedes del mismo modo, averiguarás que

$$A_{1000} = 0.001\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{999}\sqrt{1+4(0.001\sqrt{\pi}\,n)^2\cos^2((0.001\sqrt{\pi}\,n)^2)} = 2.827\ldots\text{m},$$

etc.



Anota tu respuesta:

Eddington trazó una línea de longitud 2 m 83 cm.

¡La integral de Riemann resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

—La línea que trazaste mide 2 metros con 83 centímetros, —dijo el amigo.

—¡No es cierto! —exclamó Eddington, alborozado.— Esta línea, aunque parezca larga, no mide nada, pues está trazada en la arena, y entre granos de arena hay vació. ¡No puedes trazar una línea en el vacío, porque el vacío la engullirá!

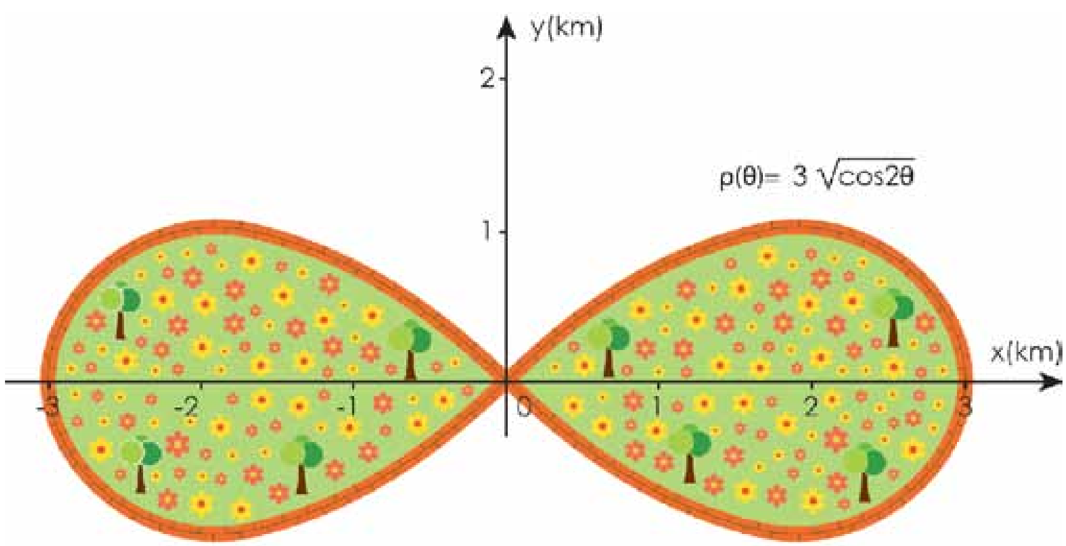
Los que viven en el cuerpo, trazan la trayectoria de su vida en la arena.

Sección IV

Áreas en coordenadas polares

EL VERGEL DEL REY

Una vez vivía un rey cuyo vergel tenía la forma del número 8:



Y es que el jardinero lo había diseñado siguiendo la lemniscata de Bernoulli.

Un día el rey convocó a todos los sabios del palacio y les hizo esta pregunta:

—¿Qué área abarca mi vergel?

Los sabios tuvieron que ponerse a pensar. ¿Les ayudas?

El vergel tiene la forma de la lemniscata de Bernoulli, así que su ecuación en coordenadas polares es

$$\varrho(\theta)=3\sqrt{\cos 2\theta}\ \text{km},\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

¿Cómo calcularías su área? Jacques Bernoulli encontró un método para hacerlo. Su idea es la siguiente.

Si una curva viene dada por la ecuación

$$\rho=\rho(\theta),\ \ \theta_0\leq\theta\leq\theta_n.$$

Bernoulli descompone el sector, definido por los radios polares de ángulos θ_0 y θ_n, en sectores elementales por los radios intermedios θ_1, θ_2, ..., θ_{n-1}. Entonces, el área de un sector cualquiera, limitado por dos radios consecutivos θ_k y θ_{k+1}, quedará comprendida entre las áreas de los dos sectores circulares de la misma abertura $(\theta_k-\theta_{k+1})$, cuyos radios sean el mínimo m_k y el máximo M_k de la función $\rho(\theta)$ en el intervalo $[\theta_k,\theta_{k+1}]$. Y, como los valores de estas áreas son

$$A_{mín}=\frac{1}{2}m_k^2(\theta_k-\theta_{k+1}),\ \ A_{máx}=\frac{1}{2}M_k^2(\theta_k-\theta_{k+1}),$$

el área del sector que queremos cuadrar deberá cumplir la condición

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}m_k^2(\theta_k-\theta_{k+1})\leq A\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}M_k^2(\theta_k-\theta_{k+1}).$$

Ahora Bernoulli hace crecer indefinidamente el número de radios intermedios, de modo que $(\theta_k-\theta_{k+1})$ tienda a 0; entonces, las dos sumas anteriores deberán tender al límite común A, que es la integral definida

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_n}\rho^2(\theta)d\theta.$$

Anota el hallazgo de Jacques Bernoulli:

si una curva en coordenadas polares obedece a la ecuación $\rho=\rho(\theta)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_n$, su área se calculará por la siguiente fórmula:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_n}\rho^2(\theta)d\theta.$$

¡Aplica este resultado para conocer el área del vergel del rey!

En este caso

$$A=\frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\sqrt{\cos 2\theta})^2 d\theta=18\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=9[\operatorname{sen}2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=9\,\text{km}^2.$$

Anota tu respuesta:

el vergel del rey abarca 9 kilómetros cuadrados de superficie.

¡La integral de Riemann resolvió el problema eficazmente!, ¿no crees?.

—Tu vergel abarca 9 kilómetros cuadrados de superficie, majestad, —dijeron los sabios.— Así lo afirma la ciencia.

—¡Muy extraño! —dijo el rey.— A mí me parece que una figura que tiene la forma del número 8, debería de abarcar un área de 8 kilómetros cuadrados, y no de 9.

Se quedó pensando en el misterio, y lo sigue haciendo hasta ahora.

Sección V

Longitud en coordenadas polares

LA HORMIGA EN LA PAJITA

Una mañana Albert Einstein estaba sentado en el umbral de su casa. Vio en el suelo una hormiga, tomó una pajita y esperó que la hormiga se trepara sobre ella. Acercó sus dedos a ella y empezó a girar la pajita con velocidad angular constante, permaneciendo siempre en el plano horizontal. La hormiga empezó a desplazarse por la pajita, también con una velocidad constante. Al finalizar la vuelta, la viajera se encontraba a la distancia de 10 centímetros del origen.

—¿Qué distancia crees que recorriste? —preguntó Einstein a la hormiga.— ¿Tan solo 10 centímetros o algo más?

La hormiga tuvo que ponerse a pensar. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

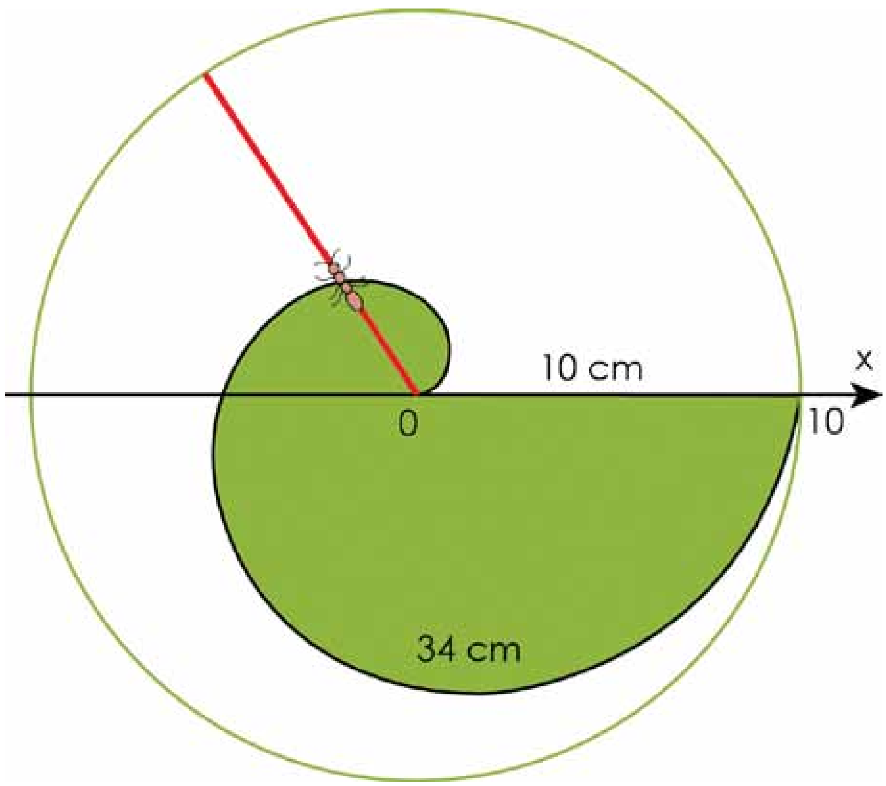
Deseas calcular la longitud de la espiral de Arquímedes. Su ecuación en coordenadas polares es la siguiente:

$$\rho = a\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

En el caso de la hormiga la ecuación adquiere la siguiente forma:

$$\rho = 1.6\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(De este modo, cuando el ángulo se hace igual a 2π, el radio polar mide, aproximadamente, 10 centímetros).



¿Cómo calcularías la longitud de la espiral? Jacques Bernoulli te sugiere el siguiente método.

Si una curva viene dada por la ecuación

$$\rho = \rho(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_n,$$

dice Bernoulli, su longitud puede ser calculada por la fórmula conocida

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta.$$

Pero en este caso

$$x(\theta) = \varrho(\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = \varrho(\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

de modo que

$$x'(\theta) = -\varrho(\theta)\operatorname{sen}\theta + \varrho'(\theta)\cos\theta, \;\; y'(\theta) = \varrho(\theta)\cos\theta + \varrho'(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

¡Eleva al cuadrado las dos expresiones! Descubrirás que

$$(x'(\theta))^2 = (-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta)^2 =$$

$$\varrho^2\operatorname{sen}^2\theta + (\varrho')^2\cos^2\theta - 2\varrho\varrho'(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

y que

$$(y'(\theta))^2 = (\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta)^2 =$$

$$\varrho^2\cos^2\theta + (\varrho')^2\operatorname{sen}^2\theta + 2\varrho\varrho'\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Entonces, la suma de estas dos expresiones será igual a

$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = \varrho^2 + (\varrho')^2.$$

Junto a Jacques Bernoulli acabas de descubrir lo siguiente:

si una curva en coordenadas polares obedece a la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$, su longitud se calculará por la siguiente fórmula:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)}\, d\theta.$$

¡Aplica este resultado para conocer la longitud de la espiral de la hormiga en su primera vuelta!

Solo tienes que hacer uso de la fórmula $\rho = 1.6\theta$. Obtendrás:

$$L_{espiral} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)}\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2.56 \cdot \theta^2 + 2.56}\, d\theta = 1.6 \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta.$$

Según la tabla de primitivas,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} \pm \ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\right]_0^{2\pi} =$$

$$\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) \simeq 21.256\ldots.$$

Ya lo sabes:

$$L_{espiral} \simeq 1.6 \cdot 21.256 \simeq 34.01\,\text{cm}.$$

Ésta distancia es el resultado del movimiento conjunto de la hormiga y de la pajita. Y también conoces la trayectoria que recorrió la hormiga por sus propias fuerzas:

$$L_{hormiga} = 10\,\text{cm}.$$

Anota tu respuesta:

por sí misma la hormiga recorrió 10 centímetros; pero, gracias al movimiento giratorio, se ha desplazado 34 centímetros.

¡Ya sabes calcular longitudes de curvas en coordenadas polares!

—¿Cómo pueden 10 centímetros ser iguales a 34? —se preguntaba Einstein, perplejo.

Como resultado de sus deliberaciones nació la Teoría de la relatividad.

—Todo lo visible es relativo, —explicó Einstein a los amigos,— depende de cómo lo miremos.

—¿Y no hay nada Absoluto? —le preguntaron.

—Sí, lo hay, —dijo Einstein:— la Comprensión.

¡El Que Comprende un espectáculo relativo debe de ser Absoluto!

EN LA PISTA DE CARRERAS

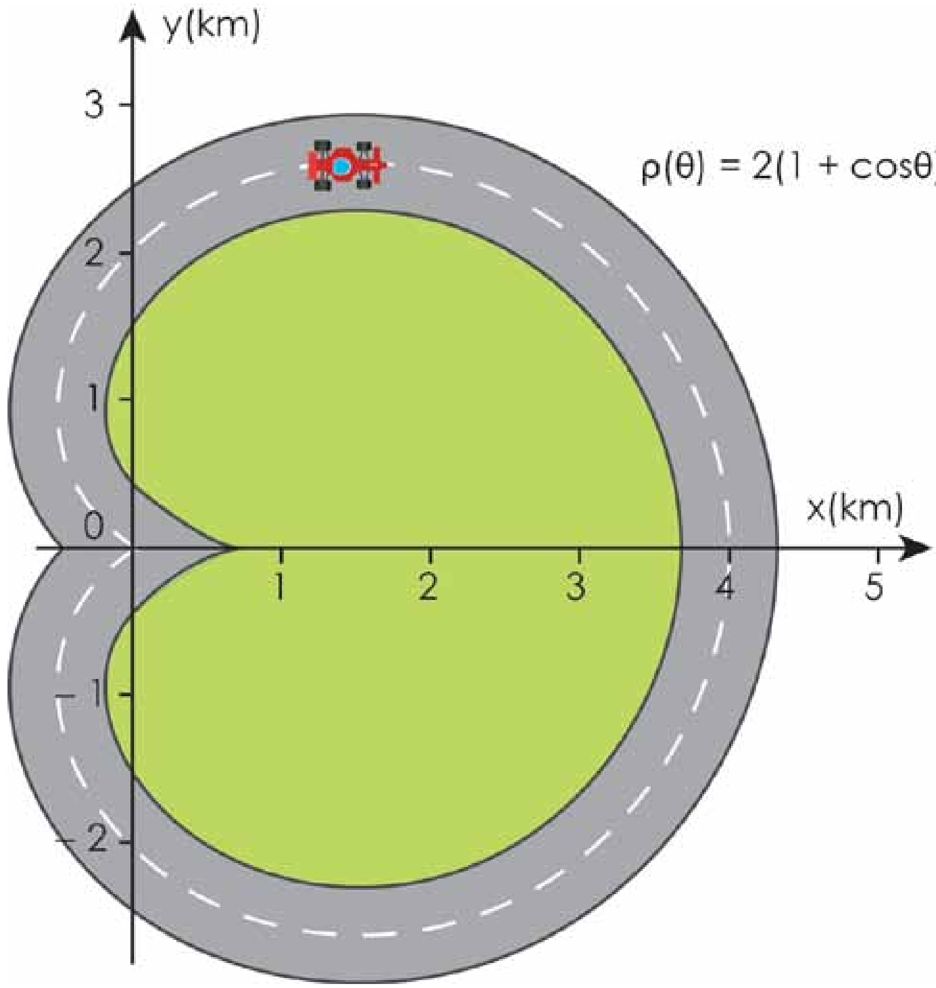
En esta pista de carreras los carros deportivos prueban sus poderosos motores. La autopista tiene la forma de una cardioide cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\varrho(\theta)=2(1+\cos\theta)\ \mathrm{km},\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

Para ser calificado para participar en la siguiente competencia, el carro debe desarrollar una mínima velocidad de 240 km/h. Un deportista acaba de recorrer la autopista en 3 minutos con 48 segundos. ¿Crees que quedó calificado para competencia?

Como recordarás, la longitud de una curva en coordenadas polares se calcula por la fórmula

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\rho^2(\theta)+(\rho')^2(\theta)}\,d\theta.$$



En este caso

$$\varrho'(\theta) = -2sen\theta,$$

y, por lo tanto, la integral que te interesa calcular es la siguiente:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4(1+\cos\theta)^2 + (-2sen\theta)^2(\theta)}\, d\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta.$$

Para lograrlo, grafica la función integrando. Divide el intervalo $[0,\pi]$ en 10 partes iguales de longitud $0.1\cdot\pi$, y reemplaza al área debajo de la curva por los 10 rectángulos, cuya base mide $0.1\cdot\pi$ y la altura es la ordenada de la curva. Así, la altura del primer rectángulo medirá

$$\sqrt{1+\cos(0.1\pi)}\ \text{km};$$

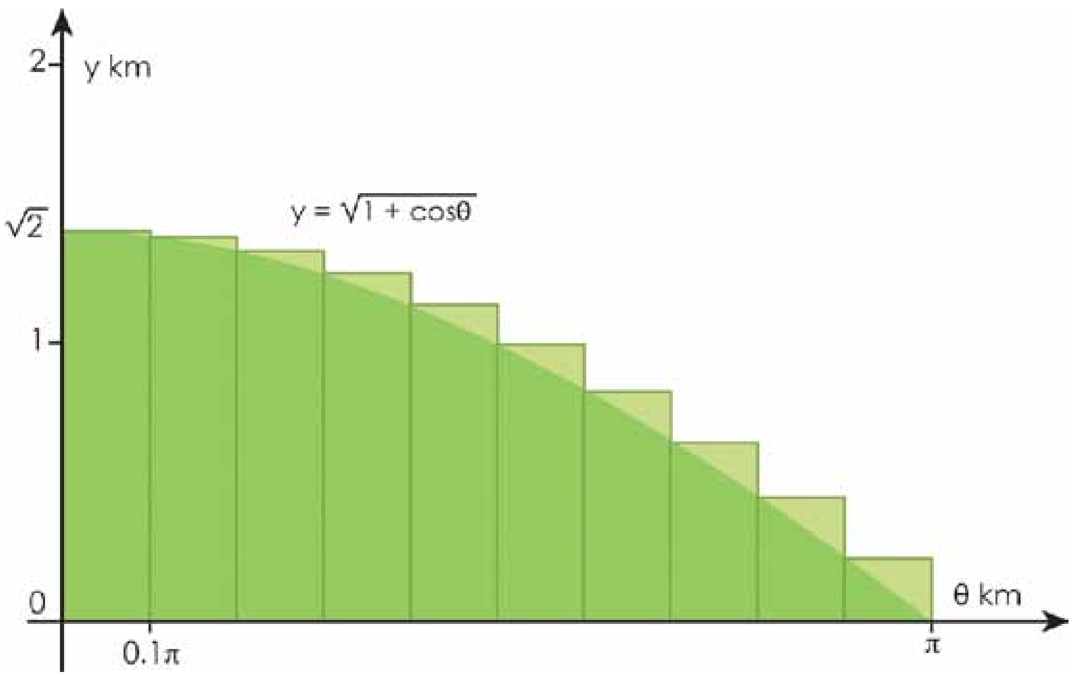
del segundo,

$$\sqrt{1+\cos(0.2\pi)}\ \text{km};$$

del tercero,

$$\sqrt{1+\cos(0.3\pi)}\ \text{km};$$

etc.



Procede a calcular la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$A_{10} = 0.1 \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{10} \sqrt{1+\cos(0.1 \cdot n\pi)} = 2.60\ldots \text{km}^2.$$

Del mismo modo calcula las sumas más finas:

$$A_{100} = 0.01 \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{100} \sqrt{1+\cos(0.01 \cdot n\pi)} = 2.8061\ldots \text{km}^2,$$

$$A_{1000} = 0.001 \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{1000} \sqrt{1+\cos(0.001 \cdot n\pi)} = 2.8262\ldots \text{km}^2,$$

etc. Si perseveras, sabrás que el valor del límite de estas sumas es de $2.8284\ldots$ km. Entonces, ya conoces la longitud de la pista de carreras:

$$L_{pista} = 4\sqrt{2} \cdot 2.8262 = 15.987\ldots \simeq 16\ \text{km}.$$

Por lo tanto, la velocidad promedio del auto es

$$v = \frac{16\,\mathrm{km}}{0.633\mathrm{h}} \simeq 252.76\,\mathrm{km/h}.$$

Como esta cantidad es mayor que 240 km/h, ya lo sabes:

el auto calificó para participar en la competencia.

¡Como puedes ver, la integral de Riemann ayuda eficazmente al deporte!

Sección VI

Volumen de revolución

SARASVATI, DIOSA DE LA SABIDURÍA

El río Sarasvati, en el norte de la India, es la encarnación terrenal de Sarasvati, Diosa de la sabiduría. Ella inventó el idioma sánscrito y la escritura devanagari en la que se escriben el sánscrito, el hindi y otros idiomas hindúes. Es también la patrona de las artes, las ciencias y el lenguaje.

Sarasvati es eternamente joven, de elevada estatura, piel clara y tiene cuatro brazos. Acostumbra a sentarse sobre una flor de loto, y toca un instrumento de cuerda llamado vina, que al parecer inventó ella misma.

Sarasvati es la esposa de Brahma, el Espíritu Supremo, y vive con él en Brahmalok. Se dice que Brahma hizo crecer sus tres cabezas adicionales para poder mirarla estuviera donde estuviera, de tanto como la amaba.

Pero el matrimonio no siempre ha sido apacible. En cierta ocasión, Brahma se encontraba preparando un importante sacrificio religioso y envió un mensajero en busca de Sarasvati, que se retrasaba en llegar.

—No estoy vestida, —respondió Sarasvati,— y, además, tengo varias cosas que hacer antes de que pueda participar en el sacrificio de Brahma. Asistiré más tarde, en compañía de Lakshmi, Parvati e Indrani, esposas de los otros dioses.

El mensajero regresó a informar a Brahma de la respuesta de su esposa. El Dios se indignó ante la arrogancia de Sarasvati, sobre todo porque el sacrificio debía realizarse en un momento adecuado y preciso. Se volvió a Indra y le dijo:

—Ve a buscar una sustituta para Sarasvati, pues no puedo llevar a cabo el sacrificio sin una esposa a mi lado.

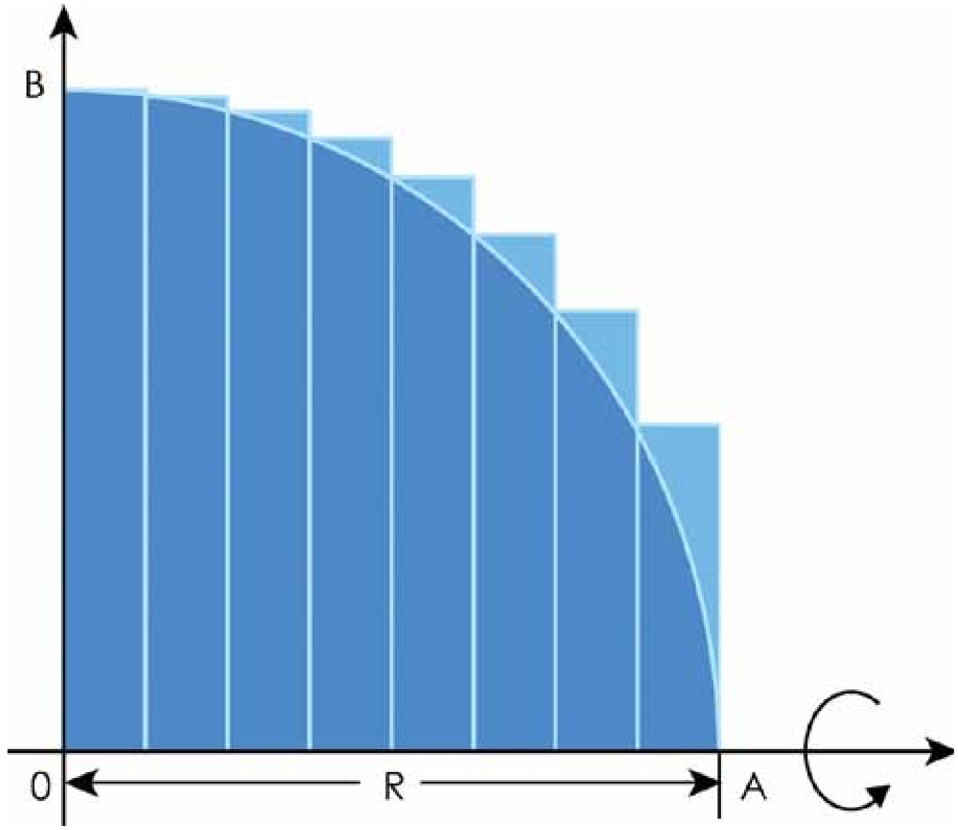
Indra partió para cumplir la orden y, habiendo encontrado una lechera muy bella y piadosa llamada Gayatri, le dijo que la necesitaban como esposa para Brahma y la llevó a Brahmalok. Allí la vistieron con lujosos ropajes, decorados con maravillosas gemas, y la sentaron en el púlpito nupcial con la aprobación de todos los dioses.

La ceremonia matrimonial estaba a punto de concluir cuando llegaron Sarasvati, Lakshmi, Parvati e Indrani en una carroza tirada por un cisne celestial. Cuando las cuatro diosas descendieron del carruaje, Sarasvati descubrió con asombro que Brahma acababa de casarse con otra, y se enfureció tanto que reprendió a su esposo en público:

—¿Es posible que tú, Brahma, padre de dioses y sabios, seas capaz de tomar una segunda esposa, viviendo aún la primera? ¿Y, además, en presencia de todos estos dioses y santos? ¡No creo que se encuentre otro esposo tan infiel en toda la Esfera de la Creación!

Sabiendo que la Esfera de la Creación posee un diámetro de $20000'000000$ kilómetros, ¿puedes decir de qué volumen está hablando Sarasvati?

Te interesa calcular el volumen de una esfera de radio $10000'000000$ kilómetros, pero Johannes Kepler te sugiere determinar el volumen de una semiesfera genérica de radio R. Para producirla, Kepler toma la cuarta parte OAB de un círculo de radio R, y la hace girar sobre su base OA. Para hacer posible el cálculo, Kepler divide la base en n segmentos, todos de la misma longitud $\frac{R}{n}$, y representa a OAB como una reunión de los siguientes rectángulos:



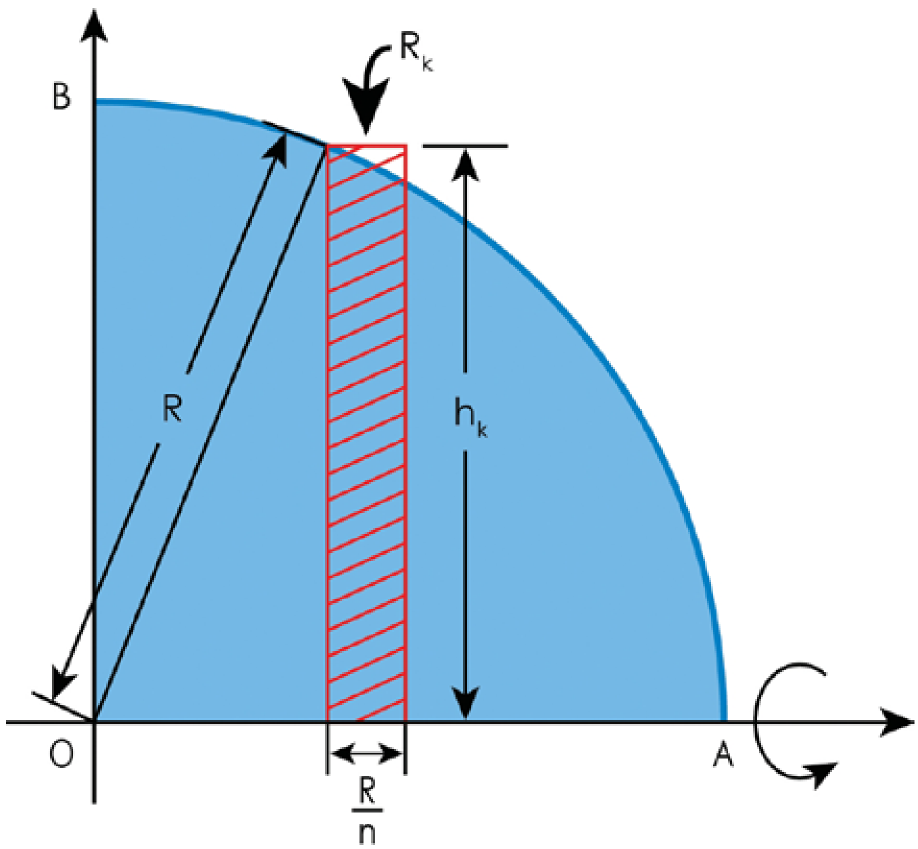
Kepler considera que, al hacer girar la reunión de estos rectángulos alrededor del segmento OA, se obtendrá una buena aproximación del volumen de la semiesfera.

Kepler presta atención al k-ésimo rectángulo, R_k. Su altura es h_k, y, al girar, éste engendrará un cilindro de volumen V_k. ¿Cómo determinarías ese volumen? Así:

$$V_k = \pi h_k^2 \cdot \frac{R}{n}.$$

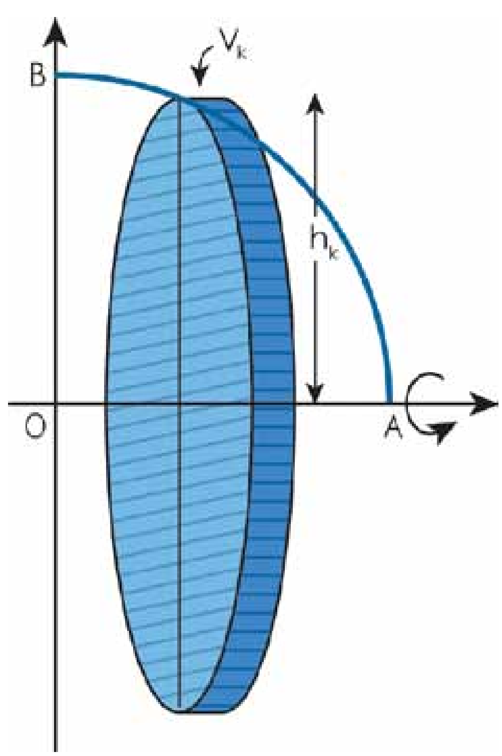
Por el teorema de Pitágoras, la altura del rectángulo h_k puede ser conocida a partir de la relación

$$h_k^2 = R^2 - (\tfrac{k}{n}R)^2.$$



Por lo tanto, el volumen V_k poseerá el siguiente valor:

$$V_k = \pi \frac{R}{n}[R^2 - (\frac{k}{n}R)^2].$$



En otras palabras,

$$V_k = \pi \frac{R^3}{n}(1 - \frac{k^2}{n^2}).$$

Entonces, el volumen de la semiesfera será igual a la suma de estas expresiones:

$$V_{semiesfera} = \pi \frac{R^3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k^2}{n^2}).$$

¡Solo tienes que calcular esta suma!

Para lograrlo, Kepler recuerda la fórmula que permite conocer la suma de los cuadrados de los primeros n números. Es ésta:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \ .$$

Gracias a ella, Kepler ya sabe que

$$V_{semiesfera} = \pi R^3 (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}).$$

El matemático alemán considera que, para valores muy grandes de n, los dos últimos términos pueden ser despreciados, pues tienden a 0. Entonces, el volumen de una semiesfera ya no es secreto para ti:

$$V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Y, por supuesto, el volumen de una esfera será el doble de esta cantidad:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ésta es la respuesta de Johannes Kepler:

> el volumen de una esfera de radio R excede al cubo de su radio $\frac{4}{3}\pi$ veces:
>
> $$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

¿Te gustó la manera de Kepler de determinar el volumen de una esfera? ¡Es genial!, ¿verdad?.

¡Aplica este descubrimiento a la Esfera de la Creación! Como su diámetro mide 20000'000000 de kilómetros, ya lo sabes:

$$V_{\text{Esfera de la creación}} = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot (10^{10})^3 \simeq 2.1 \cdot 10^{30}\ \text{km}^3.$$

Ésta es tu respuesta:

> la Esfera de la Creación contiene, aproximadamente, $2.1 \cdot 10^{30}$ kilómetros cúbicos de volumen.

¡De ahora en adelante siempre podrás calcular cuánto espacio encierra una esfera!

Abochornado, Brahma explicó que se había casado con Gayatri solo porque necesitaba una esposa para el sacrificio y Sarasvati se había negado a acudir.

—¡Perdóname esta ofensa, Sarasvati, y nunca más sufrirás otra!

Pero la Diosa no estaba satisfecha.

—Poseo muchos poderes, logrados mediante el estudio y la concentración, y voy a utilizarlos para maldeciros a ti y a tus cómplices en esta fechoría.

Y, a pesar de que cumplió su promesa, con el tiempo perdonó a Brahma y volvió a vivir a su lado.

EL COCO

Desde lo alto de un cocotero, un mono arrojó un coco sobre la cabeza de un sufí.

Sabiendo que el coco posee un diámetro de 10 centímetros, ¿puedes decir qué volumen fue arrojado sobre el santo?

Te interesa calcular el volumen de una esfera de radio 10 centímetros. Recuerda la fórmula que descubriste con Johannes Kepler:

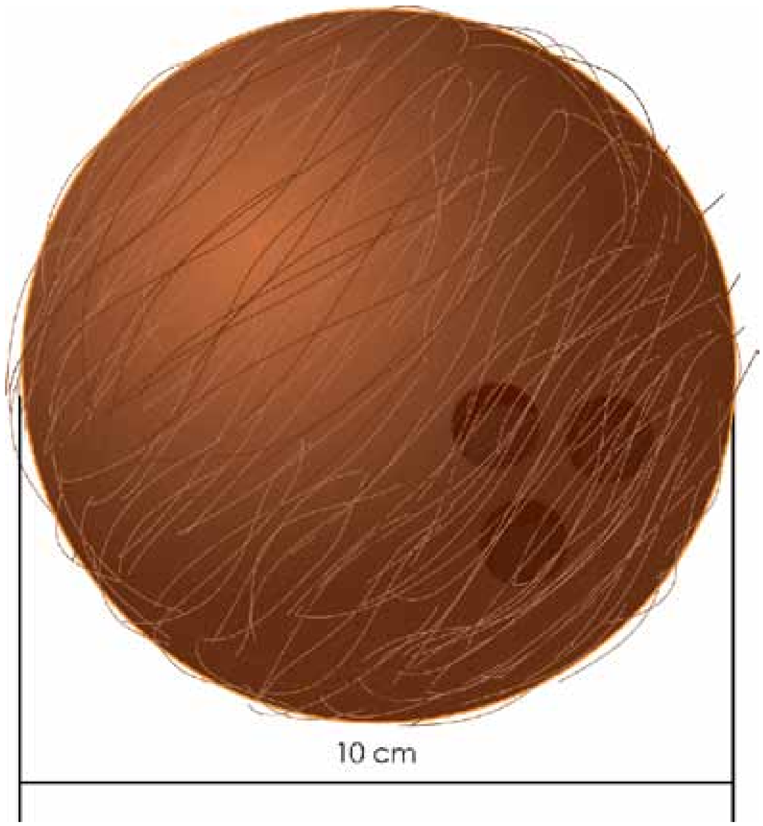
el volumen de una esfera de radio R excede al cubo de su radio $\frac{4}{3}\pi$ veces:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

¡Aplica este descubrimiento al fruto tropical!

Obtendrás lo siguiente:

$$V_{coco} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (5)^3 \simeq 523.6\,cm^3.$$



Ésta es tu respuesta:

> el coco contiene, aproximadamente, 523.6 centímetros cúbicos de volumen.

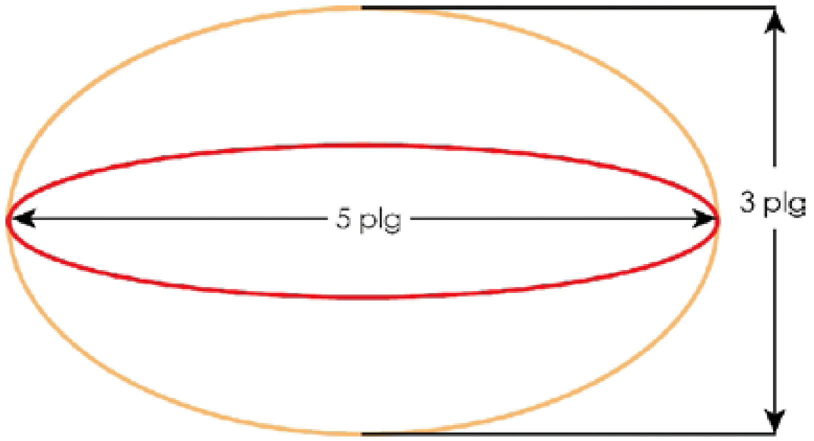
¡La fórmula de Kepler resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

El sufí no se enfadó. En vez de ello recogió el coco, bebió el dulce jugo, comió la pulpa y se hizo una escudilla con la cáscara.

¡Los hechos de la vida dependen de tu interpretación!

EL POLLO Y EL CASCARÓN

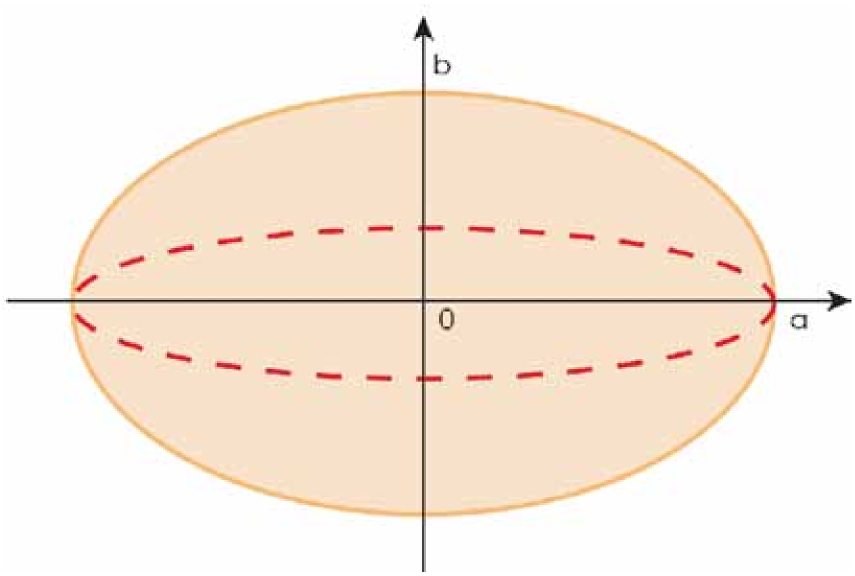
En una espléndida mañana un pollo se encontraba dentro de un huevo blanco. Era un magnífico huevo en forma de un elipsoide de revolución, cuyos diámetros medían 5 y 3 pulgadas.



—¡Creo que ya es hora de que salga del cascarón! —exclamó el pollo.— Pero antes me gustaría saber qué volumen encierra esta morada mía. ¡No creo que contenga más de 20 pulgadas cúbicas!

¿Estás de acuerdo con esta apreciación?

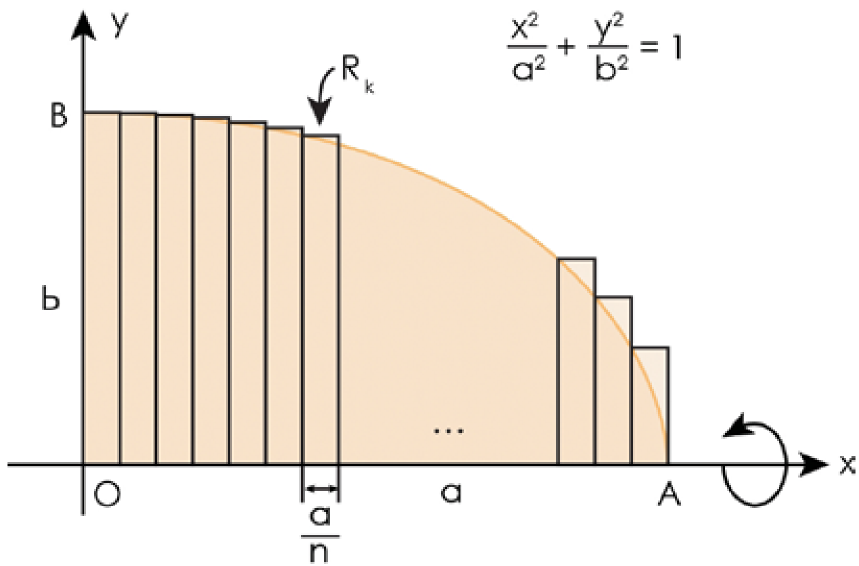
Te interesa calcular el volumen del huevo. Pero, si deseas, puedes determinar el volumen de un elipsoide de revolución genérico, cuyos semiejes miden a y b unidades.



Esto quiere decir que, entre las coordenadas x e y de los puntos de la elipse que lo engendra, siempre se cumple la siguiente relación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para producir el elipsoide, toma la cuarta parte OAB de la elipse, y hazla girar sobre su base a. Para facilitar el cálculo, divide la base en n segmentos, todos de la misma longitud $\Delta x_k, = \frac{a}{n}$, y representa a OAB como una reunión de los siguientes rectángulos:



Al hacer girar la reunión de estos rectángulos alrededor del segmento OA, se obtendrá una buena aproximación de la mitad del volumen del elipsoide.

Presta atención al k-ésimo rectángulo R_k. Su altura es y_k, y, al girar, éste engendrará un cilindro de volumen V_k. ¿A qué será igual su volumen? Al producto de la base por la altura. Y, como su base es un círculo de radio y_k, puedes escribir:

$$V_k = \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k.$$

Entonces, el volumen V del elipsoide poseerá el siguiente valor:

$$V_{elipsoide} = 2\pi \int_0^a y^2 dx.$$

¡Solo tienes que calcular esta integral!

¡Usa la ecuación del elipsoide para expresar el cuadrado de la coordenada y en términos de la coordenada x! Obtendrás:

$$y^2 = b^2(1 - \tfrac{x^2}{a^2}).$$

Ya puedes conocer el valor de la integral:

$$V_{elipsoide} = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a b^2(1 - \tfrac{x^2}{a^2})dx =$$

$$2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

¡El elipsoide de revolución te reveló su secreto! Es éste:

$$V_{elipsoide}=2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Anota tu hallazgo:

el volumen de un elipsoide de revolución de semiejes a y b (donde a es el eje de rotación) se calcula por la fórmula

$$V_{elipsoide}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

¡El Cálculo Integral resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?.

¡Aplica este descubrimiento al cascarón del pollo! Averiguarás lo siguiente:

$$V_{cascarón}=\frac{4}{3}\pi b^2 a\simeq\frac{4}{3}\cdot 3.14\cdot 2.5\cdot 1.5^2\simeq 23.55\,\mathrm{plg}^3.$$

Ésta es tu respuesta:

el cascarón contiene, aproximadamente, 23.5 pulgadas cúbicas de volumen.

¡La curiosidad de nuestro protagonista ha sido satisfecha!

El pollo dio unos picotazos a la cáscara blanca y salió del huevo. Ahora se encontraba en una habitación cuyo piso, paredes y techo también eran completamente blancas.

Desconcertado, el pollo exclamó:

—¿Cómo? ¿Otra vez?

LA NARANJA Y EL MANGO

En una huerta, un mango colgaba de un gran árbol, y una naranja hacía lo propio de un árbol de al lado. Ambos frutos estaban maduros y jugosos, a punto de ser cogidos y llevados a la boca.

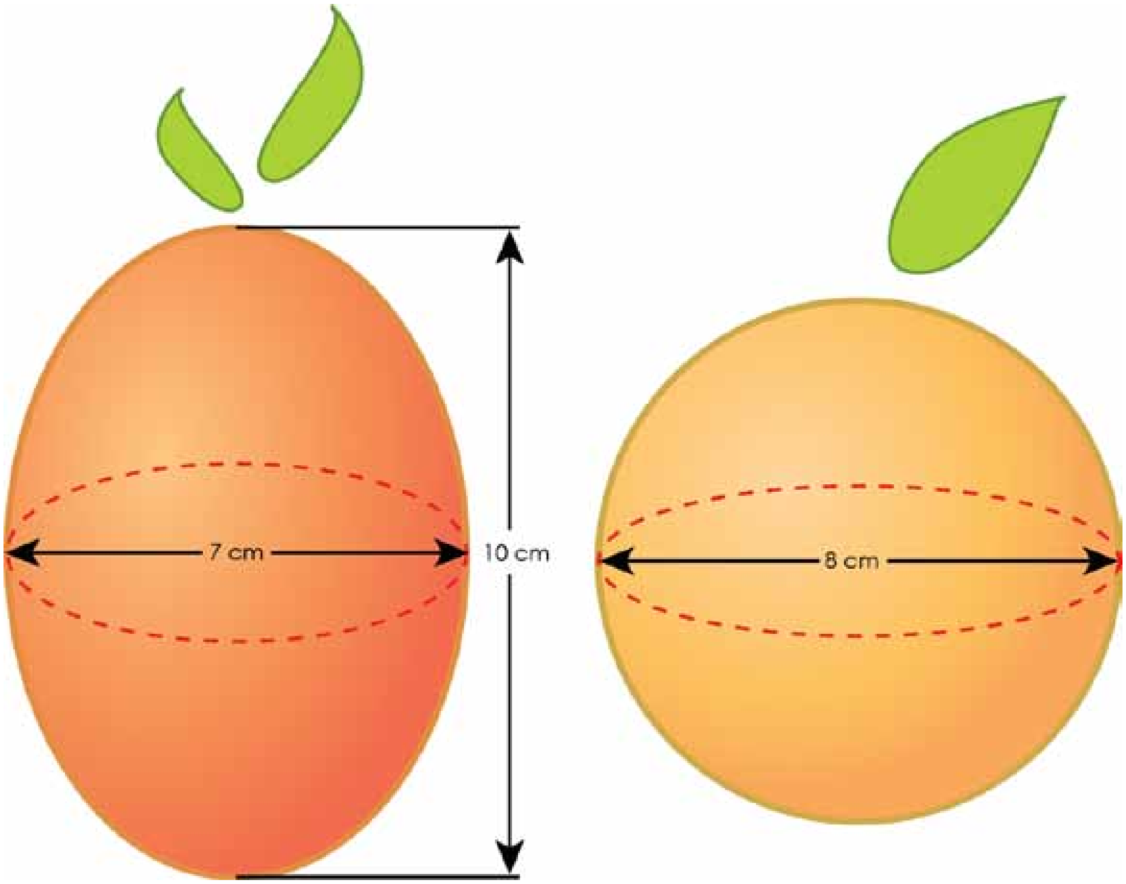
—Yo tengo más pulpa que tú, —dijo, de pronto, el mango a la naranja.— ¡Doy más placer al mundo!

—¡No es cierto! —objetó la naranja.— Yo siento que en mí hay más volumen que en ti.

El mango tenía la forma de un elipsoide de revolución, y la naranja, como de costumbre, era completamente redonda. Si los diámetros del mango miden 10 y 7 centímetros (el eje de rotación es el que mide 10), y el diámetro de la naranja mide 8 centímetros, ¿puedes decir cuál de las dos frutas tiene razón?

¡Aplica la fórmula de Johannes Kepler para conocer el volumen del mango! En seguida sabrás que

$$V_{mango} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \simeq \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 5 \cdot 3.5^2 \simeq 256.6\, cm^3.$$



Ahora calcula el volumen de la naranja:

$$V_{naranja} = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 4^3 \simeq 268\,cm^3.$$

Ésta es tu respuesta:

la naranja posee más volumen que el mango.

¡El método de integración resolvió la disputa brillantemente!

¿Has observado que las frutas compiten entre sí para satisfacerte? Eres el fruto de la vida, y para las naranjas y los mangos no hay más placer que estar en tu boca. Desean que tu vida fructifique, que, al hablar, tu boca esté llena de gusto.

¡Aprende a escuchar esas silenciosas disputas! Las frutas las realizan en voz baja, para no perturbar tu tranquilidad. Pero, si les prestas atención, comprenderás el gran amor que la Existencia siente por ti. Y, entonces, en tu vida también se producirán hermosas flores y frutos.

LA MANZANA DE TYCHO BRAHE

—¡Un momento! —dijo Johannes Kepler, deteniendo la mano de Tycho Brahe quien estaba llevando una manzana a la boca.

—¿Qué pasa? —preguntó Tycho Brahe.

—¿No le parece que un científico no debería comerse una manzana sin antes averiguar su volumen? —dijo Kepler.— ¿No le gustaría saber con exactitud qué cantidad de jugosa pulpa está usted a punto de saborear?

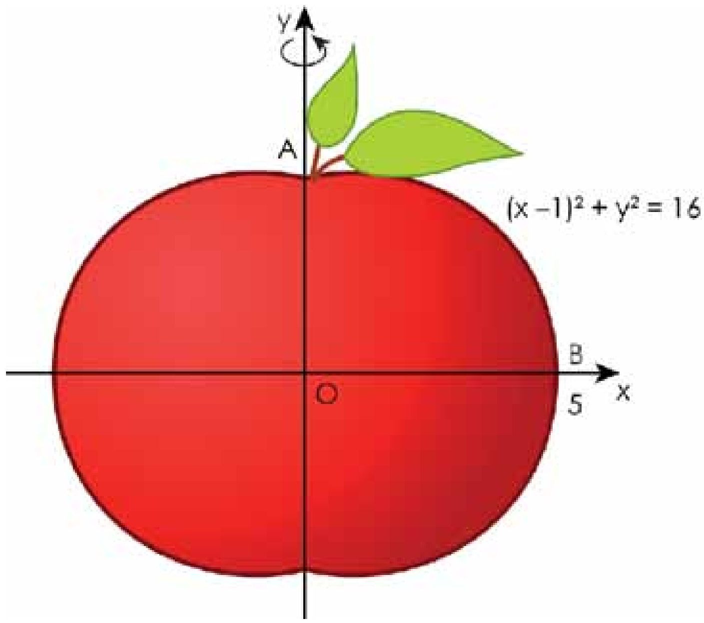
—Bueno, creo que sí, —contestó Brahe, un tanto desconcertado.— ¡Pero no sabríamos calcular el volumen de esta manzana!

—¡Sí que lo sabemos hacer perfectamente! —exclamó Kepler.— En estos días se me ocurrió un método maravilloso para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

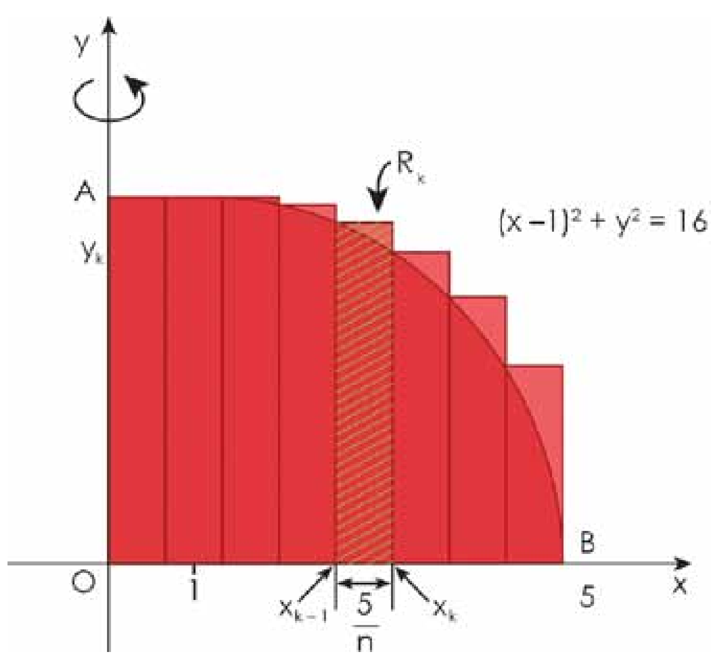
Y dio al sorprendido Brahe la siguiente explicación. ¡Ayúdale con ella, por favor!

Kepler realiza las mediciones necesarias. Averigua que la forma de la manzana de Tycho Brahe se obtiene haciendo girar alrededor del eje vertical un pedazo de la circunferencia

$$(x-1)^2+y^2=16,$$



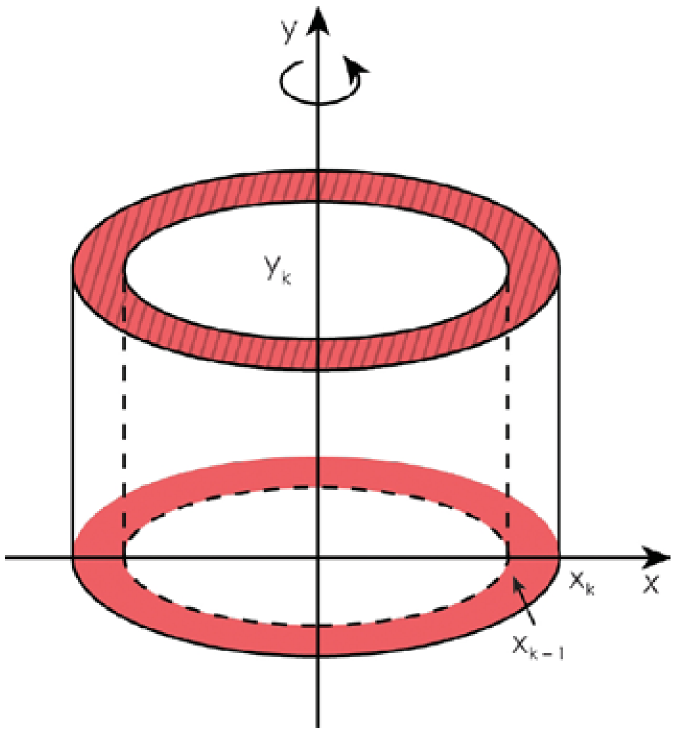
si las magnitudes x e y se miden en uñas[12]. Para producir la manzana, Kepler toma la parte OAB de la circunferencia, y la hace girar alrededor del segmento vertical OA. Para facilitar el cálculo, Kepler divide el segmento OB en n segmentos, todos de la misma longitud Δx, y representa a OAB como una reunión de los siguientes rectángulos:



[12]Una uña equivale a 1.2 cm.

El matemático alemán considera que, al hacer girar la reunión de estos rectángulos alrededor del eje y, se obtendrá una buena aproximación de la mitad de la manzana.

Kepler presta atención al k-ésimo rectángulo, R_k. Su altura es y_k, y, al girar alrededor del eje y, éste engendrará una capa cilíndrica de volumen V_k.



Puedes determinar ese volumen así:

$$V_k = \pi(x_k^2 - x_{k-1}^2)\cdot y_k.$$

Representa a la diferencia de los cuadrados de este modo:

$$x_k^2 - x_{k-1}^2 = (x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) = 2\frac{x_k + x_{k-1}}{2} = 2\xi_k \cdot \Delta x.$$

Aquí el punto ξ_k es el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, pues

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Por lo tanto, el punto ξ_k pertenece al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y, cuando Δx tiende a 0, puede ser tomado como el punto x_k. Kepler ya sabe, entonces, que el volumen V_k posee el siguiente valor:

$$V_k = 2\pi x_k \cdot y_k \cdot \Delta x.$$

Y, por supuesto, el volumen de la manzana será igual al doble de la integral de esta expresión:

$$V_{manzana} = 4\pi \int_0^5 xy dx = 4\pi \int_0^5 x\sqrt{16-(x-1)^2}\, dx.$$

Para calcularlo, realiza el cambio de variable

$$x-1=t.$$

Ahora puedes escribir la integral así:

$$V_{manzana} = 4\pi \int_{-1}^{4} (t+1)\sqrt{16-t^2}\, dt.$$

Y también así:

$$V_{manzana} = 4\pi \int_{-1}^{4} t\sqrt{16-t^2}\, dt + 4\pi \int_{-1}^{4} \sqrt{16-t^2}\, dt.$$

Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, sabes que la integral de una función es siempre la antiderivada de esa función. ¿Qué es la antiderivada? Es aquella función cuya derivada es la función dada. ¿Cuál es la antiderivada de la función $t\sqrt{16-t^2}$? Por supuesto: la función $-\frac{1}{3}\sqrt{(16-t^2)^3}$, pues

$$(-\tfrac{1}{3}\sqrt{(16-t^2)^3})' = -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-2t)\sqrt{16-t^2} = t\sqrt{16-t^2}.$$

Anótalo:

$$4\pi \int_{-1}^{4} t\sqrt{16-t^2}\, dt = \left[-\tfrac{4\pi}{3}\sqrt{(16-t^2)^3}\,\right]_{-1}^{4} = 20\pi\sqrt{15}.$$

¿Y cuál es la antiderivada de la función $\sqrt{16-t^2}$? ¡Es la función $\frac{1}{2}t\sqrt{16-t^2} + 8\arcsen\frac{t}{4}$! Anótalo también:

$$4\pi\int_{-1}^{4}\sqrt{16-t^2}\,dt = 4\pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{16-t^2}+8\operatorname{arcsen}\frac{t}{4}\right]_{-1}^{4}.$$

¡Desarrolla esta expresión! Sabrás que

$$4\pi\int_{-1}^{4}\sqrt{16-t^2}\,dt = 4\pi[\tfrac{1}{2}\sqrt{15}+8\operatorname{arcsen}1-8\operatorname{arcsen}(-\tfrac{1}{4})].$$

¡Calcula los valores implicados! Obtendrás:

$$4\pi[\tfrac{1}{2}\sqrt{15}+8\operatorname{arcsen}1-8\operatorname{arcsen}(-\tfrac{1}{4})] \simeq 4\pi[\tfrac{1}{2}\sqrt{15}+4\pi+2.02].$$

Todo esto significa que el volumen de la manzana es igual a lo siguiente:

$$V_{manzana} \simeq 20\pi\sqrt{15}+4\pi\cdot 16.523 \simeq 451\ \text{uñas}^3.$$

Ésta es la respuesta de Johannes Kepler:

> la manzana de Tycho Brahe contiene 451 uñas cúbicas de deliciosa pulpa.

¡El método de integración reconstituye el volumen de una manzana de una manera genial!, ¿verdad?.

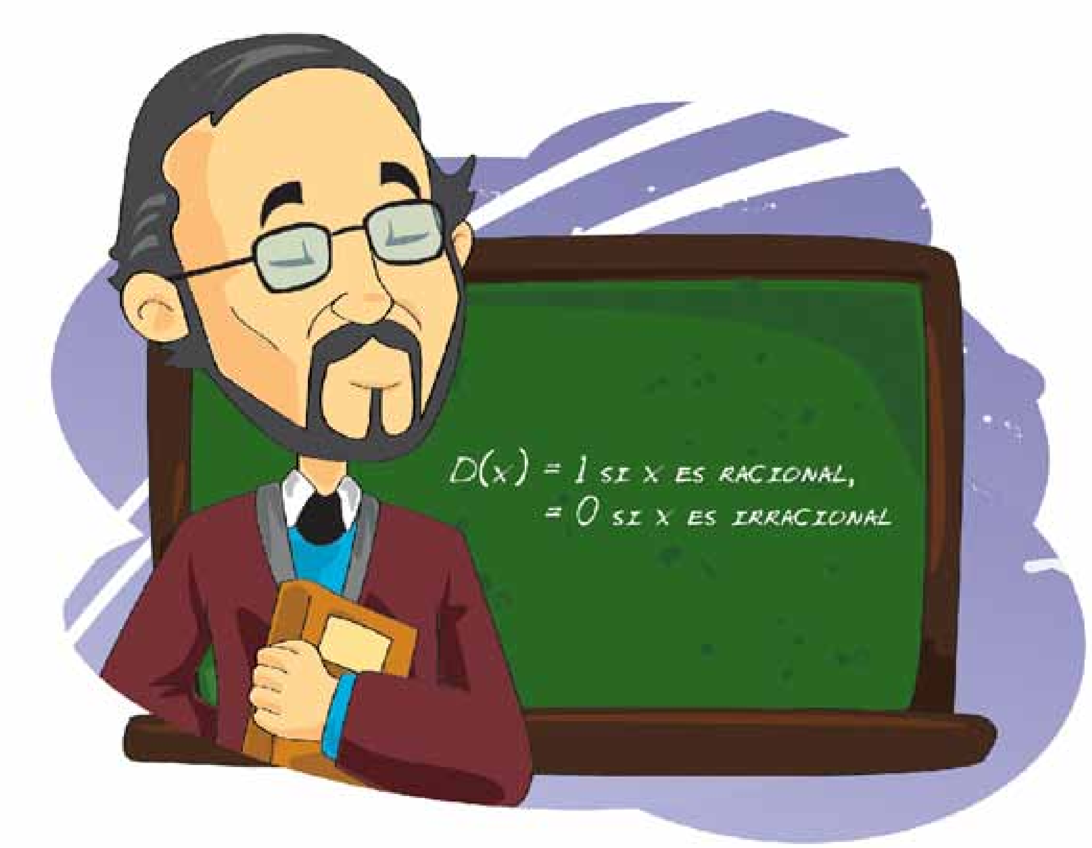
—¡Maravilloso! —exclamó Tycho Brahe, una vez que Kepler terminó su explicación.— Ahora estoy seguro que me comeré 451 uñas cúbicas de manzana, ni más ni menos.

Gracias a Johannes Kepler en la ciencia se abrió una nueva puerta: la del Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Sección VII

Curvas paradójicas

LA FUNCIÓN DE DIRICHLET



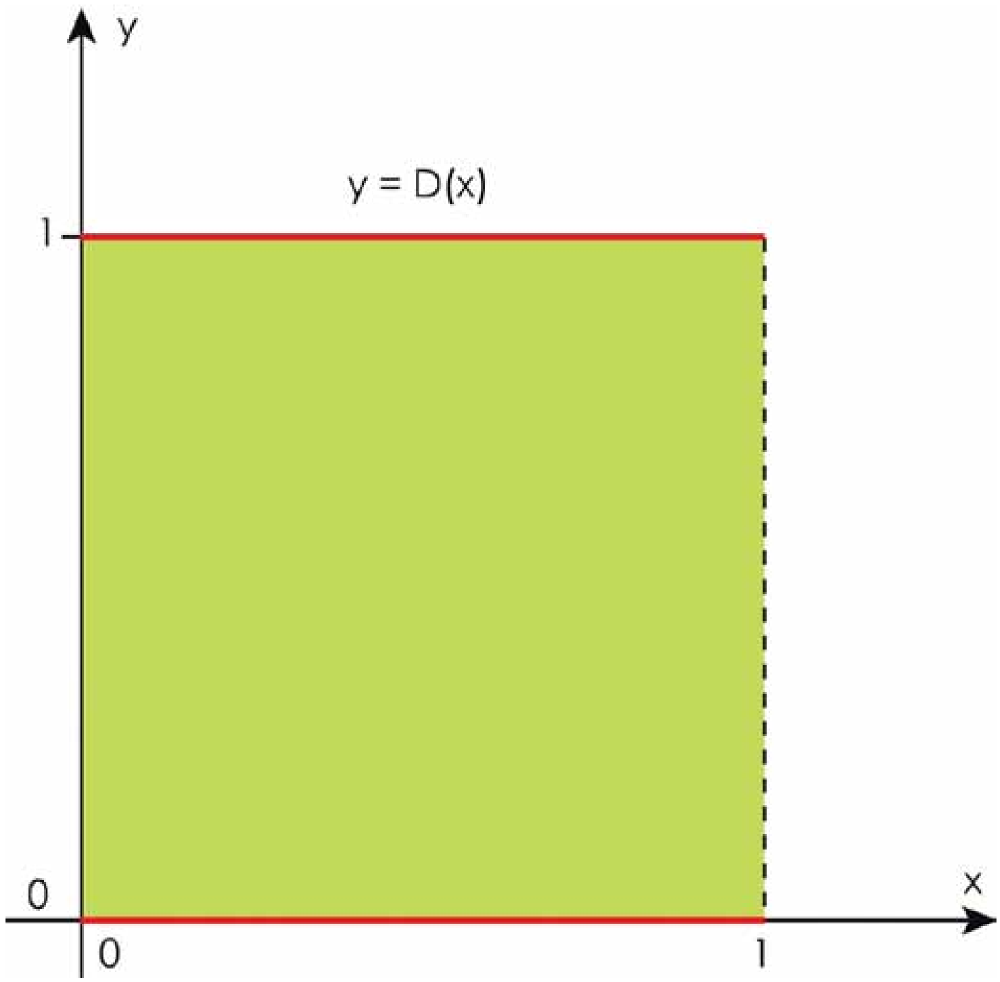
Peter Gustav Dirichlet, el famoso matemático alemán que vivió en los años 1805-1859, exhibió a la comunidad matemática de su tiempo la siguiente función:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es racional}, \\ 0, \text{ si } x \text{ es irracional}, \end{cases}$$

definida para los siguientes valores de x:

$$0 \leq x \leq 1.$$

¡Se trata de una función discontinua en todo punto! Porque existen números irracionales tan próximos a un número racional dado como queramos, y viceversa. ¿Puedes decir qué área delimita esta función?



Calcula la integral de Riemann que representa el área:

$$A = \int_0^1 D(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x.$$

Si eliges todos los valores de x_k como números racionales, el resultado será 1:

$$A = \int_0^1 D(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta_k x = 1.$$

Pero, si eliges todos los valores de x como números irracionales, el resultado será 0:

$$A = \int_0^1 D(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta_k x = 0.$$

(Tal elección siempre es posibles, porque tanto los números racionales como los números irracionales son densos en los números reales). Éste es el resultado de tu investigación:

> el área que delimita el gráfico de la función de Dirichlet, por un lado, mide 0, y, por otro lado, mide 1. ¡Es una paradoja!

¡Esta vez la integral de Riemann no supo resolver el problema!, ¿no es así?.

LA PARADOJA DEL SERRUCHO

Una día Henri Lebesgue llegó al College de France lúgubre como una nube.

—¿Qué le sucede? —le preguntó un colega, quien también era profesor de matemáticas.

—Descubrí una paradoja que no sé cómo solucionar, —contestó Lebesgue.

—¿Qué paradoja es ésa?

—La del serrucho.

—¿En qué consiste?

—¡En que dos es igual a uno!

Y Lebesgue dio a su colega la siguiente explicación. ¡Ayúdale con ella, por favor!

- Para empezar, Lebesgue construye un triángulo equilátero cuyo lado mide 1 metro.

—Dos hormigas, —dice,— desean llegar del punto A al punto B, y deciden hacerlo por dos caminos diferentes. La primera hormiga recorre el segmento AB, mientras que la segunda recorre el segmento AC y luego el segmento CB. Como es obvio, la primera hormiga recorrerá 1 metro, mientras que la segunda recorrerá 2 metros.

- Acto seguido Lebesgue divide los tres lados del triángulo ABC por la mitad.

—Ahora la primera hormiga, nuevamente, recorre el segmento AB, mientras que la segunda recorre el segmento AD, luego el segmento DF, luego el segmento FE, y, por último, el segmento EB. Como es evidente, la primera hormiga, de nuevo, recorrerá 1 metro, y la segunda 2 metros.

- Lebesgue continúa dividiendo los segmentos AD, DF, FE y EB por la mitad.

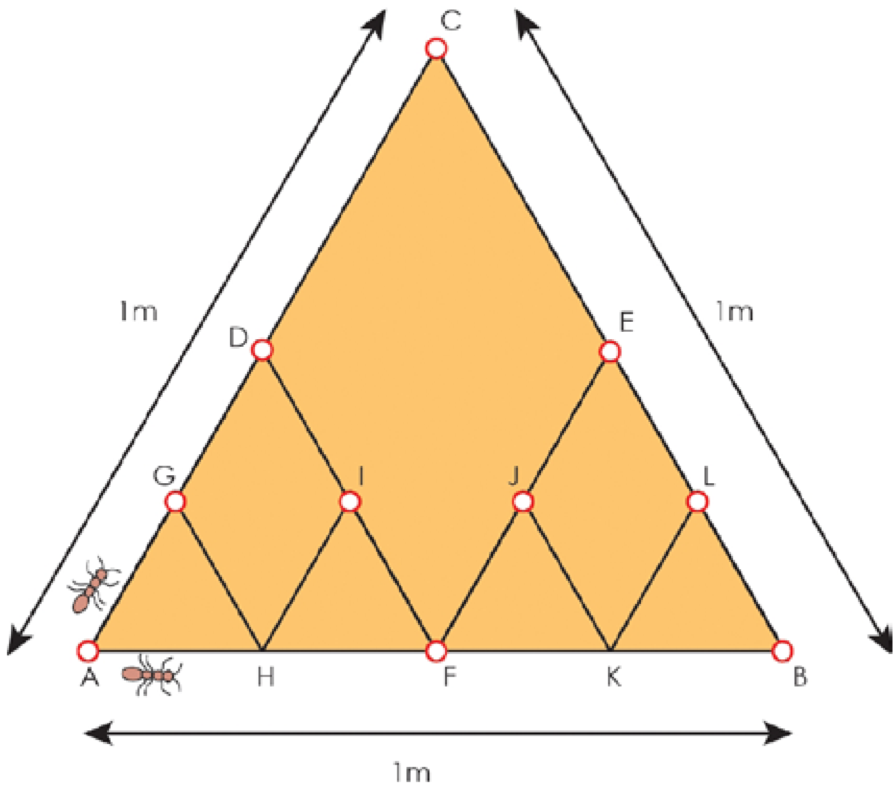
—La primera hormiga, nuevamente, recorre el segmento AB, mientras que la segunda recorre el camino

$$AG + GH + HI + IF + FJ + JK + KL + LB.$$

Como es obvio, la primera hormiga, de nuevo, recorrerá 1 metro, y la segunda 2 metros.

El profesor escuchaba atentamente.

—Si proseguimos de este modo hasta el infinito, —dijo Lebesgue,— el camino de la primera hormiga, al ser idénticamente igual al segmento AB, siempre medirá 1 metro, mientras que el de la segunda hormiga será un serrucho cada vez más fino, pero de la misma longitud de 2 metros. ¡Sin embargo, en el infinito la diferencia entre los dos caminos habrá desaparecido!, pues allí los dientes del serrucho serán tan pequeños como se quiera, y será imposible distinguir el serrucho del segmento AB. ¡Y eso demuestra que 2 metros son iguales a 1 metro! —concluyó Lebesgue con amargura.



Anota el resultado de la investigación de Henri Lebesgue:

el camino de la primera hormiga siempre mide 1 metro, mientras que el de la segunda mide 2; sin embargo, en el límite la diferencia entre los dos caminos debe desaparecer. ¡Y eso significa que dos metros son iguales a uno!

—¡Admirable! —exclamó el profesor.— Puedo ver claramente que, en el paso al límite, la dualidad deviene unidad.

—¡No diga eso! —dijo, con horror, Lebesgue.— ¡Si eso fuera cierto, toda la matemática se desmoronaría al instante!

—¿Y no cree que, tal vez, ya sea hora? —se rió el profesor.— ¡Podríamos crear otra manera de contar! Solo imagínese: ¡el único número que existiría sería el uno! Después de todo, las hojas de un árbol son muchas, pero la raíz es una sola.

Lebesgue no aceptó aquella propuesta, y siguió profesando la multiplicidad de la misma manera que antes.

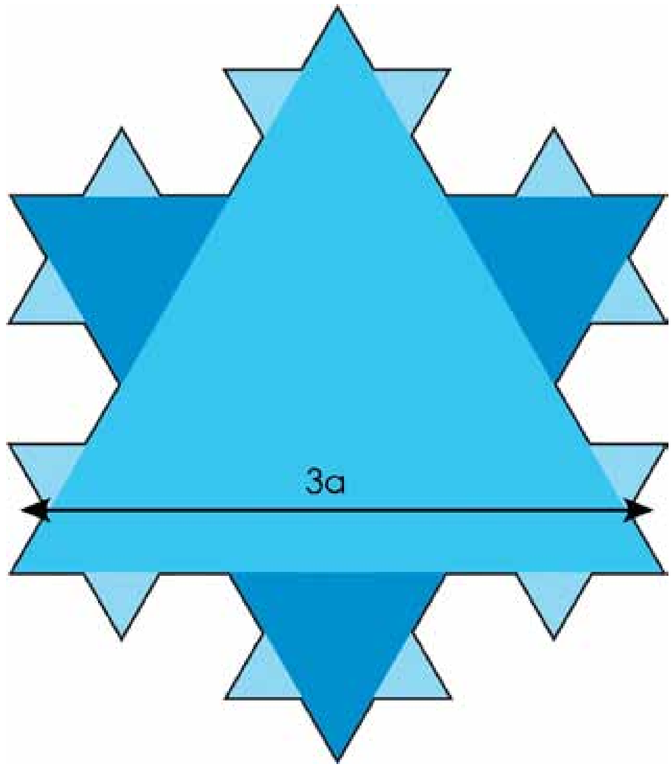
Pronto todos se olvidaron de la paradoja del serrucho.

La posibilidad de volver a la raíz fue desperdiciada una vez más.

EL COPO DE NIEVE

Hacia el año 1900 nadie había demostrado que una curva cerrada plana, tal como la habían definido Jordan y Peano, encerrara un área. Helge von Koch complicó aún más el problema del área ofreciendo un ejemplo de una curva continua (aunque no diferenciable), con perímetro infinito, pero área finita. ¿Cómo lo logró?

- Koch partió de un triángulo equilátero de lado $3a$.
- Sobre el tercio central de cada lado construyó, hacia el exterior, un triángulo equilátero de lado a, y eliminó la base de esos nuevos triángulos (que son 3).
- Sobre cada lado de longitud a de la nueva figura construyó, hacia el exterior, tomando como base el tercio central, un triángulo equilátero de lado $\frac{a}{3}$, y eliminó las bases de todos esos nuevos triángulos (su número es 12).
- Sobre el tercio central de cada lado de la figura resultante, construyó un triángulo equilátero de lado $\frac{a}{9}$, y eliminó las bases de todos esos nuevos triángulos (su número es 48).



¿Cuáles son los perímetros de estos polígonos sucesivos? El primero mide $9a$, el segundo $12a$, el tercero $16a$, etc. ¿A dónde tienden los perímetros de estos polígonos? ¡Al infinito!, pues forman una progresión aritmética cuya razón $\frac{4}{3}$ es mayor a 1.

Ahora veamos, dice Koch, cuáles son las áreas de estos polígonos. El área del triángulo original es

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2.$$

En la segunda etapa se añadieron 3 triángulos, y su aporte fue el siguiente:

$$A_2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

En la tercera etapa se añadieron 12 triángulos. Su área puede ser calculada de este manera:

$$A_3 = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2.$$

La cuarta etapa añadió 48 triángulos:

$$A_4 = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{9}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^2.$$

La suma de todas las áreas será, entonces, ésta:

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{27}a^2 + \ldots.$$

Excluyendo el primer sumando, ¡se trata de una progresión geométrica! Como su razón es $\frac{4}{9}$, su suma arriba a lo siguiente:

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{27}a^2 + \ldots\right) =$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{9}{5} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{18}{5}\sqrt{3}\,a^2.$$

¿En qué proporción está esta área con la del triángulo original? Calcúlala:

$$\frac{\frac{18}{5}\sqrt{3}\,a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{8}{5}.$$

Ésta es la respuesta de Koch:

> el copo de nieve es una curva continua (aunque no diferenciable). Su longitud es infinita, sin embargo, su área es finita e igual a $\frac{8}{5}$ del área del triángulo original.

De este modo Koch nos ha presentado una curva más larga que la distancia de la Tierra a la estrella más lejana. ¡Y, sin embargo, su gráfica cabe en un sello de correos!

Se cuenta que Dido, hija del rey de Tiro, huyó de la casa en quince naves, y después de muchas aventuras arribó a las tierras africanas. Allí puso a los pies de los aborígenes una gran piel de buey, y les pidió:

—Por favor, véndanme un trozo de tierra que pueda delimitar esta piel. Les pagaré 100 monedas de oro.

A los nativos les pareció un trato muy conveniente, y lo aceptaron de inmediato.

Dido hizo cortar el cuero en tiras muy estrechas, y, atándolas, consiguió una soga muy larga. Trazó, entonces, la gran semicircunferencia que, conjuntamente con la orilla del mar, fue la cuna de la famosa ciudad de Cartago.

De esta manera la sabia reina enseñó a todos que hay dos formas de entender la palabra *delimitar*. Los ingenuos aborígenes creyeron que, al referirse a *un trozo de tierra que pueda delimitar esta piel,* Dido hablaba de la curva que era la frontera natural de la piel de buey. ¡Pero se equivocaron! Dido hablaba de la curva que se podría formar con aquella piel cortándola en tiras. ¡Y la diferencia fue asombrosa! En vez de delimitar un espacio reducido de unos pocos pies cuadrados, ¡se delimitó toda una ciudad!

Y ésta es la enseñanza que nos entrega el mito griego. El que se cree una persona, vivirá en el espacio reducido de su piel; pero el que descubra su naturaleza divina, vivirá en la ciudad de Dios, en el infinito cosmos. La reina de Cartago demostró a todos que una curva que delimita una pequeña superficie, puede, como por arte de magia, llegar a delimitar un espacio enorme.

Los matemáticos modernos se hicieron eco de esta enseñanza. “Si prestamos atención a las *curvas*, —pensaron Newton y Leibniz,— tal vez, podamos lograr esa transformación. Según demostró Dido, las fronteras no deben ser fijas e inalterables, con inteligencia se las puede ensanchar muchísimo”.

Y dijeron a todos:

—Estudiemos las curvas —sus ecuaciones, sus máximos y mínimos, sus puntos de inflexión, sus longitudes y las superficies que delimitan— y así comprenderemos el secreto de la reina Dido. ¡Entonces no viviremos en los estrechos confines de nuestro cuerpo, pues nuestra piel se ensanchará hasta los mismos confines del Universo!

Así nació el Cálculo Diferencial e Integral.

Sin embargo, las paradojas y las curvas "patológicas" que surgieron dentro de la nueva disciplina demostraron que no es suficiente estudiar las curvas como si existieran independientemente del hombre; que la presencia del hombre es vitalmente importante para ellas. Sin la reina Dido la piel de buey solo seguiría siendo eso: una piel de buey. La necesidad de *integrar* al hombre con el *Cálculo Integral* se hizo patente.

Se comprendió que la verdadera *integración* no se refiere a sumar rectángulos para conocer el área debajo de una curva. La verdadera *integración* es la comprensión de la unidad, de la *integridad* que existe entre el individuo y la curva, entre el sujeto y el objeto.

El mensaje de la reina Dido es esa integración sujeto-objeto.

Si la realizamos, nunca más viviremos en los estrechos confines de nuestra piel. ¡Todo el Universo será nuestro!

Contenido

Máximos y mínimos

01 Lo justo sin lo injusto.. 11
D'Alembert define la derivada

02 La montaña rusa.. 17
Mínimo de una parábola

03 El jardín de dalias.. 21
Mínimo de una parábola

04 La medicina milagrosa.. 27
Máximo de un polinomio cúbico

05 El estuche y la joya.. 33
Máximo de la función $y = \sqrt{1.3^2 - x^2}\,(1.3 + x)$

06 La estación de bombeo.. 39
Mínimo de la función $y = \sqrt{x^2 + 15^2} + \sqrt{(20 - x)^2 + 10^2}$

Áreas

07 La vigilia y el sueño.. 45
Pascal calcula el área debajo de una parábola

08 El prodigio.. 49
Newton descubre el Teorema Fundamental del Cálculo

09 El valiente Perseo.. 55
Área debajo de una parábola

10 La flor de loto.. 63
Área debajo de una parábola

11 Los tres cañonazos.. 67
Área debajo de una parábola

12 La curva de Lorenz.. 71
Área entre una parábola y una recta

13 Una lección para Leibniz.. 75
Área entre parábola y rectas

14 ¿Hay suficiente pintura?... 77
Área entre parábolas

15 Los juegos olímpicos... 79
Área de intersección de anillos circulares

16 El remedio para la tristeza.. 85
Área dentro de la cisoide

17 El gigante y el enano... 91
Área debajo de la curva $y = 4 + \frac{1}{x^4 - 1}$

18 El espejo de la longevidad.. 95
Área debajo de la curva $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$

19 La capilla y el jardín... 99
Área debajo de la curva $y = 30 - \ln^3 x$

Longitud de curva

20 El cordero y el lobo.. 103
Riemann define la longitud de una curva

21 Cambiando de casa... 109
Longitud de una parábola

22 La astucia del Viejo de la Montaña.. 113
Longitud de una elipse

23 Las manzanas de oro.. 119
Longitud de la curva $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$

24 ¿Cuántos hijos tiene usted?... 125
Longitud de la astroide

25 El nacimiento de Lakshmi.. 129
Área y longitud de la curva $y=2-\frac{1}{1-x^2}$

26 La última ruta.. 135
Longitud de la curva del arco coseno

27 La mariquita.. 139
Longitud de la curva catenaria

28 El caballo volador... 143
Longitud de la curva $y=3-\mathrm{arcsen}(e^{-x})$

29 Una línea en el vacío... 147
Longitud de la curva $y=\mathrm{sen}(x^2)$

Áreas en coordenadas polares

30 El vergel del rey.. 151
Jacques Bernoulli: área en coordenadas polares
Área dentro de la lemniscata de Bernoulli

Longitud en coordenadas polares

31 La hormiga en la pajita.. 155
Jacques Bernoulli: longitud en coordenadas polares
Longitud de la espiral de Arquímedes

32 En la pista de carreras... 159
Longitud de la cardioide

Volumen de revolución

33 Sarasvati, Diosa de la sabiduría.. 163
Kepler calcula el volumen de una esfera

34 El coco.. 169
El volumen de una esfera

35 El pollo y el cascarón.. 171
El volumen de un elipsoide

36 La naranja y el mango.. 175
El volumen de una esfera y de un elipsoide

37 La manzana de Tycho Brahe.. 177
Kepler calcula el volumen de una manzana

Curvas paradójicas

38 La función de Dirichlet.. 183
¡Uno es igual a cero!

39 La paradoja del serrucho... 187
¡Dos es igual a uno!

40 El copo de nieve... 191
Una curva de área finita y longitud infinita

ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

1922 ECUADOR

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

ESPE

ISBN: 978-9978-301-10-4

9 789978 301104

Publicaciones Científicas