UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

EL VIDRIO Y EL ESPEJO

Andrango M.; Arévalo M.; Enríquez G.;Íñiguez S.;
Latorre O.; Marcillo J.; Miranda R.; Ordóñez F.;
Prieto M.; Pugarín P.; Tinizaray V. y Zapata G.

CIENCIAS EXACTAS

EL VIDRIO Y EL ESPEJO

25 ensayos

sobre la Filosofía de la Matemática

Mónica Andrango
Gabriel Enríquez
Oswaldo Latorre
Raquel Miranda
Mauricio Prieto
Vicente Tinizaray
Marlon Arévalo
Servio Íñiguez
José Marcillo
Fabián Ordóñez
Patricio Pugarín
Gabriel Zapata

El vidrio y el espejo
Andrango M.; Arévalo M.; Enríquez G.; Íñiguez S.; Latorre O.; Marcillo J.; Miranda R.; Ordóñez F.; Prieto M.; Pugarín P.; Tinizaray V. y Zapata G.

Primera edición electrónica. Diciembre de 2014
ISBN: 978-9978-301-09-8
Par revisor: Comisión Editorial de la ESPE

Edición:
Margarita Kostikova

Ilustración:
Iliá Endara

Producción:
David Andrade Aguirre
Pablo Zavala A.

Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.
htpp//www.espe.edu.ec

En el siglo XX hemos asistido a una crisis del conocimiento matemático.

En la Geometría llegaron a coexistir tres geometrías rivales: la Geometría Euclidea, la Geometría Hiperbólica y la Geometría Elíptica. Si en la primera la suma de los ángulos de un triángulo siempre es igual a 180 grados, en la segunda es menor a 180 grados, y en la tercera es mayor.

Y, sin embargo, se logró demostrar que las tres geometrías son igualmente consistentes. Es decir, si en la Geometría Hiperbólica o la Geometría Elíptica hubiera alguna contradicción, también tendría una contradicción la Geometría Euclidea, y viceversa. Entonces, ¿cuál de las tres geometrías nos proporciona un conocimiento verdadero? Esta pregunta se quedó sin respuesta. El conocimiento geométrico demostró, así, ser contradictorio.

En la Aritmética también surgió un impasse. El matemático alemán Kurt Godel demostró que existen fórmulas numéricas verdaderas que jamás podrán ser demostradas dentro de la Aritmética Formal. De este modo el conocimiento aritmético demostró ser incompleto.

La situación tampoco era mejor en la Lógica, pues la paradoja del mentiroso que Epiménides formulase hace muchos siglos, demostraba que la verdad y la mentira son amigos inseparables, y que no hay ninguna posibilidad de basar el conocimiento matemático sobre la verdad lógica.

Se hizo, entonces, un intento de salvar el conocimiento matemático fundamentándolo sobre una nueva base: la Teoría de Conjuntos. Matemáticos brillantes como Cantor, Hilbert, Bernays y otros hicieron sus mejores esfuerzos.

Sin embargo, se llegó a demostrar que en la Teoría de Conjuntos la situación es muy parecida a la de la Geometría, pues coexisten dos Teorías de Conjuntos rivales: la Teoría de Conjuntos Cantoriana y la Teoría de Conjuntos no Cantoriana. En la primera la Hipótesis del Continuo es verdadera, en la segunda es falsa; en la primera el Axioma de Elección es verdadero, en la segunda es falso; en la primera el Principio de Tricotomía es verdadero, en la segunda es falso.

¡Y, sin embargo, ambas Teorías de Conjuntos son igualmente consistentes! Es decir, si en la primera se descubriera alguna contradicción, ésta inmediatamente se traduciría en una contradicción en la segunda, y viceversa. Entonces, ¿cuál de las dos Teorías de Conjuntos nos proporciona un conocimiento verdadero sobre los conjuntos? Esta pregunta también se quedó sin respuesta.

La crisis de los Fundamentos de la Matemática, al mismo tiempo que sacudió los cimientos del conocimiento científico, también indicó la posibilidad de una salida. La luz fue dada por el conocimiento psicológico.

El error de la Matemática y de todas las ciencias exactas, se descubrió, consiste en separar el objeto conocido del sujeto conocedor. ¿Cómo puede conocer correctamente los números un individuo, si no se conoce a sí mismo? ¿Cómo puede descubrir la naturaleza del espacio, si no descubre la suya propia? ¿Cómo puede usar la lógica, si no sabe quién es el que la está usando?

Al tratar de conocer la psique de una persona de manera científica, Carl Jung descubrió el E*nfoque Mitológico.*

El psicólogo suizo había dedicado muchísimo tiempo a estudiar mitologías de todo el mundo: el panteón entero de las deidades chinas, egipcias, amerindias, griegas, romanas, africanas e hindúes; dioses y demonios, divinidades, totems, formas de animismo, símbolos, imágenes y motivos mitológicos antiguos. Lo que asombraba a Jung era que esas imágenes mitológicas primitivas apareciesen también, de una manera regular e inconfundible, en los sueños y fantasías de los europeos civilizados y modernos. La gran mayoría de ellos jamás había estado en contacto con tales mitos, o, por lo menos, no poseía un conocimiento preciso de la mitología que se revelaba en sus sueños.

"Esta información no había sido adquirida por ellos durante su vida, —razonaba Jung,— por lo tanto, esos motivos básicos deben ser estructuras innatas, heredadas por cada uno de los miembros de la especie humana." Estas imágenes primordiales —o *arquetipos*, como las llamó Jung,— son, pues, comunes a todas las personas. No pertenecen a ningún individuo aislado, sino que son transindividuales, colectivas, trascendentes.

La hipótesis pareció plausible, pues, de la misma manera que cada individuo tiene un corazón, dos riñones, un hígado, dos brazos, etc., el cerebro de cada persona podría contener formas simbólicas universales, esencialmente idénticas en todos los cerebros normales. El cerebro humano tiene una antigüedad de millones de años, y a lo largo de esa inmensidad temporal pudo haber llegado a configurar ciertas maneras básicas de percibir y captar la realidad, de la misma manera que nuestras manos se configuraron de una manera especial que les permite manejar objetos físicos.

Estas formas básicas, mitológicas e imaginativas de aprehender la realidad son, precisamente, los arquetipos, y, dado que la estructura básica del cerebro es similar en todos los seres humanos, todos podemos albergar los mismos arquetipos mitológicos básicos. Como los arquetipos son comunes a todos los pueblos, porque todos pertenecen a la especie humana, Jung llamó *inconsciente colectivo* a este estrato profundo de la psique. En otras palabras, no se trata de algo individual ni personal, sino supraindividual, transpersonal, trascendente. Oculta en lo más profundo del ser de cada persona se halla la mitología de la trascendencia, y hacer caso omiso de este poderoso estrato fue la causa de que se haya producido la crisis de los Fundamentos de la Matemática.

¿Cómo podemos utilizar estas poderosas fuerzas psicológicas? Concientizando el mensaje que cada uno de los arquetipos míticos entrega a la humanidad en general y a nuestra vida en particular. Jung sostiene que, en cuanto el individuo comienza a reflexionar sobre su vida a partir de la comprensión de los arquetipos y de las imágenes mitológicas comunes a toda la humanidad, su visión empieza a adquirir una perspectiva más universal. Su identidad se expande cualitativamente hasta dimensiones globales, y su alma se satura de profundidades.

Comprendiendo el mensaje de cada uno de los arquetipos psíquicos, podremos usar fábulas, cuentos, mitos y leyendas en nuestras clases de matemáticas. De este modo lograremos que el Conocimiento Matemático deje de ser contradictorio e incompleto, pues lo que lo volvía tal —la escisión entre el sujeto y el objeto— ya no existirá más; por el contrario, la unidad entre el sujeto conocedor y el objeto conocido se hará translúcida en cada teorema y en cada fórmula.

I

Una ilusión óptica

Una ilusión óptica

En el año 767 florecía en Bagdad un astrónomo llamado Ya'qub ibn Tariq, quien presentó al califa al-Mansur a un hindú de nombre Kankah, portador de uno de los siddhantas[1]. Pero el califa no pareció interesarse mucho en el asunto.

—Los números no tienen importancia, —dijo a su corte.— Lo que es importante es glorificar a Alá, Clemente y Poderoso.

Pero una mañana del año 772 el astrólogo del palacio dio al califa la siguiente noticia:

—Gobernador de almas: tu vida corre peligro, pues, según me ha sido comunicado por las estrellas, vivirás tantos años cuantas baldosas se utilizaron en el pavimento del patio de tu palacio.

El califa en seguida mandó a contar cuántas baldosas había en el patio. Resultaron ser 64, pues el patio tenía la forma de un cuadrado perfecto, de 8 baldosas por 8, de $1\,braza \times 1\,braza$ cada una[2].

—Tengo 63 años, —reflexionó el califa.— ¡Significa que éste es el último año que estoy con ustedes!

Los cortesanos estaban perturbados.

—Daré una valiosísima recompensa al que embaldose el patio de nuevo, —dijo el califa,— sin aumentar ni disminuir el número de baldosas, pero logrando que la superficie del patio se haga más grande.

Toda la población fue avisada de este decreto.

A la mañana siguiente al palacio llegó un persa que dijo:

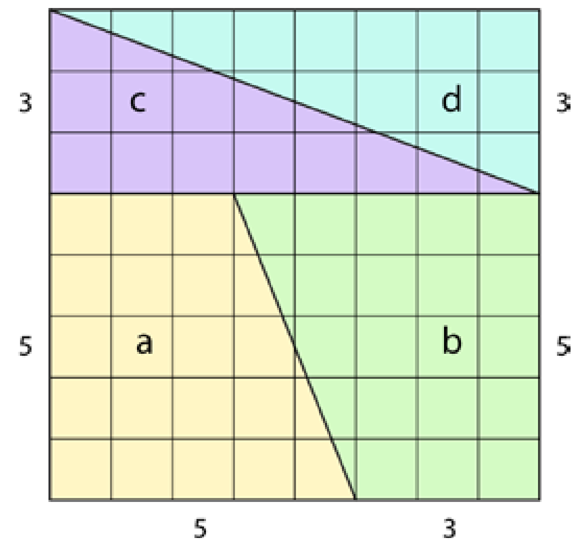
—Yo puedo hacer lo que desea el califa.

Y lo realizó del siguiente modo: con dos líneas rectas dividió el patio en cuatro partes, dos trapecios iguales entre sí, y dos triángulos, también iguales.

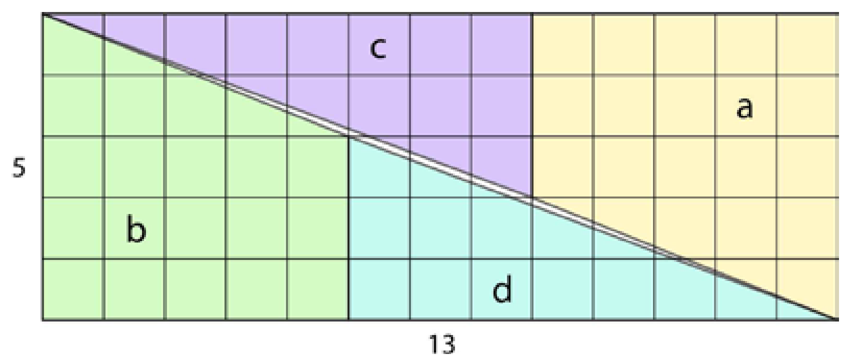
---

1 Obras hindúes de matemática.

2 Una braza mide 1.67 metros.



Siguiendo sus instrucciones, los esclavos colocaron las partes de este modo:



El patio adquirió la forma de un rectángulo, cuya longitud medía 13 brazas, y el ancho 5. El área del patio era ahora de... ¡$13 \times 5 = 65$ brazas cuadradas! ¡Gracias a la inventiva del persa, el califa tenía la posibilidad de vivir no 64, sino 65 años!

—¡Viviré un año más! —suspiró el califa con alivio.

¡Ahora sentía que los números eran importantes! Llamó al matemático al-Fazari, quien vivía en la ciudad, y le pidió que tradujera del sánscrito los siddhantas que había traído Kankah.

—Me siento en deuda con los números, —explicó,— pues han sido capaces de prolongar mi vida por un año.

Y mostró a al-Fazari el patio, contándole lo ocurrido.

Pero al-Fazari no se alegró del incidente.

—¡Vuestro patio sigue teniendo la misma superficie de 64 brazas cuadradas, majestad! —dijo al califa.— ¡De nada os sirve engañaros a vosotros mismos! Una superficie no puede contener a veces 64 brazas cuadradas, y otras veces 65.

—¡Pero yo veo que ahora posee 65 brazas cuadradas! —exclamó al-Mansur.

—Es solo una ilusión óptica, ¡oh, sabio entre sabios! —replicó al-Fazari.— ¡Mirad!

Para comprender lo que había sucedido, al-Fazari pidió al califa que recortara un cuadrado de cartón de 8×8, y luego lo seccionara del mismo modo que lo había hecho el persa. El califa pudo ver en seguida que los lados adyacentes de las figuras no formaron una línea recta: ¡la diagonal solo parecía ser una línea recta, pero en realidad se trataba de dos líneas quebradas! Los cuatro segmentos de la "diagonal" delimitaban un cuadrilátero, el cual ocupaba, precisamente, la braza cuadrada que estaba demás.

De este modo al-Fazari ayudó al califa al-Mansur a comprender que las 64 baldosas nunca se convirtieron en 65, que tan solo se trató de una ilusión óptica.

—Aunque vuestros ojos, ¡oh comendador de los creyentes!, os digan que la diagonal es recta, ¡no se lo creáis! —dijo al-Fazari al califa.— Lo que parece ser una diagonal, es un cuadrilátero vacío. ¡Este patio cuenta tan solo con 64 baldosas, y no con 65! Y, aunque los ojos no lo detectan, la razón sí lo hace. De nada nos sirve mentir al Altísimo, pues a Él no se le puede engañar: ¡Él ve incluso la vibración de las alas de una mosca!

—Tienes razón en todo lo que has dicho, —contestó al-Mansur lentamente,— y, en cuanto a mí, ahora respeto a los números aún más. Y ésta es la decisión que he tomado: sean los que sean los años que me quedan de vida, los dedicaré a cultivar la matemática. Aunque me muera mañana, estaré apoyando la investigación científica hasta mi último aliento. ¡Inicia, pues, la traducción del sánscrito de la obra hindú!

Se dice que mediante aquella traducción se introdujeron en Arabia los signos numéricos hindúes. La vida del califa se extinguió en el año 775, habiéndose hecho traducciones al árabe del hindú, sirio, persa y griego. En Bagdad floreció la investigación matemática y astronómica, se construyó una academia, una biblioteca y un observatorio, y se invitó a los científicos hindúes a establecerse en la cuidad. Los califas árabes que siguieron a al-Mansur adquirieron escritos griegos y bizantinos; la ciencia se instaló en el Medio Oriente.

Todo aquello sucedió gracias al poder de la matemática de revelar que una ilusión óptica es una ilusión óptica. ¿Qué es una ilusión óptica? Es algo que está ahí, en este momento lo puedes ver, lo puedes tocar, pero que no existe, pues tarde o temprano desaparecerá para siempre. Es como una nube blanca en el cielo azul: la podemos ver. Nos puede parecer que se trata de un castillo en el cielo, o de una animal fabuloso, una ballena o una morsa; pero en unos segundos cambiará de forma y luego desaparecerá. No era real, era solo una ilusión óptica. ¿Y no es así nuestra vida?

Mira Bai estaba enamorada de Krishna. Era una ama de casa, la esposa de un príncipe, pero a quien amaba era a Krishna.

—¿Cómo puedes amar a Krishna? —le preguntaba el príncipe, celoso.— Él no vive, no está presente, no tiene un cuerpo físico, ¡vivió hace cinco mil años! ¿Cómo puedes estar enamorada de alguien que no existe?

Pero Mira siguió con su actitud de antes: hablaba a Krishna, escribía y cantaba poemas para Krishna, se reía con él, se enfadaba.

Un día el príncipe dijo a Mira:

—No cesas de hablar de tu amor, cantas y bailas alrededor de Krishna. Pero ¿dónde está él? ¿De quién estás enamorada? ¿A quién hablas? ¡Pareces loca! Krishna ocupa todo tu tiempo, yo estoy aquí, ¡y te has olvidado de mí completamente!

Mira contestó:

—¡Krishna está aquí, tú no! Porque Krishna es eterno, y tú solo temporal. Él siempre estará aquí, siempre estuvo aquí, está aquí ahora mismo. Hubo un tiempo en el que tú no estabas, habrá un día en que no estarás. ¿Cómo puedo creer que entre esas dos no-existencias estás aquí? ¿Cómo es posible la existencia entre dos no-existencias? ¡Tú solo eres una ilusión óptica, Krishna es real!

Mira escribió al príncipe este poema:

¡Oh, rey! Yo no disfruto de tu compañía.
En tu palacio no hay santos,
toda tu gente está vacía.
No tengo ningún uso para las joyas,
no quiero el maquillaje ni el lápiz de ojos,
vivo con sencillez.
¡Ya no hay lazos entre nosotros!
Estoy enamorada del Señor de la Vida,
he encontrado a mi Amado.

Dentro de poco tiempo su esposo murió, y el suegro de Mira, Rana Sanga, le ordenó que se suicidara.

—Es un rito obligatorio, —le dijo.— Si tu esposo ha muerto, tú también debes morir. ¡Es tu deber sagrado! Las viudas son despreciadas en toda la India.

Mira Bai escapó de su casa hacia Vrindávana, la tierra de Krishna.

—¡Mi verdadero esposo no ha muerto! —afirmó.— ¡Krishna es eterno!

Hizo construir un templo privado dedicado a su Dios, en el que daba albergue a sadhus y peregrinos, y componía cantos de devoción para transmitirles la enseñanza.

La marea mundana es dura,
y sus olas son despiadadas.
¡Llega a la otra orilla en el barco del Conocimiento!
En el juego del mundo
incluso la victoria es un fracaso.
Todos los santos han dicho que la vida
es un regalo de corta duración.
¡Solo Dios nos pertenece!
He buscado en todas partes,
y nadie más es nuestro de verdad.
El rey me envió una copa con veneno,
yo la bebí y bailé.
¿Por qué debería preocuparme?,
si lo que tiene que ocurrir, ocurrirá.
Sin Dios solo hay tristeza,
sin el Maestro nunca se experimenta la claridad.
¡Únete a la compañía santa,
no malgastes la vida!
Cuando Mira encontró a su Maestro,
descubrió la alegría.

Una delegación de brahmanes intentó regresarla al reino de su esposo, pero ella desapareció. Fue por segunda vez que su amado Krishna la protegía y la salvaba de la muerte.

La ciencia nos ayuda a reconocer lo ilusorio como ilusorio. Y ése es el primer paso para empezar a buscar lo Real.

II

Lo inexpresable

Lo Inexpresable

Casi nunca vemos la realidad. Lo que vemos es un reflejo de ella en forma de palabras y conceptos, y luego los tomamos por la realidad. Pero las palabras y los conceptos no son la realidad, sino tan solo un mapa de ella.

Una anécdota. Una madre estaba muy preocupada por su hijo. Tenía ya diez años y no hablaba una sola palabra. Se probaron todos los sistemas posibles, pero los doctores dijeron:

—No hay nada que esté mal, su cerebro es absolutamente correcto. El cuerpo está bien, el chico es sano y no podemos hacer nada. Si estuviera enfermo, entonces hubiéramos podido curarlo.

Pero aun así el niño no hablaba. De repente, una mañana dijo:

—Esta tostada está quemada.

¡La madre no podía creerlo! Se quedó pasmada y dijo:

—¡Has hablado! ¿Por qué estabas siempre callado? Intentábamos persuadirte, pero nunca hablaste.

El chico dijo:

—Nunca hubo nada incorrecto. Por primera vez la tostada está quemada.

Si no hay nada que esté mal, ¿por qué hablar?

Las palabras son necesarias para indicar un error. Si todo está bien, las palabras salen sobrando. La Existencia es tan amplia que rebasa cualquier expresión lingüística. Tratar de introducir la Existencia dentro de las palabras es tan insensato como creer que la Luna es el dedo que indica en su dirección.

En cierta ocasión Lao Tse pronunció esta sentencia:

> *Los que saben no hablan,*
> *los que hablan no saben.*

Los discípulos le preguntaron qué significaba. Él les dijo:

—¿Quién de vosotros conoce la fragancia de una rosa?

Todos la conocían. Entonces les dijo:

—Expresadlo con palabras.

Y todos guardaron silencio.

La ciencia matemática también logró descubrir la insuficiencia lingüística para expresar la realidad. En el año 1905 el matemático francés Jules Richard realizó el siguiente razonamiento.

—Se puede establecer, —se dijo,— una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todas la fórmulas de un sistema dado cualquiera y el conjunto de los números naturales. Dicho de otro modo, el conjunto de todas las fórmulas tiene la cardinalidad $\aleph_0$.

Y siguió diciendo:

—Como demostró Georg Cantor, la cardinalidad del conjunto de los números reales es $\aleph_1$, que es mayor que $\aleph_0$. Pero ¿cómo ha de bastar un sistema de lógica simbólica, en el que el conjunto de todas las fórmulas tiene la cardinalidad $\aleph_0$, para la discusión y el desarrollo de una rama de las matemáticas que maneja conjuntos cuya cardinalidad es mayor? ¿Cómo podemos ni siquiera hablar del conjunto $\Re$ de los números reales, cuya cardinalidad es $\aleph_1$, que es mayor que $\aleph_0$?

Podemos formular el descubrimiento del matemático francés así:

La paradoja de Richard

> El conjunto $\Re$ de los números reales, cuya cardinalidad es $\aleph_1$ y es mayor que $\aleph_0$, no puede ser discutido ni desarrollado dentro de nuestro lenguaje, el cual tan solo es capaz de contener $\aleph_0$ fórmulas.

Desde la ciencia, Richard dio la razón a los místicos que siempre han sostenido que lo real es inexpresable con las palabras.

Todos sentimos que el amor no son palabras sino hechos. El poeta del siglo XIII Rumi escribió este cuento:

> *Un enamorado recitaba poemas de amor a su amada. Eran poemas llenos de lamentaciones nostálgicas.*
>
> *Su amada le dijo:*
>
> *—Si estas palabras me están destinadas, pierdes el tiempo puesto que estamos reunidos. ¡No es digno de un amante el recitar poemas en el momento de la unión!*
>
> *El enamorado respondió:*
>
> *—Sin duda estás aquí, pero, cuando estabas ausente, yo sentía un placer distinto. Bebía del arroyo de nuestro amor. Mi corazón y mis ojos se complacían. ¡Ahora estoy frente a la fuente, pero está agotada!*
>
> *—Realmente, —dijo la amada,— no soy yo el objeto de tu amor. Tú estás enamorado de tus propias palabras, y*

> *yo no soy las palabras. El verdadero amado es único, y no se espera otra cosa cuando se está en su compañía.*

Si aprendemos a ver la realidad y no las palabras, el mundo será un lugar mucho más placentero para vivir.

III

El juez sabio

El juez sabio

De acuerdo con la leyenda, habiendo ordenado el rey Hierón la confección de una corona de oro puro, quiso comprobar si no había sido engañado, según le sugerían los rumores que corrían. Hierón pidió a Arquímedes, el gran matemático de Siracusa, que idease un método para averiguar, sin destruirla, si la corona contenía algún otro metal además de oro, por ejemplo, plata.

Se cuenta que Arquímedes encontró la solución mientras se bañaba, cuando advirtió una pérdida parcial de peso después de sumergir sus brazos y piernas en el agua.

—¡Ya sé! —exclamó— ¡*Todo cuerpo en contacto con el agua experimenta una fuerza vertical hacia arriba e igual al peso del volumen del fluido desplazado*!

Posteriormente esta fuerza recibió el nombre de *empuje*.

Fue tanta la emoción de Arquímedes por el gran descubrimiento, que corrió desnudo por las calles de Siracusa gritando:

—¡Eureka! ¡Eureka!

En griego esta palabra significa “lo encontré”.

Para resolver el problema del rey, Arquímedes suspendió la corona de un brazo de una balanza, y la equilibró, suspendiendo del otro brazo un lingote que contenía la cantidad necesaria de oro puro.

“Introduciré la corona y el lingote en el agua, —pensó Arquímedes.— Si la corona contiene una aleación de plata, como la plata es menos densa que el oro, su volumen resultará ser mayor que el del lingote de oro. Con ello el empuje sobre la corona será mayor que sobre el lingote, y la balanza se inclinará del lado del lingote, probando que la corona no es de oro puro.”

Y eso fue lo que, efectivamente, ocurrió: cuando Arquímedes introdujo la corona y el lingote en el agua, la balanza se inclinó del lado del lingote. ¡La corona del rey Hierón no era de oro puro! De este modo fue descubierta la ley del empuje de los fluidos.

El descubrimiento de Arquímedes es paradigmático: nos muestra la esencia de la búsqueda científica. ¿Qué busca un científico? De la misma manera que Arquímedes buscaba *separar* la plata del oro, el científico busca *discernir* lo falso de lo verdadero. La ciencia desea conocer la verdad, y ello solo es posible separándola de la falsedad, pues las dos se encuentran mezcladas igual que la plata y el oro en una aleación. Si la verdad se encontrara en la vida separada de la falsedad, la tarea de la ciencia sería fútil, y la ciencia no sería necesaria en absoluto. Pero la verdad siempre se encuentra en una aleación con la falsedad, y la tarea de un científico es separarlas y conocer a la verdad en su pureza.

Como arquetipo mitológico del discernimiento científico nos puede servir la leyenda del rey Salomón, quien pedía a Dios:

—Dame un corazón atento para gobernar a tu pueblo y para distinguir entre lo bueno y lo malo.

Al Señor le agradó que Salomón le hiciera tal petición, y le dijo:

—Porque me has pedido esto, y no una larga vida ni riquezas ni la muerte de tus enemigos, sino inteligencia para saber oír y gobernar, voy a hacer lo que me has pedido: te concedo sabiduría e inteligencia como nadie las ha tenido antes que tú, ni las tendrá después de ti.

Según cuenta la Biblia, un día fueron a ver al rey dos prostitutas. Cuando estuvieron en su presencia, una de ellas dijo:

—¡Ay, majestad! Esta mujer y yo vivimos en la misma casa, y yo di a luz estando ella conmigo. A los tres días también dio a luz esta mujer. No había ninguna persona extraña en la casa, solo estábamos nosotras dos. Pero una noche murió el hijo de esta mujer porque ella se acostó encima de él. Entonces, se levantó a medianoche, mientras yo estaba dormida, quitó de mi lado a mi hijo y lo acostó con ella, poniendo junto a mí a su hijo muerto.

“Por la mañana, cuando me levanté para dar el pecho a mi hijo, vi que estaba muerto. Pero a la luz del día lo miré, y me di cuenta de que aquél no era el hijo que yo había dado a luz.

La otra mujer dijo:

—No, mi hijo es el que está vivo, y el tuyo es el muerto.

Pero la primera respondió:

—No, tu hijo es el muerto, y mi hijo el que está vivo.

Así estuvieron discutiendo delante del rey. Entonces Salomón se puso a pensar: “Ésta dice que su hijo es el que está vivo, y el muerto es el de la otra; ¡pero la otra dice exactamente lo contrario!” Luego dijo:

—¡Tráiganme una espada!

Cuando le llevaron la espada, ordenó:

—Corten en dos al niño vivo, y den una mitad a cada una.

Pero la madre del niño vivo se angustió profundamente por su hijo, y suplicó al rey:

—¡Por favor! ¡No mate su majestad al niño vivo! ¡Mejor déselo a esta mujer!

Pero la otra dijo:

—Ni para mí ni para ti. ¡Que lo partan!

Entonces intervino el rey y ordenó:

—Entreguen a aquella mujer el niño vivo. No lo maten, porque ella es su verdadera madre.

Todos en Israel se enteraron de la sentencia con la que el rey había resuelto el pleito, y vieron que Dios le había dado sabiduría para administrar justicia.

La espada con la que Arquímedes separó la plata del oro en la corona del rey Hierón fue la espada de la inteligencia. Salomón no tuvo que matar al niño, y Arquímedes no necesitó dañar la corona. En ambos casos fue suficiente usar el poder del discernimiento.

Y éste es el reto de la ciencia: ser un juez sabio de los hechos del universo, separando lo verdadero de lo falso.

IV

Mayor y menor al mismo tiempo

Mayor y menor al mismo tiempo

Georg Cantor no se sentía satisfecho con la aritmética de los números finitos, y creó una nueva aritmética: la de los números *transfinitos*.

—Si yo fuera Dios, —decía a menudo,— hubiera creado a los números transfinitos para la humanidad. Son tan grandes que son capaces de expresar nuestros anhelos y alegrías.

Leopoldo Kronecker preguntó a Cantor:

—¿Qué tipo de números son ésos? ¿De dónde le vino la idea de imaginar números transfinitos?

Cantor contestó:

—¡Son los nuevos números para la humanidad! Los números transfinitos son nuestros corazones y nuestras almas, porque el corazón humano es infinito, el alma del hombre es infinita. ¡Todos llevamos en nuestro espíritu un anhelo de lo Infinito! Si yo fuese el Creador, mis números tocarían el Infinito, tratarían de llegar al Infinito, acariciarían el Infinito.

—Para mí, —dijo Kronecker secamente,— Dios hizo los números enteros, y el resto es obra del hombre.

Kronecker nunca llegó a aceptar el sueño de Cantor, su deseo de expresar en símbolos finitos la naturaleza infinita de alma humana.

Cantor era feliz con los números transfinitos, gozaba con ellos como un niño goza con un juguete nuevo. Pero un día se le ocurrió el siguiente razonamiento.

Sea A un conjunto consistente de 3 elementos: a, b y c.

$$A = \{a, b, c, \}.$$

Entonces, el conjunto $P(A)$ (es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de A) contendrá $2^3 = 8$ elementos:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

—Puedo ver, —dijo Cantor,— que, si un conjunto posee n elementos, su conjunto-partes $P(A)$ poseerá 2^n elementos, que es un número que siempre será mayor que n. ¡Y creo que esto sucederá también en los conjuntos infinitos!

En efecto, Cantor logró probar este hecho, que posteriormente fue bautizado con su nombre:

Teorema de Cantor

Si un conjunto A posee n elementos, su conjunto partes P(A) poseerá 2^n elementos. Si un conjunto A posee infinitos elementos, su conjunto partes P(A) poseerá estrictamente más elementos que A:

$$Card(P(A)) > Card(A).$$

Después de demostrar este teorema, Cantor decidió considerar el conjunto de todos los conjuntos: CTC. Entonces, por el teorema, pudo afirmar que

$$Card(P(CTC)) > Card(CTC).$$

¡Sin embargo, el conjunto de todos los conjuntos también incluye al conjunto-partes de sí mismo!, pues es el conjunto más grande que existe:

$$P(CTC) \subset CTC.$$

Entonces,

$$Card(P(CTC)) \leq Card(CTC).$$

¡Pero esto es una contradicción! Pues, al mismo tiempo debe cumplirse que

$$Card(P(CTC)) > Card(CTC) \text{ y } Card(P(CTC)) \leq Card(CTC).$$

¡El *menor* resultó ser *mayor*! A esta demostración se la llamó *la paradoja de Cantor*. La podemos enunciar así:

la cardinalidad del Conjunto de todos los conjuntos, al mismo tiempo, es menor y es mayor que la cardinalidad del Conjunto de sus partes.

Ésta fue una de las primeras paradojas que se descubrió en la Teoría de Conjuntos.

Cantor no logró entender la unidad de los opuestos *mayor-menor*. Creyó que, si es mayor, no puede ser menor, y si es menor, no puede ser mayor. Sin embargo, las dos palabras son interdependientes, pues no se puede comprender lo que significa *menor*, a no ser que se lo compare con algo mayor. ¡*Menor* es siempre respecto de algo *mayor*! El par *mayor-menor* es inseparable.

Este mensaje también nos es entregado por el cuento holandés “El trigo y la arena”. En la ciudad de Stavoren vivía una señora tan rica que no podía contar sus posesiones. Tenía oro, tierras, barcos y toda clase de tesoros.

Un día llamó al capitán de uno de sus barcos y le ordenó ir a Danzig y volver con el cargamento más valioso que pudiera encontrar.

Una vez en Danzig, el capitán preguntó a varias personas, y le contestaron que la mercancía más rica era el trigo. Llenando sus bodegas, regresó a Holanda, pero la señora se enfureció al ver el trigo y mandó a arrojarlo al agua. Al enterarse, la gente de Stavoren acudió a pedir el trigo, pero la señora insistió que fuera echado al agua. El capitán lo hizo así.

El invierno fue muy malo, y los pobres padecieron mucha hambre. Pero, al llegar la primavera, brotó en el puerto un extraño trigal, y ningún barco pudo entrar en él. Al llegar el otoño, cuando el grano estuvo maduro, los pobres pidieron permiso para segarlo. La malvada señora les dio permiso, pero se volvió de espaldas despectivamente para no presenciar los trabajos.

A la primavera siguiente volvió a pasar lo mismo. Ningún buque pudo entrar en el puerto porque el trigo bloqueaba la entrada aun más que el año anterior. Los pobres acudieron a dar las gracias a la señora. Y conforme se iban haciendo más ricos gracias al trigo, ella se volvía más pobre, porque sus barcos no podían entrar en el puerto y se pudrían sin navegar. Y todos los capitanes se volvieron agricultores.

Con el tiempo, la arena se fue acumulando en los trigales y formó una alta barrera, que se fue transformando en un campo de tierra muy rica, al que la gente dio el nombre de *regalo de la señora avara*.

Lo que parecía ser *mayor,* resultó ser *menor*, y lo que parecía ser *menor,* resultó ser *mayor.* ¡Las dos palabras demostraron ser interdependientes! Demostraron ser complementarias, amigas, amantes.

Si lo comprendemos, nuestros corazones tocarán lo Ilimitado, acariciarán el Infinito. El sueño de Georg Cantor se hará realidad.

V

La falacia de la afirmación del antecedente

Cometemos la falacia de la afirmación del antecedente muy frecuentemente. ¿Cómo sucede ese error? Nos lo explica la historia de Hasán.

Un día el califa Harún al-Rashid decidió divertirse de la siguiente manera. Se disfrazó y salió, acompañado por su eunuco Mansur, a dar una ronda nocturna por el viejo Bagdad. A través de la ventana de una casa vieron a un hombre llamado Hasán sentado frente a la mesa, y golpearon la puerta.

—¿Podríamos acaso pasar algún tiempo contigo, —preguntó el califa,— ya que somos viajeros y no tenemos amigos?

—De buena gana, —respondió Hasán,— me encantaría cruzar algunas palabras con ustedes.

Y les invitó a pasar. La charla transcurría amena. Cuando se presentó el momento oportuno, el califa deslizó una dosis de un poderoso narcótico en la bebida de Hasán. En pocos minutos éste estaba inconsciente, y Mansur lo cargó hasta el palacio.

Cuando recuperó el sentido, Hasán se encontró vestido con ropas finísimas, recostado en un sofá de seda en el palacio del califa, con esclavos masajeando sus pies y manos.

—¿Dónde estoy? —exclamó, atónito.

—En tu palacio, ¡oh comendador de los creyentes! —respondieron a coro los sirvientes, puesto que así les había ordenado Harún al-Rashid.

¡Hasán no podía creerlo! Sin embargo, sus órdenes eran ejecutadas al instante, y todo el mundo se comportaba hacia él con el mayor respeto.

—Si yo fuera el califa, —se dijo Hasán,— me tratarían como al califa. Es así que me tratan como al califa. ¡Luego, yo soy el califa!

Si llamamos C a la afirmación *Hasán es el califa*, y T a la afirmación *Hasán es tratado como califa*, podemos formalizar el razonamiento de Hasán del siguiente modo:

$C \rightarrow T$
T

C

¡Este razonamiento no es válido!, puesto que, precisamente, la historia de Hasán constituye un contraejemplo para él: una situación en la cual las dos premisas son verdaderas, y, sin embargo, la conclusión es falsa. Un razonamiento de este tipo se llama *falacia de la afirmación del antecedente*, y tiene esta estructura:

FALACIA DE LA AFIRMACIÓN DEL ANTECEDENTE

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Es decir, de una implicación y su consecuente no se puede inferir el antecedente.

Hasán, sin embargo, no se dio cuenta de su error y quedó convencido de que era, en realidad, el califa. Y, como desconocía completamente los asuntos de gobierno, dio órdenes tan disparatadas que en menos de veinte y cuatro horas logró desequilibrar totalmente el presupuesto del reino.

Harún al-Rashid estaba observando todas estas acciones desde un escondite secreto. Por fin, reunió a sus ministros y dijo:

—¡Suficiente! Si lo dejamos más tiempo, llevará el país entero a la quiebra.

De modo que Hasán fue de nuevo drogado, vestido con sus ropas y llevado a su casa, donde se despertó al otro día gritando:

—¡Soy el califa, y exijo que me obedezcáis!

Y no podía comprender por qué nadie acudía a atenderlo, tal y como lo exige rigurosamente el ritual de la nobleza.

Esta historia se repite cada vez que, a partir de una implicación y su consecuente, inferimos el antecedente.

Cuando tomamos nuestra vida por real, razonamos del mismo modo:

—Si mi casa fuera real, —decimos,— estaría aquí. Mi casa está aquí. ¡Luego, mi casa es real!

Sin embargo, nos advierte la historia de Hasán, podría tratarse de una ilusión, provocada por una pérdida de conciencia.

La niebla de Londres se posaba sobre el Támesis, mientras un joven vagabundo se preparaba un lugar en el embarcadero para pasar la noche. De repente escuchó una voz amable y, levantando la vista, vio a una hermosa morena saliendo de su Rolls Roice conducido por un chofer.

—¡Pobre hombre! —dijo ella.— Debes de estar helado y empapado. Ven a mi casa y podrás pasar allí la noche.

El vagabundo se subió al coche sentándose a su lado.

Después de un corto trecho de viaje el coche se paró ante una hermosa mansión, y la morena salió, indicando al vagabundo que la siguiera. Un mayordomo abrió la puerta, y ella dejó al vagabundo a su cuidado, con instrucciones de que debían darle de comer y proporcionarle un baño y una cama cómoda en los aposentos de los criados.

Un tiempo después, cuando la morena se disponía a retirarse, se le ocurrió que su invitado podría necesitar algo, así que, cubriéndose con la bata, se apresuró al ala de los criados. Se dio cuenta que en la habitación del joven todavía había luz, golpeó suavemente la puerta, entró en la habitación y preguntó al joven por qué no dormía aún.

—¿No será que te has quedado con hambre?

—¡Oh, no! Su mayordomo me ha dado de comer como a un rey.

—¿Quizás, tu cama no es bastante cómoda?

—Lo es: suave y abrigada.

—¿Entonces, tal vez, necesitas compañía? Hazme un sitio...

El joven, excitado, se echó a un lado... ¡y se cayó al Támesis!

Como podemos apreciar, el vagabundo cometió la falacia de la afirmación del antecedente. Razonó de este modo:

Si esta morena fuera real, estaría aquí.
La morena está aquí.

¡Luego, la morena es real!

Definitivamente: ¡a partir de una implicación y su consecuente no debemos inferir el antecedente!

VI

El si y el no

Un día la hija de un mago dijo a su padre:

—Papá, no creo que puedas, en realidad, predecir el futuro.

—Claro que puedo, —contestó el mago,— es mi profesión.

—Y, sin embargo, te demostraré que en ciertos casos tendrás que fallar.

La joven anotó algo en un papel, lo dobló y lo puso debajo de la bola mágica.

—Ahí tienes descrito un acontecimiento que podrá suceder o no, antes de las tres de esta tarde. ¡Te apuesto que no puedes predecir si ocurre o no! Aquí tienes una tarjeta en blanco. Si crees que el acontecimiento va a ocurrir, escribe SÍ, y si crees que el acontecimiento no va a ocurrir, escribe NO.

—De acuerdo.

El mago escribió algo en la tarjeta.

A las tres en punto la joven sacó el papel de debajo de la bola y leyó en voz alta:

—Antes de las tres de la tarde escribirás NO en la tarjeta.

—¡No acerté! —exclamó el mago,— pues escribí SÍ. Es decir, yo creía que el acontecimiento de escribir NO iba a ocurrir, y no ocurrió porque escribí SÍ. Pero si hubiera escrito NO, tampoco hubiera acertado, porque en ese caso creería que el acontecimiento de escribir NO no iba a ocurrir, y sí ocurrió.

En esta paradoja el *sí* y el *no* nos demuestran ser inseparables.

Otra forma de la misma paradoja es la siguiente: usted pregunta a un amigo:

—¿Será NO la próxima palabra que pronunciarás? Por favor, responde diciendo SÍ o NO.

Si el amigo responde que SÍ, NO debería ser la siguiente palabra y no lo fue; y si responde que NO, entonces NO no debería ser la siguiente palabra, sino SÍ, y, sin embrago, la palabra fue NO.

Esta imposibilidad de distinguir claramente entre el *sí* y el *no* impulsó a Erwin Schrodinger a fundar una nueva teoría de la física: la Mecánica Cuántica. Para sustentar su punto de vista, Schrodinger propuso a sus colegas el siguiente experimento mental.

> *En una caja está encerrado un gato. La caja, provista de una pequeña puertecilla, contiene un dispositivo que*

arroja una gota de veneno sobre el gato en el momento de abrir la puertecilla o de tocar la caja (aunque sea muy levemente, como podría ser el contacto con los rayos X). El investigador desea saber si el gato dentro de la caja está vivo o muerto. Pero, para saberlo, necesita abrir la puertecilla o, al menos, tocar la caja; ¡y, entonces, el gato morirá a causa del veneno! La pregunta es: ¿está vivo el gato en este momento?

—Respondan con un SÍ o un NO, —dijo Schrodinger a los colegas.

Todos guardaron silencio por largo rato. Por fin alguien dijo:

—¡La situación es escabrosa! Si no toco la caja de alguna manera, no puedo saber si el gato está vivo o está muerto. Si la toco, el gato estará muerto por mi interferencia (o porque ya lo estaba antes). ¡No puedo saber si el gato está vivo o muerto!

No hay cómo trazar una demarcación entre la afirmación y la negación, comprendieron los físicos. Y ésta fue una de las razones por la que Werner Heisenberg formuló su famoso *Principio de Incertidumbre*:

El Principio de Incertidumbre

Es físicamente imposible medir simultáneamente la posición exacta y el momento exacto de una partícula.

Para explicar su principio, Heisenberg propuso el siguiente experimento mental.

Supongamos que usted desea medir la posición y el momento de un electrón lo más exactamente posible. Para medir la posición, usted decide mirar el electrón por un potente microscopio óptico. Para que el electrón se vuelva visible para usted, al menos un fotón de luz debe rebotar en el electrón, y luego pasar a través del microscopio hasta su ojo. Sin embargo, cuando el fotón choca con el electrón, le transfiere cierta cantidad desconocida de su propio momento. Entonces, al medir el momento del electrón, la gran cantidad de luz que usted necesita para ese propósito, cambiará el momento del electrón hasta un grado impredecible.

La realidad de esta incertidumbre básica también nos es transmitida por el siguiente cuento Zen. El Maestro Dogo y su discípulo Zangen asistían a un funeral. De pronto Zangen golpeó el ataúd y dijo a su Maestro:

—¿Está vivo o muerto?

—No lo puedo decir, —respondió el Maestro Dogo.

Entonces Zangen le dijo:

—Si no me responde, Maestro, le pego...

El discípulo era fuerte, y el viejo Maestro era amable y bueno.

—¡De acuerdo, Zangen, golpéame! Pero de todas maneras no puedo decir si está vivo o muerto.

Y Dogo fue golpeado por Zangen.

Al volver al templo, Dogo reunió a todos sus discípulos y dijo:

—Zangen, hoy me has golpeado severamente. Sufro mucho. Yo podría permitírtelo, sin embargo la regla del templo lo prohibe. Por lo que, después de mi excomunión, debes abandonar este templo. Vete antes de que los demás te echen fuera.

Zangen se dirigió entonces al templo de otro gran Maestro, Sekito, y le explicó el diálogo con Dogo.

—Le pregunté: ¿vivo o muerto?, y mi Maestro dijo que no podía responder. Pero, seguramente, lo sabía bien e intentaba guardar el secreto. ¿Qué piensa usted de esto?

—Tu Maestro te lo ha explicado perfectamente, —dijo Sekito.— Su respuesta era justa. Yo mismo no puedo afirmar: ¿vivo o muerto?... No se puede responder claramente.

En ese instante Zangen despertó.

¿Vivo o muerto? ¿Sí o no? No se puede decidir.

VII

¿Quién decide?

En cierta ocasión un Cocodrilo arrebató a una madre a su pequeño hijo. Entre los protagonistas tuvo lugar el siguiente diálogo.

Cocodrilo: *¿Voy a comerme a tu niño? Responde correctamente, y prometo que te lo devolveré ileso.*

La madre: *¡Ay, ay, ay! ¡Te vas a comer a mi hijo!*

Cocodrilo: *Humm… ¿Qué debo hacer? Si me lo como, habrás contestado correctamente, y tendré que devolvértelo. Y si te lo devuelvo, lo que has dicho será falso, y debería habérmelo comido ya… ¡No sé qué hacer!*

El pobre Cocodrilo estaba tan confundido que dejó escapar al niño. La madre lo asió de un brazo y huyó.

¡La madre fue muy lista!, ya que con su respuesta hizo que el Cocodrilo no pudiera decidir qué hacer.

Y ésta es nuestra situación siempre, afirman los místicos. En realidad nunca decidimos, solo imaginamos que decidimos, nunca elegimos, solo imaginamos que elegimos. Nuestras decisiones y elecciones son como las de la mosca de la fábula de Jean de La Fontaine.

En un día caluroso, por la pendiente de un camino polvoriento y difícil, tiraban de una diligencia seis fuertes caballos. Después de varias horas de viaje, los caballos resoplaban de cansancio, agotados. El cochero dejó, entonces, que descansaran unos minutos.

De pronto una mosca se acercó a los caballos con la pretensión de animarlos con su zumbido. Picó a uno y a otro, se sentó sobre el timón y luego sobre la nariz del cochero. Los caballos arrancaron de nuevo.

—¡Estoy haciendo andar al carruaje! —exclamó la mosca, orgullosa de su trabajo.— ¡He ayudado a vencer el cansancio!

Iba y venía, haciéndose la diligente. Parecía un sargento que en el combate conduce a sus hombres a la victoria. Acercándose a las orejas de los caballos, les cantaba y les decía palabras de aliento.

Después de mucha fatiga, la diligencia llegó a la meta.

—¡Descansaremos ahora! —exclamó inmediatamente la mosca.— He trabajado tanto que los pasajeros se encuentran ya en casa. ¡Ea, señores caballos, pagadme mi tarea!

Fontaine nos entrega este mensaje: aunque la persona cree que hace y deshace, en realidad todo sucede por sí mismo. La participación de la persona es ilusoria, la vida simplemente sigue su curso. Lo que nos corresponde en ella es ser Conciencia sin elección.

Un cuento Sufí nos aclara la razón de ello.

Había una vez un rey que había subido al trono y decidió que debía ser coronado. Cuando la cuestión de la fecha se estaba discutiendo en la corte, los astrólogos se adelantaron y dijeron:

—La fecha se debe fijar solo después de que el horóscopo para la ocasión haya sido formulado. Cuando un acontecimiento ocurre sin haberse hecho el horóscopo, puede traer mala suerte.

—Muy bien, —dijo el rey.

Entonces un Sufí se levantó.

—Majestad, —dijo,— de acuerdo con este principio, primero se debe formular un horóscopo para el momento en el cual el horóscopo para la coronación deba ser formulado. De otro modo, quizás, los astrólogos hagan su trabajo en un momento desafortunado.

—¿Es eso cierto? —preguntó el rey a los astrólogos.

—Sí, puede ser cierto, —admitieron.

—Pero, —dijo el Sufí,— ¿cómo se hará ese horóscopo del horóscopo de la coronación?

Y, debido a que, después de considerables disputas, nadie pudo responder a esa pregunta, los astrólogos decidieron cambiar las reglas, de modo que pudiesen proceder con su trabajo. Y así, de ese modo, al final el rey fue coronado.

La comprensión Sufí es la siguiente: si la persona *decide* realizar tal o cual acto, ¿en algún momento *decidió decidirlo*? Y si la persona *decide decidir* realizar el acto, ¿en qué momento *decidió decidir decidirlo*? ¡La persona nunca decide, afirman los Sufíes, todo sucede por sí mismo!

Alonso Church se topó con esta indecidibilidad de la vida al meditar sobre la Lógica. El Cálculo Proposicional resulta ser decidible, pues cuenta con un procedimiento efectivo para su decisión, que son las tablas veritativas. El Cálculo de Predicados de una variable también resulta ser decidible, pues posee un procedimiento efectivo para su decisión que son los diagramas de Venn. Sin embargo, Church buscaba y no encontraba un procedimiento efectivo para el Cálculo de

Predicados de dos o más variables. En el año 1936, basándose en el teorema de Godel de la Incompletitud de la Aritmética, Church demostró que el Cálculo de Predicados de dos o más variables no es decidible, pues no posee ningún procedimiento efectivo para la decisión de sus teoremas.

La situación es incluso más drástica: en el sentido estricto, tampoco podemos decidir si una fórmula del Cálculo Proposicional es verdadera o falsa. Porque el Cálculo Proposicional se basa en ciertos axiomas (su número varía de un autor a otro, pero jamás es cero), y lo único que podemos afirmar es que,

> *si los axiomas del Cálculo Proposicional son verdaderos, entonces tal fórmula es verdadera.*

Y lo mismo sucede con el Cálculo de Predicados de una variable: podemos decir que,

> *si los axiomas del Cálculo de Predicados de una variable son verdaderos, entonces tal fórmula es verdadera*;

pero nada más. ¡Nunca podemos deshacernos de la forma condicional de nuestras afirmaciones en la Lógica! Pero ¿quién decide si nuestros axiomas son verdaderos o falsos?

Y esto quiere decir que los místicos tienen razón: nunca decidimos nada, todo sucede por sí mismo.

VIII

¡No hay fórmula para números primos!

Cuando el rey de un país convocó una audición para el puesto del científico de la corte, se presentaron tres candidatos.

—¿Cuál es la fórmula que produce solo números primos, y, además, siempre diferentes? —les preguntó el rey.

—Es la fórmula $f(n)=4n+1$, —contestó el primer candidato.

—Es la fórmula $g(n)=n^2+21n+1$, —replicó el segundo.

—Es la fórmula $h(n)=n^2+n+41$, —respondió el tercero.

El rey tuvo que ponerse a pensar: ¿cuál de los tres candidatos dice la verdad?

Analicemos la primera fórmula:

$$f(n)=4n+1.$$

Calculemos algunos de sus valores:

$$f(1)=4\cdot 1+1=5;$$
$$f(3)=4\cdot 3+1=13;$$
$$f(4)=4\cdot 4+1=17;$$
$$f(7)=4\cdot 7+1=29;$$
$$f(9)=4\cdot 9+1=37;$$
$$f(10)=4\cdot 10+1=41.$$

¡Todos estos números son primos! Sin embargo, si calculamos el valor de esta función para n igual a 5, obtendremos un número compuesto:

$$f(5)=4\cdot 5+1=21=3\cdot 7.$$

Por lo tanto, el primer candidato está mintiendo: su fórmula no produce únicamente a los números primos; ¡también produce números compuestos! Lejeune Dirichlet logró demostrar que una sucesión de números de la forma $\{an+b\}$, con a y b primos entre sí, contiene infinitos primos. ¡Pero lo malo es que también contiene números compuestos! Es decir, se cumple el siguiente

Teorema de Dirichlet

Ninguna fórmula lineal puede producir solamente números primos.

Ahora analicemos la segunda fórmula:

$$g(n)=n^2+21n+1.$$

Calculemos algunos de sus valores:

$$g(1)=1^2+21\cdot 1+1=23,$$
$$g(2)=2^2+21\cdot 2+1=47,$$
$$g(3)=3^2+21\cdot 3+1=73,$$
$$g(4)=4^2+21\cdot 4+1=101,$$
$$g(5)=5^2+21\cdot 5+1=131.$$

¡Todos son números primos! Y así será hasta n igual a 17:

$$g(17)=17^2+21\cdot 17+1=647.$$

Sin embargo, si calculamos el valor que toma esta función en n igual a 18, obtendremos un número compuesto:

$$g(18)=18^2+21\cdot 18+1=703=37\cdot 19.$$

Por lo tanto, el segundo candidato a científico de la corte también está mintiendo: su fórmula no produce únicamente números primos, pues también produce números compuestos.

Por último, analicemos la tercera fórmula:

$$h(n)=n^2+n+41.$$

Calculemos algunos de sus valores:

$$h(1)=1^2+1+41=43,$$
$$h(2)=2^2+2+41=47,$$
$$h(3)=3^2+3+41=53,$$
$$h(4)=4^2+4+41=61,$$
$$h(5)=5^2+5+41=71,$$

$$h(6) = 6^2 + 6 + 41 = 83.$$

¡Todos estos valores son primos! Y ello seguirá siendo verdadero hasta n igual a 39:

$$h(39) = 39^2 + 39 + 41 = 1601.$$

Sin embargo, si calculamos el valor de esta función para n igual a 40, obtendremos un número compuesto:

$$h(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41 \cdot 41.$$

Por lo tanto, el tercer candidato está engañando al rey: su fórmula no produce únicamente números primos; ¡también produce números compuestos! De hecho, respecto de las fórmulas cuadráticas se puede afirmar el siguiente

Teorema

Ninguna fórmula cuadrática puede producir solamente números primos.

Es decir, los tres candidatos al puesto del científico de la corte están mintiendo: ninguna de las tres fórmulas exhibidas es una fórmula para primos. ¡El rey no pudo satisfacer su curiosidad! Y el problema es real, puesto que hasta hoy en día no se conoce ninguna fórmula que produzca únicamente números primos.

¿Por qué deseamos una fórmula que produzca exclusivamente números primos? ¿Qué es *lo primo*, *lo primero* en el conocimiento? Los místicos afirman que es *el sujeto conocedor,* y no el objeto. Para comprender su punto de vista, consideremos un episodio del libro de Malba Tahan *El hombre que calculaba*.

Un joyero de Siria vino a Bagdad a vender sus joyas, y se hospedó en la posada del viejo Salim. Por el hospedaje el joyero prometió pagar a Salim 20 dracmas si vendía las joyas por 100 dracmas, y 35 dracmas si las vendía por 200. Al cabo de varios días de ir y venir de aquí para allá, vendió todas sus joyas en 140 dracmas. El posadero y el joyero se enfrentan ahora al siguiente problema: atendiéndose a lo convenido, ¿cuánto se debe pagar por el hospedaje?

Si llamamos x al costo buscado, el joyero planteó la siguiente proporción:

$$200 \div 35 = 140 \div x.$$

Resolviéndola, se descubre que el valor de x es de 24.5 dracmas:

$$x = 24.5 \text{ dracmas}.$$

—Debo pagar apenas 24 dracmas y medio, —dijo el mercader sirio.— Si vendiendo a 200 dracmas pagaría 35, vendiendo a 140 debo pagar 24 y medio.

—Está equivocado, —replicó irritado el viejo Salim.— Por mis cálculos son 28. Vea usted: si por 100 dracmas yo recibía 20, por 140 debo recibir 28.

El viejo Salim acaba de plantear la siguiente proporción:

$$100 \div 20 = 140 \div x.$$

Resolviéndola, se descubre que el valor de x es de 28 dracmas:

$$x = 28 \text{ dracmas}.$$

—¡Calma, mis amigos! —interrumpió el calculista.— Los resultados que ustedes indican están equivocados, según voy a demostrar. Observen que a una diferencia de 100 dracmas en el precio de venta (200-100) corresponde una diferencia de 15 en el precio del hospedaje (35-20); y ahora estamos tratando con una diferencia de 40 dracmas (140-100). Por lo tanto, si llamamos y a la diferencia en el precio del hospedaje respecto de los 20 dracmas, la proporción que debemos plantear es la siguiente:

$$100 \div 15 = 40 \div y.$$

Resolviéndola, se descubre que el valor de y es de 6 dracmas:

$$y = 6 \text{ dracmas}.$$

Es decir, el joyero debe pagar al viejo Salim

$$x = 20 + 6 = 26 \text{ dracmas.}$$

Malba Tahan plantea, además, una cuarta solución al problema. Dice: observemos que para una venta de 200 dracmas el pago era de 35 dracmas, es decir, constituía el 17.5% del precio de la venta; y que para una venta de 100 dracmas el pago era de 20 dracmas, es decir, constituía el 20% del precio de la venta. Por lo tanto, si llamamos z a la diferencia en el porcentaje del pago respecto del 17.5%, la proporción que debemos plantear es la siguiente:

$$(20 - 17.5) \div 100 = z \div (200 - 140).$$

Resolviéndola, se descubre que el valor de z es de 1.5 por ciento:

$$z = 1.5\%.$$

Es decir, el joyero debe pagar al viejo Salim

$$17.5 + 1.5 = 19\%$$

del precio de la venta. De este modo la cuenta asciende a

$$x = 0.19 \cdot 140 = 26.6 \text{ dracmas.}$$

Así, hemos obtenido cuatro respuestas diferentes:

El joyero debe pagar al viejo Salim:
- 24.5 dracmas;
- 28 dracmas;
- 26 dracmas;
- 26.6 dracmas.

¿Cuál de estas cuatro respuestas es la objetiva? ¿Cuál es la correcta? ¿Cuál es la verdadera?

El ejemplo de Malba Tahan nos muestra claramente que *toda afirmación matemática es siempre subjetiva*, porque la hace un ser humano. ¡El sujeto debe ser tomado en cuenta!

Y es por esta razón que no nos interesa, en realidad, encontrar una fórmula para números primos; sino que, más bien, nos interesa encontrar esta *base prima, primaria,* que es el sujeto. El individuo que cuenta los objetos, influye fundamentalmente en el resultado de tal cuenta. Y la comprensión de este hecho nos proporciona la fórmula que estábamos buscando.

IX

¿El teorema de Fermat?

—Yo creo que Fermat tenía razón al afirmar que la suma de dos n-ésimas potencias nunca es, nuevamente, una n-ésima potencia, —dijo un colega de Gotingen a Félix Klein.

—¿En qué se basa su creencia? —preguntó Klein.— ¡Eso no ha sido demostrado! De hecho, yo podría exhibirle una aritmética donde la conjetura de Fermat es falsa ya para $n=3$.

—¿Qué aritmética es ésa? —preguntó, muy extrañado, el profesor.

—La aritmética del reloj, —respondió Klein.

Y dio al asombrado colega la siguiente explicación.

En efecto: en la aritmética módulo 12 se tiene:

$$2^3+2^3=8+8=4, \quad 4^3=64=4.$$

Por lo tanto,

$$2^3+2^3=4^3.$$

Y también

$$4^3+4^3=64+64=128=8, \quad 2^3=8.$$

Por lo tanto,

$$4^3+4^3=2^3.$$

Es decir, en la aritmética del reloj se cumple que $2^3+2^3=4^3$, y que $4^3+4^3=2^3$. ¡La suma de dos cubos es, nuevamente, un cubo! ¡Es decir, el teorema de Fermat es falso!

—¡Increíble! —exclamó el profesor.— ¡El teorema de Fermat depende de qué es lo que entendemos por número!

—Yo creo que el teorema de Fermat es, realmente, indecidible, igual que el quinto postulado de Euclides, —dijo Klein.— Si el espacio es infinito, el quinto postulado es verdadero, pero si es finito, es falso. Y de la misma manera si los números son infinitos, el teorema de Fermat es verdadero, pero si los números son finitos, es falso. Los números no son ni fermatianos ni no-fermatianos, de la misma manera que el espacio no es ni euclideo ni riemaniano. ¡El espacio no existe sin la persona que lo percibe!

Georg Cantor también descubrió una aritmética donde el teorema de Fermat para cubos falla. Es la Aritmética de los números transfinitos. En ella se cumple la siguiente descomposición:

$$\aleph^3 + \aleph^3 = \aleph^3.$$

¡La suma de dos cubos es, nuevamente, un cubo! ¡El teorema de Fermat es falso!

¿Cómo explicar esta contradicción? Los intuicionistas como Henri Poincaré sostienen que ésta se produce por no incluir al sujeto en las cuentas matemáticas.

—La Aritmética no tiene un valor objetivo, —decía Poincaré a los amigos.— ¡Nuestra intuición es anterior al objeto!

En cierta ocasión Poincaré apoyó su visión contando el siguiente cuento.

> *Un rey ordenó a su jardinero preparar 3 jarrones de 4 orquídeas cada uno, pues quería regalarles a sus tres hijas, un jarrón a cada una. El jardinero escuchó mal e hizo 4 jarrones de 3 orquídeas cada uno. El rey regaló los tres jarrones a las princesas, pero no sabía qué hacer con el cuarto, así que dijo:*
>
> *—Estas orquídeas son para el ser más hermoso del reino.*
>
> *Y ordenó que se colocara el jarrón en una calle de la ciudad.*
>
> *Un gato, que tomaba el sol, vio las orquídeas y se acercó a olerlas. Un perro, al ver al gato, empezó a ladrar. El dueño del gato salió a ver qué pasaba, y quiso que el perro de su vecino se callara. Pero el dueño del perro se enfadó y lo amenazó con el puño por molestar al animal.*
>
> *¡A los pocos minutos los dos hombres estaban peleándose! Los demás habitantes del barrio la emprendieron a golpes entre sí por ir a favor o en contra de los rivales. Pronto el pueblo quedó dividido en dos bandos, que excavaron trincheras para protegerse de sus contrarios y para atacarlos mejor.*

Transcurrido algún tiempo, los dos bandos se dieron cuenta de que era imposible vencer a sus contrarios. ¡Pero tampoco querían salir perdiendo! Y, para ser más fuertes, empezaron a llamar a la gente de otros pueblos. La batalla continuó en las mismas condiciones.

Por fin el rey se enteró de lo que pasaba, y envió a sus tropas para que pusieran término a la pelea. Pero, cuando llegaron, mucha gente había muerto.

El rey llamó al jardinero y le preguntó:

—¿Por qué hiciste 4 jarrones de 3 orquídeas, y no 3 jarrones de 4 orquídeas, como yo te había ordenado? Este error tuyo cobró muchas víctimas.

—¡Majestad! Todo el mundo sabe que 4 por 3 es 12, y que 3 por 4 también es 12, —contestó el jardinero.— La ley conmutativa del producto es una verdad universal, y no entiendo por qué se produjo la pelea.

—Para nuestra vida psíquica el producto de 3 por 4 no es igual al producto de 4 por 3, —concluyó Poincaré su relato.— La ley conmutativa de la multiplicación solo se cumple en casos abstractos, no en la vida real.

El intuicionismo sostiene que toda la matemática se basa en la intuición del individuo.

X

El método de reducción al absurdo

Sócrates vivía en Atenas y se dedicaba a indagar sobre la Verdad.

—Solo hay un bien, y es la sabiduría, —solía decir a los amigos,— y solo un mal, la ignorancia.

Un día Querefón preguntó a la sacerdotisa de Apolo:

—¿Quién es el hombre más sabio?

—Sócrates es el sabio entre los hombres, —fue la respuesta.

La noticia se propagó por Atenas a la velocidad de un rayo. Al enterarse de ella, Melito, quien se tenía a sí mismo por el más inteligente, sintió tanta envidia que inmediatamente urdió un plan. Presentó al jurado la siguiente acusación:

> *Sócrates delinque: corrompe a los jóvenes, no reconoce a los dioses de la ciudad y, en cambio, tiene extrañas creencias relacionadas con los genios.*

—Si es cierto que es tan sabio como dicen, ¡a ver cómo sale de ésta! —exclamó, muy contento.

Ante la corte de quinientos cincuenta y seis jueces Sócrates hizo su propia defensa. El diálogo se desarrolló de la siguiente manera:

Sócrates

Supongamos, Melito, que la acusación que me formulaste es verdadera. En ella tú afirmas que yo creo y enseño cosas de genios, y que no acepto la existencia de ningún dios, ¿no es así?

Melito

En efecto, es lo que con juramento declaré ante los dioses y los jueces.

Sócrates

Ahora bien, Melito: si yo creo en cosas de genios, es del todo forzoso que crea también en genios, ¿verdad?

Melito

Por supuesto.

Sócrates

Mas aclárame, por favor: ¿quiénes son los genios?

Melito

Los genios son hijos bastardos de los dioses, nacidos de las ninfas o de otras divinidades.

Sócrates

¡Muy bien, Melito! Pero dime: ¿qué hombre puede creer que hay hijos de dioses, pero no dioses?

Melito

(poniéndose nervioso)

Ninguno.

Sócrates

Por supuesto, Melito, porque esto estaría tan fuera de lugar como creer que los mulos son hijos de caballos y asnos, pero que no hay ni caballos ni asnos.

Melito

Así es.

Sócrates

Y si yo creo en genios, como dices, y los genios son hijos de los dioses, ¿no significa esto, acaso, que yo debo creer también en los dioses?

Melito

(de mala gana)

Pues sí.

Sócrates

¡Pero tú declaras que yo no creo en los dioses!

Melito

(guarda silencio, con la mirada hacia el suelo)

Sócrates

(dirigiéndose al público)

Atenienses, ¿qué pueden concluir de todo esto?

Los atenienses

(a coro)

¡Que la acusación de Melito es falsa!

Es decir, al suponer que la acusación de Melito es cierta, Sócrates demostró que, según Melito, él cree y no cree en los dioses, al mismo tiempo. Este absurdo significa que lo que ha dado lugar a él debe ser rechazado. ¡Por lo tanto, la acusación de Melito debe ser falsa!

A esta técnica, consistente en ejemplificar la falsedad de una afirmación reduciéndola al absurdo, Sócrates la llamó *mayéutica;* hoy en día la llamamos *reducción al absurdo*.

Como un ejemplo de la utilización de esta técnica puede servir el argumento pitagórico sobre la irracionalidad de la raíz cuadrada del número 2. Pitágoras supuso que el lado y la diagonal de un cuadrado guardan entre sí una relación de números enteros, y desembocó en una contradicción. Ello le obligó a concluir que el lado y la diagonal de una cuadrado son inconmensurables.

Pitágoras supuso que en el lado del cuadrado caben m mónadas, y en la diagonal n. Por ejemplo, m podría valer 100 mónadas y n, 150. Entonces la razón entre las dos magnitudes sería

$$\frac{150}{100} = \frac{3}{2}.$$

Los números 150 y 100 tienen divisores comunes ($2, 5, 10, 25, 50$), pero los números 3 y 2 no tienen ningún divisor común. Entonces, Pitágoras supuso desde el principio que los números m y n no tienen divisores comunes, es decir, que son *primos relativos*.

Por el teorema de Pitágoras sabemos que n^2 debe ser exactamente el doble de m^2:

$$n^2 = 2m^2.$$

Esta igualdad nos informa que el número de la izquierda puede ser dividido en dos partes iguales:

$$n = 2k.$$

Si la reemplazamos en la igualdad anterior, obtendremos que

$$(2k)^2 = 2m^2,$$

o que

$$4k^2 = 2m^2.$$

Y si estos dos números son iguales, sus mitades también deben ser iguales:

$$2k^2 = m^2.$$

Esta igualdad nos informa que el número m^2 puede ser dividido en dos partes idénticas:

$$m = 2p.$$

¿Qué hemos logrado averiguar? ¡Que los números m y n, ambos, son pares! En efecto, así lo afirman las igualdades

$$n = 2k,$$
$$m = 2p.$$

¡Entonces, el número 2 es un divisor común de ellos! Pero esto contradice el hecho de que habíamos escogido los números m y n de tal modo que fueran primos relativos. ¡Hemos arribado a una contradicción! Aplicando el método de *reducción al absurdo*, Pitágoras concluyó que la diagonal y el lado de un cuadrado no son hechos de mónadas, pues, de ser así, guardarían entre sí alguna proporción, y no guardan ninguna. Pitágoras llamó a estas dos magnitudes *inconmensurables*, por no tener ninguna *mensura* o *medida* común.

Fue de esta manera que el método de reducción al absurdo adquirió derechos de ciudadanía en las demostraciones matemáticas.

XI

El bien y el mal

En cierta ocasión Glaucón se acercó a Antístenes para pedir consejo.

—Desearía dedicar mi vida a la política, —le dijo.— Siempre fue mi anhelo hacer el bien a la ciudad de Atenas. ¿Me puedes recomendar algo?

—¿Cómo sabes que, al dedicarte a la política, vas a hacer el bien? —preguntó Antístenes.

—¡Oh, eso no admite duda alguna! —exclamó el joven entusiasta.— Lo demuestra el siguiente razonamiento:

> Toda acción política está guiada por el deseo de conservar o de cambiar.
> Si la acción política quiere conservar algo, está guiada por la idea del bien (pues creemos que lo que queremos conservar es bueno).
> Si la acción política quiere cambiar algo, también está guiada por la idea del bien (pues opinamos que vamos a crear algo mejor que lo que queremos cambiar).
> ¡Por lo tanto, la acción política siempre está guiada por la idea del bien!

Antístenes miró a Glaucón profundamente y dijo:

—Sin duda, tu razonamiento es válido. Sus premisas son verdaderas, y, por lo tanto, su conclusión debe ser verdadera. Es decir, debemos aceptar que toda acción política está guiada por la idea del bien. Pero ¿por qué no te haces este otro razonamiento?

> Toda acción política está guiada por el deseo de conservar o de cambiar.
> Si la acción política quiere conservar algo, está guiada por la idea del mal (pues creemos que lo que viene es peor que los que tenemos).
> Si la acción política quiere cambiar algo, también está guiada por la idea del mal (pues opinamos que lo que tenemos es malo).
> ¡Por lo tanto, toda acción política está guiada por la idea del mal!

—¡Tu razonamiento también es válido! —exclamó Glaucón.— Sus premisas son verdaderas, y, por lo tanto, su conclusión debe ser verdadera. ¡Es decir, debemos aceptar que toda acción política está guiada por la idea del mal!

—Así es, —dijo Antístenes.

El filántropo estaba desconcertado.

—¿Cómo es posible que una y misma gestión sea un bien y un mal al mismo tiempo? —dijo.— ¡No logro verlo!

—En todo acto que emprendas por Atenas estarás, simple y llanamente, persiguiendo aquello que consideras un bien, y huyendo de aquello que consideras un mal, —dijo Antístenes.— ¡Pero el bien y el mal son uno solo, Glaucón! ¿Por qué insistes en separarlos?

La unidad entre el bien y el mal, que tanto nos cuesta ver a los adultos, es casi evidente para los niños. En cierta ocasión, un predicador preguntó a un grupo de niños:

—Si todas las buenas personas fueran blancas y todas las malas personas fueran negras, ¿de qué color serían ustedes?

A lo que una pequeña respondió:

—Yo, reverendo, tendría la piel a rayas.

Para comprender la unidad intrínseca entre el bien y el mal, Cristo solía contar la parábola del trigo y la cizaña.

El Reino de los Cielos, decía, es semejante a un hombre que sembró buena semilla en su campo.

Pero, mientras dormían los hombres, vino su enemigo, sembró cizaña entre el trigo y se fue.

Cuando brotó el trigo y se formó la espiga, apareció también la cizaña.

Se acercaron los siervos al dueño del campo y le preguntaron:

—Señor, ¿no sembraste buena semilla en tu campo? ¿De dónde, pues, tiene cizaña?

Y él les dijo:

—Un hombre enemigo ha hecho esto.

Los siervos le dijeron:

—Entonces, ¿quieres que vayamos y la recojamos?

Pero él dijo:

—No; no sea que al recoger la cizaña arranquéis con ella el trigo. Dejad crecer a ambos hasta la siega. Cuando llegue el tiempo de la siega, yo diré a los segadores: "Recoged primero la cizaña y atadla en manojos para quemarla, pero reunid el trigo en mi granero."

¿Cuál es, entonces, el papel del mal al lado del bien? ¿Por qué siempre van juntos? Santo Tomás lo comprendió de este modo.

Una mujer se quejó ante Santo Tomás:

—¡Mi marido es una mala persona! Yo digo sí, él dice no; yo hago una comida, él pide otra; yo salgo a pasear, él se queda en casa.

—¡Es un buen síntoma! —dijo Santo Tomás, sonriendo.— ¿Te has fijado que aquello que conoce ciertas cosas no puede tener en su naturaleza ninguna de ellas?

—¿Qué quiere decir? —preguntó la mujer.

—Por ejemplo, si el ojo fuera de color rojo, no sería capaz de percibir objetos rojos, —dijo Santo Tomás.— Si puede ver el rojo, es, precisamente, porque es transparente, o sin rojo. Y de la misma manera, si puedes ver el mal, es que, en verdad, no conoces el mal. ¡Eres transparente para el mal! Tu Ser Interior es el Bien Eterno, y el mal únicamente se presenta para que tomes conciencia de ello. ¿De qué otro modo podría Dios decirte que eres el Bien Absoluto?

El mal no tiene ser propio: su única misión es servir de contraste para nuestra Beatitud Interior.

XII

El vidrio y el espejo

Hay una diferencia esencial entre el vidrio y el espejo. Podemos ver a través del vidrio, pero no podemos ver a través del espejo. El vidrio es transparente, y la luz puede pasar a través de él; el espejo está recubierto de plata de un lado, y por eso los rayos de luz no pueden atravesarlo. El vidrio nos permite ver a los otros, mientras que el espejo nos devuelve nuestra propia imagen.

¿Qué es la vida? ¿Imágenes que miramos en un vidrio o en un espejo?

La persona que cree que la vida presenta imágenes en un vidrio, vive para los demás. Considera que las otras personas son importantes, y que, si desea hacerles felices, tiene que servirles. Las personas de este tipo son extrovertidas.

La persona que cree, en cambio, que la vida presenta imágenes en un espejo, intuye que todo lo que ve son sus propios reflejos. Y si desea hacer felices a los demás, primero debe llegar a ser feliz ella misma, pues está en la naturaleza de los reflejos imitar el original. Las personas de este tipo son introvertidas.

Las personas extrovertidas son propensas a sentir celos, pues toman a los demás por personas independientes. El siguiente cuento Zen lo expresa de manera diáfana.

En el Japón antiguo, un fabricante de saké tenía una mujer muy celosa.

Un día que su marido llenaba unos barriles, su mujer fue a mirar a la superficie del líquido, que era lisa como un espejo. Contempló su propia cara, pero, presa de celos, pensó:

“¡Hey, mi marido oculta una mujer en su barril!”

Y corrió a decírselo.

Su marido, inclinándose a su vez, vio en la superficie del líquido una cara de hombre.

“¡Hey, ella también tiene un amante secreto!”

Y empezaron a pelearse como dos traperos...

Los celos surgen por no comprender que la vida no se corresponde con el arquetipo del vidrio, sino con el arquetipo del espejo. Este cuento Zen afirma que la vida es el Espejo de la Conciencia.

Para las personas extrovertidas es difícil imaginar la vida sin celos. Sin embargo, es totalmente posible si se concibe la vida como un espejo. Antony de Mello nos proporciona un ejemplo de ello.

Hubo un niño blanco que se perdió en la selva y se crió en una tribu con una cultura distinta. Cuando creció, se casó con una nativa de aquella cultura.

Ocurrió que a una amiga de su mujer se le murió el marido en la guerra, y aquella noche, al pensar en su amiga sola, la mujer nativa le dijo al marido blanco:

—Oye, me gustaría que fueses a consolar a mi amiga que está sola, y, como ya no tiene marido, te acostases con ella.

El marido, que recordaba aún rasgos de su cultura, se negaba horrorizado, pero al final complació a su mujer.

Cuando volvió, la mujer le dijo:

—Ya sabía que eras un buen hombre, y ahora te quiero más porque eres compasivo. ¡Me siento orgullosa de ti!

La historia de la Matemática ha representado ambos puntos de vista: el extrovertido en la Geometría Euclidea, y el introvertido en la Geometría Riemanniana. Según Euclides, dos rectas paralelas nunca se encontrarán, aunque se les prolongue hasta el infinito. En cambio, para Bernhard Riemann no existen rectas paralelas, todas las rectas se intersecan siempre (en los dos polos de la esfera). Si se envía un rayo de luz en el espacio euclideo, éste nunca regresará y se perderá en el infinito; pero un rayo de luz, enviado sobre la esfera riemanniana, regresará al punto de origen.

Podríamos decir que Euclides percibe la vida como imágenes vistas a través de un vidrio, mientras que para Riemann son imágenes que devuelve un espejo. En otras palabras, la Geometría Euclidea se basa en el arquetipo psíquico del vidrio, mientras que la Geometría Riemanniana se basa en el arquetipo psíquico del espejo.

Esto explica el hecho de que las dos Geometrías se contradigan la una a la otra.

- En la Geometría Euclidea la suma de los ángulos en un triángulo mide siempre 180 grados, mientras que en la Geometría Riemanniana tal suma es siempre mayor a 180 grados.

- El plano Euclideo contiene rectángulos, mientras que en el plano de Riemann no existen rectángulos.

- En el plano Euclideo hay triángulos semejantes y no congruentes, mientras que en el plano de Riemann, si dos triángulos son semejantes, deben ser congruentes.

- En el plano Euclideo los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60 grados, mientras que en el plano de Riemann hay triángulos equiláteros con todo tipo de ángulos: de 61 grados, de 75 grados, de 89 grados, etc.

- En el plano Euclideo el área de un triángulo depende de su base y altura, mientras que en el plano de Riemann el área de un triángulo depende de sus tres ángulos.

¿Por qué las dos Geometrías son tan diferentes? ¿Por qué son opuestas en tantos aspectos? Esto se debe, precisamente, a la diferencia de los arquetipos psíquicos a los que responden. Sus conflictos marcan la diferencia entre el arquetipo del vidrio y el arquetipo del espejo.

Pero incluso esa diferencia se disuelve al comprender que la vida es el Espejo de la Conciencia.

XIII

Limosna para un hombre malo

Durante un paseo con Alejandro, Aristóteles dio limosna a un hombre del cual se conocía que había matado. Advirtiendo asombro en los ojos de Alejandro, dijo:

—No socorrí las costumbres, sino al hombre.

Y añadió:

—Todos los hombres son divinos, y ningún ser divino puede ser condenado. Por lo tanto, ningún hombre puede ser condenado.

—Es un silogismo válido, —aceptó Alejandro,— y, como sus premisas son verdaderas, su conclusión también debe ser verdadera. ¡Pero qué difícil de entender y seguir para mí!

—Puedes juzgar los actos, Alejandro, —dijo Aristóteles,— pero nunca juzgues al hombre. ¡El hombre es inmaculado!

El siguiente cuento Zen nos entrega el mismo mensaje.

En la era Meiji, vivía un monje muy famoso, el maestro Kôjun Shichiri. Un día, un ladrón se introdujo en su templo y le amenazó:

—¡El dinero!

—¿El dinero? Tengo mucho, —le dio una caja llena de billetes y le dijo:— Se lo agradezco, ya que tengo demasiado dinero. Justamente hoy me han dado mucho. Lléveselo, se lo ruego.

El ladrón se quedó aturdido.

—¿Me lo puedo llevar todo? ¿De verdad?

—Desde luego, debe usted llevárselo todo.

El ladrón, muy impresionado, se dispuso a partir, pero Kôjun le dijo:

—¡Espere, espere! Su ropa no abriga mucho y la noche está muy fría. Justamente ayer recibí de una persona fallecida un buen capote muy caliente. Se lo regalo.

El ladrón lo cogió y lo metió en el saco con su dinero.

—Espere un momento aún.

—¡Qué! ¿Qué quiere darme ahora?

—Ya no tengo más que darle; pero después de haber recibido todas esas cosas de mí, debe usted darme las gracias.

Algún tiempo después y tras otros numerosos delitos, el ladrón fue detenido y confesó sus robos. Kôjun fue llamado a declarar, y se le confrontó al ladrón. Cuando los policías oyeron la declaración del robo, dijeron a Kôjun:

—No debe usted ayudar a los ladrones.

Pero él les dijo:

—No conozco a ningún ladrón que haya entrado a mi templo.

—¿No conoce usted a este hombre?

—Desde luego que sí. Este hombre vino un día a mi templo. Le hice un regalo y él me dio las gracias antes de irse.

En ese momento, el ladrón se sintió muy impresionado otra vez, y espontáneamente dio las gracias nuevamente a Kôjun. Lloró, fue muy profundamente emocionado y turbado. Esto significó para él una nueva revolución interior.

¡El hombre no es igual a sus actos! Lo afirman todos los sabios, los occidentales y los orientales. ¿Qué es, entonces, el hombre? Es el Testigo de sus propios actos y de los actos de los demás, es el Testigo de la vida. Y los actos de robo y de violencia surgen, precisamente, al no comprender este hecho.

¿Cómo puede el hombre comprender que no está implicado en sus propios actos? ¿Cómo puede dejar de sentirse responsable de lo que hace? ¿Cómo puede realizar su naturaleza de Testigo?

Tales, uno de los sabios de la antigua Grecia, midió la altura de la pirámide de Keops tan solo con medir su propia sombra y la sombra de la pirámide. Dijo al faraón:

—Hay una proporción secreta que se esconde en cada fenómeno. Si en un instante la altura de un hombre y su sombra se hacen iguales, en ese mismo instante la altura de la pirámide, por más alta que ésta sea, debe hacerse igual a su sombra.

¡El hombre es Testigo de objetos tan grandes como la pirámide! Aunque su cuerpo es pequeño, su Espíritu es Infinito, y puede medir la Tierra y el Cielo.

Alejandro, á pesar de ser discípulo de Aristóteles, no comprendió este mensaje, no pudo visualizar su propia naturaleza de Testigo. Creyó que debía actuar, ir al Ganges, conquistar el mundo, que de ese modo se afirmaría como un hombre valiente. Sin embargo, una vez en la India, conoció a un místico que se llamaba Dandamis.

Los soldados de Alejandro fueron a encontrarse con Dandamis, quien estaba desnudo en la orilla del río.

—Alejandro Magno te invita a acompañarle a su país, —le dijeron.— Tendrás todas las comodidades y te proporcionará todo lo que necesites. Serás huésped del rey.

El faquir desnudo se rió y dijo:

—Un místico se mueve como las nubes, con libertad absoluta. No soy un hombre, soy el Testigo de lo que sucede. No me pueden llevar a ningún sitio.

Alejandro fue a verlo personalmente con la espada desenvainada. Dandamis se rió y dijo:

—Baja tu espada, aquí no te servirá de nada. Porque solo podrías herir mi cuerpo, y hace tiempo que lo abandoné. Ésta es mi cabeza, córtamela. Cuando caiga, verás cómo rueda por la arena, y yo también lo veré. Porque no soy el cuerpo, soy un Testigo.

Alejandro volvió a guardar la espada en su vaina y dijo:

—¡Nunca he conocido a un hombre tan bello! Ahora comprendo lo que mi maestro Aristóteles quería decirme cuando me enseñaba que todos los hombres son divinos. ¡Porque el hombre no es sus actos, es un Testigo!

XIV

El principio de identidad

La paradoja de Teseo, también conocida como *el barco de Teseo*, es una paradoja sobre el concepto de reemplazo. Se basa en la siguiente pregunta:

> *cuando a un objeto se le reemplazan todas sus partes, ¿éste sigue siendo el mismo?*

Teseo fue un rey de Atenas. Una leyenda griega, recogida por Plutarco, cuenta que el barco, en el cual volvieron desde Creta Teseo y los jóvenes de Atenas, tenía treinta remos. Los atenienses lo conservaban celosamente, retirando las tablas estropeadas y reemplazándolas por unas nuevas y más resistentes.

De este modo el barco de Teseo se había convertido entre los filósofos griegos en un ejemplo de la identidad de las cosas que cambian. Algunos defendían que el barco continuaba siendo el mismo, mientras los otros aseguraban que ya no lo era.

Se llegó a formular la siguiente pregunta: si se hubieran reemplazado cada una de las partes del barco una a una, ¿estaríamos en presencia del mismo barco?

Además, se hizo una pregunta adicional: si las partes reemplazadas se almacenasen y luego se usasen para reconstruir el barco, ¿cuál de los dos —si es que alguno— sería el barco original de Teseo?

En matemáticas el principio lógico de identidad se acepta como un postulado. Afirma que

> *toda cosa es igual a ella misma,*

y se lo simboliza de este modo:

$$A = A. \qquad (*)$$

Este principio sostiene que cada cosa, pase lo que pase, sigue siendo la misma. Así, por ejemplo, usamos el principio de identidad para los números de este modo:

> la clase de los números pares es idéntica a la clase de los números que se dividen para 2;

para los conjuntos, de éste:

$$A \equiv B \text{ si y solo si } x \in A \leftrightarrow x \in B;$$

y para las relaciones, de éste otro:

$$S \equiv R \text{ si y solo si } xSy \leftrightarrow xRy.$$

Sin embargo, algunos filósofos han objetado la veracidad de este principio. Así, Hegel indicó que la letra A que figura en la parte izquierda de la igualdad (*) no es totalmente igual a la letra A que figura en la parte derecha. Porque la primera se encuentra a la izquierda del signo de la igualdad, mientras que la segunda, a su derecha. ¿Cómo puede ser verdadero un principio de identidad, si no podemos escribir sus partes iguales de manera idéntica?

La Filosofía Perenne explica lo erróneo de este principio.

En cierta ocasión el emperador Malind envió a buscar al muy respetado monje Nassen para agraciar a su corte. El correo llegó donde Nassen y le dijo:

—¡Monje Nassen! El emperador desea verte. He venido a invitarte.

Nassen respondió:

—Si deseas que vaya, iré; pero deberás perdonarme, pues no hay ningún Nassen aquí. Es sólo un nombre, un nombre temporal.

El mensajero informó al emperador que ese hombre era muy extraño. Había respondido que vendría, pero que allí no había ningún Nassen. El emperador quedó pensativo.

Nassen llegó a la hora convenida en un carro real, y el emperador le recibió en la reja.

—¡Monje Nassen, te doy la bienvenida! —dijo.

Al oír esto, el monje comenzó a reír:

—Acepto tu hospitalidad como Nassen, pero, por favor, recuerda que no hay nadie que se llame Nassen.

El emperador dijo:

—Estás hablando en forma enigmática. Si tú no eres, ¿quién ha aceptado la invitación? ¿Quién está respondiendo a esta bienvenida?

Nassen miró hacia atrás y dijo:

—¿No es éste el carruaje en el que vine?

—Si, éste es.

El monje dijo:

—Por favor, suelten a los caballos.

Así se hizo. El monje preguntó, señalando a los caballos:

—¿Es éste el carruaje?

El emperador respondió:

—¿Cómo pueden los caballos ser llamados un carruaje?

A una señal del monje los caballos se alejaron, y ante otra señal suya, las varas utilizadas para atar a los caballos fueron también retiradas.

—¿Son estas varas el carruaje?

—¿Cómo pueden estas varas ser llamadas un carruaje?

Entonces las ruedas fueron quitadas.

—¿Son estas ruedas tu carruaje?

—¡Por supuesto que no! Éstas son las ruedas, y no el carruaje.

El monje siguió ordenando que quitaran todas las partes, una por una, y respecto a cada una de ellas el emperador tuvo que decir que no eran el carruaje. Finalmente, no quedó nada. El monje preguntó:

—¿Dónde está tu carruaje ahora? Respecto a cada una y todas las partes que quitamos, afirmaste que no eran tu carruaje... Entonces dime: ¿dónde está ahora tu carro?

El emperador quedó asombrado ante esta revelación. El monje prosiguió:

—¿Comprendes? ¡El carruaje solo era un montaje! Era un conjunto de nombres. El carruaje no tenía un ser propio. Por favor, ve donde está cada cosa, y verás que no está en ninguna parte. Es una corporación de muchas sensaciones, y eso es todo. Piensa en cada una de tus partes constitutivas, en cada uno de tus aspectos. Todo será eliminado: lo uno después de lo otro; y, finalmente sólo quedará la nada. Esa nada es Dios.

Los místicos sostienen que el verdadero principio de identidad es éste:

Dios es siempre igual a Sí Mismo.

XV

El conocimiento y la comprensión

¿Cuál es la diferencia entre el conocimiento y la comprensión?

Una antigua historia sufí nos lo aclara de este modo.

Había una vez cuatro hombres que vivían en la misma comunidad. Todos habían estudiado las artes teóricas y prácticas, hasta tal punto y bajo tan grandes maestros de conocimiento que todo el mundo estaba convencido de que habían alcanzado el apogeo del conocimiento.

Un día los cuatro llegaron a la conclusión de que deberían viajar y ejercitar su conocimiento, porque ¿no se ha dicho que aquel que tiene conocimiento y no lo usa, es como si fuera un necio?

De modo que los amigos se convirtieron en viajeros, buscando oportunidades para ejercitar su conocimiento. Ocurría que tres de los cuatro eruditos estaban profundamente versados en artes y ciencias, mientras que el cuarto estaba muy dotado de comprensión.

Un día, mientras los cuatro estaban caminando, se encontraron una pila de huesos y otros restos de un animal, al lado del camino.

El primer erudito dijo:

—Puedo percibir a través de mi conocimiento que esto es el cadáver de un león.

El segundo dijo:

—En cambio, yo poseo el conocimiento con el cual reconstruir su cuerpo en forma viable.

El tercero, no quedándose atrás, dijo:

—Yo tengo la capacidad de reanimar cosas y puedo conferirles la vida.

Y los tres decidieron aplicar sus respectivos poderes.

Sin embargo, anticipándose a ello, el cuarto erudito les dijo:

—Soy un hombre de comprensión. Éstos son, ciertamente, los restos de un león. ¡Reavivadlo y nos destruirá a todos si puede!

Pero los tres eruditos estaban demasiado interesados en ejercitar sus teorías y llevar a cabo sus prácticas. A los pocos minutos el montón de piel y huesos fue reconstituido como un vivo, palpitante y claramente peligroso león.

Mientras los practicantes de la erudición estaban ocupados con sus operaciones, el cuarto erudito se subió a un árbol muy alto. Desde allí pudo ver cómo el león se lanzó sobre sus compañeros y los devoró. Entonces se alejó rugiendo entre la maleza; y el único sobreviviente de la expedición se bajó del árbol y regresó a su país.

¿Es esta frase verdadera o falsa? Si esta frase fuese verdadera, significaría que ella está mintiendo, pues es lo que afirma; ¡y una frase que miente es falsa! Entonces, la frase debería ser falsa. Pero eso querría decir que la frase no está mintiendo, pues afirma que sí lo está. Y si la frase no está mintiendo, está diciendo la verdad. ¡Pero una frase que dice la verdad debe de ser verdadera!

Lo que acabamos de ver es que, si la frase del sabio cretense es verdadera, debe ser falsa, y si es falsa, debe ser verdadera. ¡Se ha formado un círculo vicioso!, y por esta razón la frase de Epiménides obtuvo el nombre de *la Paradoja del mentiroso*. Lo sorprendente es que la fórmula que permitió a Gödel demostrar la incompletitud de la Aritmética, una vez traducida al meta-lenguaje, decía:

Soy indemostrable.

¡Que parecido tan admirable con la frase de Epiménides!, ¿verdad?. Pero, a diferencia de ésta, como la frase de Gödel dice ser indemostrable y, en efecto, es indemostrable, no se forma un círculo vicioso, sino que se ejemplifica el hecho de que existe al menos una verdad aritmética que no puede ser demostrada. ¡Nuestro conocimiento aritmético es intrínsecamente incompleto! Y, como ya hemos visto, todo conocimiento es intrínsecamente incompleto, pues ignora la unidad de los opuestos.

Igual que el par verdad-falsedad, todos los pares son inseparables, dicen los místicos. Y la comprensión de ello nos hace inmortales.

XVI

Tales mide la altura de la pirámide

El faraón Amasis estaba entusiasmado con la idea de construir una pirámide para su ultratumba.

Un día invitó a Tales de Mileto, el sabio griego que estaba de visita en Egipto, a dar un paseo al desierto de Guizeh, donde se encontraba la pirámide de Keops.

El carro real se detuvo frente a la pirámide. El faraón dijo:

—¡Así de alta quiero mi morada después de la muerte!

—¡Así de alta es tu morada ahora mismo, oh, rey! —replicó Tales.— ¿Por qué solo después de la muerte?

El faraón no comprendió:

—¿Qué quieres decir?

—Tu cuerpo es el templo de Ra, majestad, —explicó Tales,— y es tan alto como esta pirámide.

—¿Mi cuerpo es así de alto? —exclamó el faraón.— ¿Cómo es posible que digas tal disparate?

—Estarás de acuerdo conmigo si prestas un poco de atención al asunto, —aseguró Tales.

—¡Pero si mi cuerpo mide solo seis pies[3], y la pirámide debe medir siquiera unos cuatrocientos! —exclamó el faraón.

—Yo creo que la pirámide mide más de cuatrocientos pies, —dijo Tales.— ¡Salgamos de dudas!

Tales se bajó del carro y midió la sombra de Amasis. Ésta medía exactamente 6 pies. Entonces, empezó a medir la sombra de la pirámide, dando pasos de un pie y diciendo: uno, dos, tres... cuatrocientos ochenta.

—¡Faraón! —exclamó.— ¡La pirámide mide cuatrocientos ochenta pies de alto!

—¿Cómo lo sabes?

—Muy simple, —dijo Tales.— Ra hizo que la sombra de tu cuerpo, hace unos instantes, se hiciera igual a tu altura. Y, en el mismo instante, hizo que la sombra de la pirámide también se igualara con su altura. Porque, para Ra, tú eres más importante que la pirámide y que el cosmos entero. ¡Tú eres el centro de la existencia, la naturaleza te imita en todo! Y si la sombra de tu cuerpo se hace igual a tu altura, la sombra de la pirámide también se hará igual a su altura. Cuando tu cuerpo, que

[3] Un pie mide 30 cm.

mide 6 pies, proyecta una sombra de 6 pies, la pirámide, que mide 480 pies, proyectará una sombra de 480 pies. ¡La pirámide te imita como una sombra!

—¡Extraordinario! —exclamó Amasis.— ¡Yo soy el centro de la creación!

Esta comprensión de los sabios les hace afirmar que el cuerpo del hombre llega al Cielo.

¿Cuál es el arquetipo mitológico de esta ingeniosa medición de la pirámide que realizó Tales? ¿Existe algún mito o cuento en el que ésta se base?

Sí: el mito chino del Viejo Tonto que removió las montañas.

En el siglo III vivía en la China un anciano de noventa años, a quien llamaban el Viejo Tonto. Vivía en Peishan, un lugar de Jizhou, al norte de las montañas Taihang y Wangwu. Su casa miraba hacia esas montañas, y él encontraba bastante incómodo tener que dar un rodeo cada vez que salía o regresaba. Así que un día reunió a su familia para discutir el asunto.

—¿Qué tal si todos juntos removemos las montañas? —sugirió.— Entonces, podríamos abrir un camino hacia el sur, hasta la orilla del río Hansui.

Todos estuvieron de acuerdo.

—Vaciaremos toda la tierra y los peñascos en el mar, —fue la decisión de la asamblea familiar.

El Viejo Tonto partió con sus hijos y nietos. Removían las piedras y la tierra, y en canastos las acarreaban al mar. En cada viaje tardaban cinco días.

Un hombre que vivía en la vuelta del río, a quien llamaban el Sabio, quedó preocupado. Dijo al Viejo Tonto:

—¿Qué tonterías estás haciendo? ¿De qué sirve intentar remover las montañas, si no es una tarea para humanos?

El Viejo Tonto exhaló un largo suspiro.

—¡Ay! Todos te llamaban el Sabio, pero, por lo visto, no eres más perspicaz que una viuda o un niño. Después de que yo muera, seguirán mis hijos; cuando ellos mueran, quedarán mis nietos; y luego sus hijos y los hijos de sus hijos, y así indefinidamente. Aunque son muy altas, estas montañas no crecen, y con cada pedazo que les saquemos se harán más pequeñas. ¿Por qué no vamos a poder removerlas?

Al escuchar estas palabras, el Sabio enmudeció y se marchó cabizbajo. El anciano, sus hijos y sus nietos, siguieron cavando día tras día, sin cejar en su decisión.

Estas palabras también llegaron a los oídos del Dios que gobernaba las dos montañas. Temiendo quedarse sin una cede en el futuro, informó de lo que estaba sucediendo al Soberano del Cielo. Éste, conmovido por la inflexibilidad del Viejo Tonto, ordenó a los dos forzudos, hijos de Kua E, que se llevaran las dos montañas a cuestas. La una fue colocada en Shuodong, y la otra en Yougnan.

A partir de entonces en Jizhou no hubo más montañas que impidieran el paso.

Sí, la matemática nace en Grecia como resultado de esta comprensión optimista: el hombre es el centro del cosmos. Es el origen de la Existencia, la cual es su mero reflejo. ¡La naturaleza nos imita en todo!

La matemática dice al hombre: tú eres el centro del Cosmos.

XVII

El teorema de Pitágoras

Con una carta del rey Polícrates que lo recomendaba al faraón Amasis, Pitágoras navegó a Egipto. Amasis sintió una fuerte simpatía por el viajero griego, y lo invitó en varias ocasiones a palacio.

Un día ofreció un banquete a sus amigos, ente los cuales estaba Pitágoras. El centro de atracción era un mago, del cual todos esperaban que hiciera alguna profecía interesante. Nadie sabía que, cuando no se hallaba inspirado por Ra, aquel mago solía hacer afirmaciones al azar.

Para mostrar a los presentes el poder de la adivinación, Amasis se dirigió al mago:

—Todos sabemos que la pirámide de Keops mide 252 pasos de largo[4] y 164 pasos de alto. En la cara lateral, en el nivel del suelo, se encuentra una hormiga que emprende una travesía hacia la cúspide. La hormiga es veloz, y recorre un paso por minuto. ¿Nos podrías decir en cuántas horas llegará la viajera a la cúspide de la pirámide?

—En diez horas, —contestó el mago.— En subir por el inmortal monumento la hormiga se demorará diez horas exactas.

Un silencio de admiración reinó en el palacio. Amasis miraba a la audiencia con orgullo.

—Perdone, majestad, —intervino de pronto Pitágoras,— pero la hormiga no tardará tanto: llegará a la cúspide en 3 horas con 25 minutos. ¡Ni un minuto antes y ni un minuto después!

Y, viendo que todos estaban sorprendidos, añadió:

—Podemos comprenderlo muy fácilmente.

Y explicó a todos su famoso descubrimiento:

> *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo abarca la misma superficie que los cuadrados de los catetos juntos.*

"En este caso particular, —dijo,— ello significa que el cuadrado de la hipotenusa mide $164^2 + 126^2 = 42025$ pasos cuadrados. Con este dato podemos calcular fácilmente la longitud de la travesía de la hormiga:

$$\sqrt{164^2 + 126^2} = 205 \text{ pasos.}$$

---

[4] Un paso mide 90 centímetros.

Como la hormiga recorre un paso por minuto, se demorará en arribar a la cúspide exactamente 205 minutos. Es decir, 3 horas con 25 minutos.

¡El mago estaba rojo de la vergüenza!

—El conocimiento que acabamos de descubrir, —dijo Pitágoras,— es un conocimiento precioso. No solamente nos permite calcular la medida de una hipotenusa cuando conocemos los catetos de un triángulo rectángulo, sino que nos revela un secreto mucho mayor.

—¿Cuál es ese secreto? —preguntó Amasis.

Pitágoras guardó silencio por unos momentos y dijo:

—Que la dualidad no existe, faraón, y que solo existe la Unidad.

—¡No lo creo! —dijo Amasis.— En un día de sol hay mucha luz en el desierto, pero hay oscuridad debajo de una roca. ¿Cómo podemos decir que son uno? Yo veo claramente que existen las dos: la luz y la oscuridad.

—¡No es así! —exclamó Pitágoras.— Solo existe la luz, la oscuridad no existe.

—¿Entonces, por qué la veo? —preguntó Amasis.— ¿Por qué veo la oscuridad debajo de la roca?

—Porque se niega a ver la luz, —contestó Pitágoras.— Si sale afuera de debajo de la roca, verá la luz, no habrá oscuridad. Y es lo que afirma este conocimiento matemático: que donde parecen existir dos, en realidad, solo hay uno.

¿En qué arquetipo mitológico se basa Pitágoras para hacer esta afirmación? Posiblemente, en el relato taoísta sobre el campesino cuyos caballos huyeron.

Aquella tarde, los vecinos se reunieron para compadecerse de él, pues había tenido tan mala suerte. El dijo:

—Puede ser.

Al día siguiente, los caballos regresaron trayendo consigo seis caballos salvajes. Los vecinos lo felicitaron por su buena suerte. El dijo:

—Puede ser.

A la mañana siguiente, su hijo intentó montar uno de los caballos salvajes, fue derribado y se quebró el brazo. Los vecinos fueron a expresar su compasión por la desgracia. El dijo:

—Puede ser.

Un día más tarde, los oficiales de reclutamiento llegaron al pueblo para llevarse a los hombres jóvenes al ejército; pero, como tenía un brazo roto, su hijo fue excluido. Cuando los vecinos le comentaron cuán favorable se había tornado la situación, el dijo:

—Puede ser.

Para los vecinos la mala suerte parece existir realmente; sin embargo, para nuestro campesino no hay tal cosa. Él sabe que la mala suerte en cualquier momento se tornará buena suerte. Esta clasificación de los sucesos en “mala suerte” y “buena suerte” es propia de las personas que no comprenden la unidad del bien y del mal.

Para un sabio todo es bueno; la dualidad es una manera equivocada de mirar la vida. Podemos introducir un bastón en el agua y verlo quebrado; pero, al sacarlo de nuevo, lo veremos entero. ¡La quebradura era tan solo una ilusión óptica!

Dice el místico sufí Hakim Sanai:

¿Por qué la oscuridad
ha de afligir el corazón,
si la noche está preñada
de nuevo día?

El teorema de Pitágoras nos enseña que la dualidad es una ilusión; ¡solo es real la Unidad!

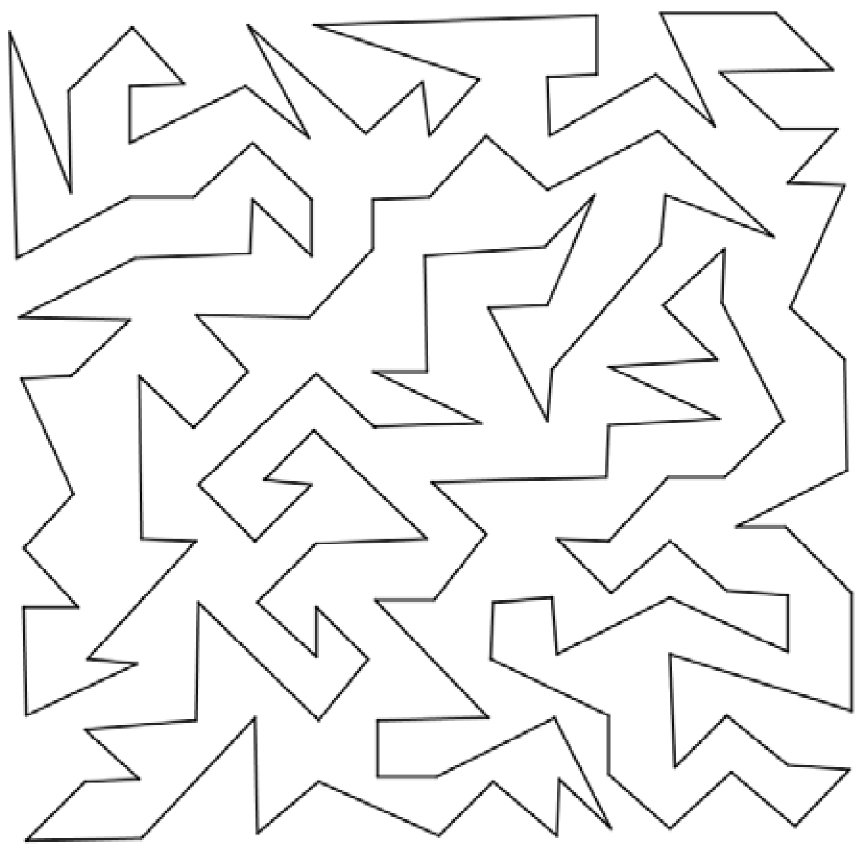
XVIII

Dentro-fuera

Uno de los problemas del Análisis Matemático es el siguiente: si se dibuja en el plano una curva cerrada y simple (es decir, que no se corta a sí misma), ¿podemos asegurar que divide el plano en dos dominios: uno interior y otro exterior?

Antes que nada, debemos aclararnos qué entendemos por la expresión *divide el plano en dos dominios*. Por la división del plano en dos dominios por una curva C vamos a entender que cualquier par de puntos de la misma clase pueden unirse por medio de una curva que no corta C, mientras que cualquier curva que una dos puntos pertenecientes a dos clases distintas debe cortar a C.

Con esta definición es evidente que una circunferencia o una elipse dividen el plano en dos dominios; pero ello ya no es tan evidente en el caso de una curva complicada como este intrincado polígono:



La respuesta positiva a esta pregunta fue obtenida por primera vez por Camille Jordan (1838-1922), en su famoso *Cours d'Analyse*. Es el célebre teorema de Jordan:

Teorema de Jordán

Una curva cerrada y simple (es decir, que no se corta a sí misma) divide el plano en dos dominios: uno interior y otro exterior.

Pero ¿qué es interior y qué es exterior?

Las mejores mentes matemáticas han tratado de responder a esta pregunta, pero todas han fracasado. Se ha dicho que un punto es interior cuando se encuentra *dentro* de la curva, y es exterior cuando se encuentra *fuera* de la curva. Pero, entonces, la pregunta solo ha cambiado de forma: ¿qué es dentro y qué es fuera?

Un león fue capturado y encerrado en un campo de concentración, donde, para su sorpresa, se encontró con muchos leones que llevaban allí muchos años (algunos incluso toda su vida porque habían nacido en cautividad).

El león no tardó en familiarizarse con las actividades de los restantes leones del campo, los cuales estaban asociados en distintos grupos. Un grupo era el de los socializantes; otro, el del mundo del espectáculo. Incluso había un grupo cultural, cuyo objetivo era preservar cuidadosamente las costumbres, la tradición y la historia de la época en que los leones eran libres. Había también grupos religiosos, que solían reunirse para entonar conmovedoras canciones acerca de una futura selva en la que no habría vallas de ningún tipo. Otros grupos atraían a los que tenían temperamento literario y artístico. Y había, finalmente, revolucionarios que se dedicaban a conspirar contra sus captores o contra otros grupos revolucionarios.

De vez en cuando estallaba una revolución, y un determinado grupo era eliminado por otro, o resultaban muertos los guardianes del campo y reemplazados por otros guardianes.

Mientras lo observaba todo, el recién llegado reparó en la presencia de un león que parecía estar siempre profundamente dormido. Era un solitario no perteneciente a ningún grupo y ostensiblemente ajeno a todos. Había en él algo extraño que concitaba, por una parte, la admiración, y, por otra, la hostilidad general, porque su presencia infundía temor e incertidumbre.

—No te unas a ningún grupo, —le dijo al recién llegado.— Esos pobres locos se ocupan de todo menos de lo esencial.

—¿Y qué es lo esencial? —preguntó el recién llegado.

—Estudiar la naturaleza de la cerca. ¡Ninguna otra cosa, absolutamente ninguna, importa!

Aunque esta fábula habla de un león, ésta también es la situación del hombre. Se siente encerrado dentro del campo de concentración de su propio ego, y no sabe cómo salir de allí. Se parece a un borracho que, a altas horas de la noche, estaba fuera del parque golpeando la verja y gritando:

—¡Dejadme salir!

Los científicos como Newton, Leibniz y Jordán se interesaron por la naturaleza de las curvas. Este interés dio a luz una nueva disciplina matemática: el Cálculo Diferencial e Integral. Muchas curvas fueron descubiertas, estudiadas y clasificadas.

Sin embargo, al estudio científico de las propiedades de las curvas, como son el tener derivada, el ser integrable o el dividir el plano en dos dominios, se le escapó lo esencial. Y es que la curva solo puede existir como un objeto de percepción del sujeto que la contempla. ¡El par *dentro-fuera* es indivisible! ¡Los opuestos *interior* y *exterior* son inseparables! Y es por esta razón que habían fracasado todos los intentos de definir estos dos conceptos por separado.

Al comprenderlo, la cerca que mantiene cautivo al león resulta ser ilusoria. Antony de Mello afirma:

> *Son únicamente tus ilusiones las que te impiden ver que eres —y has sido siempre— libre.*

Y éste es el mensaje último del Análisis Matemático: si una curva cerrada y simple divide el plano en interior y exterior, es porque el matemático pone una cerca entre el sujeto y el objeto. Si se deja de pensar de este modo, la división desaparece.

El estudio de la naturaleza de la curva siempre arrojará este resultado: ¡la curva no existe!

XIX

Concavidad y convexidad

Un amigo dijo a Jean D'Alembert:

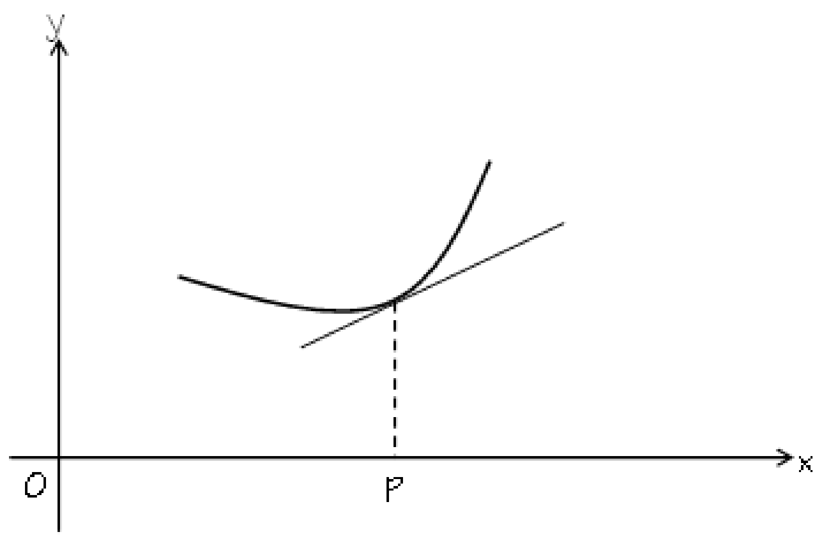
—Desde hace algún tiempo me duele la rodilla. ¡Y no recuerdo haber tenido golpe alguno!

—En estos días estaba leyendo sobre la vida de santa Rita, —comentó D'Alembert,— y ella asegura que el dolor no se debe a los golpes que recibimos, sino a nuestra actitud de vivir como ollas boca abajo. Somos como la sinusoide: ollas boca abajo en la primera mitad de la vida, y, con suerte, ollas boca arriba en la segunda.

Por esta razón, dentro del Cálculo Diferencial se han definido dos conceptos complementarios: el de *concavidad* y el de *convexidad*. Son los siguientes:

Curva cóncava

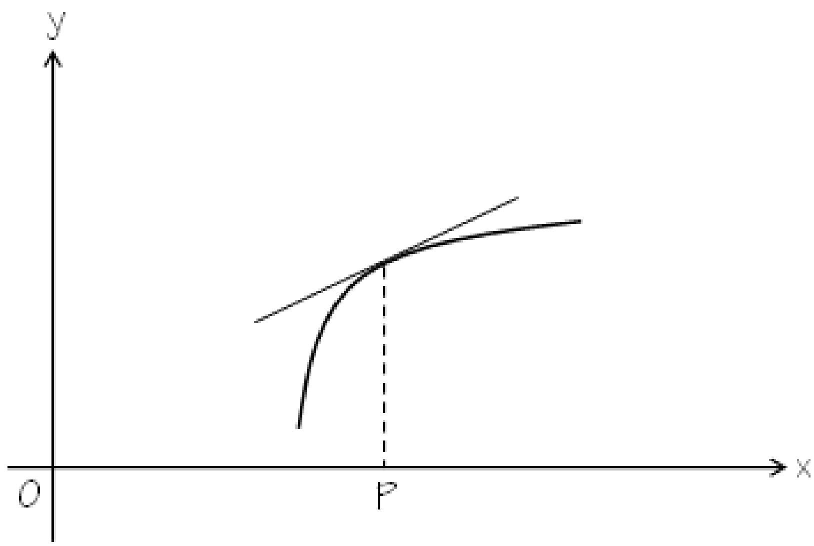
Una curva se llama *cóncava* en un punto P, si en un cierto entorno de dicho punto la curva está por encima de la tangente en P.



Aquello sucede, por ejemplo, cuando $f''(x) > 0$. En este caso la pendiente de la función f aumenta al crecer los valores de x, por lo que la curva tiene su apertura hacia arriba. Y esto es lo que llamamos *concavidad*.

Curva convexa

Una curva se llama *convexa* en un punto P, si en un cierto entorno de dicho punto la curva está por debajo de la tangente en P.



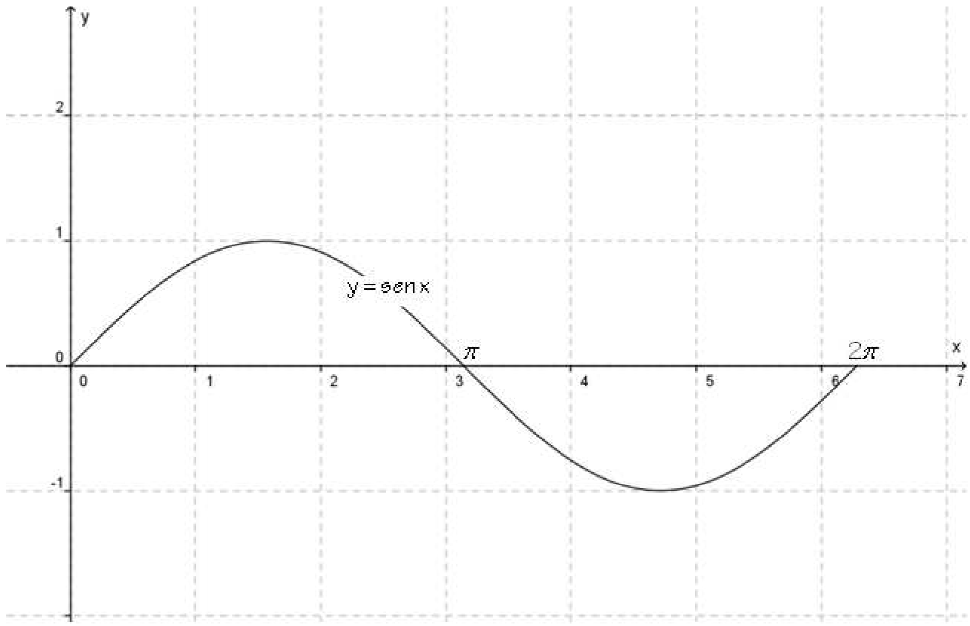
Aquello sucede, por ejemplo, cuando $f''(x) < 0$. En este caso la pendiente de la función f disminuye al crecer los valores de x, por lo que la curva tiene su apertura hacia abajo. Y esto es lo que llamamos *convexidad*.

Como había demostrado el mismo D'Alembert,

$sen''(x) = -sen(x) < 0$ en el intervalo $[0, \pi]$,

y

$sen''(x) = -sen(x) > 0$ en el intervalo$[\pi, 2\pi]$.



Es decir, la curva sinusoidal es convexa en el intervalo $[0, \pi]$ y cóncava en el intervalo $[\pi, 2\pi]$.

—Como ves, —dijo D'Alembert a su amigo,— la función *seno* parece una olla boca abajo en la primera mitad de su dominio, y una olla boca arriba en la segunda. ¡Y nosotros también debemos cambiar de actitud a la mitad de la vida! Santa Rita dice: "Cuando eres una olla boca abajo, las lluvias del cielo te parecerán golpes; pero, si te transformas en una olla boca arriba, lloverán bendiciones". ¡Deberías de aprender a arrodillarte ante lo Divino!

¿Cómo se puede producir este cambio de actitud en nuestra vida? ¿Cómo podemos dejar de vivir mirando hacia el suelo, y empezar a mirar hacia el Cielo?

Una noche, un ladrón entró en la pequeña ermita del maestro Ryokan y no encontró nada que llevarse. Pero vio a Ryokan dormido bajo su manta, inmediatamente se apoderó de ella y huyó.

El frío despertó a Ryokan que, estornudando, advirtió que la manta le había sido robada...

La Luna brillaba magnífica en el cielo, y Ryokan podía verla desde su ventana. Entonces compuso este poema que se hizo célebre:

¡Oh, maravilla!
La Luna tan bella iluminando mi ventana.
¿Por qué no se la ha llevado el ladrón?

Ningún acontecimiento, fuera cual fuere, puede turbar la tranquilidad interior de una persona que conoce el secreto del maestro Ryokan: que el Cielo y la Tierra le pertenecen.

Lo que nos tiene mirando hacia abajo es nuestra creencia de que no somos dignos de vivir en el Cielo, que somos seres inferiores, separados de la Totalidad. Nos da miedo mirar hacia arriba, porque nos parece que los Cielos nos rechazan, que hemos sido expulsados del Paraíso Existencial.

¡No es así!, afirma el maestro Ryokan. La Luna no puede sernos robada por ningún ladrón, por más ingenioso que ése sea. ¡La Luna pertenece a cada uno de nosotros! Dios la puso en el Cielo para alumbrarnos en la oscuridad de la noche. Y de la misma manera nos pertenecen el sol y las estrellas, y todas las galaxias con sus asteroides y planetas.

Esta sola comprensión puede producir en nosotros la transformación que le sucedió al maestro Ryokan: que dejemos de habitar en el suelo, y nos traslademos a vivir en el Cielo.

XX

Lo posible y lo imposible en el Álgebra

El Álgebra es el ámbito de los acertijos. Desde los tiempos más antiguos, el hombre se ha sentido atraído por los acertijos numéricos, pues representan vívidamente el acertijo básico de la vida. Y es que la vida es un misterio y una adivinanza.

¿Cómo resolver ese acertijo? ¿Cómo adivinar qué es lo importante y qué no lo es? ¿De qué modo podemos descubrir el objetivo de la vida? ¿Cómo vivirla plenamente? La historia del Álgebra nos da luces al respecto.

Mohammed Alamulí fue un matemático sirio que nació en Baalbec en el año 1547 y murió en Isfahan en el año 1622. Un día dijo a sus discípulos:

—Por favor, encuentren un cubo que sea la suma de dos cubos.

Los discípulos pensaron en el problema durante tres días, pero ninguno dio con la solución.

—Encontramos muchos cuadrados que son sumas de dos cuadrados, —dijeron al Maestro.— Por ejemplo,

$$3^2+4^2=5^2, \quad 5^2+12^2=13^2, \quad 7^2+24^2=25^2.$$

¡Pero no hemos hallado ningún cubo que sea suma de dos cubos!

—¡Sigan buscando! —dijo Alamulí secamente.

Al cabo de una semana informaron al Maestro:

—¡Encontramos cuadrados que son sumas de dos cubos! Son éstos:

$$1^3+2^3=3^2, \quad 4^3+8^3=24^2, \quad 9^3+18^3=81^2.$$

¡Pero no hemos logrado hallar ningún cubo que sea suma de dos cubos! ¡Debe de ser un número muy grande!

—¡Necios! —les gritó Alamulí.— ¿Por qué buscan lo que no existe? ¡Y El Que Existe, Alá el Altísimo, se les escapa todo el tiempo!

Los matemáticos árabes no lograron demostrar que un cubo nunca puede ser suma de dos cubos: por primera vez lo hizo Leonardo Euler en el año 1770. Sin embargo, Alamulí intuyó que esta propiedad de los cuadrados no se cumplía para los cubos.

A lo largo de la historia del Álgebra, en diferentes ocasiones se ha demostrado la imposibilidad de resolver tal o cual acertijo, tal o cual ecuación. La conjetura de Fermat es un ejemplo de ello.

Pitágoras había encontrado una gran cantidad de números naturales de forma cuadrada, que se descomponen en suma de dos números naturales también de forma cuadrada. Pierre Fermat se preguntó: ¿cuáles son los números cúbicos que se descomponen en suma de dos números cúbicos? Y encontró que… ¡ninguno! Ningún cubo de un número natural es suma de dos cubos de números naturales (y ningún bicuadrado es suma de bicuadrados, ninguna quinta potencia es suma de quintas potencias, etc.). Dos terrenos cuadrados, juntos, pueden producir un terreno cuadrado, ¡pero dos medidas cúbicas de trigo nunca producirán otra medida cúbica de trigo!

Las ecuaciones algebraicas nos brindan otro ejemplo de imposibilidad. Las de primero y segundo orden fueron exitosamente resueltas por los escribanos egipcios y babilonios, y los matemáticos árabes hallaron fórmulas explícitas para los valores de sus raíces en función de los coeficientes de la ecuación. Los matemáticos italianos Nicolás Tartaglia y Ludovico Ferrari encontraron fórmulas análogas para la ecuación cúbica y de cuarto grado. Esto fue llamado *resolver una ecuación en radicales*, pues la fórmula de la ecuación cuadrática envolvía raíces cuadradas de los coeficientes, y las fórmulas de la ecuación cúbica y cuártica contenían raíces cuadradas y cúbicas.

¡Sin embargo, la ecuación de quinto grado se hacía esperar! Nadie lograba dar con la fórmula que expresara las raíces de la ecuación general de quinto grado

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

en función de sus coeficientes a, b, c, d, e y f. En el año 1832 Evariste Galois demostró que aquello es imposible. Este descubrimiento favoreció la aceptación de los números trascendentes en la matemática.

La historia de los números complejos también es muy esclarecedora.

En el año 1545 a Gerolamo Cardano preguntaron:

—¿Cómo puedo delimitar una parcela de 40 pérticas cuadradas con ayuda de una valla de 20 pérticas de longitud?

—¡No hay ninguna manera de hacerlo! —contestó Cardano,— pues el largo de tal parcela debería medir $(5+\sqrt{-15})$ pérticas, y el ancho $(5-\sqrt{-15})$.

Decía así porque, si se llama x a la longitud de la parcela y $(10-x)$ a su ancho, se debería cumplir la siguiente condición:

$$x \cdot (10-x) = 40.$$

En otras palabras, se debería resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Usando el método de completación del cuadrado, Cardano encontró las dos posibles longitudes de la parcela:

$$x_1 = (5+\sqrt{-15})\ \text{pérticas}, \quad x_2 = (5-\sqrt{-15})\ \text{pérticas}.$$

Luego calculó los valores respectivos de su ancho:

$$10 - x_1 = (5-\sqrt{-15})\ \text{pérticas}, \quad 10 - x_2 = (5+\sqrt{-15})\ \text{pérticas}.$$

Esto significaba que la parcela era, en realidad, una sola, y medía

$$(5+\sqrt{-15}) \times (5-\sqrt{-15})\ \text{pérticas}.$$

¡Aparentemente, la ecuación cuadrática estaba resuelta!

Pero... ¿cómo podría Cardano calcular los valores que acababa de obtener? ¿A qué puede ser igual la raíz cuadrada del número (-15)?

—Al elevar un número al cuadrado, siempre se obtiene una cantidad positiva, —se dijo Cardano.— ¡La cantidad $\sqrt{-15}$ es vacía de sentido! ¡Es sofisticada, imaginaria, imposible! ¡No se puede delimitar la parcela pedida!

¿Qué nos quieren decir todos estos descubrimientos de imposibilidad? ¿Por qué algunos acertijos algebraicos tienen solución, y otros no?

Es para informarnos que la imposibilidad es solamente relativa. Cada teorema de imposibilidad, al demostrar que algo es imposible dentro de un nivel de consciencia, sugiere que eso mismo se vuelve posible en un nivel de consciencia más profundo. ¡La imposibilidad es la otra cara de la posibilidad! La imposibilidad y la posibilidad son uno, siendo la imposibilidad un valioso indicador de la posibilidad.

Si es así, y lo que es imposible en el nivel del conocimiento algebraico es posible en un nivel más profundo, ¿cuál es ese conocimiento más profundo? Ése tiene que ser el conocimiento de nuestros sentimientos, de nuestros deseos y de los motivos de nuestras acciones. ¡En una palabra, es el conocimiento de nuestra psique! El álgebra se ocupa tan solo de números que son esencias abstractas de grupos de objetos (como 3 manzanas, 3 pájaros, 3 rosas), pero no toma en cuenta a aquél que percibe esos objetos. El hombre ha quedado totalmente fuera del ámbito de la atención del álgebra, y a ello se debe la existencia de teoremas de imposibilidad.

De este modo la historia del Álgebra nos ayuda a tomar conciencia del desarrollo unilateral de la matemática, de su ignorancia deliberada del sujeto perceptor. Nos dice que, mientras nos quedemos en esa ignorancia, el verdadero conocimiento seguirá siendo imposible; y promete que, si prestamos atención al individuo, el conocimiento no solo se volverá posible: será todo-abarcante, será divino.

Y es la lección que Alamulí dio a sus discípulos: si descubres que algo es imposible, no te frustres ni te paralices. ¡Intenta descender a un nivel de consciencia más profundo! Si no logras encontrar un cubo que sea suma de dos cubos, ¡no lo interpretes como un rechazo! Es una invitación que el universo entrega en tus manos. Es la invitación de conocer más, de aceptar más, de concientizar más.

La historia de la ciencia algebraica es el mensajero que entrega en nuestras manos esa invitación. Y si la aceptamos, algún día nos sentiremos muy agradecidos con lo imposible, por habernos invitado a vivir en una dimensión maravillosa.

Los místicos la llaman *el Reino de la Posibilidad Inagotable*.

XXI

La ciencia de lo externo y de lo interno

Debemos a Pitágoras la introducción en nuestro léxico de la palabra *cosmos*. *Cosmos* significa orden, ritmo, armonía.

—La existencia no es un caos, sino un cosmos, —enseñaba Pitágoras.— Sus leyes no cambian caprichosamente, sino que funcionan de modo racional, consistente. Si investigamos la existencia en profundidad, encontraremos esas leyes, y tendremos en nuestras manos la clave de todos los misterios.

“Pero no solamente hay leyes de lo externo, —añadía Pitágoras,— también hay leyes de lo interno. Las leyes de lo externo las descubre la matemática, las leyes de lo interno las descubre el misticismo. Las leyes matemáticas se refieren a los números, a lo visible, mientras que las leyes místicas se refieren a nuestra alma, a lo invisible. Pero ambas solo pueden coexistir en un cosmos.

En la escuela mística de Pitágoras, una de las cosas más importantes era la música. La música es una armonía, es la armonía entre el sonido y el silencio. El sonido pertenece a lo externo, el silencio a lo interno. La música produce en nosotros una sensación de calma, de serenidad, de reverencia; la unión mística se vuelve posible. Pitágoras la llamaba *la música de las esferas celestiales*.

El cosmos es ese encuentro entre el misticismo y la ciencia, pero los matemáticos posteriores se han olvidado de él. La ciencia de lo externo y la ciencia de lo interno han sido separadas, y los efectos de tal separación no podrían ser más nefastos.

Pitágoras advertía a sus discípulos del peligro eminente de una separación así.

—Nos puede pasar lo que le sucedió a Faetonte, —decía.

Y les contaba el mito.

El dios Sol, cuyo nombre era Helios, era dueño de un palacio cerca de Cólquide en el Lejano Oriente, más allá del mar Negro.

Cada mañana al amanecer, Helios enganchaba cuatro caballos blancos a un carro de fuego —tan brillante que nadie podía mirarlo sin que le dolieran los ojos— y lo conducía por los cielos hasta su otro palacio en el Lejano Occidente, junto a los campos Elíseos.

Allí desguarnecía su tiro, y, después de dejarlos pacer, los subía junto con su carro a una barca de oro, y en ella navegaba, completamente dormido, alrededor del mundo, siguiendo la corriente del Océano hasta llegar de nuevo a la Cólquide.

Helios se lo pasaba bien, observando todo lo que ocurría en el mundo, allí abajo, pero nunca podía tomarse unas vacaciones.

Faetonte, su hijo mayor, siempre le pedía permiso para conducir el carro.

—¿Padre, por qué no te quedas un día en la cama, para variar? —le preguntaba.

—He de esperar a que seas un poco mayor, —le contestaba siempre Helios.

Con estas respuestas Faetonte se volvió tan impaciente y malhumorado —arrojaba piedras a las ventanas de palacio y arrancaba las flores del jardín— que por fin Helios dijo:

—De acuerdo, te lo dejaré conducir mañana. Pero sujeta bien las riendas. Estos caballos son muy fogosos.

Faetonte quiso presumir delante de sus hermanos menores, y los caballos, al darse cuenta de que no sabía manejar las riendas, empezaron a corcovear. Los dioses olímpicos sintieron un frío helado durante un instante, y luego vieron cómo los árboles y la hierba quedaban abrasados por el calor.

—¡Deja de hacer estupideces, muchacho! —gritó Zeus.

—¡No logro controlar mi tiro, majestad! —contestó Faetonte, jadeando.

Zeus, enfurecido, arrojó un rayo a Faetonte y lo mató.

Durante algún tiempo la ciencia permaneció fiel a las enseñanzas de Pitágoras. Lo científico y lo religioso siguieron marchando juntos, ayudándose mútuamente.

Sin embargo, un día la religión y la ciencia han empezado a luchar entre sí como enemigas. La iglesia empezó a impedir que la ciencia se desarrolle y crezca, llegó a castigar a personas de la talla de Copérnico y Galileo.

Debido a esta persecución de la ciencia por la iglesia, la ciencia empezó a estar en contra de lo religioso.

En la matemática, la ciencia exterior ha empezado a acallar y a aplastar a la ciencia interior. Durante los últimos trescientos años, los pensadores científicos se dedicaron, con todo su empeño, a intentar destruir la religiosidad. Han declarado que el alma no existe. Han declarado que en el hombre no hay un ser interior. Han reducido al hombre a una simple máquina.

Por esta causa el hombre moderno ha perdido toda su grandeza. Este enfoque revanchista de la ciencia contra lo religioso ha provocado que la vida haya dejado de tener sentido. Ya no hay poesía ni música, porque, sin divinidad, el mundo no puede ser un cosmos. Se convierte en un fenómeno mecánico, no alberga ninguna conciencia. La ciencia ha perdido toda su gloria que había alcanzado con Pitágoras.

En la comuna de Crotona la matemática estaba en la más alta cumbre de la comprensión, en el más elevado vuelo de la verdad. Sus alas eran: una, la ciencia de lo externo, y la otra, la ciencia de lo interno. Ahora, en vez de matemáticos-místicos, lo que se puede encontrar es un pobre sucedáneo: un matemático moderno, reducido a la investigación de problemas técnicos, o un profesor de matemáticas que desconoce el mensaje místico de la ciencia que enseña.

Esto es consecuencia de no haber escuchado a Pitágoras. El maestro griego puede ser comparado con Helios, y los matemáticos modernos con Faetonte. No supieron conducir el carro de los caballos fogosos de la ciencia de lo exterior y de lo interior. Helaron y luego quemaron la tierra, al declarar que el universo es indiferente con el hombre, que la naturaleza es enorme y que el hombre es un extraño para ella, un forastero, algo casual.

Debemos recuperar la concepción integrada de la ciencia de Pitágoras. Debemos posibilitar el encuentro entre la ciencia de lo externo y la ciencia de lo interno. Si nuestra matemática y nuestra alma están equilibradas, si van al mismo ritmo, lograremos la mejor música que pueda existir: la música de las esferas celestiales, la música del Cosmos.

XXII

La gallina de los huevos de oro

Encontrar la raíz, escondida dentro de una ecuación algebraica, es el objetivo de la ciencia del Álgebra. ¿Por qué nos interesamos por la raíz de una ecuación algebraica? ¿Por qué nos atrae la idea de hallar un número desconocido? ¿De dónde viene este impulso de ver lo invisible?

La vida es un árbol frondoso, con muchas ramas, hojas y flores. Ellas son perfectamente visibles; pero la raíz de un árbol es invisible, está escondida debajo de la tierra. Disfrutamos de la vida por algún tiempo, pero tarde o temprano surge el deseo de conocer su raíz. ¿Es la raíz de la vida algo material? ¿O es una idea? ¿O, más bien, es un sentimiento?

La conocida fábula de Esopo contesta estas preguntas negativamente.

> *En un corral había una gallina que ponía huevos de oro.*
>
> *Su dueño, que todas las mañanas los vendía a muy buen precio, se dijo:*
>
> *—Si los huevos de esta gallina son de oro, las tripas donde se forman deben contener oro en abundancia.*
>
> *Deseando hacerse más rico de lo que ya era, mató a la gallina. Pero, al ver que las entrañas eran como las de todas las gallinas, comprendió que había cometido un error.*

¡La raíz de lo visible no puede ser nada visible!, afirma Esopo. No puede ser nada material, y tampoco podría ser un pensamiento o un sentimiento. ¡Debe de ser algo totalmente diferente de lo que conocemos! También la raíz de un árbol es muy distinta del tronco, de las ramas, de las hojas, de las flores y de las semillas.

El deseo de encontrar la raíz de la vida es el deseo básico de todo ser humano. Y la búsqueda algebraica es un reflejo de ello.

XXIII

El concepto de función en matemáticas

¿Cómo funciona la Vida? ¿Es su funcionamiento tal y como lo interpretamos, o encierra algún secreto? Y si lo hay, ¿podemos conocerlo?

Éstas son las preguntas que impulsaron la creación y el amplio uso del concepto de *función* dentro del conocimiento matemático. Al definir una función (por ejemplo, la función de las ganancias que podemos obtener en un negocio), nos interesamos por sus máximos y mínimos, relativos y absolutos. Pero, en realidad, queremos estudiar la función de nuestra vida: averiguar si podemos reducir al mínimo nuestro sufrimiento y alcanzar el máximo de gozo. En el fondo siempre deseamos eliminar el sufrimiento y alcanzar el éxtasis.

¡No, la Vida no es como parece ser a una mirada ingenua!, afirman los místicos. Sin embargo, podemos conocer su secreto si prestamos atención a su funcionamiento diario. El siguiente cuento Zen nos da luces al respecto.

> *De vuelta de una peregrinación, un hombre compró en la ciudad un espejo, objeto que desconocía.*
>
> *Creyó reconocer en él la cara de su padre, y, maravillado, se lo llevó a su casa. Sin decirle nada a su mujer, lo colocó en un cofre, en el sótano. De vez en cuando, en los momentos en los cuales se sentía triste y solitario, iba a "ver a su padre".*
>
> *Su mujer lo encontraba muy raro cada vez que lo veía bajar de la habitación. Un día lo espió y vio que abría un cofre y se quedaba mucho tiempo inclinado sobre él.*
>
> *Una vez que el marido se fue, abrió el cofre a su vez y vio en él a una mujer. Ardiendo de celos, arremetió contra su marido. ¡Gran pelea de matrimonio! ¡El marido sostenía que se trataba de su padre que estaba escondido en el cofre!*
>
> *Afortunadamente pasó por ahí una monja zen. Quiso solucionar el conflicto e hizo que le enseñaran el cofre objeto del litigio.*
>
> *Al bajar declaró:*
>
> *—En el cofre no hay ni un hombre ni una mujer, ¡sino, simplemente, una monja!*

El que desee eliminar el sufrimiento de su vida, debe conocer esto: lo que la Vida nos muestra es un reflejo de nosotros mismos. ¡No podemos ver nada que no sea nuestro propio reflejo! Y éste es el secreto: la Vida es un Gran Espejo en el que nunca se nos presenta nada extraño ni desconocido, sino siempre nuestro propio reflejo. Y si comprendemos el funcionamiento de la Vida de este modo, no habrá más peleas ni malentendidos, y el mundo será un mejor lugar para vivir.

Este mismo mensaje nos entrega el mito sobre el héroe griego Perseo.

Polidectes, rey de la isla de Sérifos, ordenó a cada uno de sus súbditos que le diera un caballo.

—El padre de la princesa con la que me voy a casar necesita cincuenta caballos como pago por la boda, —afirmó.

Llamó a Perseo y le preguntó.

—¿Me complaces tú?

—Yo no tengo ningún caballo, majestad,— respondió Perseo,— ni dinero para comprarme uno. No obstante, os daré lo que queráis, cualquier cosa, ¡incluso la cabeza de Medusa!

—La cabeza de Medusa estaría muy bien, —dijo Polidectes.

La tal Medusa había sido una mujer hermosa a la que Atenea había encontrado un día besando a Poseidón en su templo. Atenea se enfadó tanto por la falta de modales del dios, que convirtió a Medusa en gorgona: un monstruo alado con ojos de mirada feroz, enormes dientes y serpientes en lugar de cabellos. Quien la mirara se convertía en piedra.

Atenea ayudó a Perseo entregándole un escudo pulido.

—Utilízalo como espejo al cortarle la cabeza a Medusa, evitando así convertirte en piedra, —le dijo.

Hermes le dio una hoz afilada. Pero Perseo todavía necesitaba el casco de invisibilidad del dios Hades, y también una bolsa mágica en la que pudiese meter la cabeza de Medusa, y un par de sandalias aladas. Todas estas cosas útiles les prestaron las náyades del río Estigio.

Con el casco y las sandalias puestas, Perseo voló, sin ser visto, hasta Libia. Mirando el reflejo de Medusa en el escudo pulido, le cortó la cabeza con la hoz.
Así murió la Medusa Gorgona.

El que desee alcanzar la inmortalidad, debe conocer este secreto del funcionamiento de la Vida: es necesario mirar a la muerte por el Espejo de la Conciencia (Medusa representa a la muerte, pues convierte a cada uno de nosotros en una lápida de piedra). ¡Solo entonces la muerte no le hará daño!, pues el individuo verá que solo se muere un reflejo suyo, no el original. ¡Porque el original es el Testigo de sus propios reflejos!

El que mira a la muerte directamente, se sentirá morir en el momento en el que expire su cuerpo; pero el que la mire indirectamente, sabiéndose el Testigo, se volverá inmortal. Porque, entonces, sabrá que solo muere el cuerpo, pero que el Testigo es indestructible y eterno.

La función de nuestra vida nos reveló su secreto: siendo un Testigo, reduciremos al mínimo el sufrimiento y alcanzaremos el máximo de gozo. Y ése era el objetivo de crear el concepto de función matemática, en primer lugar.

XXIV

El castigo de Sísifo

El hombre trata de alcanzar sus metas. Sin importar los obstáculos, camina perseverantemente hacia el objetivo trazado. Rara vez surge en su mente la pregunta: "¿Es posible alcanzar mi meta? ¿Estaré en el camino correcto para lograrlo? ¿No será que mi objetivo es como el horizonte: cada vez que yo avanzo, él retrocede?"

Tal es el caso del concepto de serie infinita en matemáticas. Se dice que la suma de una serie infinita es el límite de sus sumas parciales. Por ejemplo: si damos un paso de un metro de largo, luego un paso de medio metro, luego de un cuarto de metro, y cada vez reducimos nuestro paso a la mitad de anterior, ¿cuántos metros recorreremos en total?

En otras palabras, queremos calcular la suma de la serie infinita

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots=?.$$

Para lograrlo, procedemos de la siguiente manera. Primero definimos la n-ésima suma parcial:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Luego la multiplicamos por un medio:

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

En seguida restamos la segunda expresión de la primera. De este modo averiguamos que

$$\frac{1}{2}S_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

En otras palabras,

$$S_n=2-\frac{1}{2^n}.$$

Ahora nos imaginamos que el valor del número n se hace muy grande, es decir, que tiende al infinito. ¿Que sucederá, entonces, con el término $\frac{1}{2^n}$? ¡Se hará cada vez más pequeño!, es decir, tenderá a 0. Nos convencemos de ello si calculamos sus valores para $n=8$, $n=9$, y $n=10$:

$$\frac{1}{2^8}=0.003906...,$$

$$\frac{1}{2^9}=0.0019531...,$$

$$\frac{1}{2^{10}}=0.0007656....$$

Entonces, concluimos que

$$S_\infty=2-0=2.$$

Es decir, al final de nuestra jornada habremos recorrido 2 metros:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...=2\,m.$$

Pero ¿se alcanza alguna vez ese final de la jornada? ¿Podemos, realmente, dar infinitos pasos? Incluso si en cada paso nos demoráramos solo un segundo, ¡para dar infinitos pasos necesitaríamos infinitos segundos, es decir, toda la eternidad! Y eso es más de lo que dura la vida humana.

Al calcular la suma de una serie infinita ¿no estamos caminando hacia el horizonte? ¿No estamos intentando realizar algo imposible?

De este peligro nos advierte el mito de Sísifo. Siendo rey de Corinto, Sísifo se preocupaba por su ciudad, y fue quien mandó a construir la primera flota de los corintios.

Un día el dios-río Asopo se presentó ante Sísifo y le dijo:

—¿Te has llevado a mi hija?

—No, —respondió Sísifo,— pero sé dónde está.

—¡Dímelo!

—Primero haz que surja una fuente en el monte sobre el que estoy edificando mi nueva ciudad.

Asopo golpeó el suelo con su mazo mágico e hizo brotar una fuente.

Entonces Sísifo dijo:

—Zeus se ha enamorado de tu hija. Están paseando cogidos del brazo por aquel valle boscoso que ves allí.

Asopo, muy enfadado, salió en busca de Zeus, que había dejado descuidadamente su rayo colgando de un árbol. Al ver que Asopo corría persiguiéndole con el mazo, Zeus escapó disfrazándose de roca.

Asopo pasó a toda prisa, y entonces Zeus volvió a adoptar su forma verdadera, fue a recoger su rayo y lo lanzó contra Asopo, quien desde aquel día cojeó de una pierna debido a la herida que recibió.

Zeus ordenó a su hermano Hades que prendiera a Sísifo y le diera un castigo muy severo, por haber revelado un secreto divino a Asopo.

Hades fue a ver a Sísifo.

—¡Ven conmigo!

—Ni hablar. Hermes es el Dios que va a buscar a los espíritus, y no tú. Además, aún no me toca morir. ¿Qué llevas en esa bolsa?

—Esposas, para que no te escapes.

—¿Qué son esposas?

—Pulseras de acero, unidas con una cadena. Los inventó Hefesto.

—Enséñame cómo funcionan.

Hades se colocó las esposas, y Sísifo las cerró rápidamente. Después desencadenó a su perro y ató su collar al cuello de Hades.

—¡Ya te tengo seguro, rey Hades! —dijo riendo.

Aunque Hades rabió y lloró, Sísifo lo tuvo encadenado en la perrera durante todo un mes. ¡Nadie podía morir mientras Hades, el Dios de la muerte, fuese prisionero! Cuando Ares, Dios de la guerra, descubrió que las batallas se habían convertido en simulacros de lucha porque nadie moría, fue a ver a Sísifo y amenazó con estrangularlo.

—Es inútil intentar matarme, —dijo Sísifo,— pues tengo al rey Hades encadenado en mi perrera.

Sin embargo, tuvo que desencadenar a Hades e ir con Ares al Tártaro.

La roca que los jueces de los muertos ordenaron empujar a Sísifo hasta la cima del monte en el Tártaro, tenía exactamente la misma forma que aquella en que se convirtió Zeus cuando se escondió de Asopo. Cada vez que Sísifo llegaba casi a la cumbre, la roca rodaba otra vez hacia el valle, y había que volverla a subir.

Sísifo realiza aquella tarea continuamente, hasta el día de hoy. Y lo seguirá haciendo por toda la eternidad, pues no hay forma de acabarla.

Tratar de calcular la suma de una serie infinita es el castigo al que los Dioses sometieron a la Matemática por haberse olvidado de ellos.

XXIV

La lógica y la venganza de los cuentos

La tarea de la Lógica es enseñarnos a no saltar a conclusiones, es decir, a razonar de una manera correcta. Pero ¿qué significa *razonar de una manera correcta*? Significa inferir de tal modo que, a partir de premisas verdaderas, siempre obtengamos una conclusión verdadera.

Pero esta tarea empieza a parecer imposible desde el mismo principio. Los sofistas griegos descubrieron que la lógica puede demostrar cualquier cosa que deseemos. Por ejemplo, alguien razonaba de este modo:

> *Si digo lo que es justo, los Dioses me amarán.*
> *Si digo lo que es injusto, los hombres me amarán.*
> *Por lo tanto, siempre seré amado.*

Entonces, se le contestaba así:

> *Si dices lo que es justo, los hombres te odiarán.*
> *Si dices lo que es injusto, los Dioses te odiarán.*
> *¡Por lo tanto, siempre serás odiado!*

Ambos razonamientos son válidos (porque ambos tienen la forma del *Dilema*), y las premisas de cada uno son verdaderas. Y ello quiere decir que las dos conclusiones también tienen que ser verdaderas. ¡Es decir, un individuo siempre es amado y odiado al mismo tiempo!

Además, casi nunca sabemos si nuestras premisas son, realmente, verdaderas. Por ejemplo, solemos creer que si alguien nos maltrata es porque nos odia o irrespeta. Sin embargo, no es así. Los místicos nos enseñan que el maltrato es siempre una lección sobre la unidad de los opuestos. Porque el maltrato, haciendo uso del recurso del contraste, nos hace tomar conciencia del buen trato que estamos recibiendo de manera inconsciente, pues lo realza de un modo muy eficaz.

Un cuento coreano nos ayuda a comprenderlo.

En cierta ocasión vivía un niño al que gustaba muchísimo que le contaran cuentos. Sin embargo, a pesar de lo mucho que disfrutaba escuchando las historias, él no se las contaba nunca a nadie.

En un rincón de su cuarto, aquel niño tenía una bolsa de cuero, cuya abertura estaba prietamente atada con un cordel. Aquella bolsa llevaba allí años, colgada de un clavo, olvidada por todos. Pero resulta que, cada vez que el niño escuchaba un nuevo cuento y no se lo contaba a nadie, el espíritu de aquel cuento se introducía en la bolsa y se quedaba allí. No podía escapar de aquel encierro a causa de la obstinación del niño de no contar los cuentos a los demás. Y, puesto cada día el niño escuchaba un nuevo cuento, cada día un espíritu más se sumaba a los que ya vivían en la bolsa, de modo que, al final, ésta estaba llena del todo, y los espíritus de los cuentos no podían casi ni respirar.

El niño fue creciendo. Cuando cumplió veinte años, decidió casarse, y en vísperas de su boda salió a divertirse con sus amigos. Su fiel criado estaba atizando el fuego de la habitación de su amo, cuando, de pronto, escuchó voces que salían de la bolsa.

—Parece que mañana se va a casar, ¿verdad? —dijo una voz.

—Pues sí, —repuso otra,— y nosotros aquí, medio muertos de asfixia.

—Tienes razón, ¿no será ya hora de que nos venguemos?

—Escuchadme bien, —dijo una de las voces.— Irá a caballo a casa de la novia. El camino es largo y el viaje lo dejará sediento. Yo seré un pozo a la vera del camino, lleno de agua clara, sobre la que flotará un cuenco. Si bebe de esa agua, morirá.

—Muy buen plan, muy buen plan, —repuso otra voz.— Pero más vale extremar las precauciones. Por si acaso no bebe, yo seré un campo de deliciosas fresas que encontrará un poco más adelante. Si prueba una sola, morirá.

Una tercera voz se añadió a la conversación y dijo:

—Si todo eso fallara, yo seré un atizador al rojo vivo en el saco de vainas de arroz, sobre el que descenderá del caballo una vez que llegue a casa de la novia. Cuando ponga el pie encima de mí, morirá.

—Bueno, bueno, —añadió una cuarta voz.— Os voy a decir lo que haré yo, si fallara todo eso: yo seré una pequeña serpiente venenosa, y me ocultaré en la cámara nupcial. Cuando esté dormido, lo morderé y morirá.

“¡Pobres espíritus de los cuentos! —pensó el viejo criado.— Después de tanto tiempo de estar encerrados, no me extraña que quieran hacer una cosa así”.

A la mañana siguiente, el cortejo nupcial del muchacho emprendió la marcha. Llevaban recorrida ya cerca de media milla, cuando el novio se quejó de sed y pidió a su criado que parara un instante en el pozo que había junto al camino.

—¡Mira! —dijo.— El agua es muy clara, y en ella flota un cuenco. Por favor, acércate y tráeme un poco.

Pero el criado no hizo sino apresurar el paso del caballo, diciendo:

—¡Nada de eso, señor! Si nos detenemos ahora, llegaremos tarde.

Y, de esta manera, logró que su amo saliera sano y salvo del primer peligro.

Mientras tanto el novio pensaba entre sí:

Si no quiere darme agua, es porque no me respeta.
Es así que mi criado no quiere darme agua.
¡Por lo tanto, no me respeta!

Como podemos apreciar, el razonamiento del novio es válido, pues es un *Modus Ponens*.

Al poco, llegaron a un campo donde el novio vio unas fresas maduras y muy tentadoras.

—¡Ahí veo fresas! —exclamó.— Tienen un aspecto de lo más apetitoso. Por favor, ve y cógeme unas cuantas para que calme mi sed.

Pero el criado volvió a negarse.

—¡No, no! —dijo.— Será mejor que no tome usted nada por el camino. Ya tendrá mejores fresas en casa de la novia. Además, tenemos mucha prisa.

Y se negó a parar, de manera que el segundo peligro quedó definitivamente atrás.

Mientras tanto el novio razonaba de este modo:

Si se niega a darme fresas, es que no me ama.
Es así que mi criado se niega a darme fresas.
¡Por lo tanto, no me ama!

Como podemos ver, el nuevo razonamiento del novio también es válido, pues tiene la forma de *Modus Ponens*.

Era mediodía cuando llegaron a casa de la novia. Ante la puerta había un saco repleto de vainas de arroz, para que el novio desmotara cómodamente. Pero apenas el muchacho puso el pie en el saco, el criado le apartó los pies de una patada, y el novio cayó torpemente al suelo. El tercer peligro fue sorteado exitosamente.

Sin embargo, el novio pensaba de otro modo:

Si me da una patada, es que me aborrece.
Es así que mi criado me dio una patada.
¡Por lo tanto, me aborrece!

El razonamiento es válido por ser *Modus Ponens*.

La ceremonia y el banquete tuvieron lugar sin mayores problemas, todos disfrutaron muchísimo. Solo el viejo criado estaba muy preocupado, y resolvió no quitarle ojo a su amo en todo el tiempo.

Llegó la noche, y los novios se retiraron a la alcoba nupcial. No llevaban allí mucho rato cuando, de pronto, la puerta de la estancia se abrió de par en par, y allí estaba el criado, espada en mano y con cara de pocos amigos. Los novios se quedaron estupefactos, mientras en la cabeza del novio se presentaba este razonamiento:

> *Si interrumpe mi intimidad, es que me odia.*
> *Es así que mi criado ha interrumpido mi intimidad.*
> *¡Por lo tanto, me odia!*

De nuevo se trata de un razonamiento válido de tipo *Modus Ponens*.

El criado se abalanzó sobre la alfombra y de un tajo la rasgó, dejando al descubierto a una pequeña serpiente, a la que mató de un golpe.

La conmoción despertó a toda la casa, y vino gente a ver qué pasaba.

Entonces el viejo criado explicó a todos su extraña conducta. Fueron a buscar el saco de vainas y lo abrieron. Dentro estaba el atizador al rojo vivo, que ya casi había consumido todas las vainas.

El novio entendió entonces lo que había sucedido, y, en vez de castigar al viejo criado, ensalzó su fidelidad y le agradeció que le hubiese salvado la vida de todos los peligros.

Todos los razonamientos del novio eran válidos, pero, como ahora sabemos, su primera premisa siempre era falsa, y también resultaron ser falsas sus conclusiones.

Esto quiere decir que, para razonar de manera correcta, no solamente debemos usar razonamientos válidos: también debemos asegurarnos de que nuestras premisas sean verdaderas.

Y ésta es la misión de la sabiduría: ayudarnos a averiguar si nuestras premisas son, realmente, verdaderas.

Contenido

ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
ESPE

ISBN: 978-9978-301-09-8
9 789978 301098

Publicaciones Científicas