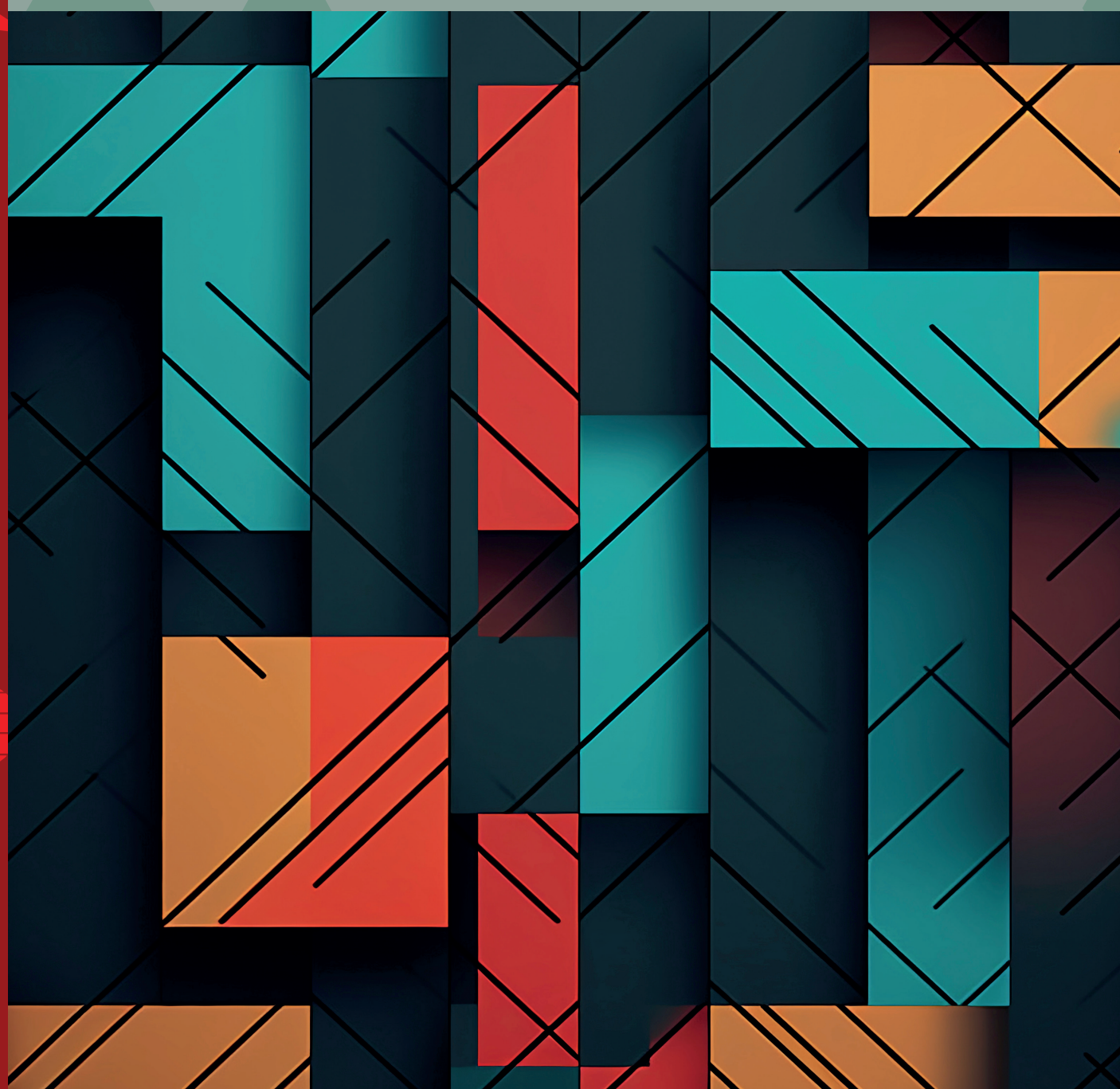




ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica

Luis Germánico Gutiérrez Albán, Magaly Margarita Narváez Ríos,
Luis Oswaldo Jiménez Alarcón, Jacqueline del Pilar López Miranda y
Diego Santiago Andrade Naranjo (ed.)

Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica

Luis Germánico Gutiérrez Albán, Magaly Margarita Narváez Ríos,

Luis Oswaldo Jiménez Alarcón, Jacqueline del Pilar López Miranda y

Diego Santiago Andrade Naranjo (ed.)

Primera edición electrónica: agosto, 2025

ISBN: 978-9942-652-30-0

Revisión científica:

Ph.D. Héctor Daniel Morocho - Universidad Técnica de Ambato

Dr. José Ramón Delgado - Universidad Técnica Particular de Loja

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Cnrl. C.S.M. Víctor Villavicencio A., Ph. D.

Rector

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Cpfg. Joseph Alexander Guamán Seis, Ph.D.

Presidente

Corrección de estilo y diseño

Mtr. Xavier Chinga

Imagen de cubierta: <https://n9.cl/70ihh5>

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

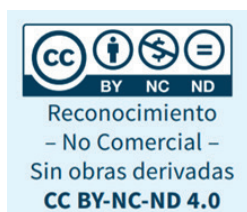
Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador

www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en

www.repositorio.espe.edu.ec.



Departamento de
Seguridad y Defensa



Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica

MSc. Luis Germánico Gutiérrez Albán

Mg. Magaly Margarita Narváez Ríos

Mg. Luis Oswaldo Jiménez Alarcón

Mg. Jacqueline del Pilar López Miranda

Dr. Diego Santiago Andrade Naranjo. Ph.D. (ed.)

EDITORIAL



UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

A nuestros hijos e hijas, fuente de inspiración y motor de cada esfuerzo, quienes nos recuerdan día a día que el conocimiento es el legado más valioso que podemos dejarles, así como la esencia de educación y respeto como padres.

A la Escuela de Formación de Soldados “Vencedores del Cenepa” (ESFORSFT), cuna de disciplina, valores y excelencia, que forja con esfuerzo y entrega a quienes servirán con honor a la patria.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, institución que, con su compromiso científico y académico, impulsa la formación integral y fortalece el espíritu de investigación, contribuyendo al desarrollo del país.

Este trabajo es para ustedes, como testimonio de gratitud, dedicación y compromiso con la educación y la superación constante.

Dr. Diego Santiago Andrade Naranjo, Ph.D.

La concreción de esta obra no habría sido posible sin el respaldo y la confianza brindados por la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, institución que no solo nos proporcionó el entorno académico y profesional propicio para el desarrollo de este proyecto, sino que también representa un bastión del conocimiento científico y la formación integral. Su apoyo institucional ha sido clave para dar forma a los enfoques sistemáticos y metodológicos que aquí se proponen como herramientas de fortalecimiento en la enseñanza de la matemática básica.

Extendemos también nuestro más sincero agradecimiento a nuestras familias, quienes, con su comprensión, paciencia y amor incondicional, se convirtieron en el pilar emocional y espiritual que nos sostuvo a lo largo de este proceso. De manera especial, dedicamos esta obra a nuestros hijos e hijas, cuya presencia constante y alegría cotidiana nos han inspirado a seguir cultivando el conocimiento con responsabilidad, disciplina y compromiso.

Expresamos también nuestro más sincero agradecimiento a la Escuela de Formación de Soldados de la Fuerza Terrestre (ESFORST), institución que ha sido una fuente constante de inspiración para la elaboración de esta obra. Su compromiso con la excelencia académica y la formación integral de los futuros soldados del Ecuador ha motivado el desarrollo de enfoques pedagógicos que integren el rigor matemático con la aplicabilidad en el contexto militar.

A todos ellos, nuestro más profundo reconocimiento, pues su acompañamiento significativo, ha sido determinante para culminar con éxito este manuscrito, concebido con rigor académico y vocación docente.

Los autores

Luis Germánico Gutiérrez Albán

lggutierrez1@espe.edu.ec

Licenciado en Ciencias de la Educación. Especialidad Física y Matemática.

Profesor de Pedagogía.

Master en Administración Educativa y Docencia Universitaria.

Magister en Administración y Marketing

Jefe de área de: Fundamentos Matemáticos, Estadística, Didáctica, Evaluación Educativa, Teoría de la Docencia, Diseño de Proyectos.

Docente del Departamento de Seguridad y Defensa-Unidad Académica Especial, ES-FORSFT.

Magaly Margarita Narváez Ríos

mmnarvaez5@espe.edu.ec

Ingeniera en Sistemas Informáticos y Computación

Máster en Investigación en Ingeniería de Sistemas y de la Computación

Magister en Educación mención en enseñanza de la matemática

Docente de la Unidad Académica Especial ESFORSFT,

Coordinadora del área de conocimiento de Herramientas Ofimáticas

Luis Oswaldo Jiménez Alarcón

lojimenez1@espe.edu.ec

Ingeniero en Administración de Empresas.

Máster en Docencia Universitaria y Administración Educativa.

Máster en Administración de Empresas - mención Innovación

Coordinador Administrativo del Rectorado Universidad Técnica de Ambato.

Docente en la Universidad Tecnología Indoamérica.

Docente de la UFA-ESPE. Responsable del Diseño Curricular de la Carrera Tecnología Superior en Ciencias Militares. Plan General de Enseñanza. Responsable de Docencia de la UAE-ESFORSFT

Jacqueline del Pilar López Miranda

jplopez15@espe.edu.ec

Ingeniera Comercial

Magister en Administración de Empresas, mención Planeación

Docente de la Facultad de Contabilidad y Auditoría de la Universidad Técnica de Ambato

Docente del Departamento de Seguridad y Defensa de la ESPE

Diego Santiago Andrade Naranjo

dsandrade3@espe.edu.ec

Doctor en filosofía Ciencias Organizacionales. PhD

Licenciado en Ciencias de la Educación.

Magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior.

Magister en Cultura Física y entrenamiento Deportivo.

Docente investigador Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

Coordinador de áreas de conocimiento: Filosofía, Liderazgo, Deportes y Actividades físico recreativas, Jurídicas y del derecho, Comunicación oral y escrita, Liderazgo.

Docente de los departamentos, Ciencias humanas y sociales, Ciencias Económicas Administrativas y del Comercio.

Docente del departamento, Seguridad y Defensa-Unidad académica Especial ESFOR-SFT.

Índice

Presentación.....	13
Prefacio.....	15
Capítulo I - Principios y fundamentos sistemáticos del Álgebra.....	17
Operaciones con números reales.....	19
Taller 1.....	22
Factorización.....	23
Taller 2.....	24
Taller 3.....	25
Taller 4.....	26
Taller 5.....	27
Taller 6.....	29
Taller 7.....	30
Taller 8.....	31
Taller 9.....	33
Ecuaciones.....	33
Taller 10.....	35
Taller 11.....	37
Taller 12.....	38
Taller 13.....	40
Taller 14.....	41
Taller 15.....	42

Taller 16.....	44
Capítulo II - Geometría plana.....	47
Redondeo de números.....	49
Redondeo de datos.....	49
Taller 17.....	50
Notación científica.....	51
Taller 18.....	52
Reducción de medidas de longitud y superficie.....	53
Magnitudes.....	53
Medidas de Longitud.....	54
Medidas de volumen.....	54
Factores de conversión.....	54
Reducción de unidades.....	55
Taller 19.....	56
Regla de tres simple y compuesta.....	56
Magnitudes directamente proporcionales.....	56
Magnitudes inversamente proporcionales.....	57
Regla de tres.....	57
Regla de tres simple directa.....	58
Regla de tres simple inversa.....	59
Regla de tres compuesta.....	59
Regla de tres inversa.....	61
Taller 20.....	63

Tanto por ciento.....	64
Cálculo de porcentajes.....	64
Taller 21.....	65
Definiciones básicas de geometría.....	67
Relaciones entre segmentos.....	67
Ángulos: elementos y clasificación.....	68
Ángulos: elementos y clasificación.....	69
Taller 22.....	70
Triángulos: elementos y clasificación.....	73
Taller 23.....	75
Cuerpos geométricos.....	76
Perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.....	77
Taller 24.....	102
Taller 25.....	103
Capítulo III - Trigonometría.....	107
Ángulos: ángulos positivos y negativos.....	110
Medición de ángulos.....	110
Resolución de triángulos rectángulos.....	112
Taller 26.....	113
Taller 27.....	115
Taller 28.....	116
Ley de senos y cosenos.....	117

Taller 29.....	119
Capítulo IV - Geometría analítica.....	121
Distancia entre dos puntos.....	123
Taller 30.....	124
Formas de la ecuación de la recta.....	124
Forma punto – pendiente.....	124
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.....	124
Forma pendiente – ordenada en el origen.....	125
Ecuación de la recta en forma simétrica.....	126
Forma general de la ecuación.....	126
Taller 31.....	127
Rectas paralelas y perpendiculares.....	128
Rectas paralelas.....	128
Rectas perpendiculares.....	128
Distancia de un punto a una recta.....	129
Taller 32.....	130
Ángulo entre dos rectas.....	130
Taller 33.....	131
Capítulo V - Estadística descriptiva.....	133
Nociones preliminares.....	136
Estadística.....	136
Definiciones de términos estadísticos.....	136
Variable.....	137

Determinación de la muestra.....	138
Tipos de muestreo.....	142
Taller 34.....	144
Distribución de frecuencias.....	146
Taller 35.....	148
Ordenación de datos en tablas de frecuencia.....	149
Tabulación de datos.....	151
Series simples.....	152
Series de datos y frecuencias.....	152
Series de clases y frecuencias.....	153
Taller 36.....	155
Representación gráfica.....	157
Diagrama de barras.....	158
Diagrama de barras horizontales.....	160
Histogramas de frecuencias.....	160
Polígonos de frecuencias.....	161
Polígonos de frecuencias acumuladas.....	162
Diagrama de sectores.....	164
Taller 37.....	165
Medidas de tendencia central.....	166
Series simples.....	167
Taller 38.....	168
Serie de datos y frecuencias.....	168

Taller 39.....	172
Serie estadística de clases y frecuencias.....	173
Taller 40.....	176
Cuartiles, deciles y centiles.....	177
Taller 41.....	182
Medidas de dispersión.....	183
Taller 42.....	186
Serie estadística de frecuencia.....	187
Taller 43.....	189
Serie estadística de intervalos.....	190
Taller 44.....	193
Coeficiente de variación.....	194
Taller 45.....	194
Referencias.....	196
Anexo.....	199

Presentación

El libro de “Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica” está diseñado para transformar la forma en que entendemos y aplicamos esta fascinante disciplina. Desde conceptos básicos hasta temas más avanzados, esta obra busca conectar los fundamentos matemáticos con la vida cotidiana, fomentando el pensamiento lógico y la resolución creativa de problemas.

A lo largo de sus capítulos, el lector encontrará una combinación única de teoría clara y accesible, ejemplos prácticos, y ejercicios que desafían y consolidan el aprendizaje. Este enfoque integral está pensado tanto para estudiantes que se inician en el mundo de las matemáticas, como para aquellos que buscan perfeccionar sus habilidades y explorar nuevos horizontes.

En un mundo donde la tecnología y los datos desempeñan un papel crucial, las matemáticas son una herramienta esencial para comprender y modelar nuestro entorno, este libro no solo enseña cómo resolver ecuaciones o interpretar gráficos, sino que también fomenta una mentalidad analítica y crítica, preparando al lector para enfrentar los retos del siglo XXI.

Esperamos que este libro no solo sea un recurso educativo, sino una fuente de inspiración para descubrir la belleza y utilidad de las matemáticas. Cada página está diseñada con la intención de hacer de esta materia algo accesible, motivador y, sobre todo, útil. incluso en la formación dual de unidades académicas militares.

La enseñanza de las matemáticas en las Escuelas de Formación militar de grado y tecnología y Ciencias Militares constituye un pilar fundamental para el desarrollo de habilidades analíticas, estratégicas y resolutivas en nuestros futuros soldados, a través de sus páginas, los estudiantes encontrarán una exposición clara y estructurada de algunos temas relevantes como:

1. Operaciones con Números Reales

Introducción a las propiedades y operaciones básicas con números reales, fundamentales para la resolución de problemas matemáticos cotidianos y de carácter técnico.

2. Trigonometría

Estudio de las razones trigonométricas, sus aplicaciones en la resolución de triángulos y su utilidad práctica en el análisis y ejecución de tareas estratégicas.

3. Geometría Analítica

Exploración de los conceptos básicos de rectas, circunferencias y otras figuras geométricas en el plano cartesiano, útiles para el análisis espacial y la planificación táctica.

4. Estadística Descriptiva

Fundamentos para organizar, analizar y presentar datos, habilidades esenciales para la toma de decisiones fundamentadas en datos objetivos.

5. Coeficiente de Variación

Una herramienta clave para comparar la variabilidad relativa entre conjuntos de datos en diferentes contextos.

6. Medidas de Dispersión

Comprensión de la dispersión y el rango de los datos mediante el estudio de la varianza, la desviación estándar y otras métricas importantes.

Este libro no solo busca fortalecer las capacidades matemáticas, sino también fomentar el pensamiento crítico y la resolución eficiente de problemas, habilidades indispensables en la formación integral y militar del futuro.

Estamos convencidos de que esta obra será un recurso valioso en el proceso educativo, apoyando el cumplimiento de los más altos estándares académicos y militares.

Dr. Diego Andrade Naranjo. Ph.D.

Prefacio

La matemática, más que una ciencia exacta, es una herramienta estratégica que fortalece la lógica, disciplina y capacidad analítica de quienes la practican en las escuelas de formación militar, en estos escenarios educativos y formativos, especialmente aquellos vinculados a instituciones con altas exigencias como las militares, su dominio constituye una ventaja decisiva en la toma de decisiones, la planificación táctica y la resolución de problemas complejos en la carrera de formación.

Este libro titulado “Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica” se forja como una guía estructurada para el desarrollo de competencias matemáticas fundamentales como fuente de consulta en el desarrollo de la carrera militar. Su enfoque no solo es teórico, sino también eminentemente práctico, con aplicaciones directas en espacios cotidianos, técnicos y estratégicos. El contenido ha sido cuidadosamente seleccionado para abordar los pilares esenciales del conocimiento matemático que todo estudiante militar debe dominar.

El primer capítulo introduce las Operaciones matemáticas con números reales, sentando las bases para comprender y aplicar con precisión las propiedades fundamentales del sistema numérico, la Trigonometría se presenta como una herramienta clave en la resolución de triángulos y problemas espaciales, con aplicaciones relevantes en la navegación, orientación y diseño técnico.

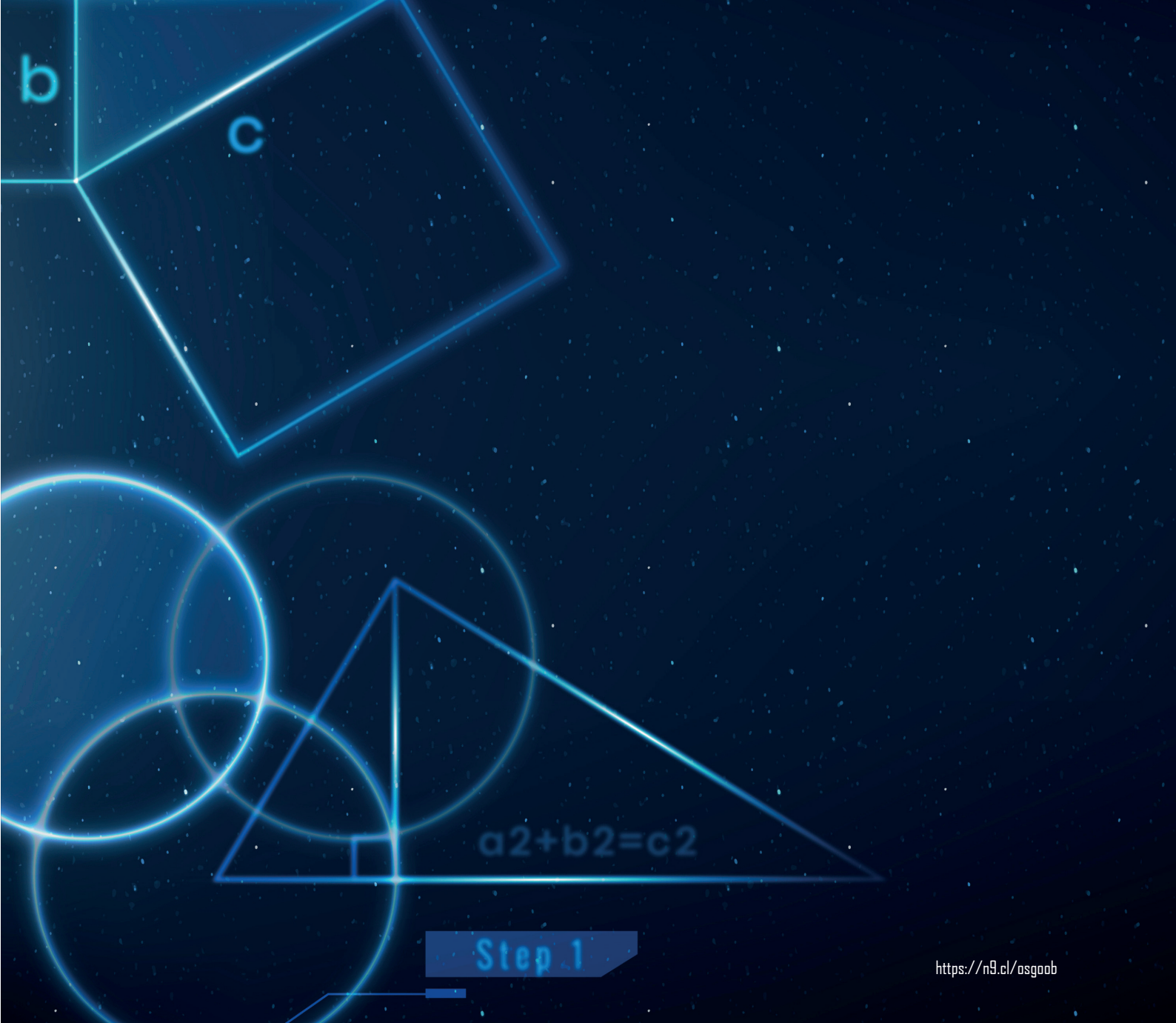
La sección de Geometría Analítica permite al lector explorar figuras en el plano cartesiano, facilitando el análisis gráfico y espacial tan requerido en diversos campos de acción. Posteriormente, la Estadística Descriptiva y el estudio del Coeficiente de variación proporcionan los recursos necesarios para interpretar datos, comparar comportamientos y establecer patrones confiables, capacidades esenciales en la gestión operativa y el análisis de información.

Finalmente, las Medidas de Dispersión completan el recorrido conceptual, brindando herramientas para evaluar la variabilidad y precisión de los datos, fortaleciendo así una perspectiva crítica y rigurosa.

Este manuscrito no pretende únicamente transmitir conocimientos matemáticos, sino también cultivar en el lector o alumno, una mentalidad orientada a la excelencia académica con formación militar, al análisis reflexivo y a la resolución eficiente de problemas, está dirigido a estudiantes en formación, particularmente en ambientes con exigencias estructuradas y disciplinares,

como las escuelas de formación militar, pero también es útil para cualquier estudiante que aspire a desarrollar competencias matemáticas con una visión metodológica clara y aplicabilidad en contextos reales.

Dr. Diego Andrade Naranjo. Ph.D.



CAPÍTULO I

Principios y fundamentos
sistemáticos del Álgebra

La matemática generalmente es importante desde un enfoque funcionalista, como herramienta útil y práctica en la aplicación y desarrollo de otras ciencias o asignaturas, marcando un enfoque formativo del desarrollo del pensamiento lógico, enmarcado en sus habilidades cognitivas numéricas en la mente del sujeto, desarrollando la capacidad creativa, de reflexión y racional que motiva a un aprendizaje social y profesional de los estudiantes a soldados.

En este capítulo se abarcarán las operaciones fundamentales con números reales, factorización, ecuaciones lineales y fraccionarias, sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, en todos los casos y procesos de aprendizaje se aplicará el ciclo de aprendizaje o ciclo de KOLB, estableciendo los prerequisites desde las destrezas básicas desarrolladas, para llegar a la experiencia concreta, a la reflexión se pretende llegar a la etapa conceptual simbólica, donde el estudiante interiorice el concepto fundamental y estará en la capacidad de resolver las situaciones de aplicación que son prácticas y pueda transferir sus conocimientos a nuevas situaciones, enmarcándose a conseguir desarrollar sus destrezas cognitivas en la inteligencia múltiple de la lógica matemática donde estarán en la capacidad de comprender la relación lógica entre las acciones o los símbolos.

Llegando al final del proceso, de traducir al lenguaje simbólico matemático de los problemas en mensaje coloquial, mediante el uso de recursos analógicos para encontrar los resultados que se constituyan en la solución del sistema o problema, mediante métodos de inducción, deducción, aprendizaje basado en problemas y estrategias para construir el camino a seguir mediante un proceso adecuado y generar procedimientos analíticos-prácticos, para formular las alternativas de solución.

Operaciones con números reales

Las operaciones en el ámbito de los números es en realidad repasar los ejercicios que debe aprender desde la primaria. Al realizar operaciones naturales, enteras, de igual o diferente signo y fracciones, se han preparado para incrementar sólo los decimales irracionales que hacen un complemento el campo de los Números Reales.

A más de aprender y entender una nueva operación o forma de efectuar una operación, aquí se organiza y revisa todo lo aprendido durante la formación militar en el contenido científico, de tal manera que no se tengan dificultades

para efectuar cálculos con números reales en matemática, navegación terrestre y otras asignaturas de índole militar.

Adición: Adicionar polinomios es encontrar un nuevo polinomio formado por los términos de los polinomios planteados.

Ejemplos:

Adicionar: $x^2 - 5x + 7$ y $3x^2 - 3$

$$(x^2 - 5x + 7) + (3x^2 - 3) = x^2 - 5x + 7 + 3x^2 - 3 = 4x^2 - 5x + 4$$

Adicionar: $-7x^4 + 5x^2 - 3x + 3$; $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6$; $-5x^3 + 3x - 8$; $-3x^4 - 5x - 6x^2 + 9$ $(-7x^4 + 5x^2 - 3x + 3) + (2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6) + (-5x^3 + 3x - 8) + (-3x^4 - 6x^2 - 5x + 9)$

$$= -7x^4 + 5x^2 - 3x + 3 + 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6 - 5x^3 + 3x - 8 - 3x^4 - 6x^2 - 5x + 9$$

$$= -4x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 5x - 2$$

Sustracción: Restar dos polinomios, es encontrar un tercer polinomio llamado diferencia, el mismo que adicionado con el segundo polinomio llamado sustraendo, da el primer polinomio llamado minuendo.

Ejemplos:

De $8x^3 - 5x^2$ Restar $-4x^2 + 3x$

$$(8x^3 - 5x^2) - (-4x^2 + 3x)$$

$$8x^3 - 5x^2 + 4x^2 - 3x$$

$$8x^3 - x^2 - 3x$$

Restar: $-7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3$ de $3x^4 - 2x^2 - 7$

$$(3x^4 - 2x^2 - 7) - (-7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3)$$

$$(3x^4 - 2x^2 - 7) + (7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3)$$

$$3x^4 - 2x^2 - 7 + 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3$$

$$10x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 4$$

Multipliación: Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos del primer polinomio, por cada uno de los términos del segundo y luego se adicionan algebraicamente los productos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l}
 (3x^2 - 2xy + 5y^2) * (2x^2 + 3xy - 3y^2) & (3x^2 - 2x + 2) * (x - 3) * (x + 4) \\
 = 6x^4 + 9x^3y - 9x^2y^2 - 4x^3y - 6x^2y^2 + & = (3x^3 - 9x^2 - 2x^2 + 6x + 2x - 6) * (x + 4) \\
 6xy^3 + 10x^2y^2 + 15xy^3 - 15y^4 & = 3x^4 + 12x^3 - 9x^3 - 36x^2 - 2x^3 - 8x^2 + 6x^2 + 24x \\
 = \mathbf{6x^4 + 5x^3y - 5x^2y^2 + 21xy^3 - 15y^4} & + 2x^2 + 8x - 6x - 24 \\
 & = \mathbf{3x^4 + x^3 - 36x^2 + 26x - 24}
 \end{array}$$

División: Dividir un polinomio (Dividendo) entre otro polinomio (Divisor), es buscar un tercer polinomio (Cociente), de tal manera que el producto del divisor por el cociente sea igual al dividendo.

Ejemplos:

Dividir: $3x^2 + 20 + 17x$ entre $x + 4$

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 17x + 20 \quad \overline{) \quad x + 4} \\
 \underline{- 3x^2 - 12x} \quad \quad \quad \mathbf{3x + 5} \\
 \hline
 0 + 5x + 20 \\
 \underline{- 5x - 20} \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

La división es exacta y el cociente es $3x + 5$

Dividir: $4x^4 + 2x^3 - 3x + 3$ entre $2x^2 - 3x + 4$

$$\begin{array}{r}
 4x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 3x + 3 \quad \overline{) \quad 2x^2 - 3x + 4} \\
 \underline{- 4x^4 + 6x^3 - 8x^2} \quad \quad \quad \mathbf{2x^2 + 4x + 1} \\
 \hline
 0 + 8x^3 - 8x^2 - 3x \\
 \underline{- 8x^3 + 12x^2 - 16x} \\
 \hline
 0 + 2x^2 - 19x + 3 \\
 \underline{- 2x^2 + 3x - 4} \\
 \hline
 0 \quad - 16x - 1
 \end{array}$$

El cociente es $2x^2 + 4x + 1$ y el residuo es $- 16x - 1$.

Dividir: $5x^3 + 7x^2 - 3$ entre $x^2 + 2x - 1$

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 7x^2 \quad - 3 \quad \boxed{x^2 + 2x - 1} \\
 -5x^3 - 10x^2 + 5x \quad \quad \quad 5x - 3 \\
 \hline
 -3x^2 + 5x - 3 \\
 +3x^2 + 6x - 3 \\
 \hline
 11x - 6
 \end{array}$$

Taller 1

De los siguientes ejercicios, resuelva según lo que se solicita en cada uno de los numerales:

1. Adicionar los siguientes polinomios:

- $5x - 9x^2 + 19 - 3x^3$; $-7x^2 + 2x - 3x^4 + 5$; $5x^2 + 9x - 3x^4 + 11$ y $-4x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 8$
- $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x - \frac{5}{3}x^2 - \frac{4}{5}$
- $-\frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{5}x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x - \frac{5}{3}x^2 - \frac{4}{5}$

2. Restar los siguientes polinomios:

- De: $8x^2 + 3x - 2x^3 + 7$ Restar $-2x - 5x^2 - 11 + 3x^3$
- Restar: $\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{5}$

3. Multiplicar los siguientes polinomios:

- $(2x^3 - 3x^2 + 4) * (3x^2 - 2x - 5)$
- $\left(\frac{3}{2}x - 4x^2 - \frac{5}{2}x^3\right) (3x^3 - 2x^2 + 5x - 7)$
- $(2x^3 - 3x^2 + 4) * (3x^2 - 2x - 5)$
- $(2x^2 - 1) * (x + 2) * (3x - 4) * (2x + 3)$

4. Realizar las siguientes operaciones de polinomios:

- Dividir $(x - 2)$ de $2x^3 - 5x^2 + 6x - 5$
- De $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x + 6$ dividir $x^2 + 3x - 2$
- Dividir $x^2 + 3x - 2$ de $3x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 3x - 8$

Factorización

Factorizar o descomponer en factores: Una expresión algebraica, significa establecer una forma de presentación de un polinomio en factores.

Esto quiere decir que una cierta cantidad de términos, puedan transformarse a factores.

Recomendación: Todos los casos de factorización son susceptibles de comprobación, para lo cual se recomienda realizar la multiplicación de sus factores y se obtendrá el mismo polinomio del cual partimos.

Aplicación: $a^2 + ab = a(a + b)$

Como se puede observar, la expresión de la izquierda (suma) constituida por términos, se puede cambiar o transformar a una multiplicación, proceso que en algebra recibe el nombre de factoreo o descomposición factorial.

De lo anteriormente estudiado con respecto a los productos y cocientes notables, la descomposición factorial es lo contrario.

Los casos a estudiarse son los siguientes:

Factor común:

Es de considerarse de dos clases: Monomio y polinomio.

Cuando los términos de una expresión algebraica tienen un factor común que es un monomio, este se puede extraer de todos los términos. Un monomio incluye un producto de constantes y variables elevadas a potencias enteras no negativas.

El uso del factor común facilita la resolución de problemas algebraicos, la factorización de expresiones más complejas y la simplificación de ecuaciones. Es una herramienta fundamental para desarrollar habilidades en álgebra y matemáticas avanzadas.

Factor común monomio: Este evento se produce cuando todos los términos de un polinomio tienen un valor algebraico monómico en común, es decir, que se repite en todos y cada uno de ellos.

Propuesta: $x^3 + 2x^2 - 3x$

En la presente expresión observamos que se repite el valor x , por lo tanto, es factible que se pueda extraer el mismo para que multiplique a los cocientes respectivos.

Procedimiento

- Se extrae el valor monómico común con su menor exponente, luego dividimos cada término del polinomio para el factor extraído, cuyo cociente colocamos en el interior del paréntesis.

Aplicación: $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$

Taller 2

Factorizar:

a. $x^5 + 2x^3$

b. $14a^7 + 7a^2$

c. $4n^{10} + 8n^3$

d. $15x - 3x$

e. $-4xy + 8x$

f. $9a^2 + 27ab$

g. $15x^3y - 10x^2y^2 + 5xy^3$

Factor común polinomio:

Este evento se produce cuando todos los términos de un polinomio tienen un valor algebraico polinómico común, es decir, que se repite en todos y cada uno de ellos.

Propuesta

$2x(x+1) + 3y(x+1)$

En la presente expresión observamos que se repite el valor $(x + 1)$, por lo tanto, es factible que se pueda extraer el mismo para multiplicarlo por los cocientes respectivos.

Procedimiento:

- Se extrae el valor polinómico común.
- Se divide cada término del polinomio para el factor extraído, cuyo cociente colocamos en el interior del paréntesis.

Aplicación

$$(x + 1) (2x + 3y)$$

Taller 3

- a. $m(x + 3) + n(x + 3)$
- b. $(2a - 3) * (y + 1) - y - 1$
- c. $(a - 1)^2(y + 2) - (a - 1) * (y + 2)^2$
- d. $3x(a - 2) - a + 2 + 3y(a - 2)$

Trinomio cuadrado perfecto:

El presente caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones:

- Por estar formado por tres términos
- Dos de ellos deben ser cuadrados perfectos (Su raíz cuadrada es exacta)
- Uno de sus términos es igual al doble producto de la raíz de los dos anteriores.

Propuesta:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Se observa que dos de sus términos son cuadrados perfectos

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{y^2} = y$$

Uno de sus términos es el doble producto de las raíces anteriores

$$2(x)(y) = 2xy$$

Como se puede observar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas, por lo tanto, es un trinomio cuadrado perfecto.

Procedimiento:

- Se descompone en un factor binomio, al cual lo elevamos al cuadrado.
- Este factor está constituido por las raíces cuadradas de los dos términos, separados por el signo del término no cuadrático.
- A este binomio lo elevamos al cuadrado.

$$(x+y)^2$$

O también podemos descomponerlo en dos factores binomios con el mismo signo.

$$(x+y)(x+y)$$

Aplicación

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 \quad (2x-5y)^2 \quad \text{o también } (2x-5y)(2x-5y)$$

Taller 4

a. $x^2 + 10x + 25$

b. $16x^2 + 24x + 9$

c. $y^2 + 14y + 49$

d. $4y^2 - 32y + 64$

e. $49x^2 + 94x + 36$

f. $36y^2 - 108y + 81$

g. $84x^2 + 64xy + 16y^2$

h. $25z^2 + 30zw + 9w^2$

i. $16x^2 + 104x + 169$

Diferencia de cuadrados:

Se reconoce este caso cuando se tiene la diferencia de dos términos que son cuadrados perfectos

Propuesta: $x^2 - 2^2$

En este caso se presenta la diferencia de potencias iguales cuyos exponentes son pares.

Procedimiento:

- Se extrae la raíz cuadrada de cada término.

- Se coloca en cada factor la raíz cuadrada del primer término y en el segundo factor la raíz cuadrada del segundo término.
- Se descompone en dos factores:
- El primero es igual a la diferencia de las raíces cuadradas de cada término.
- El segundo corresponde a la suma de las raíces cuadradas de cada término.

Aplicación:

$$x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

Taller 5

Factorizar:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a. $4m^2 - 9n^2$ | e. $100x^8 - 9$ |
| b. $16x^2 - 169$ | f. $1/16 - 25x^2$ |
| c. $81a^2 - 121b^2$ | g. $1/64 - x^4/121$ |
| d. $4x^2y^4 - 225z^8$ | h. $a^6/81 - 49b^4/64$ |

Trinomio cuadrado por suma y resta

La condición fundamental para que sea este tipo de trinomio consiste en que el exponente de los términos que son cuadrados perfectos debe ser múltiplo de 2, igual a 4.

Se reconoce el presente caso cuando cumple las siguientes condiciones:

- Estar formado por tres términos.
- Dos de ellos deben ser cuadrados perfectos con exponentes 4 (Su raíz cuadrada debe ser exacta).
- Uno de sus términos debe transformarse en el doble producto de la raíz de los dos anteriores sumándole un valor que sea cuadrado perfecto.
- Para que no se altere el valor original, le restamos el mismo valor.
- Con este proceso se consigue un caso especial de diferencia de cuadrados.

Propuesta:

$$4x^4 - 5x^2 + 1$$

Observamos que dos de sus términos son cuadrados perfectos

$$\sqrt{4x^4} = 2x^2 \quad \sqrt{1} = 1$$

Uno de sus términos no cumple la condición de ser el doble producto de las raíces anteriores

$$2(x^2)(1) = 2x^2$$

Como se puede observar debo sumar cierto valor que debe ser un cuadrado perfecto y, para que no se altere debo restarle el mismo, de esta manera consigo la diferencia de cuadrados.

Procedimiento

- Se transforma a un caso especial de diferencia de cuadrados
- Los dos factores se descomponen:
- El primero es igual a la diferencia de las raíces cuadradas de cada término

El segundo es igual a la suma de las raíces cuadradas de cada término:

Aplicación:

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^2 + 1 \\ 2x^2 + 1 \\ 2(2x^2)(1) \\ 4x^2 \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^2 + 1 \\ x^2 - x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x^4 - 4x^2 + 1 - x^2 \\ (4x^4 - 4x^2 + 1) - x^2 \\ (2x^2 - 1)^2 - (x)^2 \\ (2x^2 - 1 + x)(2x^2 - 1 - x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25x^4 + x^2 + 1 \\ 5x^2 + 1 \\ 2(5x^2)(1) \\ 10x^2 \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{r} 25x^4 + x^2 + 1 \\ 9x^2 - 9x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^2 \\ (25x^4 + 10x^2 + 1) - 9x^2 \\ (5x^2 + 1)^2 - 9x^2 \\ (5x^2 + 1 + 3x)(5x^2 + 1 - 3x) \end{array}$$

Taller 6

- a) $4X^4 + 8X^2Y^2 + 9Y^4$
- b) $16c^4 - 19c^2d^2 + d^4$
- c) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
- d) $49p^8 + 87p^4q^4 + 36q^8$
- e) $169c^8 + 2a^2b^2c^4 + 4a^4b^4c^8$

Trinomio de segundo grado sin coeficiente, o de la forma: x^2+bx+c

El presente caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones. Estar formado por tres términos:

- El primero de ellos debe ser cuadrado perfecto (Su raíz cuadrada es exacta)
- Otro de sus términos debe estar constituido por un coeficiente a más de la raíz\ cuadrada del primero.
- Un término independiente

Propuesta:

$$x^2 + 3x + 2$$

Se observa que uno de sus términos es un cuadrado perfecto

$$\sqrt{x^2} = x$$

El segundo término es un factor 3 multiplicado por la raíz del primero

$$3\sqrt{x^2} = 3x$$

El tercer término es un valor independiente 2.

Por lo que acabamos de comprobar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas anteriormente indicadas, por lo tanto, es un trinomio de segundo grado con una incógnita o de la forma $x^2 + bx + c$

Procedimiento

- Se descompone en dos factores binomios,
- El término primero de cada factor será igual a la raíz cuadrada del primer término del polinomio.

- Los segundos términos de cada factor, están dados de tal manera que la suma de ellos nos de cómo resultado el segundo término del polinomio, y la multiplicación de los mismos nos de cómo resultado el tercer término del polinomio.

$$(x + 2)(x + 1)$$

Aplicación:

$$\begin{array}{l} x^2 - 8x - 20 \\ (x - 10)(x + 2) \end{array}$$

Taller 7

a) $x^2 + 9x + 18 =$

b) $x^2 - 4x - 45 =$

c) $x^2 - 16x + 39 =$

d) $m^2 - 10m + 21 =$

e) $a^2 + 11a - 152 =$

f) $p^2 - 4p - 165 =$

Trinomio de segundo grado con coeficiente, o de la forma: ax^2+bx+c

Este caso se lo reconoce cuando cumple las siguientes condiciones. Estar formado por tres términos

- El primero de ellos debe tener un coeficiente diferente a la unidad y su parte literal debe ser cuadrado perfecto (Su raíz cuadrada es exacta).
- Otro de sus términos debe estar constituido por un coeficiente a más de la raíz cuadrada del primero.
- Un término independiente.

Propuesta:

$$2x^2 + 11x + 5$$

Se observa que uno de sus términos tiene un coeficiente diferente de la unidad (2) y su parte literal es un cuadrado perfecto

$$\sqrt{x^2} = x$$

El segundo término tiene un factor 11 multiplicado por la raíz del primero

$$11\sqrt{x^2} = 11x$$

El tercer término es un valor independiente 5

Por lo que acabamos de comprobar, este trinomio cumple las dos condiciones básicas anteriormente indicadas, por lo tanto, es un trinomio de segundo grado con una incógnita o de la forma ax^2+bx+c

Procedimiento

- Se multiplica a todo el trinomio por una fracción unitaria cuyos elementos sean iguales al del coeficiente transformándole de esta manera a un trinomio de segundo grado sin coeficiente
- Por lo tanto, la solución es igual a la anterior
- Debiendo al final dividir los factores para el coeficiente por el que inicialmente multiplicamos
- Se descompone en dos factores binomios, cuyo producto volverá a ser el polinomio original

$$(2x + 1)(x + 5)$$

Aplicación

$$3x^2 - x - 2$$

$$(3x + 2)(x - 1)$$

Taller 8

- a) $5a^2 - 8a - 21 =$
- b) $9x^2 - 21y + 10y^2 =$
- c) $-m + 6m^2 - 40 =$
- d) $13a + 12a^2 - 14 =$
- e) $10x^2 - 63 - 27x$

Suma de cubos:

Reconocemos este evento cuando tenemos la suma de dos términos que son cubos perfectos.

Propuesta:

$$x^3 + 2^3$$

En el presente caso se observa que cada termino es un cubo perfecto por cuanto se puede extraer la raíz cubica exacta.

Procedimiento

- Primero se debe realizar la descomposición en dos factores:
- El primero es igual a la suma de las raíces cubicas de cada termino.
- El segundo es un trinomio cuyos términos son: el cuadrado del primer término, menos el producto del primero por el segundo y, más el cuadrado del segundo término

Aplicación:

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Diferencia de cubos:

Reconocemos este evento cuando tenemos la diferencia de dos términos que son cubos perfectos

Propuesta: $x^3 - 2^3$

En el presente caso se observa que cada termino es un cubo perfecto por cuanto se puede extraer la raíz cubica exacta.

Procedimiento

- Se descompone en dos factores:
- El primero es igual a la diferencia de las raíces cubicas de cada término.

El segundo es un trinomio cuyos términos son: el cuadrado del primer término, más el producto del primero por el segundo y, más el cuadrado del segundo término.

Aplicación:

$$x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Taller 9

a) $a^3 + b^3 =$

b) $27a^3 + 8b^6 =$

c) $125y^3 + 343x^3 =$

d) $729x^6y^6 - 27z^{12} =$

e) $125m^6 - 8n^{12} =$

f) $64x^3 - 27y^6 =$

g) $343a^6 + 216b^9 =$

h) $125y^3 + 729 =$

i) $216x^3 + 512y^3 =$

Ecuaciones

Resolución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación es determinar el valor o valores de las incógnitas que hace cierta la igualdad. Este valor se llama *solución* o *raíz* de la ecuación; así por ejemplo en la ecuación $2x + 3 = 0$, la raíz es

$$x = -\frac{3}{2}$$

Por cuanto, la ecuación se reduce a la igualdad $2(-3/2) + 3 = 0$, o sea, $-3 + 3 = 0$; es decir, $0 = 0$ que es verdadera.

En general, la solución de toda ecuación lineal viene dada en el siguiente teorema:

Teorema. - La solución a la ecuación lineal es

$$ax + b = 0 \quad \text{tiene la forma} \quad x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones lineales enteras:

a) $3x - 4 = 7x + 8$

Solución: A fin de que se elimine $7x + 8$ en el segundo miembro, sumemos a la ecuación $-7x - 8$, así: $3x - 4 - 7x - 8 = 7x + 8 - 7x - 8$

Sumando términos semejantes tenemos:

$$-4x - 12 = 0$$

Que es una ecuación de la forma $ax + b = 0$, con $a = -4$ y $b = -12$; por tanto, aplicando el teorema anterior

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{-4}$$

y, $x = -3$ es la raíz o solución de la ecuación $3x - 4 = 7x + 8$

Verificación: Reemplazando $x = -3$, en la ecuación original resulta

$$3(-3) - 4 = 7(-3) + 8$$

$$-9 - 4 = -21$$

$$-13 = -13$$

Igualdad que es verdadera.

b) $4(x-5)(x+2) = 11 - 3[x(x+2) + 3] + 7x^2$

Solución: Suprimiendo los signos de agrupación se tiene

$$4(x^2 - 3x - 10) = 11 - 3[x^2 + 2x + 3] + 7x^2$$

$$4x^2 - 12x - 40 = 11 - 3x^2 - 6x - 9 + 7x^2 \quad / \text{ sumando a los dos miembros}$$

$$-11 + 3x^2 + 6x + 9 - 7x^2$$

Se tiene: $4x^2 - 12x - 40 - 11 + 3x^2 + 6x + 9 - 7x^2 = 0$

Suprimiendo términos semejantes $-6x - 42 = 0$ y aplicando el teorema anterior

$$x = \frac{42}{-6} = 7$$

Verificación: Reemplazando $x = -7$ en la ecuación original

$$4(-7-5)(-7+2) = 11 - 3[-7(-7+2) + 3] + 7(-7)^2$$

$$4(-12)(-5) = 11 - 3[-7(-5) + 3] + 7(49)$$

$$4(60) = 11 - 3[38] + 343$$

$$240 = 11 - 114 + 343$$

$$240 = 240$$

Igualdad que es verdadera.

Taller 10

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

- $3x - 4 = 7x + 8$
- $4 - 7x = -5x + 10$
- $3x - (x - 3) = x + 4$
- $2x - 8(x - 3) = 5(x + 4)$
- $2(x - 3) - 4(3 - x) + 9 = 10 - 4(3 - x)$
- $2x - 5[x - (2x + 3)] = 6$
- $(x + 4)(x + 2) + 2(x - 3)(x + 1) = 3x(x + 5)$
- $(2x + 3)^2 + 10x = 3 + (3 - 5x)^2$
- $2 - [2x - (3x - 2)] = 5x + \{6 - [2x - 4(x + 1)]\}$

- $12x - 3(x - 2) = 3(x + 4)$
- $8(x - 2) - 5(3 - x) + 16 = 15 - 4(3 - x)$
- $5x - 3[x - (2x - 1)] = 3$
- $(x + 1)(x + 4) + 3(x - 2)(x - 1) = 4x(x - 6)$
- $(5x + 3)^2 + 10x = 4 + (7 - 5x)^2$
- $22 - [3x - (2x - 1)] = 5x + \{6 - [2x - 7(x - 1)]\}$

Resolución de ecuaciones lineales fraccionarias

Ahora vamos a resolver las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias:

$$\text{a) } \frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4x+2}{9}$$

Solución: El m.c.m. = 18 y aplicando la propiedad distributiva,

$$\begin{aligned} 18\left(\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2}\right) &= 18\left(\frac{4x+2}{9}\right) \\ 3(x-5) + 9 &= 2(4x+2) \\ 3x - 15 + 9 &= 8x + 4 && / \text{ sumando } -8x - 4 \\ 3x - 15 + 9 - 8x - 4 &= 0 \\ -5x - 10 &= 0 && \text{ y por el teorema} \\ x &= -\frac{-10}{-5} ; \text{ luego } x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Verificación: } \frac{-2-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4(-2)+2}{9}$$

$$\frac{-7}{6} + \frac{1}{2} = \frac{-8+2}{9}$$

$$\frac{-7+3}{6} = \frac{-6}{9}$$

$$\frac{-4}{6} = \frac{-6}{9}$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

Igualdad que es verdadera.

En la práctica la multiplicación por el m.c.m. se realiza mentalmente y como consecuencia se suprimen los denominadores.

$$\text{b) } \frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{2x+3} = \frac{6x+1}{15} + \frac{41}{5}$$

Solución: El m.c.m. es 15 (2x + 3).

Multiplicando los dos elementos de la ecuación por el m.c.m. se tiene

$$(2x+1) \cdot 3 (2x + 3) + (3x + 2) \cdot 15 = (6x + 1) \cdot (2x + 3) + 4 \cdot 3 (2x + 3)$$

Efectuando las operaciones indicadas

$$12x^2 + 24x + 9 + 45x + 30 = 12x^2 + 20x + 3 + 24x + 36$$

Sumando los términos opuestos del segundo miembro

$$12x^2 + 24x + 9 + 45x + 30 - 12x^2 - 20x - 3 - 24x - 36 = 0$$

$$25x = 0$$

aplicando el teorema anterior

$$x = \frac{-0}{25}$$

$$x = 0$$

Verificación:

$$\frac{2(0)+1}{5} + \frac{3(0)+2}{2(0)+3} = \frac{6(0)+1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{3+10}{15} = \frac{1+12}{15}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{13}{15}$$

Igualdad que es verdadera.

Al resolver un sistema se presentan tres posibilidades:

- Encontrando los valores de (x, y). El sistema tiene solución única.
- Es consistente.
- Cuando se obtiene una igualdad, el sistema tiene infinitas soluciones y se llama: consistente.
- Se obtiene un absurdo, cuando el sistema no tiene solución y se denomina inconsistente.

Taller 11

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

$$\text{a) } \frac{x+3}{2} - \frac{2-3x}{7} = \frac{4x}{3}$$

$$\text{b) } \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = -\frac{x-5}{5}$$

$$\text{c) } 5 + \frac{x}{4} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{x}{2} \right) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \left(10 - \frac{5x}{3} \right)$$

$$\text{d) } \frac{2x}{x-1} - 2 = \frac{3}{x+1}$$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Es un conjunto de ecuaciones lineales (de primer grado) que tienen una solución común.

$$4X + 3Y = 7$$

$$3X - 2Y = 1$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es determinar un par de valores (x, y), para los cuales se verifican las dos ecuaciones.

Métodos de resolución

- Reducción
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes

Método de reducción

Este método consiste en obtener una ecuación con una sola variable, que puede resolverse fácilmente.

Proceso:

1. Obtenemos coeficientes numéricos opuestos en una de las variables de las dos ecuaciones del sistema, para lo cual multiplicamos a las ecuaciones por un número apropiado.
2. Adicionamos las dos ecuaciones y eliminamos dicha variable.
3. Resolvemos la ecuación obtenida y hallamos el valor de la variable.
4. Sustituimos el valor de la variable ya conocida, en cualquiera de las ecuaciones del sistema y hallamos el valor de la otra variable.

Ejemplo:

$$4X + 3Y = 11$$

$$5X - 12Y = -2$$

$$4X + 3Y = 11 \quad (12)$$

$$5X - 12Y = -2 \quad (3)$$

$$48X + 36Y = 132$$

$$15X - 36Y = -6$$

$$63X + 0 = 126$$

$$X = 2$$

$$X = 2, \text{ REEMPLAZO EN EC. 1}$$

$$4X + 3Y = 11$$

$$4(2) + 3Y = 11$$

$$3Y = 11 - 8 \quad 3Y = 3$$

$$Y = 1$$

Taller 12

Resolver utilizando el método de reducción

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3X + 4Y = -6 \\ & 2X + 3Y = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 21X = -3Y + 39 \\ & -5Y = -19X + 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 13X - 6Y = -2 \\ & 8X + 3Y = -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 6X + 2Y = 10 \\ & 5X - 7Y = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & 2X + 9Y = 12 \\ & 6X + 5Y = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 12X - 13Y = 1 \\ & 7X - 9Y = -2 \end{aligned}$$

- 7) Javier compra USD 18,80 de estampillas de 20 y 15 centavos. Si en total compra cuarenta y siete estampillas. ¿Cuántas de cada clase compró?

Método de igualación

Este método consiste en despejar una de las dos incógnitas en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases}$$

Despejamos en las dos ecuaciones una de las incógnitas, por ejemplo, la x :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 - y}{3} \\ x &= \frac{2y - 4}{5} \end{aligned}$$

El valor de x es el mismo en las dos ecuaciones, por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2y - 4}{5} &= \frac{2 - y}{3} \\ 3(2y - 4) &= 5(2 - y) \\ 6y - 12 &= 10 - 5y \\ 6y + 5y &= 10 + 12 \\ 11y &= 22 \\ y &= \frac{22}{11} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Para calcular el valor de x , sustituimos el valor de y en una de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y - 4}{5} \\ x &= \frac{2(2) - 4}{5} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Resuelva el sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación

$$\begin{cases} 5X - 3Y = 19 \\ 2X + 7Y = 24 \end{cases}$$

Despejo X en la EC. 1 y EC. 2, y se tiene:

$$X = \frac{19+3Y}{5} \quad X = \frac{24-7Y}{2}$$

Igualando la EC. 1 y la EC. 2, se tiene:

$$\frac{19+3Y}{5} = \frac{24-7Y}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(19+3Y) = 5(24-7Y) \Rightarrow 38+6Y = 120-35Y$$

$$35Y + 6Y = 120 - 38 \quad 41Y = 82 \quad Y = 2$$

$$Y = 2, \text{ reemplazo en } X = \frac{19+3Y}{5}$$

$$X = \frac{19+3(2)}{5}$$

$$X = \frac{25}{5} \Rightarrow X = 5$$

Taller 13

Resolver los sistemas propuestos por el método de igualación.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 9x + 16y = 7 \\ & 4y + 3x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 7x + 9y = 42 \\ & 12x + 10y = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 10x + 18y = -11 \\ & 16x - 9y = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 32x - 25y = 13 \\ & 16x + 15y = 1 \end{aligned}$$

5. Un monedero contenía sólo monedas de 5 y 25 centavos por un valor de USD 8,65. Si en total había noventa y tres monedas. ¿Cuántas eran de cada tipo?

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirlo en la otra, dando lugar así a una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta sustituimos su valor en la ecuación despejada y calculamos la segunda incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \{ & 5X + 4Y = -14 \\ & 6X - 5Y = -7 \end{aligned}$$

Despejo X en la EC. 1, y se tiene: $X = \frac{-14-4Y}{5}$ (3)

Reemplazo en la EC. 2, y se tiene:

$$6\left(\frac{-14-4Y}{5}\right) - 5Y = -7 \quad -84 - 24Y - 25Y = -35 \quad -49Y = -35 + 84 \quad Y = -1$$

$$Y = -1, \text{ reemplazo en 3. } X = \frac{-14-4Y}{5} \quad X = \frac{-14-4(-1)}{5} \quad X = \frac{-10}{5}$$

$$X = -2$$

Taller 14

Resolver por el método de sustitución y determinantes los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 8x - 5 = 7y - 9 \\ & 6x = 3y + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x + 6 = 3(1 - 2y) \\ & x + 6 = 3(1 - 2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 5x - 7 = 2y - 9 \\ & 4x = 3y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 32x - 25y = 13 \\ & 16x + 15y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & 2X - 7 = 3Y - 12 \\ & 5X = 7Y - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 6X - 5Y = 2 \\ & 7X - 4Y = 6 \end{aligned}$$

Método de determinantes

El método de determinantes consiste en encontrar los valores de X e Y, aplicando la regla de Crammer, tanto en el valor de X y de Y, de la siguiente manera:

Procedimiento: Teniendo un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas, se plantea de la siguiente manera:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

1. Se forman las determinantes en el sistema (D2), con los coeficientes de “x” y de “y”, de las 2 ecuaciones planteadas; ordenadas en la matriz cuadrada que es de 2 por 2; donde “a” es el coeficiente de la variable “x” y “b” es el coeficiente de la variable “y”.

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = (a1) * (b2) - (a2) * (b1)$$

Ejemplo:

$$5x + 4y = -14$$

$$6x - 5y = -7$$

El resultado que se obtiene de los productos indicados, se transforma en el denominador del determinante de “x” y de “y”, es decir, de las dos variables.

2. Para encontrar o determinar el valor de “x”, se forma una fracción cuyo numerador será el determinante que se forma sustituyendo en el determinante del sistema de la columna de los coeficientes de “x”, multiplicando por la columna de los términos independientes de ambas ecuaciones (c); y, cuyo denominador será el determinante del sistema.

$$\frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 & c2 & b2 \\ a1 & b1 & a2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 & a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{(c1)(b2) - (c2)(b1)}{(a1)(b2) - (a2)(b1)}$$

Ejemplo:

$$\{5X + 4Y = -14 \quad 6X - 5Y = -7\}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -14 & 4 & -7 & -5 \\ 5 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 & 4 \\ 5 & -5 & -6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-14)(-5) - (-7)(4)}{(5)(-5) - (-6)(4)} = \frac{70+28}{-25-24} = \frac{98}{-49} = -2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -14 & 6 & -7 \\ 5 & -14 & 6 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -14 & 6 & -7 \\ 5 & -14 & 6 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{(5)(-7) - (-6)(-14)}{(5)(-5) - (-6)(4)} = \frac{-35+84}{-25-24} = \frac{49}{-49} = -1$$

Taller 15

Resolver por el método de determinantes los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 8x - 5 = 7y - 9 \\ & 6x = 3y + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x + 6 = 3(1 - 2y) \\ & x + 6 = 3(1 - 2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad 5x - 7 &= 2y - 9 \\ 4x &= 3y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 32x - 25y &= 13 \\ 16x + 15y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad 2X - 7 &= 3Y - 12 \\ 5X &= 7Y - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad 6X - 5Y &= 2 \\ 7X - 4Y &= 6 \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones de razonamiento y ecuaciones simples

1. Los rectángulos constan de cuatro lados: dos lados iguales (base) y otros dos iguales (altura).

El perímetro es igual a la sumatoria de todos sus lados.

x = es el lado mayor

y = es el lado menor

El perímetro es 24:

$$2x + 2y = 24$$

El lado mayor tiene la medida tres veces que el menor:

$$x = 3y$$

Y tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2X + 2Y = 24 \\ x = 3y \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución

$$2x + 2y = 24$$

$$2(3y) + 2y = 24$$

$$6y + 2y = 24$$

$$8y = 24$$

$$y = 3$$

$$X = 3(3)$$

$$x = 9$$

2. Investigar el numérico de animales que hay en una granja sabiendo que: la suma de patos y gatos es 132 y la de sus patas es 402.

Hay que considerar que cada pato tiene 2 patas y cada gato, 4.

p = número de patos

g = número de gatos

La suma total de los animales es 132:

$$p + g = 132$$

La suma de las patas es 402 (dos patas por pato y cuatro por gato):

$$2p + 4g = 402$$

$$\begin{cases} p + g = 132 \\ 2p + 4g = 402 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2p - 2g = -264 \\ 2p + 4g = 402 \end{cases}$$

$$-2p - 2g = -264$$

$$2p + 4g = 402$$

$$g = 69, \text{ REEMPLAZO EN EC. 2}$$

$$2p + 4g = 402$$

$$0 + 2g = 138$$

$$2p + 4(69) = 402$$

$$2p = 402 - 276$$

$$2p = 126$$

$$g = 69$$

$$p = 63$$

Hay 63 patos y 69 gatos.

Taller 16

- Si dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?
- El doble de la suma de dos números es 32 y su diferencia es 0. ¿Qué números son?
- La suma de dos números es 12 y la mitad de uno de ellos el doble del otro.
¿Qué números son?
- Poseemos dos números cuya suma es 0 y si a uno de ellos le sumamos 123 obtenemos el doble del otro. ¿Qué números son?
- Hallar un número de dos cifras que cumple:
La segunda cifra es el doble de la primera
La suma de las cifras es 12.
- María tiene el triple de edad que su hijo Pedro. Dentro de 15 años, la edad de María será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Pedro tiene su madre?

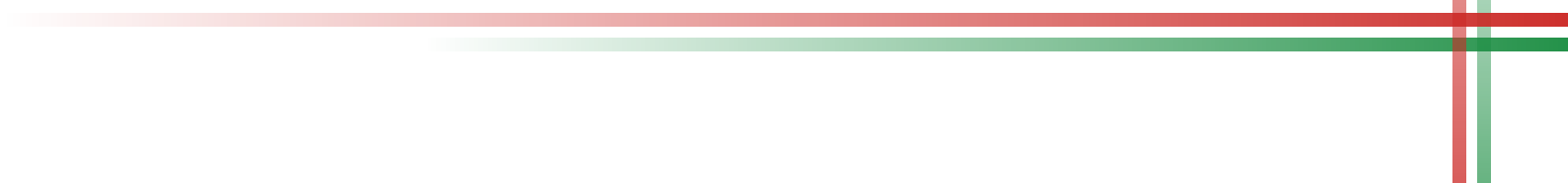
7. Hemos comprado 3 bolas de cristal y 2 de acero por 1,45€ y, ayer, 2 de cristal y 5 de acero por 1,7€. Determinar el precio de una bola de cristal y de una de acero.
8. Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 20 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.
9. El costo total de 5 libros de lectura y 4 lápices es de USD32.00; el costo total de otros 6 libros de lectura iguales y 3 lápices es de USD33.00. Hallar el costo de cada artículo.
10. Averiguar el número de animales de una granja sabiendo que:
La suma de patos y gatos es 132 y la de sus patas es 402.
Se necesitan 300kg al día para alimentar a las gallinas y a los gallos. Se tiene un gallo por cada 6 gallinas y se sabe que una gallina come una media de 500g, el doble que un gallo.
Se piensa que la sexta parte de los patos escapan al comedero de las vacas, lo que supone el triple de animales en dicho comedero.



<https://n9.cl/cmfn>

CAPÍTULO II

Geometría plana



En el proceso matemático consciente o inconscientemente se trabaja con números con decimales de carácter casi constante; a manera de ejemplificación podríamos citar que, cuando vamos a llenar el tanque de gasolina al auto, por la compra de un saco en un almacén de ropa o cuando se paga los impuestos del predio, es muy normal que los precios estén marcados con decimales; el redondeo es una operación por medio de la cual se modifica un número o dígito hasta que este alcance un valor determinado de acuerdo a varias normas; donde se puede elegir por ampliar el valor de la cifra, o de disminuir a otro diferente; esta operación es frecuente en situaciones o contextos en la que se emplean los valores numéricos.

La conversión de unidades en los diferentes sistemas y en consideración de las magnitudes proporcionales e inversamente proporcionales, es decir, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor de la segunda aumenta o disminuye en la misma proporción o viceversa.

La geometría plana o geometría del plano euclídeo, estudia aquellos elementos cuyos puntos están contenidos en un plano euclídeo; la geometría plana es la que estudia los cuerpos geométricos desde dos dimensiones, largo y ancho (Kindle, 2007).

La geometría del espacio o conocida como geometría espacial es la descendencia de la geometría euclidiana, la cual se encomienda al estudio de las figuras geométricas voluminosas que ocupan un lugar en el espacio; estudia las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional: largo, ancho y profundidad.

El perímetro, área y el volumen son bloques de construcción matemática fundamentales para las funciones superiores matemáticas, incluyendo a la geometría y el cálculo. El perímetro es la distancia existente alrededor de un objeto, el área es la cantidad de espacio que hay dentro de una figura de dos dimensiones, y el volumen es la cantidad de espacio dentro de un objeto tridimensional.

Redondeo de números

Redondeo de datos

En Estadística no se desea obtener una precisión absoluta, sino tener una aproximación o redondeo de ciertos valores, para este redondeo o aproxima-

ción se utiliza el Sistema convencional, el mismo que determina los siguientes casos.

Caso I

Si el último dígito es menor que 5 se lo suprime y la cantidad resultante es la misma.

Ejemplos:

7,235	redondeado a la décima es	7,2
10,284	redondeado a la centésima es	10,28
137,4	aproximado a la unidad es	137
4230	aproximado a la centena es	4200

Caso II

Si el último dígito es mayor o igual que 5 se lo suprime, y el dígito anterior es redondeado a la cifra inmediatamente superior.

Ejemplos:

8,277	redondeado a la centésima es	8,28
112,38	redondeado a la décima es	112,4
14,375	redondeado a la centésima es	14,38
7350	redondeado a la centena es	7400

Taller 17

1. Aplicando el Sistema Convencional redondear las siguientes cantidades:

5,30	redondear a la décima	_____
8,374	redondear a la centésima	_____

249,3	redondear a la unidad	_____
6550	redondear a la centena	_____
5,247	redondear a la centésima	_____
324,48	redondear a la décima	_____
4270	redondear a la centena	_____
74,043	redondear a un decimal	_____
7,791	redondear a un decimal	_____
0,328	redondear a dos decimales	_____
0,403	redondear a un decimal	_____
0,813	redondear a la unidad	_____
324,47	redondear a la decena	_____
5,56 <u>5</u>	redondear al dígito subrayado	_____
42, <u>6</u> 0	redondear al dígito subrayado	_____
895, <u>6</u>	redondear al dígito subrayado	_____
5,44 <u>9</u>	redondear al dígito subrayado	_____

Notación científica

El concepto de potencia de base 10 y exponente entero; sea positivo, negativo o cero, permite la escritura de números considerablemente grandes o pequeños, en una manera más simple y comprensible, llamada escritura con números en Notación Científica.

En notación científica el número escrito tiene la forma: $N \cdot 10^k$

En donde N, es un número mayor que 1 y menor que 10, y k es el exponente positivo o negativo.

Recuerde:

En un número decimal la Cifra Significativa es el primer valor diferente de cero (0) que está después de los ceros decimales.

Ejemplo:

0,000072 El siete (7) es la primera cifra significativa

0,00000000823 El ocho (8) es la primera cifra significativa

Los números que son mayores a 1, se recorre la coma decimal hacia la izquierda hasta antes de la primera cifra significativa, para obtener un número entre 1 y 10. Después se multiplica por la potencia de base 10, cuyo exponente es positivo e igual al número de espacios recorridos por la coma decimal.

Ejemplos:

Escritura Decimal	Notación Científica
82.300 	$8,2 \times 10^4$
6.000.000.000 	6×10^9

Para los números menores que 1, se recorre la coma decimal hacia la derecha, hasta después de la primera cifra significativa. Después se multiplica por la potencia con base 10, cuyo exponente es negativo e igual al número de espacios recorridos por la coma decimal.

Escritura Decimal	Notación Científica
0,000000732 	$7,32 \times 10^{-7}$
0,0000000000005 	5×10^{-12}

Taller 18

1. Encuentra el resultado sin realizar las operaciones:

- $2,87 \times 10^3$ _____
- $5,9 \times 10^4$ _____
- $3,21 \times 10^6$ _____
- $6,5 \times 10^{-3}$ _____
- $10,2 \times 10^{-5}$ _____

2. Expresa los números en notación científica:

- a. 5200000 _____
- b. 174300000 _____
- c. 2400000000 _____
- d. 621300000 _____
- e. 1580000000 _____

Reducción de medidas de longitud y superficie

Una medida es la comparación de dos cantidades de una misma magnitud, donde una de ellas se toma arbitrariamente como unidad.

Magnitudes

Magnitud es todo lo que se puede medir.

Las magnitudes están clasificadas de acuerdo con su utilidad y unidades de medida, entre las principales magnitudes podemos anotar las siguientes:

Magnitud	Unidad Principal	Símbolo	Otras unidades de medida
Longitud (distancias)	metro	M	mm, cm, Dm. Hm, Km, plg, pies, millas
Masa (pesos)	Kilogramo	Kg	Oz, lb, Tm, quintales, @, gr.
Tiempo	Segundo	S	Min, horas, días, años, lustros, segundos
Volumen (capacidad)	Metro cúbico	m ³	cm ³ , mm ³ , litro.

Medidas de Longitud

MÚLTIPLOS	SIMBOLOGÍA	EQUIVALENCIA
Decámetro	Dam	10 m
<Hectómetro	Hm	100m
Kilometro	Km	1000 m
SUBMULTIPLOS	SIMBOLOGÍA	EQUIVALENCIA
Decímetro	Dm	$1 / 10 = (0,1) \text{ m}$
Centímetro	Cm	$1 / 100 = (0,01) \text{ m}$
Milímetro	Mm	$1 / 1000 = (0,001) \text{ m}$

Medidas de volumen

Sistema	Símbolo	Nombre	Equivalencia
Sistema métrico decimal	ℓ	Litro	$= 1 \text{ dm}^3 = 0.001 \text{ m}^3$ $= 1,000 \text{ cm}^3$
	ml	Mililitro	$= 0.001 \text{ ℓ}$
	mm ³	Milímetro cúbico	$= 0.001 \text{ cm}^3$
	cm ³	Centímetro cúbico	$= 1,000 \text{ mm}^3$
	dm ³	Decímetro cúbico	$= 1,000 \text{ cm}^3 = 1,000,000 \text{ mm}^3$
	m ³	Metro cúbico	$= 1,000 \text{ ℓ}$
Sistema inglés	in ³	Pulgada cúbica	$= 16.387 \text{ cm}^3$
	ft ³	Pie cúbico	$= 0.028,3 \text{ m}^3$
	gal	Galón	$= 3.785 \text{ ℓ}$

Factores de conversión

Son equivalencias que permiten transformar a otras unidades de medida dentro de la misma magnitud.

Equivalencias:

LONGITUD	SUPERFICIE
1m = 100cm	1m ² = 10000cm ²
1m = 1000mm	1m ² = 1000000mm ²
1cm = 10mm	1cm ² = 100mm ²
1 km = 1000m	1 km ² = 1000000m ²

Reducción de unidades

Para transformar de una unidad de medida a otra se adopta el siguiente procedimiento:

Se escribe primero la magnitud a transformar, luego se multiplica por su respectiva equivalencia escrita en forma de fracción, esto permite simplificar las unidades, finalmente se resuelve el producto de fracciones. Cuando no existe una equivalencia directa se debe aplicar otra equivalencia.

Ejercicios:

1. Reducir 2 Tm a lb.

Procedimiento:

Como no existe una equivalencia directa entre Tm y libras utilizamos otras equivalencias conocidas.

$$2\text{Tm} \cdot \frac{1000\text{kg}}{1\text{Tm}} \cdot \frac{2,2\text{lb}}{1\text{kg}} = 2 \times 1000 \times 2,2\text{lb} = 4400\text{lb}$$

2. Reducir 3850 segundos a días

Procedimiento:

$$3850\text{s} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} \cdot \frac{1\text{h}}{60\text{min}} \cdot \frac{1\text{día}}{24\text{h}} = \frac{3850\text{ días}}{60 \times 60 \times 24} = \frac{3850\text{ días}}{86400} = 0,04\text{días}$$

Taller 19

Realice las siguientes conversiones:

- | | |
|-----------------|---|
| a. 15 cm a dam | e. 4285,3 cm ² a m ² |
| b. 8 km a m | f. 45 mm ² a m ² |
| c. 3,75 cm a dm | g. 37,72 dam ² a km ² |
| d. 0,25 dm a mm | h. 105 hm ² a cm ² |

Regla de tres simple y compuesta

Las magnitudes proporcionales pueden ser directamente o inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales

Son directamente proporcionales si la razón entre dos cantidades de la primera es igual a la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda.

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si y sólo si existe una correspondencia biunívoca (a cada cantidad de una de ellas le corresponde una sola de la otra y recíprocamente y si a una de ellas se la multiplica o se divide por un número correspondiente queda multiplicado o dividido por dicho número).

Ejemplo:

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{tiempo trabajado}}{\text{salario cobrado}} = \frac{1h}{1500} = \frac{2h}{3000} = \frac{3h}{4500}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{peso en kg}}{\text{precio}} = \frac{1kg}{70} = \frac{2kg}{140} = \frac{3kg}{210}$$

$A+ \Rightarrow +$	Más kg de mercancía	Mayor precio
$A- \Rightarrow -$	Menos kg de mercancía	Menor precio

Por lo tanto, las magnitudes directamente proporcionales van de + a + y de - a -

Magnitudes inversamente proporcionales

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales la razón de las cantidades de la primera es igual a la recíproca de la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda.

Ejemplo: El tiempo empleado en un desplazamiento será menor si llevamos mayor velocidad y será mayor el tiempo si llevamos menor velocidad, es decir, en esta proporcionalidad inversa hay disparidad del signo.

$A+ \Rightarrow -$	mayor velocidad	Menor tiempo
$A- \Rightarrow +$	menor velocidad	Mayor tiempo

Por lo tanto, las magnitudes inversamente proporcionales van de + a - y de - a +

Ejemplo: Para recorrer 100 km. Utilizaremos:

Velocidad x	10 km/h	20km/h	50km/h
Tiempo y	10h	5	2

Si observamos el cuadro anterior veremos que si multiplicamos los pares de números x,y correspondientes obtenemos un producto constante igual a 100 o sea $x.y = 100$

Regla de tres

Es una operación que tiene su objetivo es encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen las tres.

En la regla de tres existen la simple o compuesta, directa o inversa.

La regla de tres simple se obtiene cuando intervienen solamente 2 magnitudes.

La regla de tres compuesta se obtiene cuando intervienen 3 o más magnitudes.

Regla de tres simple directa

Es un método que sirve para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes que son directamente proporcionales.

Supuestos y pregunta:

En la regla de tres, el supuesto está formado por los datos del problema que son conocidos y la pregunta son los datos del problema que contiene la incógnita.

Valores principales: Están constituidos por 2 o más términos homogéneos y conocidos uno supuesto y otro es de la pregunta.

Valores relativos: Lo constituyen por dos términos homogéneos uno conocido el supuesto y otro desconocido es la pregunta

Ejemplo: Si, 4 gorras cuestan 8 USD, ¿cuánto costará 12 gorras?

	Cantidades Principales	Cantidades relativas
Supuesto →	2 gorras	USD8
Pregunta →	12 gorras	X

Primer método. (Por las proporciones)

$$\frac{2}{8} = \frac{12}{x}$$

$$X = \frac{8 \times 12}{2} = USD48$$

Segundo método. (Directo)

Supuesto →	2 gorras	USD8
Pregunta →	12 gorras	X

$$X = \frac{12 \times 8}{2} = USD48$$

Regla de tres simple inversa

Regla de tres inversa es cuando tienen dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo: 10 obreros tardan 30 días para hacer una obra.

¿Cuántos obreros se necesitan para hacerla en 24 días?

30 días-----	10 obreros
24 días -----	X

Primer método. (Por las proporciones)

$$\frac{30}{24} = \frac{x}{10}$$

$$X = \frac{30 \times 10}{24} = 13 \text{ obreros}$$

Existiendo magnitudes inversamente proporcionales igualamos a la 1ª razón con el inverso de la 2ª razón.

Segundo método (Directo)

Se multiplica a la cantidad principal del supuesto por la cantidad relativa del supuesto y dividimos para la cantidad principal de la pregunta.

	Principales	Relativas
Supuesto	30 días ▼	10 obreros
Pregunta	24 días -----	X

$$X = \frac{30 \times 10}{24} = 13 \text{ obreros}$$

Regla de tres compuesta

En la regla de tres compuesta existen más de dos magnitudes en el planteamiento y en la resolución y al comparar de dos en dos son directamente proporcionales.

Regla de tres compuesta directa

Es compuesta directa cuando todas sus magnitudes están directamente proporcionales

Esquema general:

Al plantear un problema de regla de tres compuesta directa, se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} D & & D & & \\ a \leftrightarrow & b & \leftrightarrow & c & \\ d \leftrightarrow e & \leftrightarrow & x & & \end{array}$$

Cuando se reduce el problema a regla de tres simple, se obtiene:

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{d \cdot e \cdot c}{a \cdot b}$$

La multiplicación entre la razón de las cantidades de la primera magnitud y la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda magnitud, da como resultado a la razón entre las dos cantidades de la tercera magnitud.

Ejemplo:

10 canecas de 15 galones cada una cuestan 225.000 dólares, cuánto costarán 8 canecas de 55 galones de combustible si el precio por galón es igual.

Planteo

Canecas	Galones	Dólares
10	15	225.000
8	55	x

Solución

Primero, se analiza las canecas y el precio.

10 canecas cuestan 225000 menos (8) canecas costarán menos por lo tanto la magnitud es directa.

Segundo, se analizan los galones y el precio. 15 galones cuestan 225.000 (55), más galones costarán más dinero.

La regla de tres es directa, en consecuencia, la regla de tres es compuesta y directamente proporcional.

Canecas		Galones	Dólares
10		15	225.000
8	55		x

$$X = \frac{8 \times 55 \times 225.000}{10 \times 15} = 660.000$$

Regla General:

$$\begin{array}{ccc} D & & D \\ a \leftrightarrow & b \leftrightarrow & c \\ d \leftrightarrow & e \leftrightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{d \cdot e \cdot c}{a \cdot b}$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{10}{8} \cdot \frac{15}{55} &= \frac{225.000}{x} \\ X &= \frac{8 \times 55 \times 225.000}{10 \times 15} = 660.000 \end{aligned}$$

Regla de tres inversa

La regla de tres inversa se aplica si todas sus magnitudes son inversamente proporcionales, si la relación existente entre las magnitudes es inversa (cuando aumenta una magnitud disminuye la otra) se aplica la regla de tres simple inversa.

Esquema general: Para plantear un problema de regla de tres compuesta inversa, es en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} I & & I \\ a \leftrightarrow & b \leftrightarrow & c \\ d \leftrightarrow & e \leftrightarrow & x \end{array}$$

Al momento de reducir el problema a una regla de tres simple, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{a} \cdot \frac{e}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$$

La inversa de la razón de ambas cantidades de la magnitud primera por la inversa de la razón de las cantidades de la segunda magnitud, es igual a la razón de las dos cantidades de la tercera magnitud.

Ejemplo:

Un grupo de 45 viajeros tienen víveres para 40 días a una ración de 900 gramos por día. Cuál debe ser la ración diaria. ¿Si al iniciar su viaje se incrementa el grupo en 5 personas y el tiempo se prolonga a 2 meses?

Planteo

Personas	Días	Gramos
45	40	900
50	60	x

Análisis

1. Se analizan las magnitudes: personas y gramos, cada uno 45 personas tienen 900 gramos c/r si son más personas tendrán menos ración, por lo tanto, la magnitud es inversamente proporcional.
2. Se analizan las magnitudes días y gramos. Para 40 días tienen 900 gramos de ración si son más días alcanzarán a menos gramos de ración.

La magnitud es inversamente proporcional. Por lo tanto, es una regla de tres compuestas inversas.

Solución

Personas	Días	Gramos
45	40	900
50	60	x

$$X = \frac{45 \times 40 \times 900}{50 \times 60} = 540 \text{ gramos}$$

Cada viajero recibe 540 gramos de ración.

Regla general:

$$\begin{array}{ccc}
 I & & I \\
 a \leftrightarrow & b \leftrightarrow & c \\
 d \leftrightarrow & e \leftrightarrow & x \\
 \frac{d}{a} \cdot \frac{e}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}
 \end{array}$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{50}{45} \cdot \frac{60}{40} = \frac{900}{x}$$

$$X = \frac{45 \times 40 \times 900}{50 \times 60} = 540 \text{ gramos}$$

Taller 20

- Si un comerciante vende el kg. de municiones a USD 2,50 y al final de un día de labor su venta total fue de USD 225,00, ¿Cuántos kg de municiones vendió?
- Un soldado va a comprar 5 piñas a una frutería. Si el kilogramo vale USD 1,50 y él dispone de USD 12,00. ¿Cuántos kilogramos pudo comprar?
- En 40 días, 25 aspirantes realizaron una obra. Si hubiese sido necesario hacer la obra en 25 días, ¿Cuántos aspirantes hubiesen hecho falta?
- Si 100 kg. de pólvora cuestan USD 50,00 ¿Cuántos costarán 60 kg??
- Un sargento por 6 días de trabajo recibió USD 150,00. ¿Cuánto hubiese recibido por 10 días, manteniendo el mismo ritmo de trabajo?
- Un grupo de aspirantes compran 5 manzanas en USD 1,25. ¿Cuánto costarán 9 manzanas?
- Para hacer un muro, 6 conscriptos han empleado 15 días. Si hubiesen trabajado 2 conscriptos, ¿Cuántos días se hubiesen demorado?
- 30 conscriptos construyen en 2 semanas un galpón para pollos. ¿Cuántos demorarán 15 conscriptos en construir un galpón igual?
- Un helicóptero de las Fuerzas Armadas recorre 70 km. en 20 minutos. ¿Cuántos km recorre en 60 minutos a la misma velocidad?
- 5 conscriptos levantan una cerca en 10 días, ¿Cuántos días necesitaran 10 conscriptos para hacer el mismo trabajo?
- 8 alumnos han cavado en 20 días una zanja de 50 metros de largo, 4 mt de ancho y 2 mt de profundidad. ¿En cuánto tiempo hubieran cavado la zanja 6 Aspirantes menos?

- l. Un soldado recorrió 250 km en 25 días caminando 10 horas diarias. ¿Cuántos km hubiese recorrido en 15 días caminando 8 horas diarias?
- m. Un artesano moldeó 5 piezas de decoración en 10 horas de labor al día siguiente su ayudante trabajo con él al mismo ritmo, pero sólo durante 8 horas ¿Cuántas piezas moldearon?
- n. Dos grifos arrojan 5000 litros de agua en 2 horas. ¿Cuántos litros arrojaran 5 grifos en una hora y a la misma presión?
- o. La cuadrilla de obreros emplea 14 días trabajando 8 horas diarias en realizar cierta obra. Si hubiéramos trabajado una hora menos el día, ¿En cuántos días habrían terminado la obra?

Tanto por ciento

Se conoce como tanto por ciento de un número a una o varias de las 100 partes iguales en que se logra dividir dicho número o cantidad, es decir uno u varios centésimos de un número.

El tanto por ciento está representado por el signo %

Así:

$$5 \% = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$16 \% = \frac{16}{100} = 0.16$$

Ejemplo:

El 5 % de 80, o 5/100 de 80 equivale a 5 centésimas partes de 80, es decir que 80 se divide en 100 partes iguales y de ellos se toman 5 partes.

El 15 % de 200 significa que el 200 se divide en cien partes iguales y de ellas se toman 15.

Cálculo de porcentajes

1. Encontrar un porcentaje de un número.

Encontrar el 7 % de 45

45-----100 %

X-----7%

$X = 3.15$

2. Encontrar un número cuando se conoce un % de él: De qué número es 46 el 23 %?

$$\begin{array}{rcl} 46 & \text{-----} & 23 \% \\ X & \text{-----} & 100\% \end{array} X = 196$$

3. ¿Dado dos números, calcular que tanto por ciento es uno del otro?

¿Qué porcentaje de 8600 es 2940?

$$\begin{array}{rcl} 8600 & \text{-----} & 100\% \\ 2940 & \text{-----} & X \end{array}$$

X = 34%

2940 es el 34 % de 8600

Problemas para resolución:

Juana gana 900 USD, si gastó el 20 % en alimentación y el 15 % en arriendo, cuánto dinero le sobra?

$$\begin{array}{rcl} 900 \text{ USD} & \text{-----} & 100\% \\ X & \text{-----} & 20\% \end{array}$$

X = 180 USD (alimentación)

900 - 180 = 720 USD

$$\begin{array}{rcl} 720 \text{ USD} & \text{-----} & 100\% \\ X & \text{-----} & 15 \% \end{array}$$

X = 108 USD (arriendo)

720 - 108 = 612 USD que le sobra.

Taller 21

1. Hallar:

El 15 % de 720

El 74 % de 3540

El $\frac{1}{2}$ % de 25

2. De qué número es:

35 el 5 %

155 el 46 %

850 el 72 %

3. Qué porcentaje de:

860 es 129

1950 es 156

58 es 3

4. ¿Qué tanto por ciento es 45 de 150?

5. Un soldado compró fusiles por un valor de USD 10450,00; pero se vio en la obligación de venderla por USD 7800,00. ¿Qué porcentaje perdió?

6. En una librería se rebajó USD 0,75 a una edición popular, de una novela de aventuras. Si el precio original era de USD 4,85; ¿Qué porcentaje se le rebajo al libro?

7. Un oficial del Ejército vendió un terreno en USD 8890,00. Si esta cantidad representa el precio de compra más el 23% de ganancia, ¿Cuánto le costó el terreno?

8. En un evento aéreo realizado en la base de Manta se presentaron 600 pilotos. De ellos el 25% correspondían a América Latina, 40% a Europa, el 30% a Asia y el resto a África. ¿Qué cantidad de pilotos se presentaron por zona?

9. Luis tiene que pagar 900 USD. Si se le rebaja el 5 % de la deuda, ¿cuánto debe cancelar?

10. De una finca de 50 caballerías se vende el 16% y se alquila el 14%. ¿Cuántas caballerías le quedan?

Definiciones básicas de geometría

Relaciones entre segmentos

Paralelos, si no se cortan nunca, por mucho que los prolonguemos no tienen ningún punto en común. Dos segmentos paralelos siempre tienen la misma dirección.



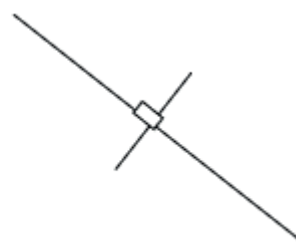
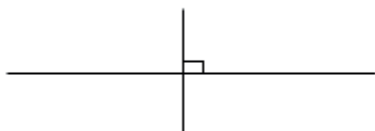
Coincidentes, si además de ser paralelos tienen todos sus puntos en común; se trata del mismo segmento.

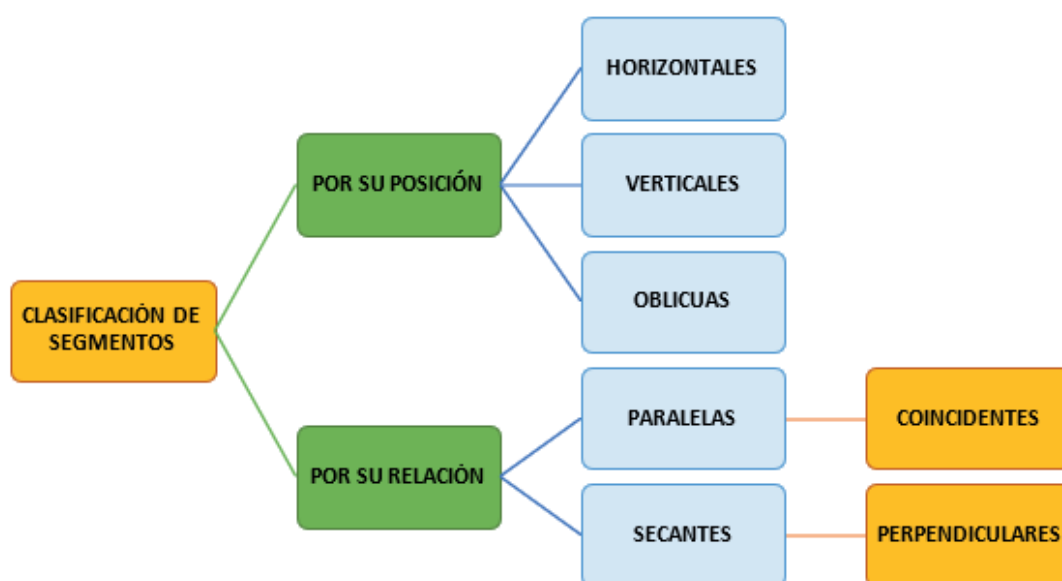


Son secantes, si se cortan en un punto. Dos segmentos secantes tienen diferentes direcciones.



Perpendiculares, si además de ser secantes, se cortan formando cuatro ángulos rectos (de 90°). Dos segmentos perpendiculares tienen diferentes direcciones.





Ángulos: elementos y clasificación

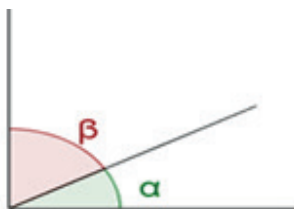
Clasificación de ángulos

<u>Nombre</u>	<u>Definición</u>	<u>Figura</u>
Ángulo recto	Miden 90°	
Ángulo agudo	Miden menos de 90°	
Ángulo obtuso	Miden más de 90°	
Ángulo llano	Miden 180°	
Ángulo completo	Miden 360°	

Ángulos: elementos y clasificación

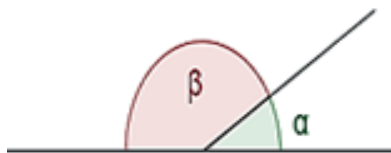
Ángulos según su suma:

Ángulos complementarios: Son aquellos que la suma da 90° . Complemento de un ángulo es lo que a un ángulo le falta para completar los 90°



Ángulos suplementarios: Son aquellos que al sumarlos dan 180° .

Complemento de un ángulo es lo que le falta al ángulo para completar 180° .

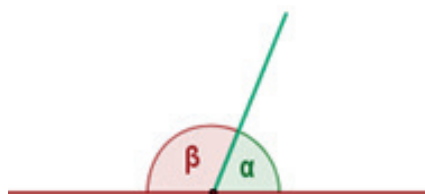


Ángulos según su posición:

Ángulos consecutivos: Son aquellos ángulos que tienen el vértice y un lado común.



Ángulos adyacentes: Son aquellos que tienen un lado en común y el otro lado sobre una misma recta. Dos ángulos adyacentes serán siempre suplementarios.

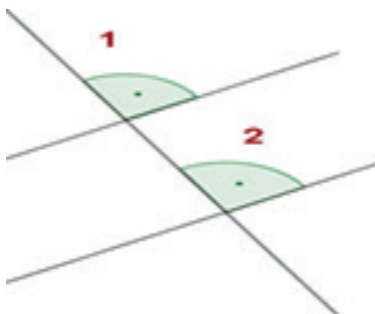


Ángulos opuestos por el vértice: Son opuestos por el vértice, cuando al prolongar los lados de un ángulo forman los lados del otro ángulo.

Los ángulos 1 y 3 son iguales y los ángulos 2 y 4 son iguales.

Ángulos entre paralelas y una recta transversal

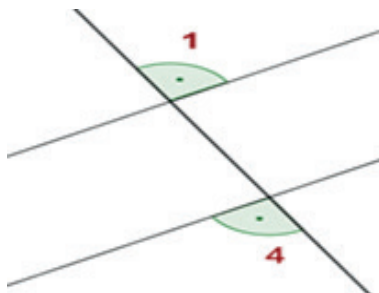
Ángulos correspondientes: Los ángulos 1 y 2 son iguales.



Ángulos alternos internos: Los ángulos 2 y 3 son iguales



Ángulos alternos internos: Los ángulos 1 y 4 son iguales.



Taller 22

1. Dibuje los siguientes ángulos:

- Agudo
- Obtuso
- Recto
- Suplementarios

e. Complementarios

2. Complete:

2.1. Los segmentos, por su posición se clasifican en:

a. _____ b. _____ c. _____

2.2. Los ángulos, por su posición se clasifican en:

a. _____ b. _____ c. _____

2.3. Los segmentos, por su relación están clasificados en:

a. _____ b. _____

c. _____ d. _____

3. Responda a cada pregunta marcando una X o pintando el círculo, según usted considere correcto, lo siguiente:

3.1 Un ángulo agudo puede medir

- Menos de 90°
- Más de 90°
- Más de 180°

3.2 Un ángulo cuya medida es 90° se llama...

- Llano
- Recto

3.3 Una propiedad de los ángulos adyacentes es que también son:

- Suplementarios
- Complementarios
- Opuestos por el vértice

3.4 Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento

- 60°
- 45°
- 30°
- Ninguno

3.5 Las medidas de los ángulos opuestos por el vértice son:

- Complementarias
- Suplementarias
- Iguales

3.6 Dos ángulos están en relación 3:4 y su suma vale 70°

- 20° y 50°
- 30° y 40°

3.7 El complemento de 30° es

- 60°
- 150°

3.8 El suplemento de 40° es

- 140°
- 60°

3.9 Un ángulo llano mide:

- 360°
- 180°

3.10 Un ángulo obtuso tiene:

- Entre 90° y 180°
- 90°
- Entre 0° y 90°
- 180°
- Más de 180°

3.11 Los ángulos opuestos por el vértice son:

- Complementarios
- Suplementarios
- Iguales
- Adyacentes

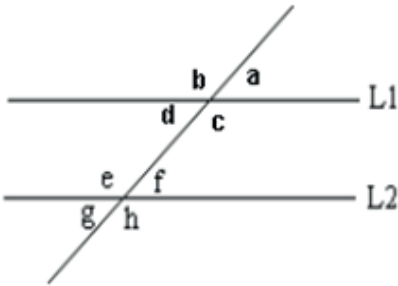
3.12 Un ángulo exterior de un triángulo equilátero mide:

- 60°
- 120°
- 180°
- 360°
- No se puede determinar

3.13 El complemento del suplemento de 130° es:

- 40°
- 50°
- 130°
- 180°

4. En la columna del lado izquierdo escriba las letras que corresponde a cada uno de los ángulos:

	$L1 \parallel L2$
--	-------------------

	Ángulos correspondientes
	Ángulos alternos internos
	Ángulos alternos externos
	Ángulos opuestos por el vértice

Triángulos: elementos y clasificación

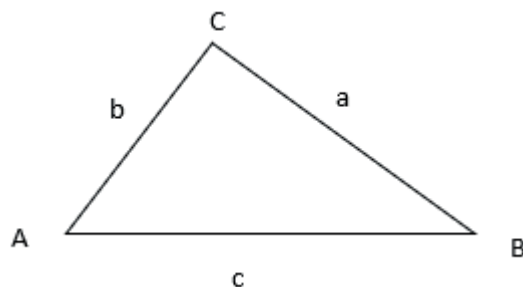
Concepto

Es un polígono formado por tres lados, es decir, una parte de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan lados, y los extremos de los lados, vértices.

Elementos primarios de un triángulo

Vértices: Se trata de los puntos de inicio de los segmentos, y se les nombra con letras mayúsculas del abecedario. A, B, C, Z.

Lados: Se llaman así a cada una de las rectas que unen los vértices de un triángulo, delimitado la figura de adentro hacia afuera.



Ángulos interiores: Es el ángulo que se forma por dos lados del polígono que comparte un vértice. En un polígono regular, todos los ángulos interiores son iguales.

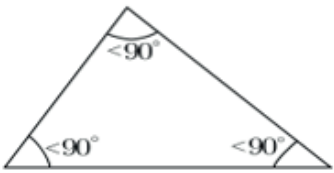
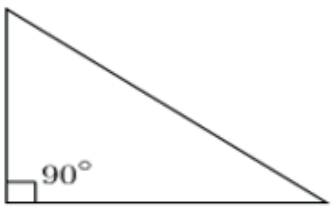
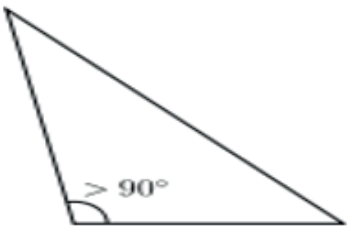
Ángulos exteriores: Es un ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro hacia la región exterior.

Clasificación de los triángulos

Por la longitud de sus lados se clasifican en:

	Equilátero Cuando sus tres <u>ángulos</u> internos miden 60 <u>grados</u>. Es el único triángulo regular.
	Isósceles Son los triángulos donde 2 de sus lados miden lo mismo.
	Escaleno Cuando todos sus lados tienen longitudes diferentes. En un triángulo escaleno no hay ángulos con la misma medida.

Por la amplitud de sus ángulos: Según la medida de sus ángulos, también encontramos 3 tipos de triángulos. Ellos son:

	Acutángulo Si sus tres ángulos son menores a 90°; el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.
	Rectángulo Tiene un ángulo recto de (90°). A los dos lados que forman el ángulo recto se conoce como catetos y al otro lado es la hipotenusa.
	Obtusángulo Cuando uno de sus ángulos interiores es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos son menores de 90°.

Taller 23

1. Dibuja los siguientes triángulos:

- Rectángulo
- Isósceles
- Equilátero
- Escaleno

2. Marca con una x la alternativa que consideres correcta.

Un triángulo equilátero tiene:

- Sólo dos lados iguales
- Sus tres ángulos iguales

- Sus tres lados desiguales

Un triángulo equilátero es también un triángulo:

- Escaleno
- Acutángulo
- Obtusángulo
- Rectángulo

3. Marca con una x la alternativa que consideres correcta.

Un triángulo acutángulo es el que tiene:

- Un ángulo recto
- Un ángulo obtuso
- Su ángulo entre 90° y 180°
- Sus tres ángulos agudos
- Sus ángulos menores de 60°

Señale tres clasificaciones de triángulos por sus lados:

- Equilátero
- Rectángulos
- Externos
- Isósceles
- Equiángulos
- Escaleno

Cuerpos geométricos

Históricamente, la geometría es una de las ciencias más antiguas, fue aplicada por varias civilizaciones, como los egipcios y los griegos, para la construcción de diferentes edificaciones. En la actualidad la percepción y visualización de los espacios son base para el estudio de diferentes carreras como la Ingeniería, la Arquitectura y otras más.

Según (Martínez, 2023), la geometría se encarga de estudiar las medidas, formas y proporciones espaciales de las figuras, que se definen por una cantidad limitada de puntos, rectas y planos. Estas formas se conocen por cuerpos geométricos.

A continuación, se analizarán algunas formas geométricas de las cuales son importantes como parte de las matemáticas:

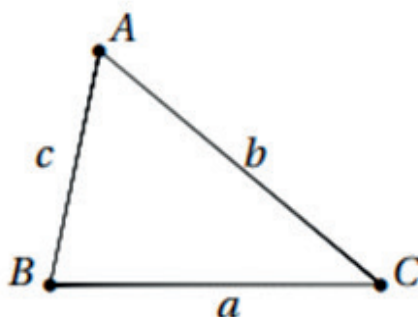
Perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos

Perímetros y áreas de polígono

Triángulo

Se entiende por triángulo a “la región (cerrada) del plano delimitada por tres segmentos que se cortan dos a dos en sus extremos”. (Jara & Ruiz, n.d.) Así mismo, el autor identifica los tres elementos básicos que conforman el triángulo:

- Los vértices. Son los puntos de intersección entre los segmentos, está dada por A, B, C.
- Los lados. Son los segmentos que delimitan al triángulo. Cada uno de los lados tiene una longitud que se mide en la unidad de longitud que se vaya a utilizar. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo se llama perímetro. Está representado por: $a = \underline{BC}$, $b = \underline{AC}$, $c = \underline{AB}$.
- Ángulos. Son identificados por los tres lados del triángulo. Los ángulos pueden ser medidos en grados o en radianes, y son representados de la siguiente forma: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$



Perímetro (P)

Según Jara y Ruiz (sf), el perímetro de un triángulo se define como la suma de las longitudes de sus tres lados. La fórmula para calcularlo es:

$$P=a+b+c$$

Área (A)

El área (A) de un triángulo representa la cantidad de unidades de superficie que contiene. Se multiplica la longitud de la base por la de la altura y dividiendo el resultado entre dos. (Jara y Ruiz, sf)

$$A = \frac{\text{base} * \text{altura}}{2}$$

Ejemplo:

Un triángulo de 180 cm² de superficie mide 30 cm. de altura. Calcular su base.

$$\text{Solución: Puesto que } A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot a}{2} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot A}{a} = \frac{2 \cdot 180}{30} = 12 \text{ cm}$$

También se puede obtener el área del triángulo, es así que, según Constanza, (2018) emplea la denominada fórmula de Herón, la cual permite encontrar el área de un triángulo cualquiera teniendo la medida de sus tres lados. Por lo tanto, en un triángulo de longitudes a, b, c, su área es igual a:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P = b + c + d$$

$$P = 5 + 6 + 8$$

$$P = 19 \text{ centímetros}$$

Se calcula el área:

$$A = \sqrt{19(19-5)(19-6)(19-8)}$$

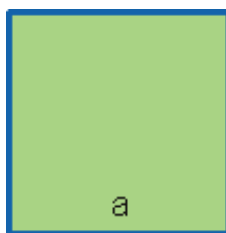
$$A = \sqrt{19(14)(13)(11)}$$

$$A = \sqrt{38038}$$

$$A = 195,03 \text{ Cm}^2$$

Cuadrado

Sánchez (2015) menciona que el cuadrado es una figura geométrica que pertenece a los paralelogramos porque tiene 4 lados, los cuales tienen la misma longitud o dimensión y son paralelos dos a dos. Sus cuatro ángulos internos miden 90° , es decir, son ángulos rectos, por lo que la suma de ellos es de 360° . Las dos diagonales que tienen son iguales y el punto donde se cortan las dos diagonales es el centro de simetría del cuadrado. El cuadrado es un tipo de paralelogramo donde sus 4 lados y 4 ángulos son iguales.



Perímetro:

Para calcular el perímetro de un cuadrado, Superprofe (2022) establece que se obtiene sumando las longitudes de sus cuatro lados; al ser estos iguales, la fórmula del perímetro de un cuadrado de lado l es:

$$P=4 * l$$

En el caso del área, el autor indica que, para calcular el área de un cuadrado, se debe elevar su lado al cuadrado.

$$A = l^2$$

Ejemplo:

Calcular el área de un cuadrado que mide 12 dm de lado.

Solución: Tenemos que

$$A = l^2 \Rightarrow A = 12^2 = 144 \text{ dm}^2$$

Ejemplo:

Calcular el lado de un cuadrado de 225 cm^2 de superficie.

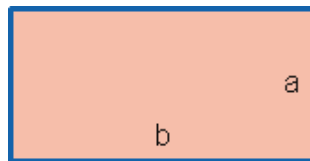
Solución:

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{A} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

Rectángulo

El rectángulo es una figura geométrica plana que se clasifica dentro de los paralelogramos, por tener sus lados opuestos paralelos dos a dos y de igual longitud y además sus cuatro ángulos internos con medida de 90° cada uno; sin embargo, la característica fundamental de este tipo de figura reside en que los lados opuestos entre sí tienen la misma medida, mientras que los consecutivos son de diferente medida (Medina, 2016).

Rectángulo es el paralelogramo que tiene los 4 ángulos iguales (rectos) pero los lados adyacentes no son iguales.



Para el cálculo del perímetro y área de esta figura la autora señala lo siguiente:

Se calcula sumando la medida de todos los lados del rectángulo, sin embargo; como el rectángulo tiene lados iguales dos a dos el perímetro será el doble de la suma de dos de sus lados diferentes.

Se considera la medida de la base y la altura. Sin embargo, al ser los lados paralelos e iguales dos a dos, la base coincide con uno de los lados y la altura corresponde al otro lado de diferente medida. Por lo tanto, esto se define el área de un rectángulo, como el producto de la medida del lado de mayor longitud por el lado de menor longitud.

Ejemplo

Un rectángulo mide 16 cm. En su base y 25 cm. En su diagonal. Calcular el área.

Solución:

Por lo tanto,

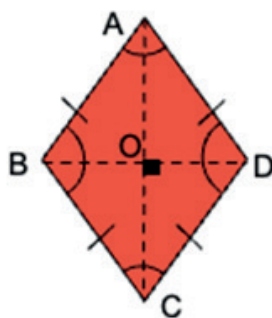
$$A = b * h$$

$$A = 25 \text{ cm} * 16 \text{ cm}$$

$$A = 400 \text{ cm}^2$$

Rombo

Un rombo es una figura geométrica plana clasificada dentro del grupo de los cuadriláteros del tipo paralelogramo, con par de lados paralelos. Se conoce también como un cuadrado inclinado, teniendo ángulos oblicuos, siendo iguales los opuestos entre sí, por consecuencia, dos ángulos son agudos y dos obtusos. Siendo una de sus características que sus diagonales son de diferente longitud, entonces existe una diagonal mayor y una diagonal menor (Medina, 2023).



Para el cálculo del perímetro, la fórmula es la suma de sus lados, por tanto:

$$P = 4 * l$$

El área del rombo está dada por el producto de la diagonal mayor (D) y la diagonal menor (d) dividido para 2. (Orozco Martínez & Cisneros Díaz, 2022).

$$A = (D * d) / 2$$

Ejemplo: Las diagonales de un rombo son 8,3 dm. y 6,5 dm. Calcular el área expresada en cm².

Solución:

$$A = \frac{D \times d}{2} = \frac{8,3 \times 6,5}{2} = 26,975 \text{ dm}^2 = 2.697,50 \text{ cm}^2$$

Romboide

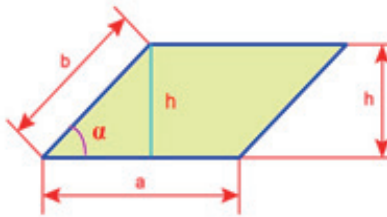


Figura 4. Lados y altura del romboide. Fuente: Wikimedia Commons.

Zapata, (2020) define al romboide como una figura plana de cuatro lados, -un cuadrilátero-, en el que sus lados y sus ángulos internos son distintos dos a dos. Por ello el romboide pertenece al grupo de los paralelogramos oblicuos, por lo que dos agudos son menores de 90° , y dos obtusos mayores de 180° . A continuación, se expone la forma de calcular el perímetro como el área del romboide.

(El área de un romboide es igual al producto de la base (b) por la altura (a))

$$A = b * a$$

El área del romboide representa la cantidad de superficie que ocupa. Dado que es un paralelogramo, su área A se calcula mediante la siguiente fórmula:

Ejemplo:

Calcule el perímetro del romboide si se conoce que uno de sus lados tiene 18,3 mts y el otro 6,50 mts.

Solución:

$$P = 2 (a+b)$$

$$P = 2 (18,3 \text{ mts} + 6,50 \text{ mts})$$

$$P = 49,60 \text{ mts}$$

Ejemplo:

Si un romboide tiene las siguientes dimensiones: base 12 cm y una altura 8 cm. Calcule su área.

Solución:

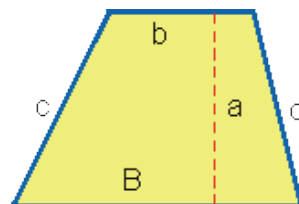
$$A = a \times h$$

$$A = 12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$$

$$A = 96 \text{ cm}^2$$

Trapezio

El trapezio es un cuadrilátero con un par de lados paralelos. El lado paralelo con mayor longitud se lo llama base y al lado paralelo de menor longitud se lo denomina lado menor. La altura del trapezio es la distancia entre las dos bases. (Soto Apolinar, 2011).



El Trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Es posible calcular el perímetro y su área

Para calcular el perímetro de un trapezio, tenemos que sumar la longitud de todos sus lados. Entonces, la fórmula del perímetro de un trapezio es:

En donde, “ a , b , c , d ” representan a las longitudes de los lados del trapezio (Huera Guzmán, 2023b).

Es decir, base menor más base mayor multiplicado por la altura y su producto dividido para dos.

Ejemplo:

Calcula el área de un trapezio cuyas bases miden 10 cm y 20 cm, y cuya altura es de 15 cm.

Solución

$$A = \frac{(b + B)h}{2}$$

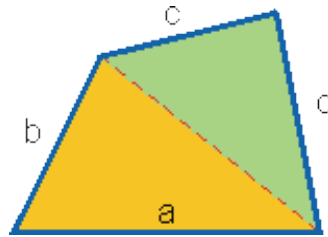
$$A = \frac{(10 \text{ cm} + 20 \text{ cm}) 15 \text{ cm}}{2}$$

$$A = 225 \text{ cm}^2$$

Trapezoide

(Westreicher & López, 2020) mencionan que el trapezoide es un tipo de cuadrilátero que no tiene los lados paralelos. Además, menciona que, para el cálculo del perímetro y área, de este tipo de figura geométrica, son las siguientes:

Los Trapezoides son cuadriláteros que no tienen lados paralelos entre sí. Se puede determinar tanto su perímetro como su área.



Para el trapezoide asimétrico, podemos dividir la figura en dos triángulos (en la imagen inferior serían el triángulo ABC y el triángulo ADC), calcular el área de cada uno y sumar ambos datos.

El perímetro se obtiene sumando las longitudes de todos sus lados, por lo que tenemos que:

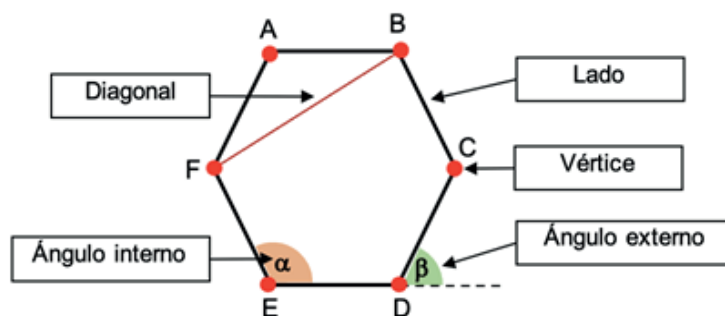
$$P = a + b + c + d$$

Para hallar su área, se divide el trapezoide en dos triángulos mediante una diagonal, de manera que el área total es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos resultantes.

Polígono regular

“Figura plana cerrada que tiene todos sus lados de igual medida y sus ángulos de la misma amplitud” (Medina, 2023b).

Al respecto son varias las figuras de esta naturaleza, entre las que se puede mencionar: el triángulo equilátero, el cuadro, rombo, pentágono regular, hexágono regular y muchas otras.



- Lados: Son los segmentos de recta que forman el polígono regular. Para el gráfico son los lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$.
- Vértices: es el punto donde concurren dos lados o segmentos de recta. Son los puntos representados por: A, B, C, D, E, F.
- Ángulos internos: son ángulos que están dentro del polígono regular y se forman por la intersección de dos lados consecutivos. $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E, \angle F$.
- Ángulos externos: corresponde a los ángulos que se ubican fuera del polígono y se forman por la prolongación de cada uno de los lados. Cada ángulo externo es suplementario al ángulo interno del mismo vértice.
- Diagonales (D): son segmentos de recta que unen dos vértices no consecutivos.

(Medina, 2023b) menciona que para el cálculo del perímetro y el área del polígono regular se debe considerar:

Perímetro:

El perímetro de un polígono se obtiene sumando las longitudes de todos sus lados. Así que, para calcularlo, solo es necesario conocer la medida de un lado y multiplicarla por la cantidad de lados del polígono.

$$P = n * l$$

Área

Para establecer el procedimiento, primero se describen los casos específicos del triángulo equilátero y del cuadrado, y luego se proporcionará la fórmula aplicable a los demás polígonos regulares.

- Área de un triángulo equilátero es $A = l^2 * (\sqrt{3})/4$, donde “l” es la medida de uno de sus lados.
- El área de un cuadrado es $A = l^2$, donde “l” es la medida de sus lados.
- Para el resto de los polígonos regulares se puede calcular usando la longitud de su apotema y la medida de uno de sus lados.

$$A = \frac{n * l * A_p}{2}$$

Donde:

- **A:** es el área del polígono regular.
- **n:** es el número de lados.
- **l:** es la longitud de un lado.
- **A_p:** es la apotema.

Ejemplo:

Calcular el área de lo siguiente:

A) Un pentágono regular de 8 cm de lado y 6,5 cm de apotema.

$$A = \frac{n * l * A_p}{2}$$

$$A = \frac{5 * 8 \text{ cm} * 6,5 \text{ cm}}{2}$$

$$A = 260 \text{ cm}^2$$

B) Un hexágono regular de 18 cm de lado y la apotema de 12 cm.

$$A = \frac{n * l * A_p}{2}$$

$$A = \frac{6 * 18 \text{ cm} * 12 \text{ cm}}{2}$$

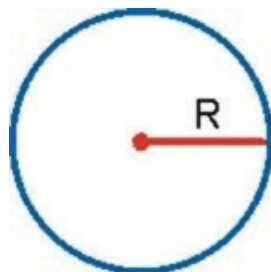
$$A = 648 \text{ cm}^2$$

Longitud y área de figuras circulares

“Es la figura geométrica formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia constante de un punto fijo llamado centro. La distancia fija se conoce como el radio de la circunferencia” (Soto Apolinar, 2010).

Circunferencia

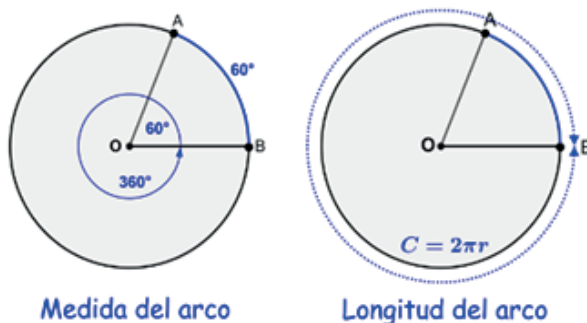
Es el conjunto de puntos en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado el centro de la circunferencia. Se puede calcular su perímetro o longitud.



Arco

“Un arco de una circunferencia o de un círculo es una porción de la circunferencia. La longitud de un arco es simplemente la longitud de esta porción de la circunferencia” (Huera Guzmán, 2023a).

El autor menciona que el procedimiento para el cálculo de la medida del arco, es igual al ángulo central que interseca al arco. Podemos mirar a la medida del arco y a la longitud del arco en el siguiente diagrama:



La longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo central de amplitud **n grados** (n°) o bien **α radianes** es:

$$L = n^\circ * (2\pi R) / 360$$

$$L = \alpha \cdot R$$

La longitud de un arco de circunferencia se calcula multiplicando la longitud de la circunferencia ($2\pi R$) por el número de grados (n°) y se divide por (360). Si el ángulo viene expresado en radianes, entonces la longitud del arco es igual al ángulo (α) por el radio (R).

Se considera las siguientes proporciones:

$$\frac{\text{medida arco}}{360^\circ} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{circunferencia}}$$

Podemos calcular la longitud del arco y sustituirla «medida del arco» por «ángulo central» ya que son equivalentes. Entonces, tenemos:

$$\text{longitud arco} = \frac{\text{ángulo central}}{360^\circ} * \text{circunferencia}$$

Podemos observar que la longitud del arco es una parte fraccionaria de la circunferencia. Por ejemplo, el arco de 60° corresponde a una sexta parte de 360° , lo que implica que la longitud del arco será igualmente una sexta parte de la longitud total de la circunferencia.

Ejemplo

Si contamos con una rueda de vehículo, cuyo radio es de 30 cm. Calcule el área y el perímetro de un círculo.

Solución:

Obtenemos el perímetro:

$$P = d \cdot \pi$$

$$P = 30 \text{ cm} * 3,14159265$$

$$P = 94,25 \text{ cm}$$

Obtenemos el área:

$$A = \pi * r^2$$

$$A = 3,14159265 * (30 \text{ cm})^2$$

$$A = 2\,827,43 \text{ cm}^2$$

Ejemplo

El ángulo central es de 40° y la circunferencia tiene una medida de 27 m. Al aplicar estos valores en la fórmula para calcular la longitud del arco, obtenemos:

Solución:

$$\text{longitud arco} = \frac{\text{ángulo central}}{360^\circ} * \text{circunferencia}$$

$$\text{longitud arco} = \frac{40^\circ}{360^\circ} * 27 \text{ m}$$

$$\text{longitud arco} = 3 \text{ m}$$

Círculo

Según (Soto Apolinar, 2010) “la curva que delimita al círculo es una circunferencia. En otras palabras, el círculo es el área que queda encerrada por la circunferencia. Por lo tanto, se puede calcular el área de un círculo, pero no así para la circunferencia”.

Para (Villablanca, n.d.) el perímetro del círculo corresponde al contorno de la figura, para calcular el perímetro (P) de un círculo:

$$P = d \cdot \pi$$

Donde d representa el diámetro del círculo.

Sin embargo, si no se conoce el diámetro se podría optar por la siguiente fórmula:

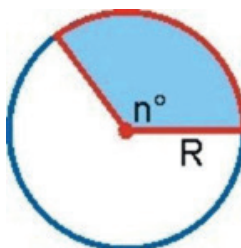
$$P = 2 r \cdot \pi$$

Donde r representa el radio del círculo.

Sector circular

Se conoce como sector circular al área del plano que está delimitada por un arco de circunferencia y dos radios de la misma.

Es posible calcular su área.



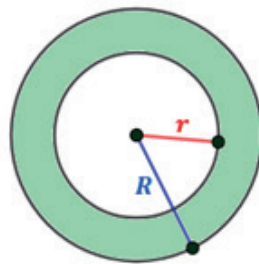
Es decir, el área de un sector circular es igual a π (pi) multiplicado por el radio (R) al cuadrado dividido por 360, que son los grados de una circunferencia, multiplicada por la amplitud del ángulo (n°).

Ejemplo 10: Determina el área de un sector circular con un radio de 16 cm y una amplitud de 40°.

Solución: Puesto que $A = \frac{\pi R^2}{360} \times n^\circ = \frac{\pi (16)^2}{360} \times 40 = 89,36 \text{ cm}^2$

Corona circular

De acuerdo con Llopis, (n.d.) una corona circular es la figura geométrica delimitada por dos circunferencias con el mismo centro (concéntricas) y radios distintos ($R > r$).



En la ilustración, R representa el radio de la circunferencia exterior y r el radio de la circunferencia interior.

Además, el autor, resalta que para calcular el perímetro y área de esta figura circular se obtienen a partir de las fórmulas de la circunferencia:

Perímetro de la corona circular:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot (R + r)$$

Área de la corona circular:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Ejemplo

Calcular el área de una corona circular de 6 cm. de radio mayor y 4 cm. de radio menor.

Solución:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot (R + r)$$

$$P = 2 \cdot 3,14159265 \cdot (6 \text{ cm} + 4 \text{ cm})$$

$$P = 23,14 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

$$A = 3,14159265 + (6^2 + 4^2)$$

$$A = 55,14 \text{ cm}^2$$

Cuerpos geométricos

Hasta este instante se han analizado las diferentes figuras geométricas, pero es importante tomar en consideración la importancia del estudio de los cuerpos geométricos, ya que nos permitirá solucionar problemas relacionados con perímetros, áreas y volúmenes.

Comencemos por entender qué es un cuerpo geométrico. Según lo expuesto por Zabala (2007), al hablar de cuerpos geométricos nos referimos a objetos tridimensionales que presentan características particulares, con formas simples, elementales y regulares. Por ejemplo, aquellos cuya superficie externa está formada por polígonos o círculos, o que tienen una forma redonda parcial o completamente. En este grupo se incluyen objetos con la apariencia de cajas, pirámides, cilindros, conos, esferas, entre otros.

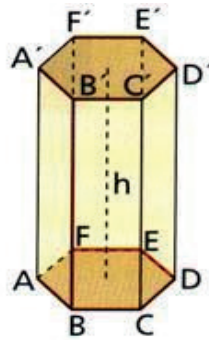
Además, como señala Medina (2023c), dentro de los cuerpos sólidos se pueden diferenciar dos tipos: los poliedros y las superficies curvas.

Área lateral, área total y volúmenes de cuerpos geométricos

Medina (2023c) menciona que los poliedros son figuras tridimensionales limitadas por 4 o más polígonos, es decir; todas sus caras son figuras bidimensionales conocidas y no poseen formas curvas. Son poliedros el prisma, la pirámide, entre otros.

Prisma

Son poliedros que tienen dos caras congruentes (llamadas bases) situadas en planos paralelos, con aristas homólogas paralelas. De esta manera, las otras caras (caras laterales) son paralelogramos. Cuando las aristas de las caras laterales son perpendiculares a las bases, se les conoce como prismas rectos; si no es así, se les llama prismas oblicuos. Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos, mientras que en los prismas oblicuos son romboides (o rombos). La altura del prisma se define como la distancia entre las dos bases (Zabala, 2007).



El prisma regular es un cuerpo geométrico formado por dos polígonos regulares, llamados bases, y un número de rectángulos igual a la cantidad de lados de la base. Su nombre se forma indicando la palabra PRISMA seguida del nombre del polígono que forma la base (por ejemplo, Prisma hexagonal). Para calcular el área lateral, el área total y el volumen de este cuerpo geométrico, se utilizan las siguientes fórmulas:

En otras palabras, el área lateral es el producto del perímetro del polígono base por la altura (h) del prisma.

El área total se obtiene sumando el área lateral y el área de los dos polígonos que forman las bases.

El volumen se calcula multiplicando el área del polígono base por la altura (h) del prisma.

$$V = A_b * h$$

Ejemplo

Determinar el área lateral, el área total y el volumen de un prisma pentagonal, sabiendo que su altura es de 9 cm, el lado de la base mide 2 cm y la apotema de la base es de 1,5 cm.

Solución:

Área lateral

$$Al = P_b * h$$

$$P_b = 5 * 2 \text{ cm}$$

$$Al = 10 \text{ cm} * 9 \text{ cm}$$

$$P_b = 10 \text{ cm}$$

$$Al = 90 \text{ cm}^2$$

Área de la base:

$$A_b = \frac{P_b * A_b}{2}$$

$$A_b = \frac{10 \text{ cm} * 1,5 \text{ cm}}{2}$$

$$A_b = 7,5 \text{ cm}^2$$

Área total:

$$A_p = 2A_b + P_b h$$

$$A_p = 2 * 7,5 + 10 \text{ cm} * 9 \text{ cm}$$

$$A_p = 105 \text{ cm}^2$$

Área total:

$$V = A_b * h$$

$$V = 7,5 \text{ cm}^2 * 9 \text{ cm}$$

$$V = 67,5 \text{ cm}^3$$

Pirámide

Los poliedros con una sola base poligonal y caras laterales triangulares que se encuentran en un punto llamado vértice son conocidos como pirámides. El tipo de pirámide se determina por el número de lados del polígono de la base, lo que equivale al número de caras triangulares laterales: triangular (o tetraedro), cuadrada, pentagonal, etc. La altura de la pirámide se define como la distancia entre el vértice y la base. Una pirámide se considera regular si su base es un polígono regular y sus triángulos laterales son todos congruentes e isósceles. El tetraedro regular es un caso especial, ya que sus cuatro triángulos son equiláteros (Zabala, 2007).

Para calcular el área y volumen, Medina (2023c) plantea las siguientes fórmulas:

Área de la pirámide

Para calcular el área total de una pirámide se debe hallar el área de la base y de las caras laterales.

Para una pirámide se tiene que:

$$A_t = A_b + A_l$$

Donde A_b es el área de la base y se calcula según el tipo de polígono base y A_l es la suma de las áreas de las caras laterales.

Si se trata de una pirámide regular la fórmula es:

$$A = \frac{n \cdot l}{2} * (Ap_b + A_p)$$

Siendo “n” el número de lados de la base, “l” la longitud, “ Ap_b ” la apotema de la base y “ A_p ” la apotema de la pirámide.

Así mismo se puede utilizar:

$$A = A_b + \left(\frac{1}{2} * P * A_p\right)$$

Ab Área de la base, P es el perímetro de la base y A_p es la apotema que por ser una pirámide regular coincide con la altura inclinada.

Volumen de una pirámide

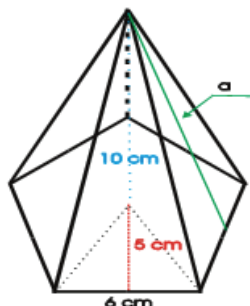
Hay una fórmula general para hallar el volumen una pirámide, la cual es:

$$V = \frac{1}{3} * A_b * h$$

Donde: “V” es el volumen de la pirámide, “ A_b ” es el área de la base y “h” la altura.

Ejemplo

Determinar el área lateral, el área total y el volumen de un prisma pentagonal, sabiendo que cada lado del pentágono mide 6 cm, la altura es de 10 cm y la apotema de la base es de 5 cm.



Solución

Para calcular el área lateral, total y volumen el área lateral, se tiene que calcular que es la hipotenusa (A_p) en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 10 cm, respectivamente.

$$A_b = \sqrt{10^2 + 5^2}$$

$$A_b = 11,18 \text{ cm}$$

Calculamos el área total:

$$A = \frac{n \cdot l}{2} * (A_p + A_b)$$

$$A = \frac{5 * 6 \text{ cm}}{2} * (5 \text{ cm} + 11,18 \text{ cm})$$

$$A = 242,70 \text{ cm}^2$$

Calculamos el área de la cara lateral:

$$Al = \frac{n * l}{2} * A_b$$

$$Al = \frac{5 * 6 \text{ cm}}{2} * 11,18 \text{ cm}$$

$$A = 167,70 \text{ cm}^2$$

Calculamos el área de la base:

$$Ab = \frac{n * l}{2} * A_p$$

$$Ab = \frac{5 * 6 \text{ cm}}{2} * 5 \text{ cm}$$

$$Ab = 75 \text{ cm}^2$$

Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} * A_b * h$$

$$V = \frac{1}{3} * 75 \text{ cm}^2 * 10 \text{ cm}$$

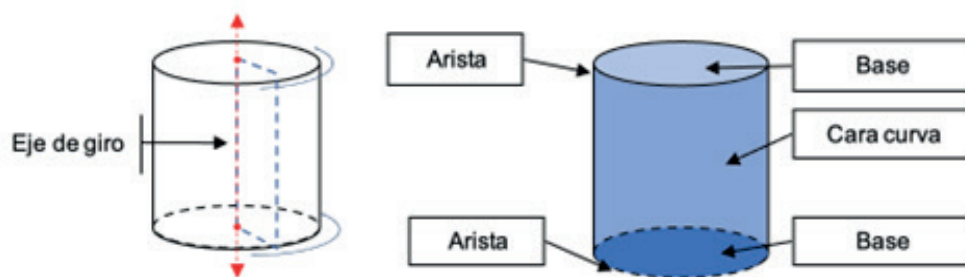
$$V = 250 \text{ cm}^3$$

Cuerpos redondos o de revolución

Son los que se generan al girar una figura alrededor de su propio eje. Algunos de los cuerpos redondos más conocidos en geometría son el cilindro, el cono y la esfera.

Cilindro

Sus bases son circulares y posee una cara curva, que se genera al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus extremos como eje. Este tipo de figura tridimensional no tiene vértices, tiene 2 aristas y 3 caras: dos son círculos planos llamados bases, que siempre son congruentes, y la otra es una superficie curva (Medina, 2023c).



Para el cálculo de área del cilindro (Medina, 2023c), menciona que, en un cilindro, generalmente se calcula el perímetro de la base inferior, lo cual permite determinar qué porción del plano ocupa la figura geométrica. Así, el perímetro de la base inferior se obtiene utilizando la siguiente fórmula:

$$P = 2 * \pi * r$$

El área total de un cilindro recto se calcula sumando el área lateral y el área de la base inferior y superior. De acuerdo con la definición del área total del cilindro, su fórmula matemática se expresaría de la siguiente manera:

$$A_t = A_l + 2A_b$$

El área de la base se determina en función del radio y se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$A_b = 2\pi * r^2$$

El área lateral se determina en función de la altura y el radio del cilindro, y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$A_l = 2 * \pi * r * h$$

SSustituyendo A_b y A_l , en la fórmula del área total se tiene que:

$$A_t = (2 * \pi * r * h) + 2(\pi * r^2)$$

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

Volumen

La medida de espacio que ocupa este cuerpo geométrico según lo establece Villablanca M., (n.d.), se expresa a través de la siguiente fórmula:

$$V = \pi * r^2 * h$$

Ejemplo

Calcula el área lateral, área total y volumen de un cilindro de 3,5 cm de radio y 9,6 cm de altura.

Solución:

Área lateral

$$A_l = 2 * \pi * r * h$$

$$A_l = 2 * 3,141592 * 3,5 \text{ cm} * 9,6 \text{ cm}$$

$$A_l = 211,11 \text{ cm}^2$$

Área de la base

$$A_b = 2\pi * r^2$$

$$A_b = 2 * 3,141592 * 3,5^2$$

$$A_b = 76,97 \text{ cm}^2$$

Área total:

$$A_t = A_l + 2A_b$$

$$A_t = 211,11 \text{ cm}^2 + 76,97 \text{ cm}^2$$

$$A_t = 288,08 \text{ cm}^2$$

Volumen:

$$V = \pi * r^2 * h$$

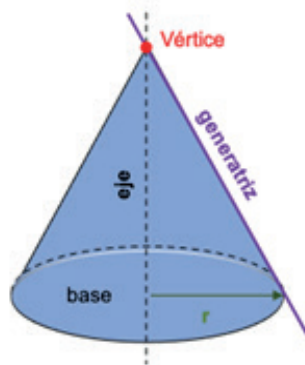
$$V = 3,141592 * 3,5^2 * 9,6$$

$$V = 369,45 \text{ cm}^3$$

Cono

Se genera al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Tiene una base circular y se estrecha hasta un punto que es el vértice.

Tiene dos caras, uno es el círculo plano (base) y la otra es una superficie curva. Además, Tiene una arista que coinciden con el borde de la cara plana y un vértice (Medina, 2023c).



Además, para calcular el área y volumen del cono la autora menciona que:

Área

El área total de un cono resulta de la suma del área de la base (A_b) más el área del cuerpo de la figura o área lateral (A_l).

$$A_t = A_b + A_l$$

El área de la base es $A_b = \pi r^2$ mientras que el área de la superficie lateral se calcula multiplicando π por el radio de la base (r) y por la longitud de la generatriz (L) o (g), siendo $A_l = \pi * r * g$

Entonces, el área total del cono es:

$$A_t = (\pi r^2) + (\pi * r * g)$$

$$A_t = \pi r(r + g)$$

Se debe considerar que la generatriz es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma junto con el radio de la base y la altura del cono, siendo estos dos últimos los catetos.

$$L = \sqrt{(r^2 + h^2)}$$

Volumen

El volumen es la medida equivalente a un tercio del producto entre el área de la base y la altura.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Donde:

- V: es el volumen
- π : es el número pi
- r: es el radio
- h: es la altura

Como en toda figura tridimensional el volumen está expresado en unidades cúbicas.

Ejemplo

Determina el área lateral, el área total y el volumen de un cono con un radio de base de 8 dm y una altura de 1 m.

Solución

Es necesario conocer el valor de la generatriz g, para lo cual utilizamos el teorema de Pitágoras.

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(8)^2 + (10)^2} = \sqrt{164} = 12,81 \text{ dm}$$

El área lateral:

$$A_l = \pi * r * g$$

$$A_l = 3,141592 * 8 * 12,81$$

$$A_l = 321,79 \text{ dm}^2$$

El área de la base:

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = 3,141592 * 8^2$$

$$A_b = 201,06 \text{ dm}^2$$

El área total será:

$$A_t = A_b + A_l$$

$$A_t = 201,06 \text{ dm}^2 + 321,79 \text{ dm}^2$$

$$A_t = 522,85 \text{ dm}^2$$

Para obtener el volumen:

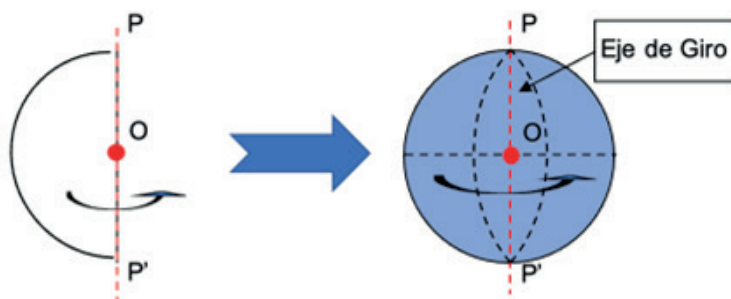
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} * 3,141592 * 8^2 * 10$$

$$V = 669,87 \text{ dm}^3$$

Esfera

Tiene una forma completamente redonda y se crea al girar un semicírculo de radio alrededor de su diámetro. La esfera no posee aristas ni vértices, cuenta con una superficie curva y es perfectamente simétrica, ya que cada punto de su superficie está a la misma distancia del punto central llamado centro (Medina, 2023c).



El cálculo del área y volumen en este cuerpo geométrico se lo realiza de la siguiente manera.

Área

Waghorn P. & Norambuena R., (n.d.), señalan que “el área de la esfera es igual a el área del cuatro veces círculo máximo”.

$$A = 4\pi * r^2$$

Volumen

Medina, (2023c), establece que la fórmula de la esfera para el volumen se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$

Donde:

- V = es el volumen de la esfera
- p = es una constante aproximadamente de 3,141592
- r = es el radio de la esfera

Ejemplo

Encontrar el área y el volumen de una esfera cuyo diámetro es de 12 centímetros.

Se aplica la fórmula para obtener el área:

$$A = 4\pi * r^2$$

$$A = 4 * 3,141592 * 6^2$$

$$A = 452,39 \text{ cm}^2$$

Para el caso del volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$

$$V = \frac{4}{3} * 3,141592 * 6^3$$

$$V = \frac{4}{3} * 3,141592 * 6^3$$

$$V = 904,77 \text{ cm}^3$$

Taller 24

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Resolver los siguientes problemas

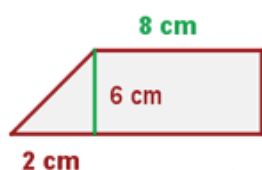
1. El perímetro de la base de un prisma triangular recto es de 15 cm. Encuentra el área lateral si la altura del prisma es de 10 cm.
2. Calcula las áreas laterales, total y el volumen de un prisma cuadrangular, sabiendo que el lado de la base mide 9 cm y la altura es de 12 cm.
3. Calcula las áreas laterales, total y el volumen de un cubo cuyo lado mide 11 cm.
4. La base de una columna hexagonal tiene un lado de 40 cm y una apotema de 36 cm, y su altura es de 8 m. Calcula el costo de pintarla, si el precio por m^2 es de USD 15.00.
5. Encuentra el área lateral de una pirámide sabiendo que el perímetro de la base es de 50 cm y la apotema de la pirámide es de 40 cm.
6. Calcula las áreas lateral y total de una pirámide con base cuadrada, donde cada lado de la base mide 50 m y la apotema es de 75 m.
7. La base de un estanque es un rectángulo de 35 m por 12 m. Calcula su volumen si la altura es de 1.6 m.
8. Calcula el área lateral y el volumen de un tanque cilíndrico con radio de 5 m y altura de 6 m.
9. Calcula el área y el volumen de una esfera con radio de 50 cm.
10. Calcula el volumen de un cono cuyo radio de la base es de 35 cm y su altura es de 40 cm.
11. Calcula el volumen de agua necesario para llenar un estanque cilíndrico de 14 m de diámetro y 0.8 m de altura.
12. El diámetro de la base de una lata cilíndrica es de 24 cm y su altura es de 36 cm. Calcula su volumen.
13. El radio de la base de un cilindro es de 2.3 m y su altura es de 4.5 m. Calcula su volumen.
14. Calcula la diferencia de volumen entre dos esferas concéntricas, una con radio de 25 cm y la otra con radio de 10 cm.

15. El radio de la base de un cono es de 14 cm y su altura es de 18 cm. Calcula su área lateral y volumen.
16. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero de 40 cm de lado y cuya altura es de 50 cm.
17. Calcula el volumen de un cono con radio de la base de 1.2 m y altura de 6 m.
18. Calcula el volumen de un tronco cilíndrico con radio de base de 24 cm y longitud de 4.85 m.
19. Calcula la superficie de cuero necesaria para hacer un balón de fútbol de 9 cm de radio, considerando que se usan 300 cm^2 para las costuras.
20. Calcula el volumen de un globo esférico con radio de 90 cm.
21. Calcula la cantidad de concreto necesaria para rellenar 23 columnas cilíndricas de 5 m de altura y 60 cm de diámetro.
22. Encuentra el volumen de un tambo cilíndrico con altura de 1.2 m y diámetro de 70 cm.
23. Calcula el volumen y el área de una esfera con radio de 2.4 m.
24. Encuentra el volumen y el área lateral de un cono circular recto, con radio de la base de 90 cm y altura de 2.4 m.
25. Calcula el volumen de un prisma de base pentagonal, donde el lado y la apotema miden 17 cm y 12 cm respectivamente, y la altura del prisma es de 35 cm.

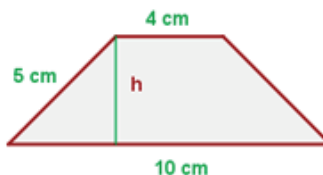
Cada uno de estos problemas puede ser resuelto utilizando fórmulas de geometría correspondientes.

Taller 25

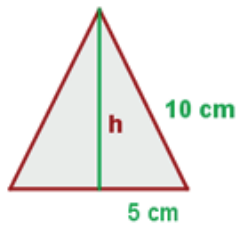
1. Encontrar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:



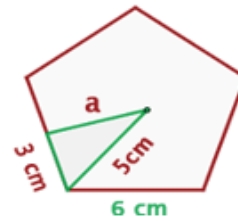
2. Hallar el perímetro y el área del trapecio isósceles:



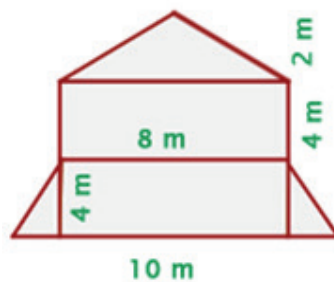
3. Hallar el perímetro y el área del triángulo equilátero



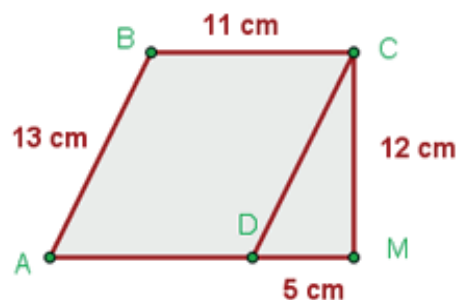
4. Encontrar el perímetro y el área del pentágono regular :



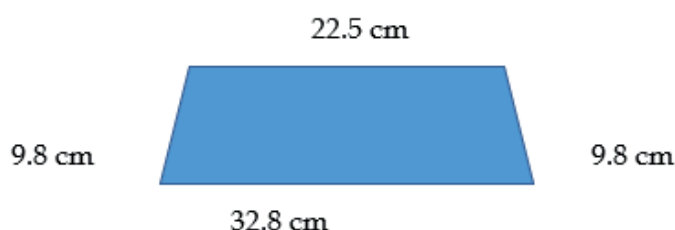
5. Calcula el número de baldosas cuadradas, de 12 cm, de lado que se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 6 m de base y 3 m de altura.
6. Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 42 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 6 m².
7. En el centro de un jardín cuadrado de 160 m de lado hay una piscina también cuadrada, de 25 m de largo. Calcula el área del jardín.
8. Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar la fachada de este edificio sabiendo que se gastan 0.6 kg de pintura por m².



9. Hallar el perímetro y el área de la figura:



10. Calcular el área de un rombo cuya diagonal mayor mide 10 cm y cuya diagonal menor es la mitad de la mayor.
11. La longitud de una circunferencia es 43.97 cm. ¿Cuál es el área del círculo?
12. La rueda de un camión tiene 90 cm de radio. ¿Cuánto ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?
13. Calcular en metros el perímetro de un cuadrado que tiene 72 cm de lado.
14. Calcular en metros el perímetro de un rectángulo que mide 9 decímetros de largo por 15 cm de ancho.
15. Cuántos metros de alambre necesito para cercar un terreno de forma triangular (equilátero) que mide 18.5 metros de lado.
16. Un granjero desea cercar su propiedad de forma pentagonal cuyo lado mide 38.5 metros, cuántos metros de alambre necesito de deseo dar 4 vueltas a cada lado.
17. Cuántos metros tendrá la pista atlética de la ESFORSFT que es de forma circular si su radio mide 38.5 metros.
18. En la construcción de un triángulo de tiro de necesita cercar por seguridad. Cuántos metros de alambre necesito si el terreno mide 8.4 decámetros, 2.3 hectómetros y 315 metros en sus tres lados.
19. Cuál es el número de metros de masking que necesito para cubrir los bordes de una habitación que tiene forma rectangular que mide 9.5 metros de largo, 4.3 metros de largo y 2,35 metros de altura si debo cubrirles tanto en los costados, el piso y el techo.
20. En las prácticas de tiro se debe cercar el área de práctica con sogas de colores para precautelar la seguridad de los aspirantes. El coronel Enríquez necesita saber la cantidad de metros que debe adquirir para esto si el terreno es de forma hexagonal de 25. 8 metros de lado.
21. Escribir en milímetros el perímetro de la siguiente figura:

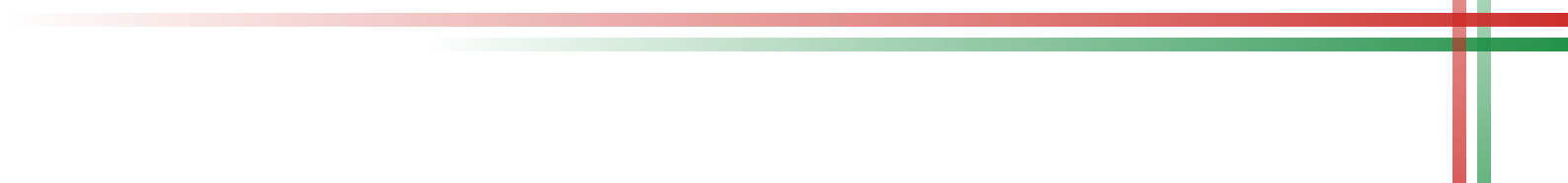




<https://n9.cl/cmfln>

CAPÍTULO III

Trigonometría



La trigonometría es una parte de la ciencia de la matemática que permite estudiar y medir los triángulos, las relaciones entre sus lados y ángulos, mediante las funciones trigonométricas; seno, coseno y tangente y las inversas de cada una de ellas; porque etimológicamente trigonometría significa medida de triángulos; porque: tri= tres, gonos= ángulo, métrica = medida, que es utilizada en muchas aplicaciones técnicas como la astronomía, navegación terrestre y marítima, puntos geográficos y en la navegación por satélites.

Los ángulos pueden ser positivos y negativos, partiendo del punto de intersección de las dos rectas perpendiculares que forman cuatro cuadrantes, recordando que siempre los valores del par ordenado (x, y) , tendrán su signo según el cuadrante donde estén posiciones los valores de x e y .

Remontándose a la historia, se puede señalar que los estudiosos de Egipto y Babilonia, conocían acerca de la medición de los triángulos semejantes y las proporciones entre sus lados, donde los astrónomos de Babilonia registraban movimientos de los planetas y los eclipses, y los egipcios antes de Cristo, dos mil años atrás, utilizaban la trigonometría para construir sus pirámides de manera primitiva; con el paso del tiempo se descubrieron relaciones entre los ángulos y se determina las co-funciones, los ángulos complementarios, ángulos suplementarios,

El Teorema de Pitágoras, que determina que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de sus catetos, además que la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre será igual a 180° .

Para complementar el estudio de la trigonometría, se aplican los teoremas del seno y teorema del coseno; el teorema del seno señala que cada lado del triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto y permite resolver los problemas cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a ellos; si se tiene los dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos y cuando se conocen dos ángulos y el lado que no es opuesto a ellos.

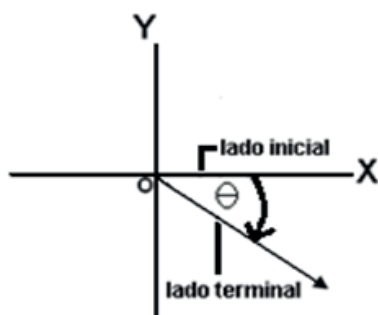
La ley o teorema del coseno en un triángulo, el lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los lados menos el producto de los dos por el coseno del ángulo que forman; cada uno de los teoremas pueden ser aplicados con un análisis crítico en la asignatura de navegación terrestre y complementando el cálculo de distancia entre dos puntos para el cierre de poligonales de manera analítica.

La trigonometría es una disciplina de las matemáticas, cuyo origen etimológico es “la medición de los triángulos”, que estudia las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de un triángulo.

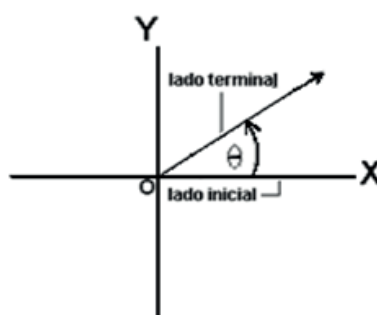
Ángulos: ángulos positivos y negativos

El ángulo trigonométrico es aquel que se forma cuando a partir de un lado inicial, se hace rotar alrededor de un vértice “0” un lado terminal, el mismo que se puede hacerlo en los dos sentidos; en la dirección en que giran las manecillas del reloj (horario) y en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (antihorario).

ÁNGULOS NEGATIVOS -



ÁNGULOS POSITIVOS +



Medición de ángulos

Para la medición de ángulos existen tres sistemas: el sistema sexagesimal, el sistema circular y el sistema centesimal. Los más utilizados son el sexagesimal, cuya unidad de medida es el ángulo de un grado y el sistema circular cuya unidad de medida es el ángulo radián.

Un radián, es el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.

Sistema sexagesimal

Grados: Unidad angular que divide una circunferencia en 360 sectores radiales, la unidad de medida es el ángulo de un grado (1°).

Recuerde:

No se debe confundir estas unidades de medidas (que son ángulos) con las unidades del tiempo, pese a que llevan el mismo nombre no representan la misma magnitud.

Simbología	Equivalencias
1 grado = 1°	$1^\circ = 60'$
1 minuto = $1'$	$1' = 60''$
1 segundo = $1''$	$1'' = 3600'''$

Ejemplos:

- Determinar el complemento del ángulo $\Theta = 36^\circ 40'$

Solución:

El ángulo complementario lo conseguimos restando Θ de 90°

$$90^\circ - \Theta = 90^\circ - 36^\circ 40'$$

Antes de restar, consideremos que $90^\circ = 89^\circ 60'$

$$\begin{array}{r} 89^\circ 60' \\ - 36^\circ 40' \\ \hline 53^\circ 20' \end{array}$$

El ángulo complementario de $\Theta = 53^\circ 20'$

- Calcular el ángulo suplementario de $\Theta = 46^\circ 28' 37''$

Solución:

El ángulo suplementario lo conseguimos restando Θ de 180°

$$180^\circ - \Theta = 180^\circ - 46^\circ 28' 37''$$

Antes de restar, consideremos que $180^\circ = 179^\circ 59' 60''$

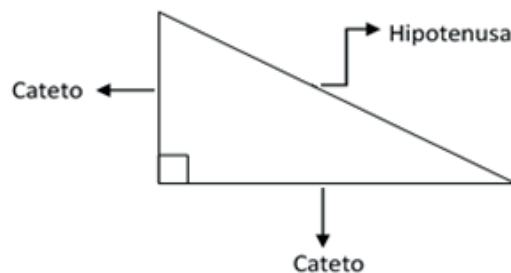
$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ - 46^\circ 28' 37'' \\ \hline 133^\circ 31' 23'' \end{array}$$

El ángulo suplementario de $\Theta = 133^\circ 31' 23''$

Resolución de triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, los lados perpendiculares que forman el ángulo recto, se denominan catetos y el lado que es opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

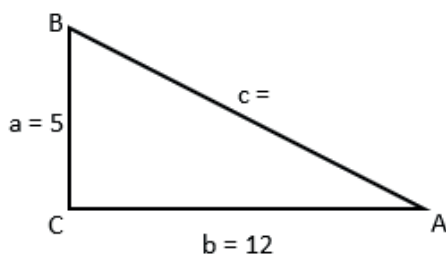


$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$\text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 - \text{cateto}^2$$

Ejemplos:

En un triángulo rectángulo, si los catetos tienen longitudes de 5 y 12 cm respectivamente, ¿cuál es la medida de la hipotenusa?



$$\text{hip}^2 = \text{cat}^2 + \text{cat}^2 \quad \text{hip}^2 = \text{cat}^2 + \text{cat}^2$$

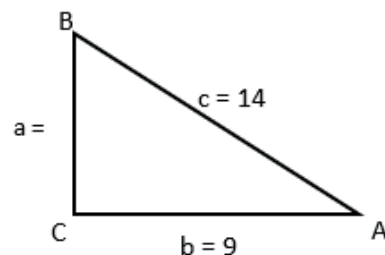
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 5^2 + 12^2$$

$$c^2 = 169 = \sqrt{169}$$

$$c = 13$$

Si en el triángulo de la figura uno de los catetos tiene de medida 9 cm y la hipotenusa mide 14 cm. Determinar la medida del otro cateto:



$$\text{cat}^2 = \text{hip}^2 - \text{cat}^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 14^2 - 9^2$$

$$a^2 = 196 - 81$$

$$a^2 = 115$$

$$a = \sqrt{115}$$

$$a = 10.72$$

Taller 26

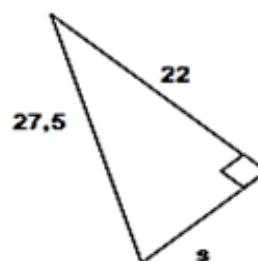
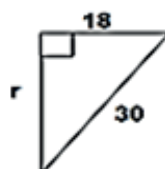
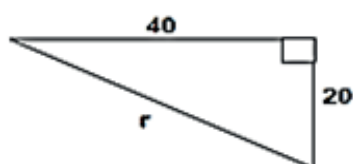
- Utilizando el teorema de Pitágoras, resolver los triángulos rectángulos:

a. $a=5, b=8 \quad c=?$

b. $a=3, c=9 \quad b=?$

c. $b=7, c=11 \quad a=?$

- Utilizando el Teorema de Pitágoras encuentre los valores de r y s en los siguientes triángulos:



Funciones trigonométricas naturales de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Sea el triángulo rectángulo ACB, con el ángulo recto en C. Designemos por las letras mayúsculas A, B, C las medidas de los ángulos y por las letras minúsculas a, b, c las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo.

Sea A un ángulo menor de 90° es decir, un ángulo agudo.

La Trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia, y para este objeto emplea las razones de los lados. Estas razones se llaman funciones trigonométricas.

Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, como A en la figura, se designan como sigue:

Seno de A: $\text{Sen } A = \frac{\text{c.opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$	Cosecante de A: $\text{Csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{c.opuesto}} = \frac{c}{a}$
---	--

Coseno de A: $\cos A = \frac{c.adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$	Secante de A: $\sec A = \frac{hipotenusa}{c.adyacente} = \frac{c}{b}$
Tangente de A: $\operatorname{Tg} A = \frac{c.opuesto}{c.adyacente} = \frac{a}{b}$	Cotangente de A: $\operatorname{Ctg} A = \frac{c.adyacente}{c.opuesto} = \frac{b}{a}$

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo B en el triángulo rectángulo ACB en el que:

$$a = 3, \text{ y } c = 5$$

Solución:

Por Pitágoras $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$, entonces:

$$\operatorname{Sen} B = 4/5$$

$$\operatorname{Cos} B = 3/5$$

$$\operatorname{Tg} B = 4/3$$

$$\operatorname{Ctg} B = 3/4$$

$$\operatorname{Sec} B = 5/3$$

$$\operatorname{Csc} B = 5/4$$

Si calculamos $\operatorname{Sen} A = 3/5 = 3/5$ observamos que es igual a $\operatorname{Cos} B$.

Encontrando las otras funciones trigonométricas del ángulo A podemos concluir que:

$$\operatorname{Sen} A = \operatorname{Cos} B$$

$$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Sen} B$$

$$\operatorname{Tg} A = \operatorname{Ctg} B$$

$$\operatorname{Ctg} A = \operatorname{Tg} B$$

$$\operatorname{Sec} A = \operatorname{Cosec} B$$

$$\operatorname{Cosec} A = \operatorname{Sec} B$$

En este caso el seno y el coseno se llaman co-funciones, de igual manera, la tangente y cotangente, la secante y cosecante. Como los ángulos A y B suman 90° , generalizando se puede establecer que:

“Una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la co-función de su ángulo complementario”.

Con el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas conocidas estamos en condiciones de resolver un triángulo rectángulo, es decir, de poder encontrar los lados o ángulos agudos desconocidos, dados dos elementos de este triángulo (Conocido el ángulo C = 90°).

Taller 27

Calcular el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ACB, conociendo:

- a) $a = 9$, $b = 3$
- b) $a = 2$, $c = 5$
- c) $b = 7$, $c = 4$

- Ahora, para resolver un triángulo rectángulo, es encontrar los valores de sus 3 lados y sus 3 ángulos, a partir de 3 datos conocidos, siendo uno de ellos el ángulo recto que mide 90° .

Ejemplos:

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Resolver el triángulo rectángulo de la figura:
 $A = 40^\circ$
 $B =$
 $C = 90^\circ$
 $b =$
 $c = 8$ | <ul style="list-style-type: none"> • Resolver un triángulo rectángulo si se conocen los lados:
 $a = 6$, $b = 11$ |
|---|---|

Taller 28

Resolver los triángulos rectángulos:

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 5,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 56° . Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.
2. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 55 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.
3. Encontrar los valores de x , y , h en el siguiente triángulo:
4. Un mástil de 6 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:

Halla el valor de c y la longitud del cable.

5. Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con respecto al suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de 30° con el suelo y, la copa del árbol se encuentra ahora a 6 m de su base, ¿qué altura tenía el árbol? SOL. 10,39 m.
6. Un conductor recorre 50 metros por una ruta que tiene una pendiente de 20° hacia arriba respecto al nivel del suelo. ¿A qué altura se encuentra en comparación con su punto de inicio?
Sol. 17,10 m.
7. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles de 40 cm de base y cuyos ángulos de base son de 70° ?
Sol. 156,95 cm.
8. El Asp. Rojas alumno del paralelo "A", observa un avión con un ángulo de elevación de 60° . Si el avión vuela a 3200 metros de altura con respecto del Aspirante, determinar la distancia que separa al Asp. del avión en ese instante. Sol. 36,95 m.
9. Desde la ventana del último piso de un edificio de 105 metros de altura se encuentra un francotirador y observa al enemigo con un ángulo de depresión de 40° . Determinemos lo siguiente:
 - La distancia entre el "enemigo" y el edificio.

- La distancia entre el “enemigo” y el francotirador.
10. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60° . Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80° . Halla la altura de la torre. Sol. 12,47 metros.

Ley de senos y cosenos

Ley de senos

Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b, c, entonces:

Un triángulo oblicuángulo puede resolverse con la ayuda de la Ley de los senos, si dos de los tres elementos conocidos son, un lado y su ángulo opuesto.

La ley de los senos se utiliza cuando se conocen los siguientes datos:

- Dos ángulos y un lado (A-L-A): Se calcula el tercer ángulo utilizando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, y luego se encuentran los otros datos aplicando la ley de los senos.
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (L-L-A): Se emplea la ley de los senos para encontrar uno de los ángulos desconocidos y determinar si existe una, dos o ninguna solución.

Ley de cosenos

En un triángulo, el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo que forman entre sí.

Dado un triángulo ABC, siendo A, B y C los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos C$$

La Ley de cosenos se aplica cuando los datos conocidos son:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (L-A-L)

- Los tres lados (L-L-L)

Ejemplos:

Resolver los siguientes ejercicios:

En el siguiente triángulo ABC, $a = 13$ cm, $c = 19$ cm, $\angle B = 55^\circ$, resuelva el triángulo.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B \quad b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) * \cos 55^\circ$$

$$b^2 = 169 + 361 - 495 * (0,5735) \quad b^2 = 246,6536 \quad b = 15,7052 \text{ cm}$$

Para encontrar el ángulo A:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$$

Despejando Cos A.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos A = \frac{15,7052^2 + 19^2 - 13^2}{2(15,7052)(19)} \quad \cos A = 0,735$$

$$A = \cos^{-1}(0,735) = 42,69^\circ$$

Aplicando el teorema de la suma de los ángulos interiores del triángulo, se tiene:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

$$\angle C = 180^\circ - 42,69^\circ - 55^\circ \quad \angle C = 82,31^\circ$$

En el triángulo ABC, $b = 15$ cm, $\angle B = 42^\circ$, y $\angle C = 76^\circ$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes

Teorema de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo deben sumar 180° .

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad \angle A + 42^\circ + 76^\circ = 180^\circ \quad \angle A = 180^\circ - 42^\circ - 76^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 118^\circ \quad \angle A = 62^\circ$$

En el triángulo ABC, $b = 15 \text{ cm}$, $\angle B = 42^\circ$, y $\angle C = 76^\circ$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

$$\frac{p}{\text{Sen } P} = \frac{m}{\text{Sen } M} = \frac{n}{\text{Sen } N}$$

$$\frac{p}{\text{Sen } P^\circ} = \frac{m}{\text{Sen } M}$$

$$\text{Sen } M = \frac{m \text{ Sen } P^\circ}{p}$$

$$\text{Sen } M = \frac{(8 \text{ cm}) \cdot \text{Sen } 76^\circ}{12 \text{ cm}} = 0,6469$$

$$M = \text{Sen}^{-1}(0,6469) = 40,18^\circ$$

$$\angle M + \angle N + \angle P = 180^\circ \quad \angle P + 40,18^\circ + 76^\circ = 180^\circ \quad \angle P = 180^\circ - 40,18 - 76^\circ$$

$$\angle P = 180^\circ - 116,18^\circ \quad \angle P = 63,82^\circ$$

$$\frac{p}{\text{Sen } P} = \frac{n}{\text{Sen } N} \quad \frac{12 \text{ cm}}{\text{Sen } 63,82^\circ} = \frac{n}{\text{Sen } 76^\circ}$$

$$c = \frac{12 \text{ cm} \cdot (\text{Sen } 63,82^\circ)}{\text{Sen } 76^\circ} = 11,09 \text{ cm}.$$

Taller 29

Resolver un triángulo oblicuángulo si se conoce que:

1. $A = 30.29^\circ$; $a = 15 \text{ m}$; $b = 30 \text{ m}$.
2. $B = 77.2^\circ$; $b = 18.69 \text{ m}$; $A = 51.55^\circ$
3. En un momento determinado cuando un avión voló sobre un camino recto que une a dos ciudades pequeñas, los ángulos de depresión de ambas fueron de 12.2° y 8.7° :
 - Determine las distancias rectas desde el avión a cada una de las ciudades en ese momento si la separación entre ambas es de 8.45 Km.
 - Determine la altura del avión en ese momento.
4. Un asta está situada en la parte superior de un edificio de 125 pie de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior e inferior de la asta son 63.2° y 58.6° , respectivamente. ¿Cuál es la longitud del asta?

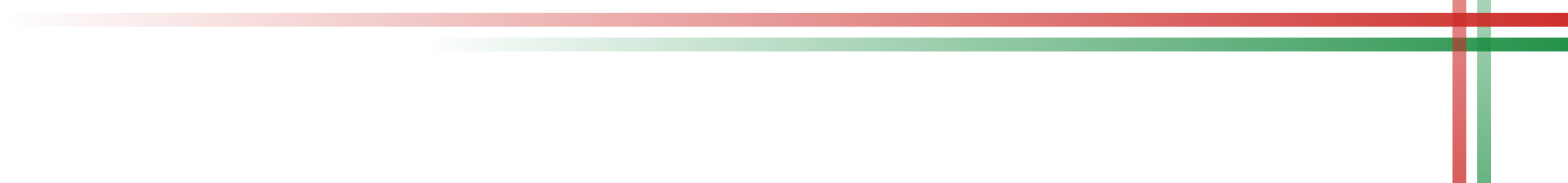
5. Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S. Del título de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324 m, la distancia de T a S es 506 m y el ángulo en R del triángulo mide 125.4° . Determine la ubicación de S calculando la distancia de R a S.
6. Un edificio se localiza al final de una calle que está inclinada en un ángulo de 8.4° con respecto a la horizontal. En un punto P que está a 210 m calle abajo del edificio, el ángulo subtendido por el edificio es de 15.6° . ¿Cuál es la altura del edificio?
7. Para determinar la distancia a través de un río recto, un topógrafo elige los puntos P y Q en la rivera, donde la distancia entre P y Q es 300 m. En cada uno de los puntos se observa el punto R en la rivera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1° y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80.4° . ¿Cuál es la distancia a través del río?
8. Un punto P está a 2.4 Km. de la orilla de un lago y 2.2 Km. de la otra orilla. Si en P el lago subtiende un ángulo de 54° , ¿Cuál es la longitud del lago?
9. Dos caminos rectos se cortan en un punto P y ahí forman un ángulo de 42.6° . En un punto R sobre un camino está un edificio a 370 m de P y en un punto S, en el otro camino está un edificio a 426 m de P. Determine la distancia directa de R a S.
10. Una rampa está inclinada en un ángulo de 42.3° con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de 20.6 pie de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a 12.2 pie de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un Punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R.



<https://n9.cl/fj0ii>

CAPÍTULO IV

Geometría analítica



Distancia entre dos puntos

Cuando en el Plano Cartesiano ubicamos dos puntos cualesquiera, podemos ver que existe una distancia entre dichos puntos. El cálculo de esta distancia es muy útil para muchos temas, la misma se la puede determinar aplicando una Fórmula, que tiene sustento en el Teorema de Pitágoras.

Al trazar arbitrariamente las proyecciones de los puntos se forma el triángulo rectángulo, P_1RP_2 , cuya hipotenusa viene a ser la distancia entre los puntos P_1 y P_2 , y los catetos serían la distancia vertical y horizontal. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que, el cuadrado de la hipotenusa p_1p_2 , es igual a la suma de los cuadrados de los lados perpendiculares dados por $(x_2 - x_1)$ y $(y_2 - y_1)$.

Entonces, transformado a fórmula diremos que la Fórmula de la Distancia es: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejercicios:

Calcular la distancia entre los puntos: A (4, 6) y B (-3, 5)

Los valores dados reemplazamos en la fórmula de la distancia teniendo que, $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, sin embargo, también se lo puede considerar en el otro orden.

$$|AB| = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (5 - 6)^2} \quad |AB| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} =$$

$$|AB| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$|AB| = 7,07$$

Calcular la distancia entre los puntos: P (-5, 2) y Q (4, -5)

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{(4 - (-5))^2 + (-5 - 2)^2} = \quad |PQ| = \sqrt{(4 + 5)^2 + (-7)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{(9)^2 + (-7)^2} \quad |PQ| = \sqrt{81 + 49} \quad |PQ| = \sqrt{130}$$

$$|PQ| = 11,4$$

Taller 30

Calcular la distancia entre los puntos:

1. A (9, -8) Y B (7, 3)
2. A (2, 3) Y B (1, 2)
3. A (5, 4) Y B (4, 2)
4. Determinar si el triángulo formado por los puntos: A (4, -3), B (3, 0) y C (0, 1) es Isósceles, Escaleno o Equilátero
5. Determinar si el triángulo formado por los puntos A (0,0), B (6,5) y C (1,6) es Isósceles, Escaleno o Equilátero.

Formas de la ecuación de la recta

Forma punto – pendiente

Consideremos la recta “L”, con pendiente “m”, que pasa por el punto P0 (x0, y0) y tomemos un punto genérico P (x, y) de la recta L.

Por definición de pendiente de una recta que pasa por dos puntos se tiene:

$$m = \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) \text{ de donde se tiene:}$$

La ecuación de la recta “L”, que pasa por el punto P0, (X0, Y0), y cuya pendiente es “m”, que está dado por:

$$Y - Y_0 = m (X - X_0)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Consideremos la recta “L”, con pendiente “m”, que pasa por los puntos P0 (x0, y0) y P1 (x1, y1) entonces su pendiente es:

$$m = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \text{ de donde se tiene:}$$

La ecuación de la recta “L” que pasa por los puntos P0 (x0, y0) y P1 (x1, y1) con pendiente m es:

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-3, 5) y B (6, 2).

Al sustituir los datos en la ecuación, resulta lo siguiente:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_1)$$

$$y - 2 = \left(\frac{5 - 2}{-3 - 6} \right) \cdot (x - 6)$$

$$x + 3y - 12 = 0$$

Forma pendiente – ordenada en el origen

La ecuación de la recta de pendiente m , y que corta al eje Y en el punto P0 (0, b) (siendo b la ordenada en el origen) está dada por:

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y tiene pendiente $m = -5$.

Tenemos que hallar la ecuación de la recta, esto es, $y = mx + b$.

Usamos a información: $m = -5$ y sustituimos en la ecuación:

$$y = -5x + b$$

Ahora tenemos que buscar la b; usamos el otro dato; la recta pasa por el punto (1, 2), por lo tanto, ese punto es una solución de la ecuación que buscamos. Se sustituyen esos valores de $x = 1$, $y = 2$ en la ecuación que estamos buscando: $2 = -5(1) + b$

Despejamos la variable b en:

$$2 = -5(1) + b$$

$$2 = -5 + b$$

$$2 + 5 = b$$

$$b = 7$$

Sustituimos el valor de b en la ecuación que buscamos: $y = -5x + 7$

La ecuación en su forma principal (simplificada o explícita) es $y = -5x + 7$

La cual también podemos expresar en su forma general:

$$y = -5x + 7$$

$$y + 5x - 7 = 0$$

la cual ordenamos y queda:

$$5x + y - 7 = 0$$

Ecuación de la recta en forma simétrica

La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados X e Y en los puntos A (a, 0) y B (0, b) (a, abscisas en el origen y b ordenada en el origen), está dado por:

Al calcular la pendiente obtendríamos:

$$m = \frac{b-0}{0-a} \Rightarrow m = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo:

Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son 2 y -3 respectivamente. Hallar su ecuación.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

$$\frac{3x - 2y}{6} = 1$$

$$3x - 2y = 6$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

Forma general de la ecuación

La ecuación general de una recta es una expresión de la forma $Ax + By + C = 0$, donde

A, B y C son números reales.

La pendiente de la recta es el coeficiente de la x una vez puesta en forma explícita (es decir, despejada y):

$$By = -Ax - C \rightarrow y = \frac{-Ax-C}{B} \gg y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \rightarrow \text{la pendiente es: } m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación general de la recta $y = 3x + \frac{4}{3}$.

Solución:

Tenemos que pasar todos los términos de la ecuación al lado izquierdo y ordenarlos:

$$-3x + y - \frac{4}{3} = 0$$

Opcionalmente, podemos quitar denominadores:

$$-9x + 3y - 4 = 0$$

Taller 31

Dibujar una figura para cada ejercicio:

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1,5) y tiene de pendiente 2.
2. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intercepción con el eje Y es -2.
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos A (4,2) y B (-5,7).
4. Los vértices de un cuadrilátero son A (0,0), B (2,4), C (6,7) y D (8,0). Hallar la ecuación de sus lados.
5. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son -5 y 4 respectivamente. Hallar su ecuación.
6. Una recta pasa por los dos puntos A (-3,-1) y B (2,-6). Hallar su ecuación en forma simétrica.
7. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto A (-1,4). Hallar su ecuación en forma simétrica.
8. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto (-2,4) y tiene una pendiente igual a -3.

9. Hallar la ecuación de una recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes X y Y, es decir, sus intercepciones son 3 y -5 respectivamente.

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma inclinación, por lo tanto, sus pendientes son iguales.

Además, están en el mismo plano y no tienen ningún punto de intersección.

Para indicar que dos rectas son paralelas utilizamos la notación $\parallel$.

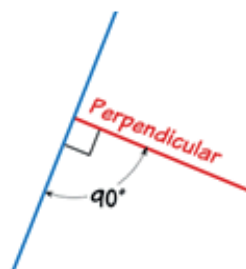
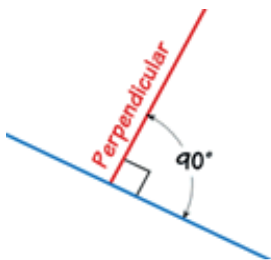
Entonces decimos que $AB \parallel CD$ y se lee: la recta AB es paralela a la recta CD.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de las pendientes es -1.

Lo anterior también afirma que si el producto de las pendientes es igual a -1, las rectas necesariamente son perpendiculares, a excepción del caso en que las rectas sean horizontales y verticales.

La línea roja es perpendicular a la azul en estos dos casos:



Ejemplo:

Determinar si las siguientes parejas de rectas corresponden a rectas paralelas o perpendiculares o a ninguna de ellas.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x - y + 2 &= 0 & \text{y} & & x + 3y - 1 &= 0 \\ y &= 3x + 2 & & & y &= \frac{-x}{3} + \frac{1}{3} \\ m &= 3 & & & m &= \frac{-1}{3} \\ m_1 * m_2 &= 3 * \frac{-1}{3} = -1 & \text{Son perpendiculares} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 6x - 2y - 5 &= 0 & \text{y} & & 3x - y - 2 &= 0 \\ y &= 3x - \frac{5}{2} & & & y &= 3x - 2 \\ m_1 // m_2 &= 3 = 3 & & & \text{Son paralelas} \end{aligned}$$

Distancia de un punto a una recta

Dada una recta $r: Ax + By + C = 0$ y $P = (x_1, y_1)$ un punto no contenido en ella. La distancia entre el punto y la recta viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo:

- Calcula la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta " r " de la ecuación $3x + 4y = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad d(P, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|6 - 4|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d(P, r) = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

- Consideremos la recta $r: 6x + 8y - 10 = 0$ y el punto $P = (2, 1)$ calculamos la distancia entre ambos.
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(8, 3)$ y $B(5, -6)$.

$$Y - Y_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) (X - X_1) \quad Y - 3 = \left(\frac{-6 - 3}{5 - 8} \right) (X - 8)$$

$$Y - 3 = \left(\frac{-9}{-3} \right) (X - 8) \quad (-3)(Y - 3) = -9(X - 8) \quad 9X - 3Y = 63$$

- Calcula la distancia del punto $P(3, -2)$ a la recta " r " de la ecuación $5x + 7y = -4$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad d(P, r) = \frac{|5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{5^2 + 7^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|15 - 14 + 4|}{\sqrt{25 + 49}}$$

$$d(P, r) = \frac{5}{\sqrt{74}}$$

Taller 32

1. De acuerdo con el gráfico calcular:

L1, es la recta que pasa por los puntos B y C.

- Determinar si la recta que pasa por los puntos A y E es paralela a L1.
 - Determinar si la recta que pasa por los puntos A y D es perpendicular a L1.
 - Calcular la distancia del punto E a la recta L1.
 - Determinar la ecuación de la recta paralela a L1 que pasa por el punto D
 - Determinar la ecuación de la recta perpendicular a L1 que pasa por el punto E
 - Calcular la distancia del punto E a la recta perpendicular a L1, que pasa por A
 - Calcular la distancia del punto D a la recta paralela a L1, que pasa por E
- Dada la recta L con ecuación $-3x + 2y = 4$ y el punto P (1,-3) encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a L.
 - Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto P (1,7) y es paralela a la recta $L1 = 8x + 5y + 40 = 0$

Ángulo entre dos rectas

Dada dos rectas $L1 = A_{1x} + B_{1x} + C1 = 0$ y $L2 = A_{2x} + B_{2x} + C2 = 0$ y el ángulo formado por las dos rectas L1 y L2 está dado por la fórmula:

$$tg\theta = \frac{mL_2 - mL_1}{1 + mL_1 \cdot mL_2}; \text{ donde } = mL_1 \cdot mL_2 \neq -1$$

Ejemplo:

Hallar el ángulo que forman las dos rectas $L_1 = 10x - 2y + 2 = 0$ y $L_2 = 6x - 3y - 4 = 0$.

Solución:

Primero se debe hallar las pendientes de las dos rectas:

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$L_1 = 10x - 2y + 2 = 0$$

$$m_{L_1} = -\frac{10}{-2} = 5$$

$$L_2 = x - 6x - 4 = 0$$

$$m_{L_2} = -\frac{6}{-3} = 2$$

Ahora aplicando la fórmula tenemos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_{L_2} - m_{L_1}}{1 + m_{L_1} \cdot m_{L_2}} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2 - (5)}{1 + (5) \cdot (2)} = \frac{-3}{11} = -0,27272 \dots \quad \theta = 15,26^\circ$$

Taller 33

1. Dada las rectas $L_1 = 2x + y - 8 = 0$ y $L_2 = 3x - 2y + 9 = 0$, hallar el ángulo que forman.
2. Dados los puntos A (-2,1), B (4,7) y C (6,-3) demuestre que estos puntos forman un triángulo y halle el ángulo que entre cada par de rectas.
3. Hallar el ángulo que forman cada par de rectas del siguiente cuadrilátero A (3,2), B (-3,5), y de directriz $y = -5$, de foco (0, 5).



CAPÍTULO V

Estadística descriptiva

En el mundo de hoy es cada vez más aceptado que, para aprender sobre algo, primero se tienen que recolectar datos; por lo tanto, el estudio de la estadística es muy importante en cualquier área del saber, ya que, al ser una rama de las matemáticas, permite trabajar con datos numéricos que son extraídos de eventos o fenómenos que ocurren en la realidad, los mismos que nos permitirán describir o inferir de una manera práctica, sencilla y cómoda para la toma de decisiones.

La unidad se encuentra elaborada como un introductorio en estadística descriptiva para estudiantes de la Escuela de Formación de Soldados ESFORSFT “Vencedores del Cenepa”, cuyo título terminal es de Tecnólogos Superiores en Ciencias Militares, presupone el conocimiento de cálculo elemental; conociendo que la estadística se deriva en descriptiva e inferencial; cada una de ellas con sus respectivas propiedades, técnicas y métodos adecuados a la competencia de enseñanza aprendizaje.

La filosofía educativa de la Escuela de Formación de Soldados ESFORSFT; es buscar en los individuos militares, formas de mejorar su enseñanza, donde la visión y misión, van formando parte de la participación en una serie de conferencias teórico-práctico, organizando el trabajo grupal, donde el marco de referencia para aprender se base en una competencia específica de la especialidad, incluyendo funciones administrativas militares.

Los conceptos y métodos son claros y precisos, que favorecen la inducción para ejecutar ejercicios concretos de aplicación; tomando en consideración los conocimientos secuenciales para que se activen los criterios constructivistas en un paradigma cognitivo y constructivista social; donde los principios básicos sea la ética, responsabilidad y eficiencia, permitiendo cambios importantes en el desarrollo personal, donde las competencias intrínsecas desarrolladas en cada uno de los sujetos se formulen mediante alternativas en el quehacer militar; los individuos se encuentran expuestos a una amplia información cualitativa y cuantitativa relativa a los ejes transversales del conocimiento, las evaluaciones, las destrezas y habilidades que poseen; siendo necesario ampliar el acervo en herramientas estadísticas descriptiva, la recolección, presentación y caracterización de la información como proceso para la toma de decisiones.

“La vida tiene obstáculos y tropiezos, ellos jamás deben derrotarnos, sino deben ser un preámbulo para llegar a la cima del éxito”. Lic. Luis Gutiérrez Albán. Mg.

Nociones preliminares

Estadística

Como parte de las matemáticas la estadística es una ciencia que reúne un conjunto de métodos y técnicas.

Ruiz Muñoz (2004) define a estadística como la ciencia cuyo objetivo es reunir una información cuantitativa concerniente a individuos, grupos, series de hechos, etc. Y deducir de ello gracias al análisis de estos datos unos significados precisos o unas previsiones para el futuro. La estadística, en general, es la ciencia que trata de la recopilación, organización, presentación análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisiones más efectiva.

La Estadística para su estudio y comprensión se ha dividido en dos ramas (Ruiz Muñoz, 2004) menciona lo siguiente:

Estadística Descriptiva: consiste sobre todo en la presentación de datos en forma de tablas o gráficas. Esta comprende cualquier actividad relacionada con los datos y está diseñada para resumir o describir los mismos sin factores pertinentes adicionales; esto es, sin intentar inferir nada que vaya más allá de los datos, como tales. Es decir, se realizará un análisis deductivo con la información resultante.

Estadística Inferencial: se deriva de muestras, de observaciones hechas solo acerca de una parte de un conjunto de número de elementos, y esto implica que su análisis requiere de generalizaciones que van más allá de los datos. Como consecuencia, la característica más importante es el énfasis de los métodos que sirven para hacer generalizaciones, por lo que esta investiga o analiza una población partiendo de una muestra tomada. Por lo tanto, infiere conclusiones sobre una población basándose en los resultados obtenidos de una muestra.

Definiciones de términos estadísticos

Para mejor entendimiento se realiza la revisión de algunos términos básicos. Al respecto Gómez et al., (n.d.) mencionan los siguientes:

Población: Es el conjunto de personas, objetos, ideas o acontecimientos sometidos a una observación estadísticas. Ejemplo: los aspirantes a soldados de la ESFORSFT, promoción 2022-2024.

Muestra: Es un conjunto de la población. Ejemplo: Los aspirantes a soldados del paralelo “M” de la ESFORSFT.

Carácter o variable: Cada una de las propiedades, rasgos o cualidades que poseen los elementos de una población y que son objeto de estudio.

Parámetro: es un valor numérico calculado a partir de una fórmula matemática, obtenida a partir de datos de la población.

Estadístico: es un valor numérico derivado de un conjunto de datos de una muestra, con el objetivo de estimar o inferir características de una población o modelo estadístico. Se trata de una variable aleatoria que depende de la muestra.

Variable

Como se mencionó, son propiedades, rasgos o cualidades que poseen los elementos de una población y que son objeto de estudio, al respecto, la Universidad Católica del Uruguay, (2012) establece que según la forma en la que se expresan las variables se dividen en:

Variable cualitativa: son aquellas que pueden expresarse solo en forma de atributo. Ejemplo:

1. Estado civil: soltero, casado, viudo, separado.
2. Satisfacción de un producto: muy satisfecho, regularmente satisfecho, neutral, satisfecho, muy satisfecho.
3. Tamaño de un tablero: grande, mediano, pequeño.

Variable cuantitativa: son aquellas variables que pueden expresarse en forma numérica. Esta a su vez la se puede subdividir en:

Variable Cuantitativa Discreta: son las respuestas numéricas que surgen de un proceso de conteo, siendo siempre un número entero.

Ejemplo:

1. Número de asignaturas inscritas en el primer semestre.

2. Número de integrantes de un grupo familiar
3. Número de salas de clase.

Variables Cuantitativas Continuas: son respuestas numéricas que surgen de un proceso de medición, las cuales pueden tomar valores entre dos números enteros.

Ejemplo:

1. Estatura
2. Temperatura
3. Peso.

Determinación de la muestra

Diseñar una muestra ideal implica la aplicación de un proceso que permite reducir tiempo y recursos económicos a fin de recolectar datos representativos de una población y obtener información valiosa para el análisis y la toma de decisiones.

Proceso de Muestreo

Según (Fullframe, n.d.), presenta un proceso para la aplicación del proceso de muestreo.

Tamaño de la Muestra

Para fijar un tamaño de la muestra en una determinada investigación, dependerá y quedará determinado por el tipo de población (finita o infinita), el nivel de confianza y el porcentaje de error (la precisión) que esté dispuesto a admitir el investigador. En este sentido, existen diversas fórmulas estadístico-matemáticas para precisar el tamaño de la muestra sobre una base estadística, que permita estimar la representatividad de una muestra siguiendo ciertos parámetros críticos, a niveles aceptables de probabilidad (Silva, 2011) (Corral et al., 2015).

El autor especifica que, para realizar el cálculo de una muestra cuantitativa se emplean fórmulas estadísticas que necesitan valores tales como:

- *Tamaño de la población (N).* Si N es mayor a 100 mil, el tamaño de la muestra será suficiente con 370; pero, si es menor a 100 mil se debe usar una fórmula.

- *Nivel de confianza.* Aconseja sea de 95%.
- *Tamaño aproximado de la proporción (p, q).* Si no se conoce, puede suponerse sea de 50% (0,5) cada una.
- *Error máximo admisible.* Máximo de 5%.

La fórmula a utilizar cuando es desconocido el tamaño de la población o es estadísticamente infinita.

$$n = \frac{(Z_{\alpha})^2 * p * q}{e^2}$$

En donde:

n = tamaño de la muestra

e = error máximo de estimación (se recomienda entre 1% y 15%; o su determinación por el comportamiento probabilístico)

Z_{α} = nivel de confianza seleccionado por el investigador. (Para 99% equivale a 2,58. Para 95% es igual a 1,96)

p = probabilidad de éxito

q = probabilidad de fracaso (1-p)

En cuanto a e (error máximo de estimación); a mayor error de estimación menor número muestral y a menor error de estimación mayor será el número muestral.

Ejemplo

En la ESFORSFT se presentaron un número elevado de aspirantes para la promoción 2019-2021, se necesita conocer la muestra aleatoria para aplicar una encuesta sobre la Vida Militar; si se considera un nivel de significación del 95%.

Nota: cuando no se dan porcentajes se considera que el valor de p=0,5 y q=0,5 y se denomina varianza (s^2); se determina así: $p * q = 0,25$.

Datos:

p = 50% o 0.5 q = 50% = 0.5 z = 1.96 e = 0.05

Solución:

$$n = \frac{Z_{\alpha}^2 * p * q}{e^2} \qquad n = \frac{1.96^2 * 0.5 * 0.5}{0.05^2} \qquad n = \frac{3.8416 * 0.25}{0.0025}$$

$$n = 384,16 \qquad n = 384$$

El tamaño de la muestra es de 384 aspirantes que desean ingresar a la ES-FORSFT.

Además, los autores establecen que para poblaciones finitas la fórmula será:

$$n = \frac{(Z_{\alpha})^2 * p * q * N}{e^2(N - 1) + pq(Z_{\alpha})^2}$$

En donde:

n = tamaño de la muestra

Z_{α} = nivel de significación (Para 99% equivale a 2,58. Para 95% es igual a 1,96)

e = máximo error permitido (ejemplo: 2% = 0,02)

p = nivel de aceptación (ejemplo: 50% = 0,5)

q = nivel de rechazo (ejemplo: 50% = 0,5) N = población total

Ejemplo

La Escuela de Soldados admite cierto número de aspirantes para su ingreso, si se conoce que rindieron las pruebas 2145, ¿cuántos aspirantes podrían ingresar luego de haber cumplido todos los exámenes y pruebas físicas?

Datos:

Nivel de Confianza = 95%;

Error de estimación= 5%

Probabilidad de éxito = 50% (0.5)

Solución:

$$n = \frac{(Z_{\alpha})^2 * p * q * N}{e^2(N - 1) + p * q * (Z_{\alpha})^2}$$

$$n = \frac{2145 * 1,96^2 * 0,5 * 0,5}{0,05^2(2145 - 1) + 1,96^2 * 0,5 * 0,5}$$

$$n = \frac{2145 * 3,8416 * 0,25}{0,05^2(2144) + 3,8416 * 0,25}$$

$$n = \frac{2060,058}{5,36 + 0,9604}$$

$$n = \frac{2060,058}{6,3204}$$

$$n = 325,9379 \quad n = 326$$

Regla de Sturges

La regla de Sturges es un criterio utilizado para determinar el número de clases o intervalos que son necesarios para representar gráficamente un conjunto de datos estadísticos. El método se basa en el número de muestras (x) que permitiesen encontrar el número de clases y su amplitud de rango. La regla es muy utilizada sobre todo en el área de la estadística, específicamente para construir histogramas de frecuencia (D'Alessio Torres, 2021).

Se recalca que es un método empírico utilizado en la estadística descriptiva para determinar el número de clases que deben existir en un histograma de frecuencias, para así poder clasificar un conjunto de datos que representan una muestra o población. Su fórmula para el cálculo es:

$$K = 1 + 3,322 * \log_{10}N$$

En donde:

k es el número de clases.

N es el número total de observaciones de la muestra.

$\log$ es el logaritmo común de base 10.

Ejemplo

De acuerdo a los datos dados, que corresponden a edades obtenidas en una encuesta realizada a hombres que hacen ejercicios en un gimnasio de la localidad.

Se aplica la regla de Sturges:

$$K = 1 + 3,322 * \log_{10}N$$

$$K = 1 + 3,322 * \log_{10}(30)$$

$$k=1+3,322*1,4771$$

$$k = 5,90 \approx 6 \text{ intervalos.}$$

A partir del número de intervalos, se puede calcular la amplitud que estos van a tener:

$$a = \frac{(\text{limite superior} - \text{limite inferior})}{K}$$

El límite inferior: el valor menor de los datos

El superior es el valor mayor.

La diferencia entre el límite superior e inferior es denominada rango o recorrido de la variable (R).

De la tabla se tiene que el límite superior es 46 y el inferior 13; de esa manera, la amplitud de cada clase será:

$$a = \frac{(46 - 13)}{6}$$

$$a = 5,5 \approx 6$$

Los intervalos estarán compuestos por un límite superior e inferior. Para determinar esos intervalos se comienza contando desde el límite inferior, sumándole a este la amplitud determinada por la regla (6), de la siguiente manera:

Límite Inferior = Límite Superior + 1	Límite Superior = Li+ amplitud - 1	Intervalos
13	13+6-1=18	13-18
18+1 = 19	19+6-1=24	19-24
24+1 = 25	25+6-1=30	25-30
30+1 = 31	31+6-1=36	31-36
36+7 = 37	37+6-1=42	37-42
42+1 = 43	43+6-1=48	43-48

Tipos de muestreo

Siguiendo a Vargas Pereira, (2020) menciona que en el caso del muestreo al azar o probabilístico, se identifican los principales métodos de muestreo:

Muestreo aleatorio simple

En este se selecciona una sola muestra y todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser escogidos para la muestra.

Ejemplo:

Supongamos que una población consta de 845 soldados de una unidad militar. Se selecciona aleatoriamente una muestra de 52, partiendo de esta población.

Solución:

Una forma de asegurar que todos los soldados en la población tengan la misma oportunidad de ser elegidos, sería escribiendo el nombre de cada uno en una papeleta y depositar en un ánfora todos los papeles. Después que se han mezclado bien, se realiza la primera selección. Este proceso se repite hasta que se elijan los 52 que sería el tamaño de la muestra.

Muestreo aleatorio sistemático

En este método de muestreo se cuenta, por lo general, con una lista que contiene todos los elementos de la población ordenados según algún criterio, como orden alfabético, fecha de la transacción, si el orden en el que se encuentran los elementos no tiene relación con las características que se desea estudiar, entonces se puede aplicar el muestreo sistemático para elegir la muestra aleatoria.

El procedimiento consistiría en elegir cada k -ésimo elemento de la lista para que forme parte de la muestra. Por ejemplo, si se tiene una lista de 1 000 elementos de determinada población y se desea formar una muestra de 100 de ellos, se elegiría cada décimo elemento de la lista como parte de la muestra, sorteando el primero de ellos; en otras palabras, se podría sortear fácilmente en cuál de los primeros 10 elementos se debe comenzar y a partir de allí, elegir para la muestra cada décimo elemento; si se comenzara con el elemento 4 el segundo elemento de la muestra sería el que ocupe el lugar 14 de la lista, el tercero sería el número 24, y así sucesivamente.

Muestreo aleatorio estratificado:

Este tipo de muestreo se divide la población en subconjuntos, normalmente unos pocos, a los que se denomina estratos, para después sacar una muestra aleatoria simple en cada uno de estos estratos, al obtener los resultados de cada estrato se les combina para sacar una estimación para la población como un todo, se aplica este esquema de muestreo cuando la variabilidad (desviación estándar) de la variable de interés es menor dentro de cada uno de los estratos que en la población como un todo; si se cumple esto, las estimaciones que se calculan mediante muestreo aleatorio estratificado son más precisas que las que se obtienen utilizando muestras aleatorias simples en la misma población.

Un ejemplo de un estudio que pudiera convenir realizar mediante muestreo estratificado sería el estudio del promedio de ingresos de una población heterogénea; se podría estratificar la población en clases baja, media y alta, de esta manera, la dispersión de la variable de ingresos sería menor en cada uno de los estratos que en la población completa.

Muestreo aleatorio por conglomerados:

Este tipo de muestreo se divide a la población en subgrupos a los que se denomina conglomerados, y que son relativamente pequeños (con pocos elementos) para después obtener una muestra aleatoria de conglomerados, el criterio que se sigue para conformar los conglomerados es que sus elementos sean similares entre sí en términos de las características de interés, este método de muestreo resulta especialmente útil cuando no se dispone de un listado de todos los elementos de la población o cuando estos elementos están separados físicamente entre sí por distancias considerables, se agrupa a los elementos de los conglomerados de acuerdo con su homogeneidad.

Un ejemplo de un estudio en el que convendría el muestreo por conglomerados sería cuando se desea estudiar una población conformada por las familias de un área urbana grande, en este caso, es prácticamente imposible obtener un listado de todas las familias involucradas, pero si se puede obtener un plano detallado y completo de la zona, se podría considerar que las manzanas o cuadras del plano son los conglomerados y elegir una muestra aleatoria de ellos para conformar la muestra.

Taller 34

1. Clasificar si es muestra o población.

- a. El salario de 20 soldados de una enorme compañía. _____
- b. Hacer una encuesta a 315 Aspirantes que entraron a la ES-FORSFT de los 1540 Aspirantes que aprobaron los exámenes.

- c. Hacer un estudio socio económico de los 1200 aspirantes.

2. Indicar qué variables son Cualitativas y cuáles Cuantitativas:

- a. Comida Favorita. _____
- b. Profesión que te gusta. _____
- c. Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada. _____
- d. Número de alumnos de la ESFORSFT. _____

- e. El color del uniforme de la ESFORSFT. _____
- f. Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase. _____

3. De las siguientes variables indicar cuáles son Discretas y cuáles son Continuas

- a. Número de hermanos que tiene un Aspirante. _____
- b. Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.

- c. Duración de la carrera de Tecnología Militar _____
- d. El diámetro de las ruedas de varios coches. _____
- e. Número de hijos de 50 familias. _____

4. Clasificar las siguientes variables en Cuantitativas Discretas o Continuas.

- a. Número de litros de agua contenidos en un depósito.
- b. Número de libros en un estante de librería.

- c. Suma de puntos obtenidos en el lanzamiento de un par de dados

- d. El área de las distintas baldosas de un edificio.

5. ¿Qué tan grande debe de seleccionarse una muestra para tener un intervalo de confianza de 95% con un margen de error de 10%?

6. Los salarios anuales iniciales de los aspirantes que acaban de terminar una carrera en Ciencias Militares se espera que estén entre USD 1085 y USD 980. Suponga que quiere dar un intervalo de confianza de 92%. ¿Cuán grande deberá ser la muestra? si se quiere que el margen de error sea de 0.08.

7. En un estudio el valor planeado para la proporción poblacional es $p = 0.35$. ¿De qué tamaño se debe tomar la muestra para dar un intervalo de confianza de 96% con un margen de error de 0.06%?

8. Una empresa particular desea encuestar a los aspirantes a soldados a nivel nacional para conocer qué proporción de los seleccionados; conoce la opinión de ella, respecto al uso de los gastos incurridos en su

preparación. ¿Qué tamaño de muestra se necesita si se requiere una confianza del 95% y un error máximo de estimación de 0.5%?

Distribución de frecuencias

Los datos de una muestra deben ser resumidos y organizados para su análisis e interpretación, para lograr este propósito de una forma eficiente se utilizan las denominadas tablas de distribución de frecuencias. Tomando en consideración a Vargas Pereira, (2021), se efectúa la definición de los distintos elementos que conforman la distribución de frecuencias.

Frecuencia

Es el número de elementos que cumplen la condición de la categoría que se propone.

Frecuencia absoluta

La frecuencia absoluta corresponde a la cantidad de datos que cumplen con la característica de la clase. Es decir, que se encuentran dentro del intervalo de la clase o que son parte de la categoría. La suma de todas las casillas en la columna de frecuencia absoluta debe ser igual al total de personas en el estudio. Se representa con la (f).

Frecuencia acumulada

La frecuencia acumulada de una clase es la suma de las frecuencias absolutas para esa clase y todas las clases anteriores. Se representa por fa.

Frecuencia relativa

Una frecuencia relativa es una proporción o un porcentaje que representa que tan representativa es la frecuencia absoluta con respecto al total de encuestados. El principio básico de una frecuencia relativa corresponde al cálculo de la proporción o razón entre la frecuencia absoluta y el total, tal y como se expresa en la siguiente fórmula:

$$fr = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Total}}$$

La suma de todas las frecuencias relativas debe ser 1.

Porcentaje de la frecuencia

Si se desea calcular en porcentaje se realiza a través de la siguiente fórmula:

$$Fr = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Total}} * 100\%$$

La suma del porcentaje de la frecuencia debe ser 100%.

Ejemplo:

Durante el mes de julio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas:

34 32 33 28 29 35 32 31 29 30 33 31 33
 30 27 30 32 30 28 34 32 30 31 35 29 30
 33 32 33 29 31 34 32 33 29 34 33 30 33
 34 27 30 33 30 28 31 29 30 31 30 29 35
 32 28 33 30 29 30

En la primera columna de la tabla colocamos la variable ordenada de menor a mayor, en la segunda se hace el recuento y en la tercera se anota la frecuencia absoluta.

X (VARIABLE)	CONTEO	f (FRECUENCIA ABSOLUTA)	Fa (FRECUENCIA ACUMULADA)	Fr (FRECUENCIA RELATIVA)	P% (P= f*100/ N)
27	II	2	2	0,0345	3,45%
28	IIII	4	6	0,0690	6,90%
29	IIIIIIII	8	14	0,1379	13,79%
30	IIIIIIIIII II	13	27	0,2241	22,41%
31	IIIII	6	33	0,1034	10,34%
32	IIIIII	7	40	0,1207	12,07%
33	IIIIIIIIII	10	50	0,1724	17,24%
34	IIIII	5	55	0,0862	8,62%
35	III	3	58	0,0517	5,17%
		58		1,000	100 %

Taller 35

1. Las edades de los habitantes de un barrio de la ciudad se registran en el siguiente cuadro:

42	60	60	38	60	63	21	66	56	57	51	57	44
45	35	30	35	47	53	49	50	49	38	45	28	41
47	42	53	32	54	40	63	38	56	28	54	36	57
47	35	53	52	65	63	60	60	38	60	63	21	66
56	57	51	57	44	45	35	30	35	47	53	49	50
49	38	45	28	45	47	42	53	32	54	40	63	38
56	28	54	36	57	47	35	53	52	65	48	52	

Determinar lo siguiente:

- Conteo de datos
 - Frecuencia absoluta (f)
 - Frecuencia acumulada (fa)
 - Frecuencia relativa (fr)
 - Porcentaje de frecuencia (p)
2. Los resultados de la evaluación de Matemáticas del paralelo "G" fueron los siguientes:

19	15	17	14	16	20	16	15	20	19	16	17
14	16	17	15	14	20	16	17	19	20	15	14
17	18	15	20	19	18	13	14	13	15	18	13
19	17	14	16	18	19	13	17	14			

Determinar lo siguiente:

- Conteo de datos
- Frecuencia absoluta (f)
- Frecuencia acumulada (fa)
- Frecuencia relativa (fr)
- Porcentaje de frecuencia (p)

3. Los salarios de los trabajadores de una empresa en dólares, son los siguientes:

255	265	260	258	270	280	300	265	260	275	270	275
270	255	280	310	320	315	305	310	315	305	290	270
285	255	260	270	280	300	315	295	285	250	260	285
275	265	285	295	290	305	310	315	320	295	305	320
315	305	250	265	287	320	300	305	295	290	315	315

Determinar lo siguiente:

- Conteo de datos
- Frecuencia absoluta (f)
- Frecuencia acumulada (fa)
- Frecuencia relativa (fr)
- Porcentaje de frecuencia (p)

Ordenación de datos en tablas de frecuencia

Existen diversos tipos de datos que pueden ser recogidos de distintas formas, pero lo fundamental es que estos datos sean ordenados a fin de que sea más eficiente su análisis y la obtención de conclusiones válidas. Spiegel & Stephens (2008) efectúa una clara identificación de los componentes involucrados en una tabla de distribución de frecuencias como se observará a través del siguiente cuadro:

Estatura (in)	Cantidad de estudiantes
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
Total	100

Datos en bruto

Corresponde a los datos recolectados que aún no se han organizado. Por ejemplo, las estaturas de 100 estudiantes tomados de la lista alfabética de una universidad.

Ordenaciones

Son los datos numéricos en bruto dispuestos en orden creciente o decreciente de magnitud.

Rango

A la diferencia entre el número mayor y el número menor de los datos. Por ejemplo, si la estatura mayor en los 100 estudiantes es 74 pulgadas (in) y la menor es 60 in, el rango es $74 - 60 = 14$ pulgadas (in).

Distribuciones de frecuencia

La disposición tabular de los datos en clases con sus respectivas frecuencias de clase.

Clases o categorías

Al organizar una gran cantidad de datos en bruto, suele resultar útil distribuirlos en una tabla de distribución de frecuencias. Ejemplo 60 – 62, 63 – 65, 66 – 68, 69 – 71, 72 – 74.

Frecuencia de clase

Cantidad de datos que pertenece a cada clase. Ejemplo de 62 – 62, la frecuencia es 5.

Datos agrupados

A los datos organizados y resumidos como en la distribución de frecuencias; sin embargo, al agrupar los datos se pierden muchos de los detalles originales de los datos, esto tiene la ventaja de que se obtiene una visión general clara y se hacen evidentes las relaciones.

Límites de clase

Los números de los extremos, 60 y 62, se les conoce como límites de clase; el número menor (60) es el límite inferior de clase, y el número mayor (62) es el límite superior de clase.

Intervalo de clase

Los términos clase e intervalo de clase se suelen usar indistintamente, aunque el intervalo de clase en realidad es un símbolo para la clase. Un intervalo

de clase que, por lo menos teóricamente, no tenga indicado el límite de clase superior o el límite de clase inferior, se conoce como intervalo de clase abierto. Por ejemplo, al considerar grupos de edades de personas, un intervalo que sea “65 años o mayores” es un intervalo de clase abierto.

Fronteras de clase

Si las estaturas se registran a la pulgada más cercana, el intervalo de clase 60-62 comprende teóricamente todas las mediciones desde 59.50 hasta 62.50 in. Estos números que se indican brevemente mediante los números exactos

59.5 y 62.5 son las fronteras de clase o los límites de clase reales; el menor de los números (59.5) es la frontera inferior de clase y el número mayor (62.5) es la frontera superior de clase.

Las fronteras de clase se obtienen sumando el límite superior de un intervalo de clase al límite inferior del intervalo de clase inmediato superior y dividiendo entre 2.

Tamaño o amplitud de un intervalo de clase

El tamaño, o la amplitud, de un intervalo de clase es la diferencia entre sus fronteras superior e inferior y se le conoce también como amplitud de clase, tamaño de clase o longitud de clase. Si en una distribución de frecuencia todos los intervalos de clase tienen la misma amplitud, esta amplitud común se denota c . En este caso, c es igual a la diferencia entre dos límites inferiores de clases sucesivas o entre dos límites superiores de clases sucesivas.

La marca de clase

La marca de clase es el punto medio del intervalo de clase y se obtiene sumando los límites de clase inferior y superior y dividiendo entre 2. Así, la marca de clase del intervalo 60-62 es $(60 + 62) / 2 = 61$. A la marca de clase también se le conoce como punto medio de clase.

Tabulación de datos

En la estadística para que sea fácil su interpretación y visualización de los datos se la presenta en tablas y gráficas. Al respecto, (Díaz Mata, 2013) establece que uno de los principales criterios de clasificación para propósitos estadísticos es el que se refiere a cuántas variables contiene la tabla; por lo tanto, la forma en la que se organiza el conjunto de datos depende de la cantidad

de información disponible, la misma que se presentan en una tabla llamada series, siendo esta de tres tipos: series simples, series de datos y frecuencias, y series de clases y frecuencias.

Series simples

A las series en las que, a cada dato del hecho estudiado, se les asigna de manera unívoca el valor extraído de la observación. En otras palabras, debido a que se cuenta con pocos elementos, será posible indicar qué valor de la característica de interés pertenece a determinado sujeto; o bien, cuando se cuente con pocos datos, estos pueden ser manejados con facilidad en forma de listado (Buenas Tareas, 2012).

Ejemplo:

Un grupo de tres soldados tienen la tarea de medir la altura de 10 árboles plantados, siendo sus resultados lo siguientes:

$$X_i \text{ cm} = 38, 14, 44, 11, 9, 21, 39, 28, 41, 35$$

Lo que significa que i va desde 1 hasta 10, entonces:

$$X_1 = 38$$

$$X_2 = 14$$

$$X_3 = 44$$

$$X_4 = 11$$

$$X_5 = 9$$

$$X_6 = 21$$

$$X_7 = 39$$

$$X_8 = 28$$

$$X_9 = 41$$

$$X_{10} = 35$$

Series de datos y frecuencias

En las tablas de frecuencias se agrupan los datos de manera que si existen observaciones repetidas (datos con el mismo valor) no se enumera cada una

de ellas, sino que se menciona una sola vez el valor repetido, y a éste se le asocia el número de repeticiones (frecuencia de aparición). El nombre de estas tablas se debe a que en una columna se identifican los datos, los valores que toma la variable (x), y en una segunda columna se especifica la frecuencia (f) con la que aparece cada valor. Obsérvese que esa x que se usa como encabezado de los valores de la variable es la forma común de identificar la columna que contiene los datos, mientras que la f identifica la frecuencia de aparición de cada uno de aquellos (Díaz Mata, 2013).

Ejemplo:

Los datos del cuadro estadístico que se presenta a continuación representan la estatura de 25 aspirantes.

Altura x	Frecuencia f
159	1
160	4
161	4
162	3
163	4
164	3
165	2
TOTAL	21

Series de clases y frecuencias

Este tipo de series estadística consiste en establecer x , no por valores únicos, sino por intervalos o clases de valores, ubicando la frecuencia contando cuantos datos caen dentro de cada intervalo, resumiendo de esta manera los datos originales (Díaz Mata, 2013).

Ejemplo

En un estudio realizado a las madres de familia en la que se indaga la edad en la que tuvieron a su segundo hijo con respecto a la del primero fueron:

Edad X	Frecuencia f
1 – 3	40
4 – 6	4
7 – 9	36
10 – 12	12
13 – 15	8
TOTAL	100

Ejemplo:

En una encuesta realizada a los aspirantes a soldados de la ESFORSFT se obtuvieron los siguientes datos, en lo que se refiere a la edad de los padres:

48 49 51 50 55 67 36 41 41 41 47 49 52 49
60 79 36 42 45 46 49 51 55 60 45 37 40 46
45 49 51 56 61 38 40 45 46 49 52 55 61 39
40 45 45 50 51 56 65 37 43 47 45 50 50 55
65 36 44 45 49 50 51 57 66 37 41 45 49 50
50 57 66 34 40

- Se halla la amplitud de la serie: $a = 79 - 34 = 45$
- Proponemos que el ancho del intervalo sea 5: $i = 5$
- Se calcula el número de intervalo:

Es decir, que el número de intervalos es 10. Se forma la columna de los intervalos:

Li	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
Ls	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79

Si el límite superior del primer intervalo es 34, que es el mayor valor de la variable, entonces: $34 - 5 + 1 = 30$, que es el límite inferior del primer intervalo. (34 – 30). Los restantes intervalos se formarán sumando el ancho del intervalo ($i=5$) a los dos límites del intervalo anterior. Así:

$30 + 5 = 35$ $34 + 5 = 39$ Entonces el segundo intervalo es: $(35 - 39)$

$35 + 5 = 40$ $39 + 5 = 44$ El tercer intervalo es: $(40 - 44)$, y así sucesivamente.

- Se efectúa la ubicación y el conteo de los valores repetidos.
- Se construye la columna de las frecuencias haciendo corresponder a cada intervalo una frecuencia.

X	Valores que se repiten	f
30 - 34	I	1
35 - 39	IIIIIIII	8
40 - 44	IIIIIIIIII	11
45 - 49	IIIIIIIIIIII	15
50 - 54	IIIIIIIIIIIIII	22
55 - 59	IIIIIIII	8
60 - 64	IIII	4
65 - 69	IIII	5
70 - 74		0
75 - 79	I	1
TOTAL		75

Taller 36

- El profesor de Estadística de la ESFORST, obtuvo las siguientes calificaciones de los Aspirantes del paralelo "H":

20	18	17	16	15	14	13	15
16	14	12	11	13	14	15	17
13	12	10	12	14	15	12	14

Determinar:

- Ordenar en una serie estadística de frecuencia
- Construya la columna de la frecuencia acumulada
- Obtenga los porcentajes de la frecuencia.

2. Los notas de las Pruebas de Estadísticas del paralelo "A" son las siguientes:

15 12 16 18 20 10 20 18 17 19 20 14 15 20 18 20 20 19 18 19 15 14 16 17 18 19 20 16 15 14

Determinar:

- La serie estadística de intervalo
- Amplitud total o Recorrido de la variable (a)
- Ancho del intervalo (i)
- Número de intervalos (ni)
- Marca de clase (X_m)
- Frecuencia relativa

3. Los datos que se muestran a continuación representan el gasto del rancho de los aspirantes del mes de septiembre de 2020; para una muestra aleatoria de 52.

Gasto de los Aspirantes del rancho del mes de septiembre de 2017.

134	156	168	139	157	179	174	155	170	145	178	167	164
139	166	158	149	167	169	144	165	160	159	148	157	144
154	166	168	159	137	149	164	165	175	175	168	177	156
164	176	158	169	167	149	164	155	150	155	158	177	154

Determinar:

- La serie estadística de intervalo
- Amplitud total o Recorrido de la variable (a)
- Ancho del intervalo (i)
- Número de intervalos (ni)
- Marca de clase (X_m)

f. Frecuencia relativa

4. Los salarios de los padres de familia de los Aspirantes en dólares, son los siguientes:

255	265	260	258	270	280	300	265	260	275	270	275
270	255	280	310	380	370	320	315	305	310	315	305
290	270	285	255	260	270	280	300	315	295	285	345
345	390	250	260	285	275	265	285	295	290	305	310
315	320	295	305	320	315	305	360	250	320	356	375

- La serie estadística de intervalo
- Amplitud total o Recorrido de la variable (a)
- Ancho del intervalo (i)
- Número de intervalos (ni)
- Marca de clase (X_m)
- Frecuencia relativa

Representación gráfica

Sistemas de coordenadas cartesianas

La representación gráfica de los datos estadísticos se la desarrolla en un plano cartesiano. Según lo define la (UNAM - Facultad de Ingeniería Para desarrollar División de Ciencias Básicas, Coordinación de Matemáticas, 2011), el sistema de coordenadas cartesianas en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto “O” al que se le llama “el origen”. Una de las rectas se acostumbra representarla en posición horizontal y se le da el nombre de eje X o eje de las abscisas; a la otra recta, vertical, se le denomina eje Y o eje de las ordenadas, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Además, establece que la distancia de un punto al eje Y se le llama abscisa del punto, la distancia de un punto al eje X se le llama ordenada del punto.

- Las abscisas (valores de x) son positivas en el primero y en el cuarto cuadrante, en tanto que son negativas en el segundo y en el tercer cuadrante.

- Las ordenadas (valores de y) son positivas en el primero y en el segundo cuadrante, en tanto que son negativas en el tercero y en el cuarto cuadrante.
- Las abscisas son nulas ($x = 0$) para todos los puntos contenidos en el eje Y . Las ordenadas son nulas ($y = 0$) para todos los puntos contenidos en el eje X .

Representación gráfica estadística

Tomando lo mencionado por Alea Riera et al., (2015) la representación gráfica de los datos constituye un instrumento de gran utilidad ya que proporciona una imagen que permite:

- Captar de manera sencilla y rápida aspectos relevantes de la distribución de frecuencias,
- Mejorar la comprensión del fenómeno que se analiza,
- Detectar la presencia de errores en los datos.

A continuación, se explican las principales representaciones gráficas estadísticas de más uso:

Diagrama de barras

Para elaborar los gráficos, Alea Riera et al., (2015) sitúan las categorías o valores en el eje de abscisas y en el de ordenadas las frecuencias absolutas o relativas. Sobre la marca correspondiente a cada categoría o valor se alza una barra perpendicular al eje de abscisas de altura igual a su frecuencia.

- El perfil del diagrama es el mismo si se representan las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas.
- El criterio de orden de las categorías (datos cualitativos) más adecuado es el de mayor a menor frecuencia, mientras que el de los valores (datos cuantitativos) es de menor a mayor valor de X .
- El gráfico permite visualizar rápidamente las categorías o valores más o menos frecuentes.

Ejemplo 1:

Representar el número de estudiantes graduados como soldados en la ES-FORSFT

ASPIRANTES	f
2008-2009	1120
2009-2010	1340
2010-2011	1250
2011-2012	1350
2012-2013	945
2013-2014	765
2014-2015	690
2015-2016	650
TOTAL	8110

Ejemplo 2:

Con la siguiente tabla realizar el grafico de barras en forma vertical.

PROFESIONES	f
AGRICULTOR	23
MÉDICO	35
MILITAR	54
CHOFER	29
DOCENTE	48
INGENIERO	26
TOTAL	215

Diagrama de barras horizontales

En Y se colocan el valor de la variable; en las X se ubican las frecuencias absolutas, relativas o acumuladas.

PARALELO	f
A	28
B	34
C	42
D	22
E	37
F	25
TOTAL	188

Histogramas de frecuencias

(Alea Riera et al., (2015) menciona que se construye colocando en el eje de abscisas los intervalos en los que se agrupan los valores de la variable. Sobre cada intervalo se dibuja un rectángulo cuya área debe ser igual o proporcional a su frecuencia.

- Si todos los intervalos son de igual amplitud, por comodidad, se dibujan los rectángulos con alturas iguales a las frecuencias. En este caso, el área de los rectángulos será proporcional a la frecuencia.
- Si la amplitud del intervalo es variable se debe calcular su densidad o altura de los rectángulos. En este caso, el área de los rectángulos será igual a la frecuencia del intervalo.

$$Densidad = Altura = \frac{Frecuencia}{Amplitud}$$

En el histograma:

- Las áreas y no las alturas de los rectángulos son las que representan las frecuencias.

- La altura de los rectángulos informa sobre la densidad o concentración de observaciones en el intervalo.
- El área total es igual o proporcional al tamaño de la muestra.
- Si se representan las frecuencias relativas, el área total es igual o proporcional a 1.
- El perfil del histograma depende de la elección del número y la amplitud de los intervalos.
- El perfil del histograma es el mismo tanto si se representa la distribución de frecuencias absolutas como la de frecuencias relativas.

ESPECIALIDADES	f
Ingeniería	132
Medicina	234
Docencia	234
Mecánico	110
Psicólogo	80
Militar	135
Contador	75
TOTAL	1000

Polígonos de frecuencias

Es un gráfico de acuerdo con lo establecido por Alea Riera et al., (2015), sintetiza el perfil del histograma y suele presentarse superpuesto a este. El polígono se traza señalando las marcas de clase en el lado superior de los rectángulos del histograma. Se unen estos puntos de coordenadas (x_i, n_i) (marca de clase, frecuencia absoluta o relativa) con trazo continuo y se cierra el polígono prolongándolo en sus extremos hasta cortar el eje de abscisas en los puntos situados en las marcas de clase de dos hipotéticos intervalos trazados antes que el primero y después del último.

Aunque el histograma proporciona una representación sencilla y eficaz, el polígono de frecuencias, en algunas situaciones, presenta ventajas. Dos de las razones son:

- Es más fácil comparar polígonos de varias distribuciones superponiéndolos.
- La curva suavizada del polígono sugiere de forma más clara el posible modelo de probabilidad adecuado para describir el comportamiento de la población.

Ejemplo:

CARRERAS	f
Caballería	14
Infantería	24
Inteligencia	38
Artillería	21
Comunicación	28
Explosivos	18
Docentes	34
TOTAL	177

Polígonos de frecuencias acumuladas

El polígono de frecuencias acumuladas u ojiva según (Alea Riera et al., 2015), se utiliza para representar las distribuciones de frecuencias absolutas o relativas acumuladas correspondiente a una variable cuya distribución se ha tabulado agrupando los valores en intervalos por ser de naturaleza continua o discreta que toma muchos valores diferentes.

El polígono se construye situando en el eje de abscisas los límites de los intervalos definidos en la tabla y en el de ordenadas las frecuencias acumuladas. Se señalan los puntos correspondientes a los límites superiores y sus frecuen-

cias acumuladas, (Li, Ni) o (Li, Fi) , y con trazo continuo se unen dichos puntos, empezando por el punto $(L0, 0)$ (límite inferior del primer intervalo, frecuencia acumulada 0) y acabando en el punto (Lk, n) o $(Lk, 1)$ (límite superior del último intervalo, frecuencia total acumulada). Al realizar el gráfico, dado que ya no se dispone de las observaciones correspondientes a cada intervalo, se supone que éstas se reparten uniformemente en el intervalo, por lo tanto, la frecuencia se acumula de forma lineal.

Este tipo de gráfico es adecuado si se quiere:

- Localizar valores que acumulan una determinada frecuencia. Se fija la frecuencia acumulada en el eje vertical y se localiza el valor correspondiente en el eje horizontal.
- Obtener el número o el porcentaje de observaciones con “menos que” o “más que” un valor determinado. Se fija el valor en el eje horizontal y en el eje vertical se halla la frecuencia acumulada.
- Identificar el modelo de distribución poblacional o teórica asociado a la muestra analizada superponiendo los gráficos.

Ejemplo:

VARIABLE (X)	f	fa
16	8	8
23	16	24
25	22	46
12	15	61
28	27	88
16	8	96
24	4	100
TOTAL	100	

Diagrama de sectores

Para (Ramos Arcas, n.d.), consiste en una gráfica circular subdividida en áreas donde cada una de las cuales es proporcional a la frecuencia de la modalidad que representa. La circunferencia entera representa el 100% de un todo mientras las partes forman proporciones de la cantidad total. Su uso está completamente arraigado en la población y es por esto que resulta muy habitual verlo en todos los niveles.

Uno de los puntos fuertes de esta gráfica es que el mensaje es dividido en partes que conforman el total de la muestra a analizar. Sin embargo, aunque a priori dichas partes puedan visualmente resultar obvias, a la hora de decodificar su significado en términos cuantitativos podríamos tener algún inconveniente si no se trataran de ratios (un cuarto, un tercio, tres cuartos, etc.).

Ejemplo:

Representar en un diagrama de sectores a los aspirantes por las insignias o armas: Para esto debemos distribuir los 360 grados para los tres niveles, utilizando para ello la siguiente fórmula:

INSIGNIAS	f
Artillería	23
Infantería	35
Caballería	44
Inteligencia	38
Comunicación	27
Aviación	33
TOTAL	200

Taller 37

1. Represente gráficamente en el plano cartesiano, los puntos:

A (4, 5); B (-3, 8); C (-6, -6); D (8, -2); E (6, 0); F (-5, 0); G (0, 2); H (0, -7); O (0, 0); P (-4, -5)

2. Represente gráficamente en un plano cartesiano y una con rectas, los puntos:

- $(-8, 0)$; $(-6, 5)$ y $(-2, 2)$
- $(1, 3)$; $(3, 7)$; $(8, 3)$ y $(6, 7)$
- $(-7, -4)$; $(-7, -8)$; $(-3, -4)$ y $(-3, -8)$
- $(5, -2)$; $(2, -5)$; $(5, -8)$ y $(8, -5)$

3. En un estudio realizado en Guayaquil en el mes de enero se determinó que las marcas más vendidas de automóviles fueron las siguientes: Chevrolet, Pontiac, Hyundai, Kia, Cadillac

- Trace una gráfica de barras que muestre la frecuencia de cada marca de automóvil.
- Trace un diagrama de sectores

4. Un pediatra obtuvo la siguiente tabla sobre los meses de edad de 50 niños de su consulta en el momento de andar por primera vez:

	170	176	180	185	170	176
	162	162	185	170	176	180
	160	167	167	180	162	176
	185	176	167	170	185	176
	187	170	162	176	170	167

- Trazar el Histograma de frecuencia
- Trazar el polígono de frecuencias.

5. Sea una distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

X	f
160	1
162	4
167	4
170	6
176	7
180	3
185	4
187	1
TOTAL	30

- Trace una gráfica de barras
- Trace un diagrama de sectores

ACTIVIDADES AUTÓNOMAS (Ver Anexo)

Medidas de tendencia central

Media aritmética

La media aritmética, también conocida como promedio, es una medida que (...) se calcula sumando el total de los datos o valores de la variable para luego dividir esa suma entre el número de datos sumados. A esa medida común se le llama indistintamente media, promedio o media aritmética (Díaz Mata, 2013).

Mediana

“La mediana de un conjunto de números acomodados en orden de magnitud (es decir, en una ordenación) es el valor central o la media de los dos valores centrales” (Spiegel & Stephens, 2008).

Moda

La moda de un conjunto de números es el valor que se presenta con más frecuencia; es decir, es el valor más frecuente. Puede no haber moda y cuando la hay, puede no ser única (Spiegel & Stephens, 2008).

Series simples

Media aritmética de una serie estadística simple

La forma completa de acuerdo a Díaz Mata, (2013), para su cálculo se lee como la media es igual a la sumatoria desde i igual a 1 hasta n , de las observaciones X_i . Sin embargo, en lo sucesivo se simplifica la notación del operador de la sumatoria y se le quitan el subíndice y el superíndice, como en la fórmula que se indica posteriormente, ya que, por lo general, estas expresiones se entienden adecuadamente sin esos índices.

Fórmula completa:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Fórmula sin quitan el subíndice y el superíndice:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

Ejemplo:

Determinar la media aritmética de los pesos expresados en kilos de un grupo de estudiantes de la ESFORSFT, cuyos valores son los siguientes: 67, 75, 83, 70, 77.

$$\bar{x} = \Sigma X/n$$

$$(X) = (67 + 75 + 83 + 70 + 77)/5$$

$$\bar{X} = 74,4$$

Mediana de una serie estadística simple

La mediana es el valor que ocupa el lugar central en una serie ordenada.

El procedimiento para encontrar la mediana para Díaz Mata, (2013) es el siguiente:

- Ordenar la serie, normal, aunque no necesariamente, de menor a mayor.
- Determinar la posición central, esta se encuentra dividiendo entre 2 el número de elementos más 1 o, en símbolos, $(n + 1) / 2$.

- Identificar el valor que ocupa esta posición central, que es la mediana

Ejemplo:

N par	N impar
1,4,6,7,8,9,12,16,20,24,25,27	1,4,6,7,8,9,12,16,20,24,25,27,30
$Me = \frac{9 + 12}{2} = 10,5$	$Me = 12$

Moda de una serie estadística simple

“La moda es el valor que más se repite, es decir, el que tiene mayor frecuencia” (Díaz Mata, 2013).

En las series estadísticas simples que corresponde a la variable coeficiente intelectual de un grupo de personas se obtienen los siguientes datos:

130 – 128 – 120 – 120 – 110 – 115

La moda es 120, debido al ser valor que más veces se repite.

Taller 38

1. Hallar la media aritmética, mediana y moda de las siguientes series estadísticas:
 - a. 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6.
 - b. 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5, 3
 - c. 1, 3, 5, 2, 7, 6, 5, 4, 9, 1, 1, 5
2. Determinar la media aritmética, la mediana y la moda de la serie estadística que corresponden a puntajes de un grupo de Aspirantes en relación con la memoria de dígitos:

13, 12, 11, 11, 11, 10, 10, 8, 7

Serie de datos y frecuencias

Media aritmética de una serie de datos y frecuencias

En el cálculo de la medida aritmética de una serie estadística de frecuencias Díaz Mata, (2013), resume el procedimiento en los siguientes puntos:

- Multiplicar cada dato por la frecuencia correspondiente: $f(x)$
- Sumar estos productos: $\Sigma f(x)$
- Dividir esta suma entre el número de elementos; es decir, la suma de las frecuencias: Σf . Nótese, además, que la suma de las frecuencias es igual al número de elementos o, en símbolos: $\Sigma f_i = n$

Este procedimiento se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n}$$

En donde:

$\bar{x}$ = Media Aritmética

$\sum x * f$ = Sumatoria del producto de los valores de la variable (x) y la frecuencia (f)

n= número de datos

Ejemplo:

Los datos del cuadro estadístico siguiente corresponden a estaturas en centímetros de 25 Aspirantes.

X	f	x . f
159	1	159
160	4	640
161	4	644
162	3	486
163	4	652
164	3	492
165	2	330
166	2	332
167	2	334
	25	4069

$$\underline{X} = \frac{4069}{25} = 162,76 \text{ cm.}, \text{ que es la estatura promedio de las 25 personas.}$$

Mediana de una serie de datos y frecuencias

Siguiendo el procedimiento de Díaz Mata, (2013) la mediana es el valor que ocupa la posición intermedia en la serie ordenada y esta posición se determina de la siguiente manera:

$$\text{Posición de la mediana} = \frac{n + 1}{2}$$

La aplicación de la posición de la media se lo realizará en la columna de la frecuencia acumulada (fa).

Ejemplo:

X	f	fa
159	1	1
160	4	5
161	4	9
162	3	12
163	4	16
164	3	19
165	2	21
166	2	23
167	2	25
	25	

$$\text{Posición de la mediana} = \frac{25 + 1}{2}$$

$$\text{Posición de la mediana} = 13$$

El valor de la variable que corresponde a la mediana es $X = 163$

Moda de una serie de datos y frecuencias

A partir de la definición de moda es claro que la manera más conveniente de determinarla es a partir de una serie de datos agrupados en frecuencias.

Ejemplo:

Al tabular una encuesta aplicada a los estudiantes de la ESFORSFT acerca del número de hermanos de cada uno de ellos se obtuvieron los siguientes datos:

En este caso la Moda es 4, porque el valor 16 corresponde a la mayor frecuencia

X	f
1	3
2	10
3	10
4	16
5	14
6	7
7	8
8	7
9	1
10	0
11	2
12	1
	79

Taller 39

1. **Un dentista observa el número de caries en cada uno de los 100 niños de cierto colegio. La información obtenida aparece resumida en la siguiente tabla:**

Determinar:

- a. La media aritmética
- b. Mediana
- c. Moda
- d. Dibujar el diagrama de barras (vertical)

2. **El resultado de lanzar dos dados 120 veces viene dado por la tabla:**

Determinar:

- a. La media aritmética
- b. Mediana
- c. Moda
- d. Dibujar el diagrama de sectores.

3. **Las puntuaciones obtenidas por un grupo de Aspirantes de en una prueba han sido:**

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

Construir la tabla de la serie estadística de frecuencias

Determinar:

- a. La media aritmética
- b. Mediana
- c. Moda
- d. Dibujar el histograma de frecuencias.

Serie estadística de clases y frecuencias

Media aritmética de una serie de clases y frecuencias

El procedimiento para calcular la media de una serie de clases frecuencias según (Díaz Mata, 2013) es igual al que se siguió antes con los valores agrupados en serie de datos y frecuencias. En resumen, el procedimiento para el cálculo consiste en:

- Determinar el punto medio de cada clase, X_m ;
- Multiplicar cada punto medio de clase por la frecuencia correspondiente, $f(X_m)$;
- Sumar estos productos, $\sum f(X_m)$;
- Dividir esta suma entre el número de elementos (n), o sea la suma de las frecuencias $\sum f$.

Los pasos mencionados se resumen en la siguiente fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i * X_m}{n}$$

En donde:

$\bar{X}$ = Media Aritmética

$\sum f_i * X_m$ = Sumatoria del producto de los valores de las frecuencias y las marcas de clase

n = número de datos

Ejemplo:

En una encuesta realizada a los Aspirantes a Soldados de la ESFORST se obtuvieron los siguientes datos, en lo que se refiere a la edad de los padres:

$$\underline{X} = \frac{3755}{75}$$

$$\underline{X} = 50,07 \text{ años}$$

Mediana de una serie de clases y frecuencias

En el caso de series de clases y frecuencias Díaz Mata, (2013), resume el procedimiento mediante la siguiente fórmula:

$$Med = L_{cimed} + i \left(\frac{\frac{n+1}{2} - fa_{med}}{f_{cmed}} \right)$$

En donde:

n = número de datos, que en el caso de una serie agrupada = Σf .

L_{cimed} = límite inferior de la clase mediana.

i = el intervalo de clase: el límite superior de la clase menos su límite inferior.

fa_{med} = frecuencia acumulada hasta antes de la clase mediana.

f_{cmed} = frecuencia de la clase mediana.

Ejemplo:

En una encuesta realizada a los aspirantes a soldados de la ESFORSFT se obtuvieron los siguientes datos, en lo que se refiere a la edad de los padres:

$$\text{Posición de la mediana} = \frac{25 + 1}{2}$$

$$\text{Posición de la mediana} = \frac{75+1}{2} = 38$$

$$\text{Límite inferior de la clase mediana} = \frac{54 + 55}{2} = 54,5$$

$$\text{Frecuencia acumulada hasta antes de la clase mediana} = 18$$

$$\text{Frecuencia de la clase mediana} = 22$$

$$Med = L_{cimed} + i \left(\frac{\frac{n+1}{2} - fa_{med}}{f_{cmed}} \right)$$

$$Med = 54,5 + 5 \left(\frac{38 - 18}{22} \right)$$

$$Med = 54,5 + 4,5454 = 59,045$$

Moda de una serie de clases y frecuencias

El procedimiento para determinar la moda que lo establece Díaz Mata, (2013), se resume en la siguiente fórmula:

$$Mod = L_{icmod} + i \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

En donde,

L_{icmod} = límite inferior de la clase modal (la clase que contiene la moda)

i = el intervalo de clase: el límite superior de la clase menos su límite inferior

d_1 = la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase anterior

d_2 = la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente

Ejemplo:

La edad de los profesores que trabajan en los colegios del Cantón referidos a 1980, fueron:

$$\text{Límite inferior de la clase modal} = \frac{25+26}{2} = 25,5$$

$$d_1 = 191 - 83 = 108$$

$$d_2 = 191 - 99 = 92$$

$$Mod = L_{icmod} + i \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

$$Mod = 25,5 + 5 \left(\frac{108}{108 + 92} \right) = 28,2$$

Taller 40

1. Los pesos de 65 Aspirantes de la ESFORSFT vienen dados por la siguiente tabla:

Peso	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109	110-119
f	8	10	16	14	10	5	2

Determinar:

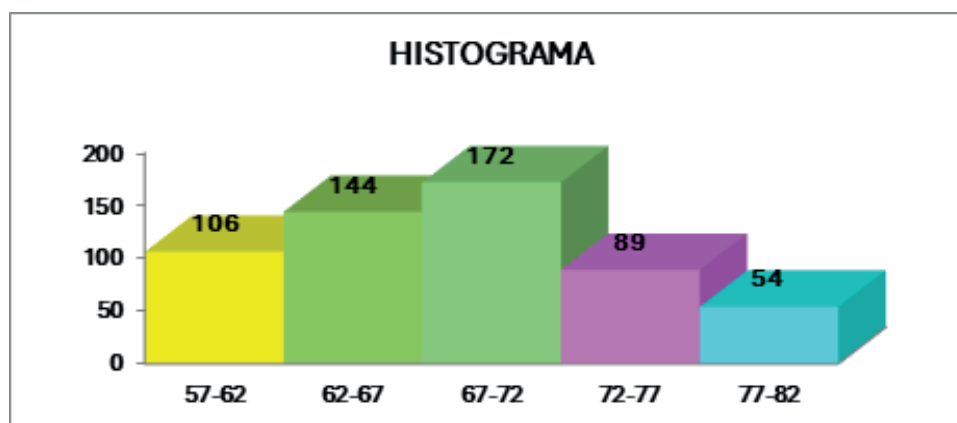
- La media aritmética
 - Mediana
 - Moda
 - Representar el histograma y el polígono de frecuencias.
2. Un grupo de aspirantes a soldados, al ser preguntados por su estatura, dieron los siguientes datos en centímetros:

149 147 165 160 161 164 168 169 170 159 158
 164 162 170 160 157 149 162 165 171 168 167
 151 152 154 149 153 153 154 162 169 168 167
 164 168 167 168 161 150 163 167 167 165 166
 169

Construir la tabla de serie estadística de intervalos (con un intervalo de $\Rightarrow$ $i=3$)

Determinar:

- La media aritmética
 - Mediana
 - Moda
 - Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias.
3. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 565 Aspirantes de II año de la ESFORSFT es el siguiente:



Determinar:

- La media aritmética
- Mediana
- Moda
- Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias.

Cuartiles, deciles y centiles

Cuartiles

Los cuartiles son los tres valores de la variable que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales.

Q1, Q2 y Q3 determinan los valores correspondientes al 25%, al 50% y al 75% de los datos.

Q2 coincide con la mediana.

Cálculo de los cuartiles

En primer lugar, buscamos la clase donde se encuentra, en la tabla de las frecuencias acumuladas.

Ejercicio de cuartiles

Calcular los cuartiles de la distribución de la tabla:

X	f	fa
50 - 59	8	8
60 - 69	10	18
70 - 69	16	34
80 - 89	14	48
90 - 99	10	58
100 - 109	5	63
110 - 119	2	65
	65	

1. Cálculo del primer cuartil

$$2. \quad P1 = \frac{1 \cdot N}{4} \quad P1 = \frac{1 \cdot 65}{4} \quad P1 = 16,25$$

$$3. \quad Q1 = Lri + \frac{((\frac{N}{4} - fam))}{f} * i \quad Q1 = 59,5 + \frac{(16,25 - 8)}{10} * 10 \quad Q1 = 59,5 + 8,25 \quad Q1 = 67,75$$

4. Cálculo del segundo cuartil

$$5. \quad P2 = \frac{2 \cdot N}{4} \quad P2 = \frac{2 \cdot 65}{4} \quad P2 = 32,5$$

$$6. \quad Q2 = Lri + \frac{((\frac{2N}{4} - fam))}{f} * i \quad Q2 = 69,5 + \frac{(32,5 - 18)}{16} * 10 \\ Q2 = 69,5 + 9,06 \quad Q2 = 78,56$$

7. Cálculo del tercer cuartil

$$8. \quad P3 = \frac{3 \cdot N}{4} \quad P3 = \frac{3 \cdot 65}{4} \quad P3 = 48,75$$

$$9. \quad Q3 = Lri + \frac{((\frac{3 \cdot N}{4} - fam))}{f} * i \quad Q3 = 89,5 + \frac{(48,75 - 48)}{10} * 10 \\ Q3 = 89,5 + 0,75 \quad Q3 = 90,25$$

Deciles

Los deciles son los nueve valores que dividen la serie de datos en diez partes iguales.

Los deciles dan los valores correspondientes al 10%, al 20%... y al 90% de los datos.

D5 coincide con la mediana.

Cálculo de los deciles

En primer lugar, buscamos la clase donde se encuentra, en la tabla de las frecuencias acumuladas.

Ejercicio:

Calcular los deciles de la distribución de la tabla:

X	f	fa
50 - 59	8	8
60 - 69	10	18
70 - 69	16	34
80 - 89	14	48
90 - 99	10	58
100 - 109	5	63
110 - 119	2	65
	65	

10. Cálculo del decil 3

$$11. P3 = \frac{3 \cdot N}{10} \quad P3 = \frac{3 \cdot 65}{10} \quad P3 = 19,5$$

$$12. D3 = Lri + \frac{\left(\frac{3 \cdot N}{10} - f_{am}\right)}{f} * i \quad D3 = 69,5 + \frac{(19,5 - 18)}{16} * 10$$

$$D3 = 69,5 + 0,94 \quad D3 = 70,44$$

13. Cálculo del decil 7

$$14. P7 = \frac{7 \cdot N}{10} \quad P7 = \frac{7 \cdot 65}{10} \quad P7 = 45,5$$

$$15. D7 = Lri + \frac{((\frac{7 \cdot N}{10} - f_{am}))}{f} * i \quad D7 = 79,5 + \frac{(45,5 - 34)}{14} * 10$$

$$D7 = 79,5 + 8,21 \quad D7 = 87,71$$

16. Cálculo del decil 9

$$17. P9 = \frac{9 \cdot N}{10} \quad P9 = \frac{9 \cdot 65}{10} \quad P9 = 58,5$$

$$18. D9 = Lri + \frac{((\frac{9 \cdot N}{10} - f_{am}))}{f} * i \quad D9 = 99,5 + \frac{(58,5 - 58)}{5} * 10$$

$$D9 = 99,5 + 1 \quad D9 = 100,5$$

Percentiles

Los percentiles son los 99 valores que dividen la serie de datos en 100 partes iguales.

Los percentiles dan los valores correspondientes al 1%, al 2%... y al 99% de los datos.

P_{50} coincide con la mediana.

Cálculo de los percentiles

En primer lugar, buscamos la clase donde se encuentra, en la tabla de las frecuencias acumuladas.

Ejercicio de percentiles

Calcular el percentil 35 y 60 de la distribución de la tabla:

X	f	fa
50 - 59	8	8
60 - 69	10	18
70 - 69	16	34
80 - 89	14	48

90 – 99	10	58
100 – 109	5	63
110 – 119	2	65
	65	

Cálculo del Percentil 35

$$P_{35} = \frac{35 \cdot N}{100} \quad P_{35} = \frac{35 \cdot 65}{100} \quad P_{35} = 22,75$$

$$C_{35} = Lri + \frac{((\frac{35 \cdot N}{100} - f_{am}))}{f} * i \quad P_{35} = 69,5 + \frac{(22,75 - 18)}{16} * 10$$

$$C_{72} = 69,5 + 2,97 \quad C_{35} = 72,47$$

Cálculo del Percentil 72

$$P_{72} = \frac{72 \cdot N}{100} \quad P_{72} = \frac{72 \cdot 65}{100} \quad P_{72} = 46,8$$

$$C_{72} = Lri + \frac{((\frac{72 \cdot N}{100} - f_{am}))}{f} * i \quad P_{35} = 79,5 + \frac{(46,8 - 34)}{14} * 10 \quad C_{72} =$$

$$79,5 + 9,14 \quad C_{72} = 88,64$$

Cálculo del Percentil 89

$$P_{89} = \frac{89 \cdot N}{100} \quad P_{89} = \frac{89 \cdot 65}{100} \quad P_{89} = 57,85$$

$$C_{89} = Lri + \frac{((\frac{89 \cdot N}{100} - f_{am}))}{f} * i \quad C_{89} = 89,5 + \frac{(57,85 - 48)}{10} * 10$$

$$C_{89} = 89,5 + 9,85 \quad C_{89} = 99,35$$

Taller 41

1. Determine el tercer cuartil (Q_3), el sexto decil (D_6) y el percentil 80 (P_{80}), de la siguiente serie estadística de intervalos:

X	f
14 - 17	1
18 - 21	2
22 - 25	3
26 - 29	4
30 - 33	8
34 - 37	10
38 - 41	13
42 - 45	60
46 - 49	20
50 - 53	10
54 - 57	13
58 - 61	8
56 - 65	4
66 - 69	2

2. Determine el tercer cuartil (Q_1), el sexto decil (D_7) y el percentil 80 (P_{45}), de la siguiente serie estadística de intervalos:

X	f
24 - 28	1
28 - 32	2

32 – 36	3
36 – 40	4
40 – 44	8
44 – 48	10
48 – 52	13
52 – 56	60
56 – 60	20
60 – 64	10
64 – 68	13

Medidas de dispersión

Desviación media.

Es el cociente que resulta de dividir la suma aritmética de las desviaciones para el número de casos.

Varianza

La varianza también cuantifica el valor de la dispersión de la variable con respecto al promedio (media); es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones.

Desviación típica

Su mayor utilidad se presenta en la estadística inductiva o inferencial.

La varianza es una medida de dispersión que se la utiliza con poca frecuencia ya que ha sido sustituida por la aplicación de la desviación típica.

Serie estadística

Desviación media de una serie estadística

Para el cálculo de la desviación media de una serie estadística podemos deducir el siguiente procedimiento:

1. Se determina la media aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

2. Se calcula las desviaciones utilizando la siguiente fórmula:

$$d = |X - \bar{X}|$$

3. Se suman aritméticamente las desviaciones, es decir, sin tomar en cuenta el signo que precede a cada desviación.

4. Y se aplica la fórmula:

$$D_m = \frac{\sum d}{N}$$

Ejemplo:

Datos: 4, 6, 8, 9, 10, 13, 16

Media Aritmética:

$$\bar{X} = \frac{4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 13 + 16}{7} = 9,43$$

X	d = X - $\bar{X}$
4	-5,43
6	-3,43
8	-1,43
9	-0,43
10	0,57
13	3,57
16	6,57
TOTAL	21,43

$$D_m = \frac{\sum d}{N}$$

$$D_m = \frac{21,43}{7} = 3,06$$

Varianza de una serie estadística

Procedimiento:

1. Se obtiene la media aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

2. Se calcula la desviación para cada uno de los valores de la variable:

$$d = |X - \bar{X}|$$

3. Se elevan al cuadrado cada una de las desviaciones. d^2
4. Se obtiene la varianza a través de la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum d^2}{N}$$

En donde:

 σ^2 = Varianza $\sum d^2$ = Sumatoria de las desviaciones al cuadrado

N = número total de casos.

 $d = |X - \bar{X}|$ *Ejemplo:*

La estatura en centímetros de un grupo de estudiantes de la ESFORSFT es:

X	$d = X - \bar{X} $	d^2
160	-6	36
164	-2	4
165	-1	1
166	0	0
168	2	4
169	3	9
170	3	16
1162		70

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{1162}{7} = 166$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{70}{7}$$

$$\sigma^2 = 10.$$

Desviación típica de una serie estadística

Para efectos de cálculo de la desviación típica de una serie estadística podemos hacer uso de la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

Del ejemplo anterior la desviación típica sería:

$$\sigma^2 = 10.$$

$$\sigma = \sqrt{10} = 3,16$$

Taller 42

- Hallar la desviación típica, varianza y la desviación típica de la siguiente serie estadística:**

- 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5.
- 50, 65, 70, 45, 20, 15, 30, 35, 60, 55

- Al hacer un estudio en una ciudad se determinó la edad en la que los adolescentes aprenden a conducir un automóvil:**

16, 15, 18, 17, 12, 19, 20, 21, 14, 15, 18, 17, 15

Determinar:

- La desviación típica
- La varianza
- La desviación típica

- Al hacer un estudio en una ciudad se determinó la edad en la que los adolescentes aprenden a conducir un automóvil:**

16, 15, 18, 17, 12, 19, 20, 21, 14, 15, 18, 17, 15

Determinar:

- La desviación típica
- La varianza

c. La desviación típica

Serie estadística de frecuencia

Desviación Media de una serie estadística de frecuencia

La desviación media de una serie estadística de frecuencia se la obtiene en base a la siguiente fórmula:

$$D_m = \frac{\sum f \cdot d}{N}$$

Esta fórmula obedece a la misma definición de la desviación media de una serie estadística, solamente que se introduce un nuevo elemento que es la frecuencia (f).

Ejemplo:

El peso en kg. registrado para un grupo de señores de aspirantes es:

X	f	X . f		f . d
44	1	44	-3,63	-3,63
45	2	90	-2,63	-5,26
46	2	92	-1,63	-3,26
47	3	141	-0,63	-1,89
48	5	240	0,37	1,85
49	3	147	1,37	4,11
50	2	100	2,37	4,74
51	1	51	3,37	3,37
TOTAL	19	905		28,11

Varianza de una serie estadística de frecuencia

Cuando se considera una serie estadística de frecuencia la varianza está dada por la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f \cdot d^2}{N}$$

Ejemplo:

Las calificaciones registradas por un grupo de alumnos en la asignatura de Estadística son:

X	f	X · f	d = X - $\bar{X}$	d ²	f · d ²
11	1	11	-4,76	22,66	22,66
12	2	24	-3,76	14,14	28,28
13	2	26	-2,76	7,62	15,24
14	1	14	-1,76	3,10	3,10
15	3	45	-0,76	0,58	1,74
16	8	128	0,24	0,06	0,48
17	2	34	1,24	1,54	3,08
18	3	54	2,24	5,02	15,06
19	2	38	3,24	10,50	21,00
20	1	20	4,24	17,98	17,98
	25	394			128,62

$$\bar{X} = \frac{\sum X \cdot f}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{394}{25} = 15,76$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f \cdot d^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{128,62}{25}$$

$$\sigma^2 = 5,14$$

Desviación Típica de una serie estadística de frecuencia

Para el cálculo de la desviación típica de una serie estadística de frecuencia haremos uso de la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot d^2}{N}}$$

Del ejemplo anterior la desviación típica sería:

$$\sigma^2 = 5,14 \quad \sigma = \sqrt{5,14} = 2,27$$

Taller 43

1. Sea una serie estadística de frecuencia que viene dada por la siguiente tabla:

X	61	64	67	70	73
f	5	18	42	27	8

Determinar la desviación media, varianza y desviación típica.

2. Hallar la desviación media, varianza y desviación típica de la siguiente serie estadística de frecuencia:

X	f
39	7
40	13
41	9
42	15
43	18
44	6
45	12
46	9
47	4
48	5

3. Obtener la desviación media, varianza y desviación típica de la siguiente serie estadística de frecuencia que representan las estaturas de un grupo de estudiantes:

178 171 176 166 166 179 171 167 166 176

175 175 175 167 175 172 173 178 175 166

176 179 173 170 173 169 174 166 175 166

170 172 177 171 168 170 180 166 177 165

Serie estadística de intervalos

Desviación media de una serie estadística de intervalos

1. Se encuentra la media aritmética de la serie estadística de intervalos.

$$\bar{X} = \frac{\sum f \cdot X_m}{N}$$

2. Se obtienen las desviaciones $d = |X_m - \bar{X}|$, siendo en este caso X_m los puntos medios de cada uno de los intervalos.
3. Encontramos el producto de las frecuencias por las desviaciones (f.d).
4. Sumamos aritméticamente los productos de (f.d), esto sin tomar en cuenta los signos.
5. Aplicamos la fórmula

$$D_m = \frac{\sum f \cdot d}{N}$$

X	f	X_m	f. X_m	$d = X_m - \bar{X} $	f . d
30 – 34	1	32	32	-18.07	18.07
35 – 39	8	37	296	-13.07	104.56
40 – 44	11	42	462	-8.07	88.77
45 – 49	15	47	705	-3.07	46.05
50 – 54	22	52	1144	1.93	42.46
55 – 59	8	57	456	6.93	55.44

60 – 64	4	62	248	11.93	47.72
65 – 69	5	67	335	16.93	84.65
70 – 74	0	72	0	21.93	0
75 – 79	1	77	77	26.93	26.93
TOTAL	75		3755	128,86	514,65

Varianza de una serie estadística de intervalos

Cuando se trata de una serie estadística de intervalos al cálculo de la varianza se realiza mediante la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum f \cdot X_m}{N}$$

Ejemplo:

Conocemos que las edades de los profesores de educación media del cantón Tungurahua para el año 2017, fueron:

X	f	X _m	f · X _m	d = X _m – $\bar{X}$	d ²	f · d ²
21 – 25	83	23	252	-9,96	99,20	8233,60
26 – 30	191	28	406	-4,96	24,60	4698,60
31 – 35	99	33	848	0,04	0,0016	0,16
36 – 40	67	38	296	5,04	25,40	1701,80
41 – 45	41	43	1763	10,04	100,80	4132,80
46 – 50	27	48	2546	15,04	226,20	6107,40
51 – 55	16	53	3267	20,04	401,60	4425,60
56 – 60	7	58	5348	25,04	627,00	4389,00
61 – 65	4	63	1909	30,04	902,40	3609,40
TOTAL	535		17635			37298,56

$$\bar{X} = \frac{\sum f \cdot X_m}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{17635}{535} = 32,96$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f \cdot d^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{37298,56}{535}$$

$$\sigma^2 = 69,71$$

Desviación Típica de una serie estadística de intervalos

Para determinar la desviación típica de una serie estadística de intervalos, haremos uso de la siguiente fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \cdot d^2}{N}}$$

Ejemplo:

Se conoce que las edades de los profesores de educación media del Cantón Tungurahua para el año 2019, fueron:

X	f	Xm	f . Xm	d = Xm - $\bar{X}$	d ²	f . d ²
21 - 25	83	23	252	-9,96	99,20	8233,60
26 - 30	191	28	406	-4,96	24,60	4698,60
31 - 35	99	33	848	0,04	0,0016	0,16
36 - 40	67	38	296	5,04	25,40	1701,80
41 - 45	41	43	1763	10,04	100,80	4132,80
46 - 50	27	48	2546	15,04	226,20	6107,40
51 - 55	16	53	3267	20,04	401,60	4425,60
56 - 60	7	58	5348	25,04	627,00	4389,00
61 - 65	4	63	1909	30,04	902,40	3609,40
TOTAL	535		17635			37298,56

$$\bar{X} = \frac{\sum f \cdot X_m}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{17635}{535} = 32,96$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f \cdot d^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{37298,56}{535}$$

$$\sigma^2 = 69,71 \quad \sigma = \sqrt{69,71} = 8,35$$

Taller 44

1. Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

Alturas	170 – 174	175 – 179	180 – 184	185 – 189	190 – 194	195 – 199
Nº de jugadores (f)	1	3	4	8	5	2

Calcular:

- La desviación media
 - La varianza
 - La desviación típica
3. En un estudio realizado a las madres de familia en la que tuvieron a su segundo hijo con respecto a la edad del primero fueron:

Edad	f
1 – 3	40
4 – 6	4
7 – 9	36
10 – 12	12
13 – 15	8

Calcular:

- La desviación media
- La varianza
- La desviación típica

Coeficiente de variación

Los coeficientes de variación sirven para determinar en qué medida los datos que se analizan son homogéneos o heterogéneos. Es decir, que cuanto menos es el coeficiente de variación más homogéneos son los datos. El valor del coeficiente se expresa en términos de porcentaje, así mismo se emplea para comparar las distribuciones de frecuencias en base a su dispersión.

Fórmula:

$$Cv = \frac{\sigma}{\underline{X}} \times 100$$

Ejemplo:

La ($\underline{X}$) media aritmética de una distribución de frecuencias es 12,5 y su varianza 16. Hallar el coeficiente de variación:

Datos:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = 16$$

$$\text{Media aritmética} = \underline{X} = 12,5$$

$$\sigma = \sqrt{16} = 4$$

$$Cv = \frac{4}{12,5} \times 10 \Rightarrow Cv = 32\%$$

Taller 45

1. Determine el grado de dispersión para las velocidades de dos vehículos, utilizando el coeficiente de variación, si se tiene los siguientes datos:

Vehículos	Velocidad Media km/h	σ
Toyota	75	8
Hyundai	60	10

2. Encuentre el grado de dispersión de un curso, para cuatro asignaturas utilizando el coeficiente de variación si se cuenta con los siguientes datos:

Asignaturas	$\bar{X}$	σ
Matemáticas	13	2,5
Historia	16	3,8
Biología	15	3
Química	14	3,5

3. Dada la siguiente tabla con los pesos en libras de los estudiantes de la ESFORSFT calcular:

Peso de los Estudiantes	Número de Estudiantes
20 - 29	10
30 - 39	20
40 - 49	30
50 - 59	15
60 - 69	10
70 - 79	5

- Media aritmética
- Varianza
- Desviación Típica
- Coefficiente de variación

Referencias

- Alea Riera, V., Jiménez Garrido, E., Muñoz Vaquer, C., & Viladomiu Canela, N. (2015, July). *Estadística I (ADE): Teoría y ejercicios*. Universidad de Barcelona. https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/66107/1/EstadisticaI_2016.pdf
- BuenasTareas. (2012, November 3). *Series Estadísticas Simples*. BuenasTareas. <https://www.buenastareas.com/ensayos/Series-estadísticas-Simples/6168709.html>
- Constanza, B. C. (2018). TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA [PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO-CHILE FACULTAD DE CIENCIAS]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2614_01.pdf
- Corral, Y., Corral, I., & Corral, A. F. (2015). *Procedimientos de Muestreo*. Facultad de Ciencias de La Educación Universidad de Carabobo. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/46/art13.pdf>
- D'Alessio Torres, V. J. (2021, April 14). *Regla de Sturges*. Lifeder. <https://www.lifeder.com/regla-sturges/>
- Díaz Mata, A. (2013). *Estadística Aplicada a la Administración y Economía* (S. A. D. C. V. Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, Ed.; Primera). file:///C:/Users/USER/Downloads/estadística%20Aplicada%20a%20la%20Administración%20y%20la%20Economía%20de%20Alfredo%20D.%20Mata-mibibliotecavirtual.com.pdf
- Fullframe. (n.d.). Como hacer un muestreo paso a paso. *Photomkt*. Retrieved January 24, 2024, from <https://photomkt.com/como-hacer-un-muestreo-paso-a-paso/>
- Gómez, R., Molina, M. D., Murelo, J., Nueda, M. J., & Pascual, A. (n.d.). *Introducción a la Estadística*. Retrieved January 23, 2024, from <https://infolibros.org/pdfview/3531-introduccion-a-la-estadistica-ds-gomez-reverte-md-molina-j-mulero-mj-nueda-y-a-pascual/>
- Huera Guzmán, J. (2023a). Arco de una Circunferencia. *Neurochispas*. <https://www.neurochispas.com/wiki/arco-de-una-circunferencia/>
- Huera Guzmán, J. (2023b). Área y Perímetro de un Trapecio – Fórmulas y Ejercicios. *Neurochispas*. <https://www.neurochispas.com/wiki/perimetro-y-area-de-un-trapecio-formulas-y-ejercicios/>
- Jara, P., & Ruiz, C. (n.d.). TRIANGULOS. TRIANGULOS. Retrieved January

- 20, 2024, from <https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2008/triangelos.pdf>
- Kindle, J. H. (2007). *Geometría analítica*. EUNED.
- Llopis, J. (n.d.). Corona Circular. *Didactalia*. Retrieved January 22, 2024, from <https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/corona-circular-area-perimetro-y-problemas/110e4c51-d715-fed7-5a3a-7e6c-fba0336f>
- Medina, H. (2016). Geometría. ¿Qué es el Rectángulo? <https://enciclopedia-dematematica.com/rectangulo/>
- Medina, H. (2023a). ¿Qué es un rombo? *Enciclopedia de Matemáticas*. <https://enciclopedia-dematematica.com/rombo/>
- Medina, H. (2023b, January). Polígono regular. *Enciclopedia de Matemática*. <https://enciclopedia-dematematica.com/poligono-regular/>
- Medina, H. (2023c, July). Figuras tridimensionales. *Enciclopedia de Matemática*. <https://enciclopedia-dematematica.com/figuras-tridimensionales/>
- Ramos Arcas, J. (n.d.). Diagramas de sectores en R [Grado en Administración y dirección de Empresas, Universidad del País Vasco]. Retrieved January 26, 2024, from https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/51866/Diagramas_de_sectores_en_R_TFG.pdf?sequence=3
- Ruiz Muñoz, D. (2004). *Manual de Estadística* (eumed.net, Ed.). <https://infolibros.org/pdfview/3530-manual-de-estadistica-david-ruiz-munoz/>
- Soto Apolinar, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Términos Matemáticos* (Tercera). <https://infolibros.org/pdfview/423-diccionario-ilustrado-de-conceptos-matematicos-efrain-soto-apolinar/>
- Spiegel, M. R., & Stephens, L. J. (2008). *Estadística Schawn* (S. A. Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, Ed.; Cuarta edición). <https://drive.google.com/file/d/0B8WdqYYQCU4IbFIBTGk2Y2FLdEU/preview?pli=1&resourcekey=0-0Q1zFkpTBBTId42CLxi8g>
- Superprofe. (2022, January 21). *Área y perímetro de polígonos*. Perímetro y Área de Triángulos.
- UNAM - Facultad de Ingeniería Para desarrollar División de Ciencias Básicas Coordinación de Matemáticas. (2011, April). *Sistemas de Coordenadas Cartesianas*. Universidad Nacional Autónoma de México. <http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CapsulasAntecedentes/simetria.pdf>
- Universidad Católica del Uruguay. (2012). *Estadística y probabilidades*. <https://infolibros.org/pdfview/3532-estadistica-y-probabilidades-universidad-catolica-del-uruguay/>

- Vargas Pereira, P. (2020). *Introducción al Muestreo* (Universidad San Marcos, Ed.). <https://repositorio.usam.ac.cr/xmlui/bitstream/handle/11506/1401/LEC%20EST%200003%202020.pdf?sequence=1>
- Vargas Pereira, P. (2021). *Estadística Distribución de Frecuencias y Representación Gráfica* (Universidad San Marcos, Ed.). <https://repositorio.usam.ac.cr/xmlui/bitstream/handle/11506/1409/LEC%20EST%200003%202021.pdf?sequence=1>
- Villablanca, K. (n.d.). Guía 8 Perímetro del Círculo. Colegio Sol de Chile. Retrieved January 22, 2024, from <http://colegiosoldechile.cl/sites/default/files/documentos/7%C2%BA%20b%C3%A1sico%20Geometr%C3%ADa%20%20Perimetro%20del%20circulo.pdf>
- Villablanca M., K. (n.d.). Guía de Repaso Área y Volumen del cilindro. Colegio Sol de Chile, Lo Espejo - Departamento de Matemática. Retrieved January 23, 2024, from <http://colegiosoldechile.cl/sites/default/files/documentos/8%C2%BA%20b%C3%A1sico%20Geometr%C3%ADa%20%C3%81REA%20Y%20VOLUMEN%20DEL%20CILINDRO%202020.pdf>
- Waghorn P., G., & Norambuena R., G. (n.d.). Guía de Aprendizaje No1. Colegio Concepción San Pedro - Departamento de Matemática. Retrieved January 23, 2024, from <https://www.colegioconcepcionsanpedro.cl/wp-content/uploads/2020/04/Geometr%C3%ADa-2%C2%BAMedio-ABC-G.Waghorn-G.Norambuena-27-al-30-de-abril.pdf>
- Zabala, M. A. (2007). *Cuerpos Geométricos* (Federación Internacional de Fe y Alegría, Ed.). https://www.academia.edu/4977538/Cuerpos_geometricos
- Zapata, F. (2020). Romboide: características, cómo sacar el perímetro y área. *Lifeder*. <https://www.lifeder.com/romboide/>

ANEXO

1. En el paralelo A1 de la ESFORSE existen 35 alumnos, 12 juegan a baloncesto, 8 practican la natación, 5 juegan al fútbol y el resto no practica ningún deporte. Grafique un diagrama de sectores en donde se identifiquen los datos planteados.
2. Un estudio hecho a 48 alumnos del segundo año de la ESFORSE para determinar su grupo sanguíneo ha dado el siguiente resultado: el grupo sanguíneo A tienen 16 aspirantes, grupo sanguíneo B tienen 10 aspirantes, grupo sanguíneo AB tienen 7 aspirantes y grupo sanguíneo OH tienen 15 aspirantes. Represente los datos en un diagrama de barras.
3. Las temperaturas en un día de verano de la ciudad de Ambato, debido a las permanentes erupciones del volcán Tungurahua han sufrido las siguientes variaciones: Desarrollo

Hora	Temperatura
6	7°
9	12°
12	14°
15	11°
18	12°
21	10°
24	8°

Represente en un polígono de frecuencia.

4. El número de horas dedicado al estudio de una asignatura por 10 estudiantes y la calificación obtenida en dicha asignatura por cada uno de ellos vienen dado en la siguiente tabla.

X: horas de estudio	25	10	20	30	17	22	24	6	18	20
Y: calificación	8	2	5	7	4	5	5	3	5	4

Represente en el plano cartesiano

5. Las profesiones que poseen cada uno de los padres los aspirantes son diversas, se los ha consultado y se obtienen los siguientes datos: 15 agricultores; artesanos 56; abogados 32; médicos 12; ingenieros 25; militares 76 y mecánicos 30. Dibuje un histograma y el polígono de frecuencias absolutas y acumuladas.

6. Los docentes de la ESFORST, han sido consultado sobre sus edades y han determinado las siguientes:

EDAD	24	26	27	35	38	42	45	48	60
f	17	12	13	18	25	15	8	7	3

Realice el polígono de frecuencias absolutas y acumuladas.

Dibuje el diagrama de sectores

Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica

El libro “Enfoques sistemáticos y metodológicos en la enseñanza de la matemática básica” constituye una propuesta integral para el aprendizaje ordenado, reflexivo y aplicado de los principales campos de la matemática elemental dentro de las ciencias militares. Concebido como un recurso académico, tanto para estudiantes como para docentes, este texto desarrolla los contenidos fundamentales de manera clara, progresiva y vinculada a la resolución de problemas cotidianos y académicos. Su propósito es ofrecer una visión integral y organizada de las áreas esenciales de esta disciplina, abordándolas desde una perspectiva pedagógica y andragógica, que combina el rigor teórico con la claridad metodológica que cada uno de los ejercicios ejemplificados necesita para la resolución de los mismos:

En el Capítulo I: Principios y fundamentos sistemáticos del Álgebra, se presentan las bases conceptuales que permiten al alumno militar comprender y manejar expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones, enfatizando la lógica y el razonamiento como ejes del aprendizaje.

El Capítulo II: Geometría Plana ofrece un estudio detallado de las figuras bidimensionales, sus propiedades, teoremas y aplicaciones prácticas, favoreciendo la visualización espacial y el pensamiento lógico-deductivo.

En el Capítulo III: Trigonometría, se abordan las relaciones entre ángulos y lados de los triángulos, las razones trigonométricas, identidades y funciones, elementos esenciales para resolver problemas, tanto teóricos como aplicados en ciencias e ingeniería.

El Capítulo IV: Geometría Analítica conecta el álgebra y la geometría en el plano cartesiano, introduciendo al lector en el estudio de rectas, circunferencias, parábolas y otras cónicas, con un enfoque en la representación gráfica y el análisis de relaciones entre ecuaciones y figuras.

Finalmente, el Capítulo V: Estadística Descriptiva brinda herramientas para la recopilación, organización y análisis de datos, utilizando medidas de tendencia central, dispersión y representaciones gráficas que permiten interpretar información de manera crítica.

En conjunto, la obra ofrece un enfoque metodológico estructurado y sistemático, orientado a fortalecer competencias matemáticas básicas, estimular el pensamiento analítico en las ciencias militares y fomentar la aplicación práctica del conocimiento en distintos contextos académicos y profesionales.

ISBN: 978-9942-652-30-0



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA