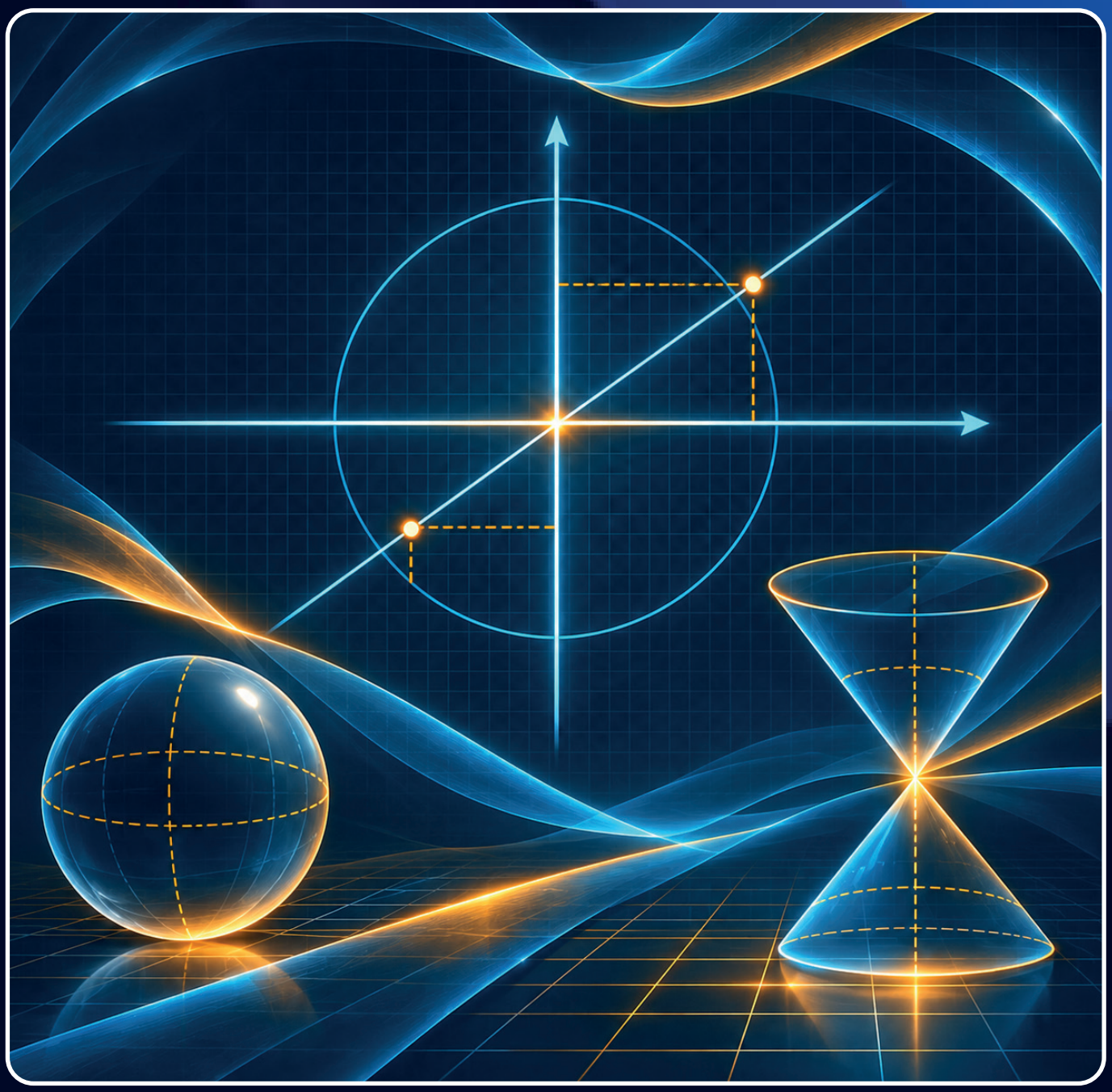
ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



Introducción a la Geometría Analítica

ROLANDO SALAZAR, JORGE SÁNCHEZ, CARLOS SÁNCHEZ, IVÁN COLLANTES

Introducción a la Geometría Analítica

Rolando Salazar, Jorge Sánchez, Carlos Sánchez e Iván Collantes

Primera edición electrónica: noviembre, 2026
ISBN: 978-9942-652-67-6

Ingreso al proceso: 30/06/2026 • Aprobación de ingreso: 04/08/2026
Aprobación de pares: 06/10/2026 • Finalización de edición: 12/11/2026

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Crnl. E.M. Henry Omar Cruz Carrillo, Ph. D.
Rector

Publicación autorizada por:
Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Tcrn. Luis Edwin Montes Paguay, Mgtr. - Vicerrector de Investigación, Innovación y Transferencia de Tecnología (E) - Presidente

Corrección de estilo y maquetación
Mtr. Xavier Chinga Mármol

Imagen de cubierta y carátulas de capítulos
Generadas con asistente de inteligencia artificial

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en **www.repositorio.espe.edu.ec.**

Reconocimiento – No Comercial – Sin obras derivadas
CC BY-NC-ND 4.0

Departamento de Ciencias Exactas | Sede Latacunga

Introducción a la Geometría Analítica

Rolando Salazar

Jorge Sánchez

Carlos Sánchez

Iván Collantes

EDITORIAL

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

Introducción

La Geometría Analítica es una rama fundamental de las matemáticas y principios de la Ingeniería que se utiliza para el estudio de la rectas, los lugares geométricos, la circunferencia, la parábola, la elipse, la hipérbola. La importancia se extiende a muchos campos como la ingeniería, química, etc. Este libro busca entregar herramientas introductorias que permitá entender y aprender los conceptos básicos de la geometría analítica.

En el capítulo I, II, III y IV se profundiza en los criterios básicos de las coordenadas rectangulares, la recta, los lugares geométricos y la transformación de coordenadas. En los capítulos V, VI, VII y VIII, se estudian las aplicaciones de los conceptos básicos profundizándolos en la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

El libro se desarrolló procurando una explicación accesible y el desarrollo completo de las resoluciones, muy útil para quienes están empezando en la geometría analítica y aquellos que quieran fortalecer los conocimientos previos. En el libro existen ejemplos con variaciones y diferentes condicionantes geométricas para ayudar a los lectores con la comprensión.

El estudio de la Geometría Analítica es una parte fundamental de la formación académica y una herramienta para la formación en una carrera profesional, este libro proporciona los fundamentos básicos tan ampliamente utilizados y necesarios para los campos de la Matemática, la Ingeniería, la Economía, etc.

Rolando Salazar
rxsalazar@espe.edu.ec



Rolando Salazar Paredes, MSc.
Profesor Ocasional, Departamento de Ciencias Exactas
https://scholar.google.com/citations?user=nBPlcCoAAAAJ&hl=es Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Rolando Salazar Paredes es Ingeniero Automotriz de la Universidad de las Fuerzas Armadas, posee dos maestrías: una en Seguridad y Prevención de Riesgos del Trabajo de la Universidad Técnica de Cotopaxi y la segunda en Ingeniería Matemática y Computación; docente del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga. Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador del Área de Física, Coordinador de Capacitación, Jefe de Laboratorio de Modelado y Simulación. Dentro de las actividades de vinculación ha participado como colaborador del proyecto de Vinculación: Fortalecimiento y desarrollo de los conocimientos aplicados para el examen nacional "Ser Bachiller" dirigido a los estudiantes del tercer año de bachillerato de la parroquia Zumbahua de la Unidad Educativa del milenio Cacique Tumbalá y el sector rural del cantón Pujilí, provincia de Cotopaxi, en los años 2018 y 2019. Autor de los libros: Apuntes de Álgebra Lineal y Álgebra Preuniversitaria.

Jorge Sánchez
jssanchez@espe.edu.ec



Jorge Saúl Sánchez Mosquera, MSc.
Profesor Titular, Departamento de Ciencias Exactas
Coordinador de Investigación del Departamento de Ciencias Exactas `https://scholar.google.com/citations?user=wQPymlsAAAAJ&hl=es` Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Jorge Saúl Sánchez es Ingeniero en Electrónica e Instrumentación de la Universidad de las Fuerzas Armadas, posee dos maestrías: una en Docencia Matemática de la Universidad Técnica de Ambato y la segunda en Ingeniería Matemática y Computación; docente investigador del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga.

Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador del Área de Matemática, Coordinador de Vinculación, Coordinador de Investigación y Director del Departamento. Dentro de las actividades de vinculación ha participado como director de un proyecto de Vinculación, en el año 2015; en investigación ha participado en diferentes proyectos de investigación en conjunto con otras Instituciones de Educación Superior del centro del país y posee más de 20 artículos científicos en SCOPUS y ha participado como revisor en revistas indexadas. Autor de los libros: Apuntes de Álgebra Lineal y Álgebra Preuniversitaria.

Carlos Sánchez
crsanchez9@espe.edu.ec



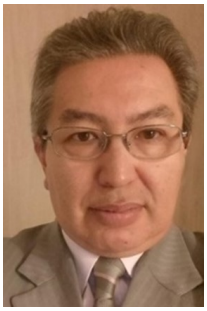
Carlos Sánchez Mosquera, Mgtr.

Profesor Ocasional, Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica https://scholar.google.com/citations?user=lo5ZNCAAAAAJ&hl=es&oi=ao Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga.

Carlos Rafael Sánchez es Ingeniero Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Máster Universitario en Energías Renovables y Sostenibilidad Energética en la Universidad de Barcelona, Especialización en Docencia Matemática por el Centro de Altos Estudios Universitarios; docente investigador del área de Energía y Termofluidos del Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga.

Dentro de las actividades de investigación y vinculación ha participado como docente de apoyo en diferentes proyectos de Vinculación; en investigación ha participado en el proyectos de investigación: "TECNOLOGÍAS INMERSIVAS MULTI USUARIO ORIENTADAS A SISTEMAS SINÉRGICOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE" en conjunto con otras Instituciones de Educación Superior del centro del país y posee 7 artículos científicos en SCOPUS y ha dirigido trabajos de titulación en Tecnología e Ingeniería Automotriz. Autor de los libros: Apuntes de Álgebra Lineal y Álgebra Preuniversitaria.

Iván Collantes
ibcollantes@espe.edu.ec



Iván Collantes Vasconez, Mgs. Profesor Titular, Departamento de Ciencias Exactas Docente del área de Análisis Matemático `https://scholar.google.es/citations?user=pPRIMuUAAAAJ&hl=es` Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Iván Collantes Vásconez es Ingeniero Civil de la Universidad Técnica de Ambato, posee un diplomado superior en Gestión para el Aprendizaje Universitario de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE y una maestría en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docente de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador; docente del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga. Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador de Álgebra y docente a tiempo parcial de diferentes asignaturas del área de Análisis Matemático. Autor de los libros: Apuntes de Álgebra Lineal y Álgebra Preuniversitaria.

Índice

Capítulo I - Coordenadas Rectangulares **17**
Coordenadas Rectangulares 19
Segmento rectilíneo 19
Definición de segmento rectilíneo 19
Posiciones relativas de tres puntos en una recta 19
Sistemas coordenados lineales 20
Longitud de un segmento 20
Distancia entre dos puntos 23
División de un segmento en función de una razón 25
Coordenada de un punto en el plano 28
Coordenadas 28
Distancia entre dos puntos 29
División de un segmento con razón dada 32
Casos particulares de la razón (r) 34
Punto medio de un segmento 34
Puntos de trisección de un segmento 35
Ejercicios propuestos Capítulo I 38

Capítulo II - La Recta **41**
La Recta 43
Pendiente de una recta a partir de dos puntos 43
Ángulo entre dos rectas 45
Paralelismo y Perpendicularidad 46
Ecuaciones de la recta 49
Definición de la recta 49
Ecuaciones de la recta 49
Ecuación de una recta que pasa por un punto y se conoce la pendiente 49
Ecuación de una recta conocida su pendiente y la ordenada en el origen 51
Ecuación de una recta que pasa por dos puntos 53

Ecuación simétrica de la recta 55
Forma general de la ecuación de la recta 57
Relación de coeficientes de la ecuación de la recta 59
Posiciones relativas de dos rectas 62
Paralelismo 62
Perpendicularidad 62
Colinealidad 62
Corte en un punto 63
Forma normal de la ecuación de la recta 65
Reducción de la forma general a la normal 67
Usos de la forma normal de la recta 71
Distancia entre una recta y un punto 71
Ecuaciones de las bisectrices 71
Familia de rectas 75
Ejercicios propuestos Capítulo II 78

Capítulo III - Lugares geométricos 83
Definición 85
Definición de gráfica de una ecuación o lugar geométrico 85
Problema fundamental de la geometría analíticas 85
Gráficos de lugares geométricos 85
Intercepciones con los ejes 85
Simetría 85
Extensión de una curva 86
Asíntotas 86
Ejercicios propuestos Capítulo III 95

Capítulo IV - Transformación de Coordenadas 97
Introducción 99
Introducción 99
Transformaciones 99
Transformaciones de coordenadas 99
Traslación de ejes coordenados 99
Ejercicios propuestos Capítulo IV 113

Capítulo V - La Circunferencia 115
Definición y Elementos 117
Definición de la circunferencia 117
Elementos de la circunferencia 117

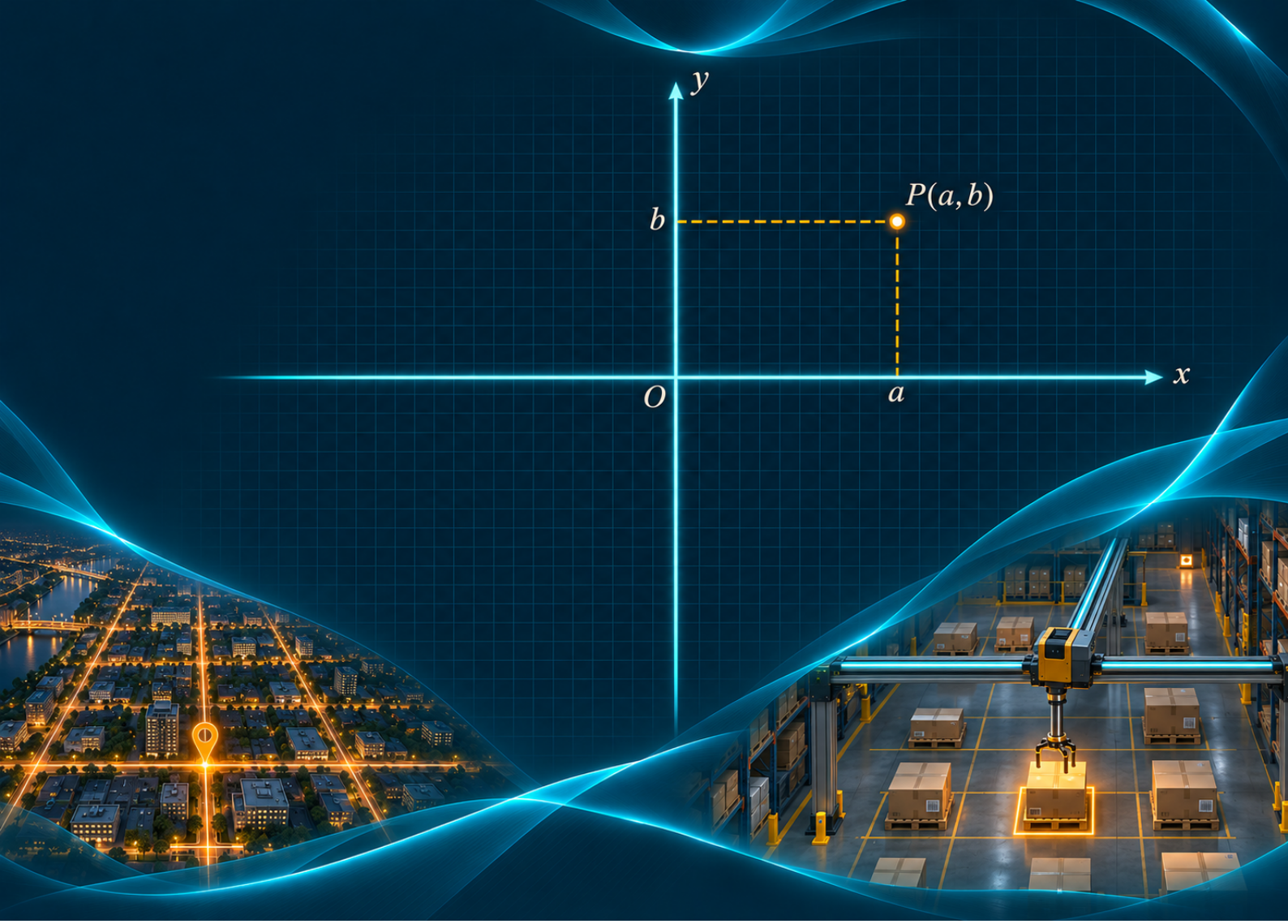
Ecuaciones de la circunferencia 117
Forma canónica 117
Forma ordinaria 119
Forma general 122
Familia de circunferencias 125
Introducción 125
Familia de circunferencias que pasa por la intersección de dos circunferencias 126
Eje radical 130
Definición de eje radical 130
Circunferencias secantes 130
Circunferencias exteriores 130
Circunferencias tangentes exteriores 130
Circunferencias tangentes interiores 131
Tangente a una circunferencia 131
Método de distancia entre punto y recta 131
Método de raíces 132
Ejercicios propuestos Capítulo V 136

Capítulo VI - La Parábola 139
Elementos y definición de la parábola 141
Elementos de la parábola 141
Definición de la parábola 142
Ecuaciones de la parábola 142
Parámetros generales 142
Formas canónicas 142
Formas ordinarias 147
Formas generales 151
Ejercicios propuestos Capítulo VI 155

Capítulo VII - La Elipse 157
Elementos y definición de la elipse 159
Elementos de la elipse 159
Definición de la elipse 160
Ecuaciones de la elipse 160
Parámetros generales 160
Forma canónica 161
Forma ordinaria 170

Forma general 174
Ejercicios propuestos Capítulo VII 176

Capítulo VIII - La Hipérbola 179
Elementos y definición de la hipérbola 181
Elementos de la hipérbola 181
Definición de la hipérbola 182
Ecuaciones de la hipérbola 182
Parámetros generales de la hipérbola 182
Forma canónica 183
Formas ordinarias 191
Forma general 195
Ejercicios propuestos Capítulo VIII 198



CAPÍTULO I

Coordenadas Rectangulares

Coordenadas Rectangulares

Segmento rectilíneo

DEFINICIÓN DE SEGMENTO RECTILÍNEO

Los dos puntos limitantes del segmento se les denomina puntos extremos o simplemente extremos del segmento [1, 3].

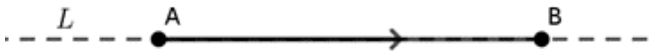


Figura 1: *Segmento rectilíneo*

En la figura 1 se tiene una recta de dimensión infinita L y dos puntos extremos A y B que limitan el segmento de recta, la distancia o longitud que separa a los puntos A y B es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Se identifica que el segmento de recta con puntos extremos A y B es una sucesión de puntos uno detrás de otro, que poseen la misma dirección de secuencia, ya sea desde A hacia B o desde B hacia A [3, 4, 5]. Dado lo mencionado, dependiendo de la dirección, podemos tener un segmento $\overline{AB}$ o un segmento $\overline{BA}$ tratándose de la misma sección de la recta, pero con dirección diferente. Para el caso del segmento $\overline{AB}$ el punto A es el punto origen o inicial y el punto B es el punto extremo o final.

Bajo el criterio de que la dirección hacia la derecha se considera como positiva, el segmento $\overline{AB}$ es positivo y el segmento $\overline{BA}$ es negativo.

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PUNTOS EN UNA RECTA

Las posiciones de tres puntos A, B, C en una recta se identifican con la relación de suma y producto entre ellos.

$$(AB) + (BC) = (AC)$$

Considere que para aplicar la relación de los puntos debemos usar la dirección positiva y respetar el orden [2, 4]. Dado que son tres puntos, tenemos 6 permutaciones (ordenaciones) ya que $3! = (1)\,(2)\,(3) = 6$.

Teniendo en cuenta lo especificado anteriormente, en la figura 2 se muestran las 6 posibles permutaciones.

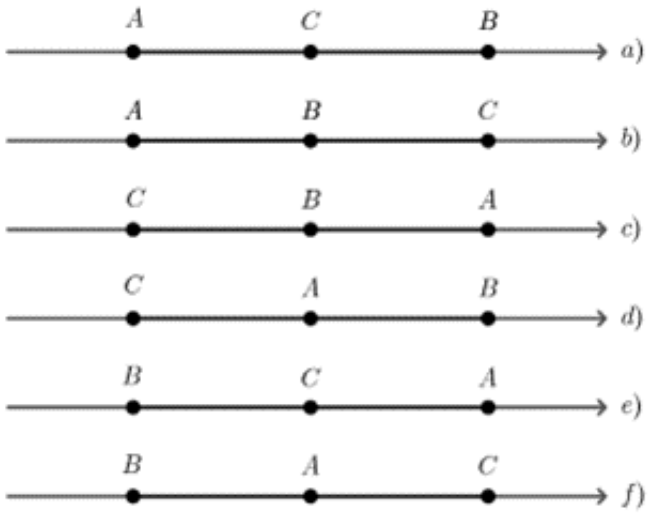


Figura 2: *Órdenes posibles para tres puntos en una recta*

Como se identifica en la figura 2 se tienen 6 opciones que tienen la relación básica, entre la relación d) y la fundamental se tiene lo siguiente:

$$(\overline{CA}) + (\overline{AB}) = (\overline{CB})$$

$$(-\overline{AC}) + (\overline{AB}) = (-\overline{BC})$$

$$(-\overline{AC}) + (\overline{AB}) + (\overline{BC}) = 0$$

$$(\overline{AB}) + (\overline{BC}) = (\overline{AC})$$

Se trabaja con las relaciones de la dirección que existe en el segmento, como lo utilizado en la comprobación anterior:

$$(\overline{CA}) = (-\overline{AC})$$

$$(\overline{CB}) = (-\overline{BC})$$

Sistemas coordenados lineales

LONGITUD DE UN SEGMENTO

En el sistema de coordenada lineal, al ser un sistema de una sola dimensión se define a la longitud de un segmento como la distancia entre dos puntos (inicial y final), encontrado por la diferencia entre dichos puntos, es decir, la resta entre el punto final y el punto inicial, tomando en cuenta la dirección [1, 5, 6].

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1 \wedge \overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$

Siempre relacionando con el hecho de que el punto inicial y final dependen de la dirección del análisis.

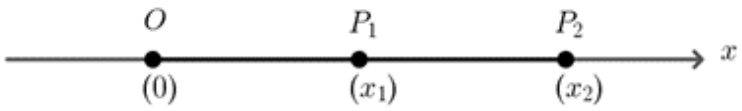


Figura 3: *Tres puntos en una recta*

En la figura 3 tenemos la representación de tres puntos en una recta, el punto O es el punto fijo o referencial y los puntos P_1 y P_2 como dos puntos cualesquiera de la recta, formando así segmentos de recta.

Se deduce lo siguiente:

$$\overline{OP_1} = x_1$$

$$\overline{OP_2} = x_2$$

Si sumamos:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}$$

$$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2$$

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

Para el caso del análisis en la dirección opuesta, de derecha a izquierda, tenemos:

$$\overline{P_1O} = -x_1$$

$$\overline{P_2O} = -x_2$$

Si sumamos:

$$\overline{P_2P_1} + \overline{P_1O} = \overline{P_2O}$$

$$\overline{P_2P_1} - x_1 = -x_2$$

$$\overline{P_2P_1} = -x_2 + x_1$$

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$

Ejemplo 1.1. Determine las longitudes de los segmentos formados por los puntos $P_1\,(-3)$ y $P_2\,(3)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

$$\overline{P_1P_2} = (3) - (-3)$$

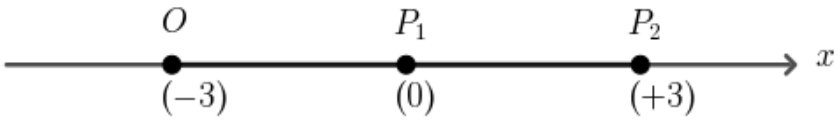


Figura 4: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.1)*

$$\overline{P_1P_2} = 3 + 3$$

$$\overline{P_1P_2} = 6$$

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$

$$\overline{P_2P_1} = (-3) - (3)$$

$$\overline{P_2P_1} = -3 - 3$$

$$\overline{P_2P_1} = -6$$

Ejemplo 1.2. Determine las longitudes de los segmentos formados por los puntos $P_1\,(2)$ y $P_2\,(7)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

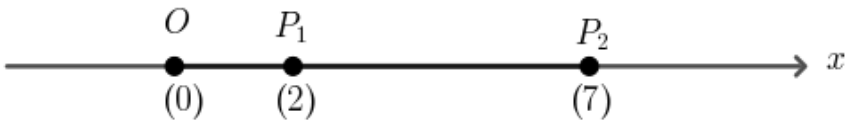


Figura 5: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.2)*

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

$$\overline{P_1P_2} = (7) - (2)$$

$$\overline{P_1P_2} = 7 - 2$$

$$\overline{P_1P_2} = 5$$

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$

$$\overline{P_2P_1} = (2) - (7)$$

$$\overline{P_2P_1} = 2 - 7$$

$$\overline{P_2P_1} = -5$$

Ejemplo 1.3. Determine las longitudes de los segmentos formados por los puntos $P_1\,(-5)$ y $P_2\,(-1)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

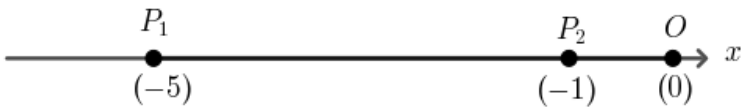


Figura 6: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.3)*

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$
$$\overline{P_1P_2} = (-1) - (-5)$$
$$\overline{P_1P_2} = -1 + 5$$
$$\overline{P_1P_2} = 4$$
$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$
$$\overline{P_2P_1} = (-5) - (-1)$$
$$\overline{P_2P_1} = -5 + 1$$
$$\overline{P_2P_1} = -4$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la longitud del segmento limitado por dichos puntos, en la distancia no importa la dirección, es decir, la distancia es un valor positivo [3, 4].

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1| \vee d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2|$$

Ejemplo 1.4. Determine las distancias entre los puntos $P_1\,(-3)$ y $P_2\,(3)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

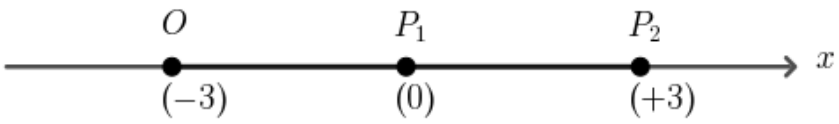


Figura 7: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.4)*

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |(3) - (-3)|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |3 + 3|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |6| = 6$$

$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |(-3) - (3)|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |-3 - 3|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |-6| = 6$$

Ejemplo 1.5. Determine las distancias entre los puntos $P_1\,(2)$ y $P_2\,(7)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

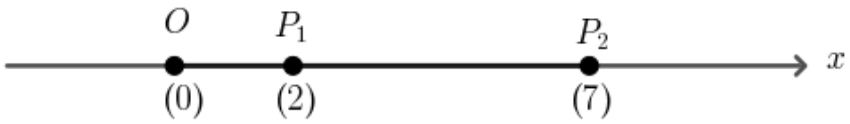


Figura 8: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.5)*

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |(7) - (2)|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |7 - 2|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |5| = 5$$

$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |(2) - (7)|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |2 - 7|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |-5| = 5$$

Ejemplo 1.6. Determine las distancias entre los puntos $P_1\,(-5)$ y $P_2\,(-1)$, realizando el estudio en ambas direcciones $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_1}$.

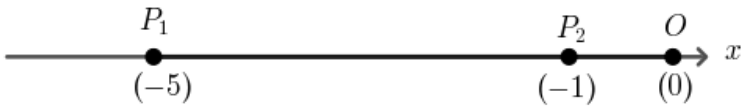


Figura 9: *Longitudes de segmento (Ejemplo 1.6)*

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |(-1) - (-5)|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |-1 + 5|$$
$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |4| = 4$$

$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |(-5) - (-1)|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |-5 + 1|$$
$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |-4| = 4$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN FUNCIÓN DE UNA RAZÓN

Teniendo los puntos P_1 y P_2 que están en la recta y se considera la dirección de uno hacia otro, se tiene un punto P que está dividiendo el segmento de recta en una razón específica [1, 6].

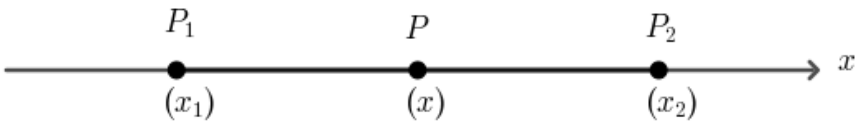


Figura 10: *División de un segmento en función de una razón*

La razón específica o razón dada se define como la relación de longitudes respecto del punto P: $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$, la dirección en este caso es de izquierda a derecha según la figura 10.

Del análisis anterior tenemos:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$r\left(x_2 - x\right) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$-rx - x = -x_1 - rx_2$$

$$-x\left(r + 1\right) = -1\left(x_1 + rx_2\right)$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r + 1}; r \neq -1$$

Para la razón específica, normalmente se busca que sea un número entero para que la representación sea más sencilla.

Ejemplo 1.7. Represente el segmento de recta desde -2 hasta 7 y con una relación de división de 3.

Tenemos: $r = 3; x_1 = -2; x_2 = 7$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r + 1} = \frac{(-2) + (3)\,(7)}{(3) + 1}$$

$$x = \frac{19}{4} = 4,75$$



Figura 11: *Segmento por relación de división (Ejemplo 1.7)*

Como la razón específica es de 3, el segmento en total está dividido en 4 secciones, es decir, tiene 3 puntos internos entre P_1 y P_2, por lo que para representar los puntos faltantes se calcula la distancia entre P y P_2, lo que tenemos $7 - 4,75 = 2,25$, con la distancia entre secciones la sumamos con P_1 teniendo $-2 + 2,25 = 0,25$, para el siguiente punto repetimos el proceso con el actual punto $0,25 + 2,25 = 2,5$, como se muestra en la figura 12.

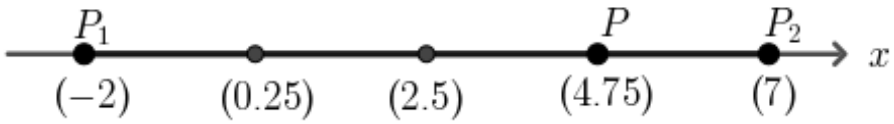


Figura 12: *Segmento por relación de 3 (Ejemplo 1.7)*

Ejemplo 1.8. Teniendo el segmento de recta desde 1 hasta 6 y un valor de $x = 2,5$ identifique la razón y represente.

Tenemos: $x = 2,5$; $x_1 = 1$; $x_2 = 6$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{(2,5) - (1)}{(6) - (2,5)}$$

$$r = \frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7} = 0,43$$

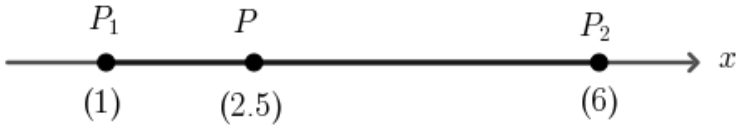


Figura 13: *Segmento por relación de división (Ejemplo 1.8)*

Al ser la razón específica menor a 1, no podemos representarla de una forma amigable, pero los puntos referenciales sí.

Ejemplo 1.9. Un segmento de recta nace desde -1 hasta 8 y un valor de $x = 5$ identifique la razón y represente.

Tenemos: $x = 5$; $x_1 = -1$; $x_2 = 8$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{(5) - (-1)}{(8) - (5)}$$

$$r = \frac{6}{3} = 2$$



Figura 14: *Segmento por relación de división (Ejemplo 1.9)*

Al ser la razón específica de 2 podemos representarla, se calcula la distancia entre P y P_2, lo que tenemos $8 - 5 = 3$, con la distancia entre secciones la sumamos con P_1 teniendo $-1 + 3 = 2$, como se muestra en la figura 15.



Figura 15: *Segmento por relación de 2 (Ejemplo 1.9)*

Coordenada de un punto en el plano

COORDENADAS

Todo punto en el plano se puede localizar en el sistema rectangular [5], en este caso, le llamaremos punto P al que se traza PA (línea entrecortada) perpendicular al eje x y PB perpendicular al eje y. La longitud del segmento horizontal dirigido OA se representa por x y se identifica como abscisa de P y la longitud del segmento dirigido OB se representa por y y se identifica como ordenada de P.

La abscisa y la ordenada se las representa mediante (x, y) y son las coordenadas rectangulares del punto P [3], las abscisas medidas sobre el eje x a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas en el eje y arriba de O son positivas y abajo son negativas. Los signos de cada uno de los cuadrantes se especifica en la figura 16.

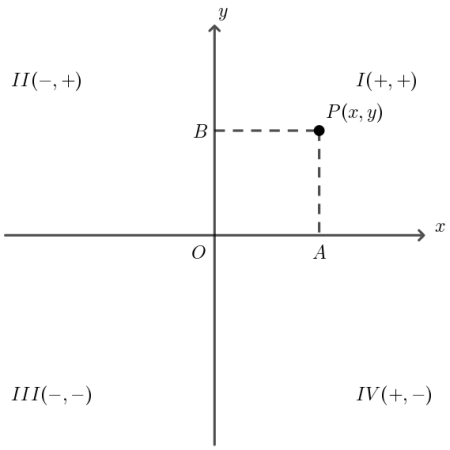


Figura 16: *Cuadrantes en el sistema cartesiano x, y*

Ejemplo 1.10. Graficar los siguientes puntos (2,2), (-3,1), (0,-3), (0,3), (-2,-4), (0,-3).

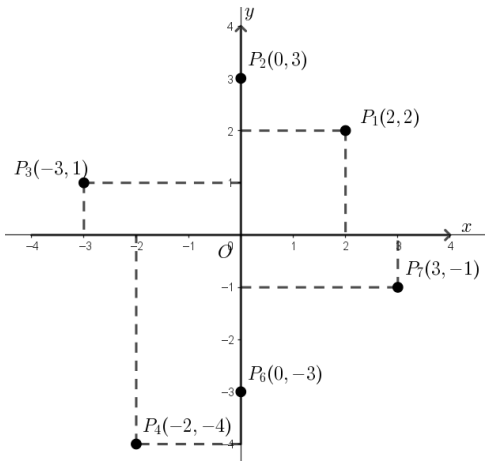


Figura 17: *Puntos (x, y) en cada cuadrante y en los ejes (Ejemplo 1.10)*

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es la resta entre el punto final y el punto inicial, considerando que la distancia es un valor positivo independiente de la dirección de análisis.

$$d = \left|\overline{P_0P_f}\right| = \sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2}$$

Se tiene a los puntos P_0 y P_f dos puntos que se encuentran en el plano de dos dimensiones x y y. Se considera el punto $P_0(x_0, y_0)$ como punto inicial y $P_f(x_f, y_f)$ como punto final y que la relación a encontrar es $d = \left|\overline{P_0P_f}\right|$. Para la explicación gráfica se toman los puntos en el plano y se trazan líneas perpendiculares a los ejes desde los puntos, encontrando las proyecciones y determinando las diferencias entre los mismos Δx y Δy.

Como se muestra en la figura 18 se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos son Δx, Δy y la hipotenusa d, para identificar el valor d se aplica el Teorema de Pitágoras y con eso se encuentra la distancia entre los puntos P_0 y P_f.

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Aplicando el criterio de la longitud de un segmento ya estudiado, tenemos:

$$\Delta x = x_f - x_0; \Delta y = y_f - y_0$$

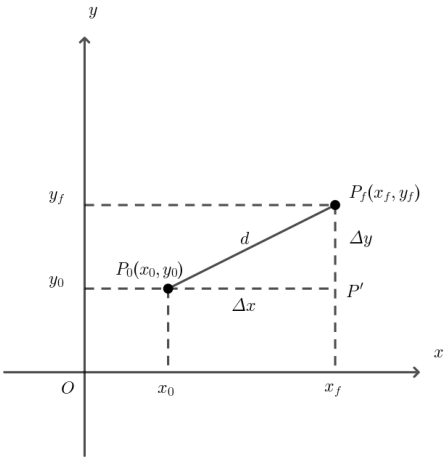


Figura 18: *Distancia entre dos puntos*

Con la aplicación del Teorema de Pitágoras y los valores de Δx y Δy, se determina el valor de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2}$$

Ejemplo 1.11. Demuestre que los vértices $A = (3, 3)$, $B = (-3, -3)$ y $C = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ forman un triángulo equilátero.

Inicialmente se representan los puntos en el plano cartesiano y unimos los mismos entre sí para verificar que se forma un triángulo.

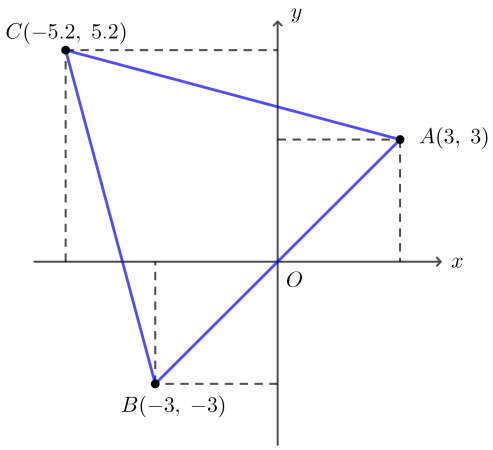


Figura 19: *Triángulo formado por segmentos de recta (Ejemplo 1.11)*

Para verificar que se trata de un triángulo equilátero debemos calcular las

longitudes de los segmentos AB, BC y AC que son los lados del triángulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{((-3) - (3))^2 + ((-3) - (3))^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = \sqrt{36(2)} = 6\sqrt{2} = 8,485$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{\left(\left(-3\sqrt{3}\right) - (-3)\right)^2 + \left(\left(3\sqrt{3}\right) - (-3)\right)^2}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{\left(-3\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 + \left(3\left(\sqrt{3} + 1\right)\right)^2} = \sqrt{9\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 9\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}$$

$$|\overline{BC}| = 3\sqrt{\left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right) + \left(3 + 2\sqrt{3} + 1\right)} = 3\sqrt{(4) + (4)} = 3\sqrt{2(4)} = 6\sqrt{2} = 8,485$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{\left(\left(-3\sqrt{3}\right) - (3)\right)^2 + \left(\left(3\sqrt{3}\right) - (3)\right)^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{\left(-3\left(\sqrt{3} + 1\right)\right)^2 + \left(3\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2} = \sqrt{9\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + 9\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}$$

$$|\overline{AC}| = 3\sqrt{\left(3 + 2\sqrt{3} + 1\right) + \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right)} = 3\sqrt{(4) + (4)} = 3\sqrt{2(4)} = 6\sqrt{2} = 8,485$$

Como se evidencia, el valor de las distancias de los tres puntos es el mismo, por lo tanto el triángulo es equilátero.

Ejemplo 1.12. Demuestre que los vértices $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$ y $C = (0, -2)$ y $D = (-2, 0)$ forman un cuadrado.

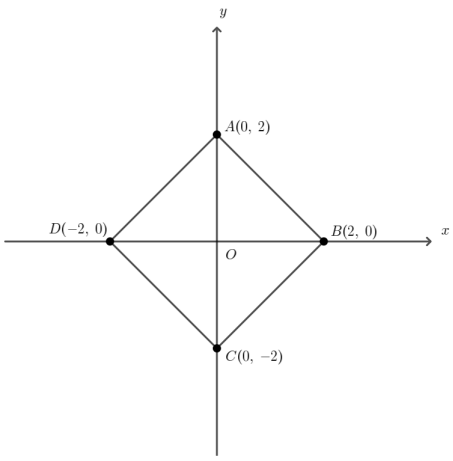


Figura 20: *Cuadrado formado por segmentos de recta (Ejemplo 1.12)*

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{((2) - (0))^2 + ((0) - (2))^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} = 2\sqrt{2} = 2,828$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{((0) - (-2))^2 + ((-2) - (0))^2}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} = 2\sqrt{2} = 2,828$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{((-2) - (0))^2 + ((0) - (-2))^2}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} = 2\sqrt{2} = 2,828$$

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{((0) - (-2))^2 + ((2) - (0))^2}$$

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} = 2\sqrt{2} = 2,828$$

Se tiene que las magnitudes en los 4 casos son iguales, podemos concluir que los puntos forman un cuadrado.

División de un segmento con razón dada

Se tiene dos puntos P_0 y P_f que son los extremos de un segmento cualquiera $\overline{P_0P_f}$ o $\overline{P_fP_0}$ para un punto P cualquiera que divide el segmento con una razón específica r.

La relación está definida por $r = \overline{P_0P} : \overline{PP_f}$

$$P(x,y) \Longrightarrow P\left(\frac{x_0 + rx_f}{1+r}, \frac{y_0 + ry_f}{1+r}\right); r \neq -1$$

Para identificar la relación de un segmento cualquiera, se trazan líneas auxiliares perpendiculares a los ejes coordenados, se encuentra el cociente entre las longitudes de los segmentos divididos por el punto P [5], $\overline{P_0P}$ y $\overline{PP_f}$. Las relaciónes que podemos considerar:

$$r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} \quad \text{o} \quad r = \frac{\overline{PP_f}}{\overline{P_0P}}$$

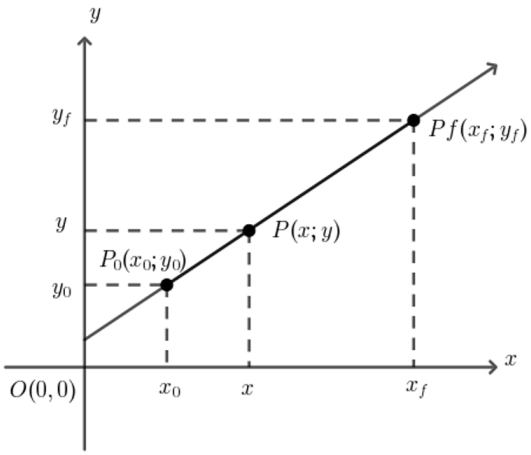


Figura 21: *División de un segmento con una razón entre P_0 y P*

Para este caso vamos a tomar la primera relación $r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}}$, aplicando la relación de proporciones por geometría, identificamos lo siguiente:

$$\frac{\overline{P_0P}}{x - x_0} = \frac{\overline{PP_f}}{x_f - x}$$

Operando la expresión despejamos el valor de la incógnita en referencia al eje de las abscisas.

$$\frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{x - x_0}{x_f - x}$$

Operamos con los valores conocidos x_0 y x_f.

$$r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{x - x_0}{x_f - x}$$

$$r(x_f - x) = (x - x_0)$$

$$rx_f - rx = x - x_0$$

$$-rx - x = -rx_f - x_0$$

$$x(r + 1) = rx_f + x_0$$

$$x = \frac{rx_f + x_0}{r + 1}; r \neq -1$$

Consideramos de la misma forma las relaciones pero con el eje de las ordenadas, tenemos:

$$\frac{\overline{P_0P}}{y - y_0} = \frac{\overline{PP_f}}{y_f - y}$$

$$r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{y - y_0}{y_f - y}$$

$$r(y_f - y) = (y - y_0)$$

$$ry_f - ry = y - y_0$$

$$-ry - y = -ry_f - y_0$$

$$y(r+1) = ry_f + y_0$$

$$y = \frac{ry_f + y_0}{r+1}; r \neq -1$$

Casos particulares de la razón (r)

Para describir la condición particular de la razón r debemos considerar que la dirección de P_0 a P_f es positiva dándole la variable d de distancia del segmento $\overline{P_0P_f}$, deduciendo que $d = \overline{P_0P_f} > 0$.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Para identificar el punto medio de un segmento se consideran dos puntos P_0 y P_f como los extremos de un segmento $\overline{P_0P_f}$ y cuyo punto medio es $\overline{P}$, el mismo que divide al segmento en dos partes iguales.

$$\overline{P}(x, y) = \overline{P}\left(\frac{x_0 + x_f}{2}, \frac{y_0 + y_f}{2}\right)$$

Para determinar la expresión anterior debemos considerar que el punto $\overline{P}$ es un único punto del segmento dirigido que lo divide en dos partes iguales [2, 4], por lo que aplicamos lo usado en la explicación de la relación r.

$$r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{d/2}{d/2} = 1$$

Reemplazamos en la relación de las abscisas y ordenadas.

$$x = \frac{rx_f + x_0}{r+1}$$

$$\overline{x} = \frac{(1)x_f + x_0}{(1)+1} = \frac{x_f + x_0}{2}$$

$$y = \frac{ry_f + y_0}{r+1}$$

$$\overline{y} = \frac{(1)y_f + y_0}{(1)+1} = \frac{y_f + y_0}{2}$$

De lo desarrollado se identifica que:

$$\overline{P}(x,y) = \overline{P}\left(\frac{x_0 + x_f}{2}, \frac{y_0 + y_f}{2}\right)$$

PUNTOS DE TRISECCIÓN DE UN SEGMENTO

Para identificar los tres puntos de trisección (3) de un segmento se consideran dos puntos P_0 y P_f como los extremos de un segmento $\overline{P_0P_f}$ y cuyos puntos de trisección son P_1 y P_2, los mismos que dividen al segmento en tres partes iguales [3, 4].

$$P_1(x_1,y_1) = \left(\frac{2x_0 + x_f}{3}, \frac{2y_0 + y_f}{3}\right) \wedge P_2(x_2,y_2) = \left(\frac{x_0 + 2x_f}{3}, \frac{y_0 + 2y_f}{3}\right)$$

Para determinar la expresión anterior debemos considerar los puntos P_1 y P_2 son los únicos puntos que dividen al segmento dirigido en tres partes iguales, por lo que aplicamos lo usado en la explicación de la relación r, tomando en cuenta que la dirección de análisis para la primera sección sería $d/3$ y para la segunda $2d/3$.

$$r_1 = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{d/3}{2d/3} = 1/2$$

Reemplazamos en la relación de las abscisas y ordenadas del punto P_1.

$$x = \frac{r_1x_f + x_0}{r_1 + 1}$$

$$x_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)x_f + x_0}{\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\left(\frac{x_f + 2x_0}{2}\right)}{\left(\frac{1+2}{2}\right)} = \frac{x_f + 2x_0}{3}$$

$$y = \frac{r_1y_f + y_0}{r_1 + 1}$$

$$y_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)y_f + y_0}{\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\left(\frac{y_f + 2y_0}{2}\right)}{\left(\frac{1+2}{2}\right)} = \frac{y_f + 2y_0}{3}$$

De lo desarrollado se identifica que:

$$P_1(x_1,y_1) = \left(\frac{2x_0 + x_f}{3}, \frac{2y_0 + y_f}{3}\right)$$

Reemplazamos en la relación de las abscisas y ordenadas del punto P_2, con la primera relación del segmento $2d/3$ y la segunda $d/3$.

$$r = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{PP_f}} = \frac{2d/3}{d/3} = 2$$

$$x = \frac{rx_f + x_0}{r+1}$$

$$x_2 = \frac{(2)\,x_f + x_0}{(2)+1} = \frac{2x_f + x_0}{3}$$

$$y = \frac{ry_f + y_0}{r+1}$$

$$y_2 = \frac{(2)\,y_f + y_0}{(2)+1} = \frac{2y_f + y_0}{3}$$

De lo desarrollado se identifica que:

$$P_2(x_2, y_2) = \left(\frac{x_0 + 2x_f}{3}, \frac{y_0 + 2y_f}{3}\right)$$

Ejemplo 1.13. Determine el punto medio y los puntos de trisección del segmento limitado por los puntos $P_0(-2, 10/3)$ y $P_f(5, -4/3)$.

Graficamos el segmento y colocamos los puntos de interés para el desarrollo de la solución.

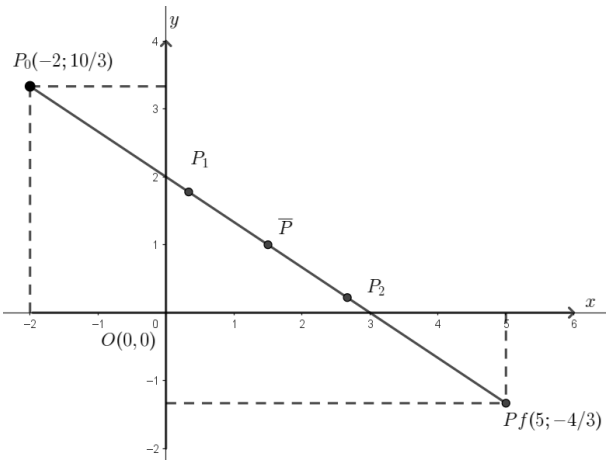


Figura 22: *Punto medio y puntos de trisección (Ejemplo 1.13)*

Para el punto medio aplicamos las fórmulas descritas anteriormente.

$$\overline{x} = \left(\frac{x_0 + x_f}{2}\right) = \left(\frac{(-2) + (5)}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\overline{y} = \left(\frac{y_0 + y_f}{2}\right) = \left(\frac{(10/3) + (-4/3)}{2}\right) = \left(\frac{\frac{10-4}{3}}{2}\right) = \left(\frac{6}{6}\right) = 1$$

$$\overline{P} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

Para los puntos de trisección realizamos un proceso similar al anterior.

$$x_1 = \frac{2x_0 + x_f}{3} = \frac{2(-2) + (5)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{2y_0 + y_f}{3} = \frac{2(10/3) + (-4/3)}{3} = \frac{\frac{20}{3} + \frac{-4}{3}}{3} = \frac{16}{9}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

$$x_2 = \frac{x_0 + 2x_f}{3} = \frac{(-2) + 2(5)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y_2 = \frac{y_0 + 2y_f}{3} = \frac{(10/3) + 2(-4/3)}{3} = \frac{\frac{10}{3} + \frac{-8}{3}}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{9}\right)$$

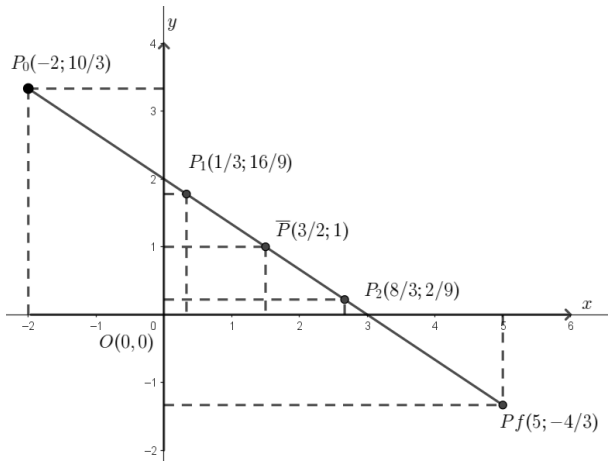


Figura 23: *Punto medio y puntos de trisección calculados (Ejemplo 1.13)*

Ejercicios propuestos Capítulo I

1. Determine la longitud de los segmentos formados por los puntos P_1, P_2 y P_3. Grafique.

   a) $P_1 = 4, P_2 = -4, P_3 = 0$
   b) $P_1 = 10, P_2 = -5, P_3 = 2$
   c) $P_1 = -3, P_2 = 7, P_3 = -1$
   d) $P_1 = 12, P_2 = -8, P_3 = 5$
   e) $P_1 = -6, P_2 = 9, P_3 = -2$
   f) $P_1 = 15, P_2 = -10, P_3 = 3$
   g) $P_1 = -2, P_2 = 8, P_3 = -5$
   h) $P_1 = 20, P_2 = -12, P_3 = 7$
   i) $P_1 = -7, P_2 = 5, P_3 = -3$
   j) $P_1 = 18, P_2 = -6, P_3 = 4$
   k) $P_1 = -4, P_2 = 11, P_3 = -2$
   l) $P_1 = 14, P_2 = -9, P_3 = 6$
   m) $P_1 = -5, P_2 = 13, P_3 = -1$
   n) $P_1 = 22, P_2 = -15, P_3 = 8$
   ñ) $P_1 = -8, P_2 = 6, P_3 = -3$
   o) $P_1 = 25, P_2 = -20, P_3 = 10$
   p) $P_1 = -1, P_2 = 4, P_3 = -6$
   q) $P_1 = 30, P_2 = -18, P_3 = 12$
   r) $P_1 = -9, P_2 = 7, P_3 = -4$
   s) $P_1 = 35, P_2 = -22, P_3 = 15$

2. Teniendo el segmento de recta desde P_1 hasta P_2 y un valor de x, identifique la razón y represente gráficamente. Grafique.

   a) $P_1 = 1, P_2 = 6, x = 2.5$
   b) $P_1 = 2, P_2 = 10, x = 4.5$
   c) $P_1 = -3, P_2 = 5, x = 1.5$
   d) $P_1 = 0, P_2 = 8, x = 3.2$
   e) $P_1 = -5, P_2 = 3, x = -1.5$
   f) $P_1 = 4, P_2 = 12, x = 7.5$
   g) $P_1 = -2, P_2 = 4, x = 0.5$
   h) $P_1 = 3, P_2 = 9, x = 5.5$
   i) $P_1 = -4, P_2 = 2, x = -0.5$
   j) $P_1 = 5, P_2 = 15, x = 9.5$
   k) $P_1 = -1, P_2 = 7, x = 2.5$
   l) $P_1 = 2.5, P_2 = 8.5, x = 5.0$
   m) $P_1 = -3.5, P_2 = 4.5, x = 1.0$
   n) $P_1 = 1.5, P_2 = 7.5, x = 4.0$
   ñ) $P_1 = -2.5, P_2 = 5.5, x = 2.0$
   o) $P_1 = 3.5, P_2 = 11.5, x = 7.0$
   p) $P_1 = -1.5, P_2 = 6.5, x = 3.0$
   q) $P_1 = 4.5, P_2 = 13.5, x = 8.0$
   r) $P_1 = -4.5, P_2 = 3.5, x = -0.5$
   s) $P_1 = 6, P_2 = 18, x = 11.0$

3. Tiene los tres puntos A, B, C que forman un triángulo, determine si es un triángulo equilátero, isósceles, rectángulo o irregular. Debe realizar el análisis de la longitud de cada lado. Grafique.

   a) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$
   b) $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(3,4)$
   c) $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,3)$
   d) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3,3\sqrt{3})$
   e) $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(2,4)$
   f) $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$
   g) $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(4,6)$
   h) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(1.5,2.598)$
   i) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$
   j) $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(3,5)$
   k) $A(-2,-1)$, $B(4,-1)$, $C(1,4)$
   l) $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,\sqrt{3})$
   m) $A(0,0)$, $B(7,0)$, $C(3,4)$
   n) $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(0,5)$
   ñ) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$
   o) $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,4)$
   p) $A(0,0)$, $B(9,0)$, $C(4.5,7.794)$
   q) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(1.5,2.598)$
   r) $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(5,8.66)$
   s) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(1,2)$

4. Determine el punto medio y los puntos de trisección del segmento de recta limitado por los puntos P_0 y P_f. Grafique.

   a) $P_0(0,0)$, $P_f(6,0)$
   b) $P_0(2,3)$, $P_f(8,9)$
   c) $P_0(-4,2)$, $P_f(6,7)$
   d) $P_0(1,1)$, $P_f(10,10)$
   e) $P_0(-3,-5)$, $P_f(5,7)$
   f) $P_0(0,4)$, $P_f(12,0)$
   g) $P_0(3,-2)$, $P_f(9,4)$
   h) $P_0(-5,1)$, $P_f(7,9)$
   i) $P_0(2,-1)$, $P_f(8,5)$
   j) $P_0(-2,-3)$, $P_f(4,5)$
   k) $P_0(0,0)$, $P_f(9,12)$
   l) $P_0(1,4)$, $P_f(7,10)$
   m) $P_0(-3,2)$, $P_f(5,8)$
   n) $P_0(4,-1)$, $P_f(10,5)$
   ñ) $P_0(-1,-2)$, $P_f(7,6)$
   o) $P_0(2,5)$, $P_f(14,11)$
   p) $P_0(-4,0)$, $P_f(8,12)$
   q) $P_0(3,1)$, $P_f(15,7)$
   r) $P_0(-2,3)$, $P_f(10,9)$
   s) $P_0(0,-3)$, $P_f(12,9)$



CAPÍTULO II

La Recta

La Recta

Se considera a la recta como una secuencia infinita de puntos sucesivos, uno detrás de otro manteniendo una dirección común [1, 2, 5]. Se identifican ciertos aspectos que describen a la recta.

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo formado entre el eje de las abscisas o su proyección y la recta, considerando el eje positivo de las abscisas y la dirección positiva (antihoraria) [3, 5]. Existen ángulos negativos, lo que indica que la dirección del ángulo es horaria.

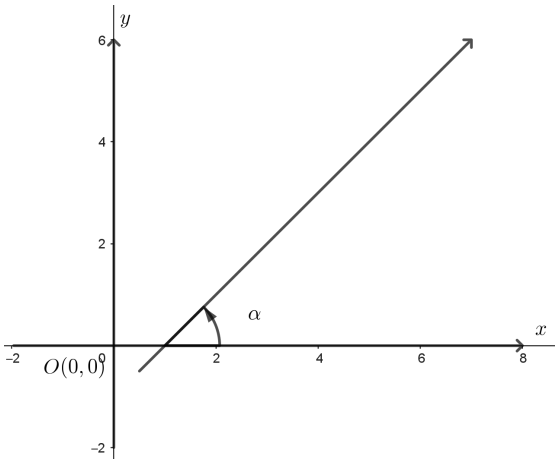


Figura 24: *Recta en función del ángulo* α

La pendiente de una recta es la tangente de la misma, descrita por la letra m, identificada como la inclinación.

Por lo que se identifica lo siguiente:

$$m = \tan(\alpha)$$

Debido a las dos direcciones posibles en el análisis del ángulo, se describe que el ángulo α está comprendido desde $0°$ a $180°$.

$$0° \leq \alpha \leq 180°$$

PENDIENTE DE UNA RECTA A PARTIR DE DOS PUNTOS

Se tiene dos puntos que forman parte de una recta y que pueden ser puntos extremos o estar en cualquier posición siempre que formen parte de la recta.

Se identifica a la pendiente con la siguiente relación:

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}; x_0 \neq x_f$$

Entendiendo que el punto final $P_f(x_f, y_f)$ y $P_0(x_0, y_0)$ como punto inicial, se tiene la siguiente representación:

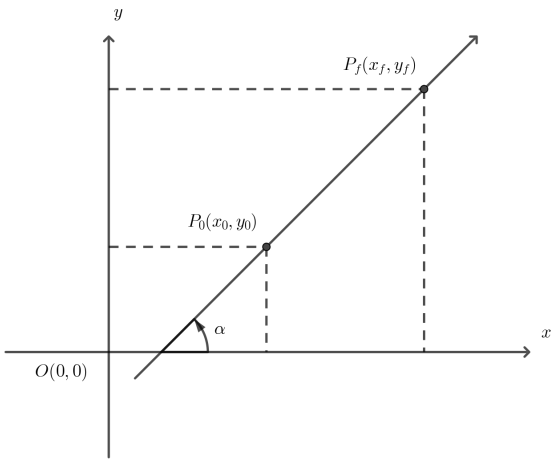


Figura 25: *Recta en función de dos puntos*

Como se muestra los puntos P_0 y P_f y sus respectivas proyecciones a los ejes coordenados que forman dos triángulos rectángulos, el análisis se centrará en el triángulo P_0, P_f, A con el ángulo α cuyo vértice es P_0.

De la gráfica identificamos que la inclinación de la recta está dada por el ángulo α que se mantiene constante en cualquier punto de la recta [1].

Si tomamos los puntos P_0, P_f, A y aplicamos la tangente del ángulo α tenemos que el cateto opuesto es la diferencia en eje vertical y el cateto adyacente la diferencia del eje horizontal.

$$m = \tan\alpha = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

Ejemplo 2.1. Encuentre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que posee como puntos de la misma $P_0(-2, 3)$ y $P_f(5, -1/2)$.

Realizamos la gráfica y trazamos los datos auxiliares.

Aplicamos la expresión de la pendiente.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

$$m_{P_0P_f} = \frac{(-\frac{1}{2}) - (3)}{(5) - (-2)} = \frac{\frac{-1-6}{2}}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{P_0P_f} = \tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

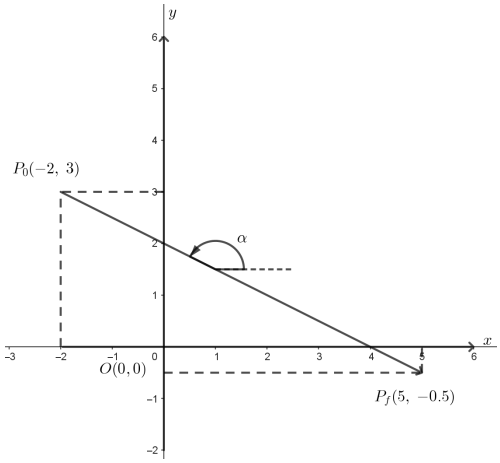


Figura 26: *Recta con ángulo de inclinación (Ejemplo 2.1)*

$$\arctan(\tan\alpha) = \arctan -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arctan -\frac{1}{2} = -26,56°$$

Como podemos evidenciar, el valor del ángulo es negativo lo que implica que es medido desde el eje positivo de la x en dirección horaria, pero se asignó el ángulo como uno positivo en dirección antihoraria, se calcula con la resta de un ángulo complementario de $180°$.

$$\alpha = 180° - 26,56° = 153,43°$$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Se tienen dos rectas denominadas L_a y L_b que tienen sus respectivas pendientes m_a y m_b, formando un ángulo θ entre ellas.

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a} \Longrightarrow m_a m_b \neq -1$$

Se realiza la representación de dos rectas que se cruzan formando un ángulo entre ellas.

Se identifica que $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ y se aplica la función tangente a los dos elementos de la igualdad.

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Se aplica una identidad trigonométrica que equivale a la tangente de una resta de ángulos, encontrando:

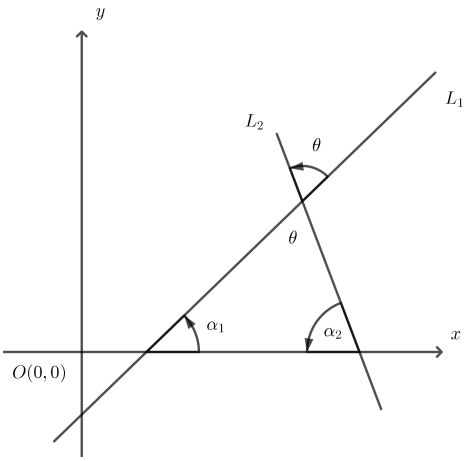


Figura 27: *Ángulo θ entre dos rectas L_1 y L_2*

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a}$$

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

1. Dos rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando poseen el mismo valor de la pendiente $m_a = m_b$ [2, 3], las rectas nunca se cruzan en un punto.

Para comprobar se utiliza la ecuación descrita anteriormente.

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a}$$

$$m_a = m_b = m$$

$$\tan\theta = \frac{m - m}{1 + mm} = \frac{0}{1 + m^2} = 0$$

Debido a que el valor de $\tan\theta = 0°$, implica que el ángulo que existe entre las rectas puede ser $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, se comprueba que son rectas paralelas.

2. Dos rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si entre ellas si forman un ángulo de $90°$, esto implica que el producto de las pendientes es igual a -1, $m_a m_b = -1$ [4].

Se utiliza la ecuación general del ángulo entre dos rectas.

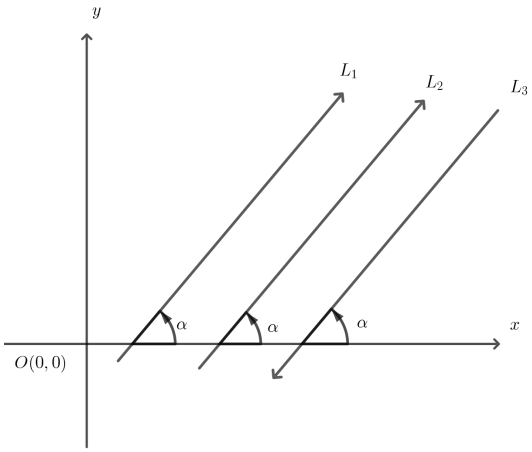


Figura 28: *Rectas paralelas:* $0°$ (L_1 *y* L_2), $180°$ (L_2 *y* L_3)

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a}$$

$$m_a m_b = -1$$

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + (-1)} = \frac{m_b - m_a}{0} = \infty$$

Debido a el valor de $\tan\theta = \infty$, el ángulo que existe entre las rectas puede ser $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$, se comprueba que son rectas perpendiculares.

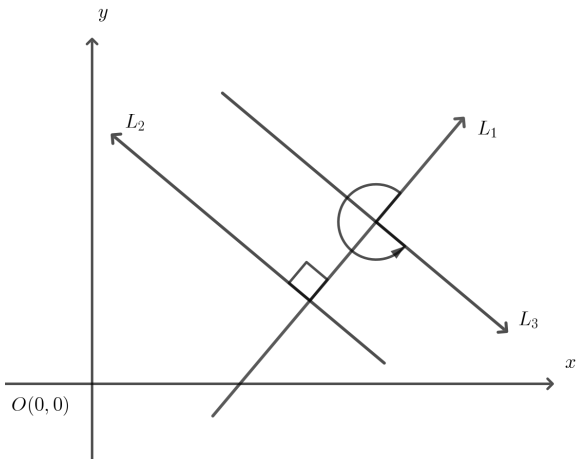


Figura 29: *Rectas perpendiculares:* $90°$ (L_1 *y* L_2), $270°$ (L_1 *y* L_3)

Ejemplo 2.2. Determine el ángulo α de la figura formada por los puntos $A\left(6, \frac{7}{2}\right)$, $B\left(9, 9\right)$, $C\left(1, \frac{13}{2}\right)$, $D\left(-2, 1\right)$

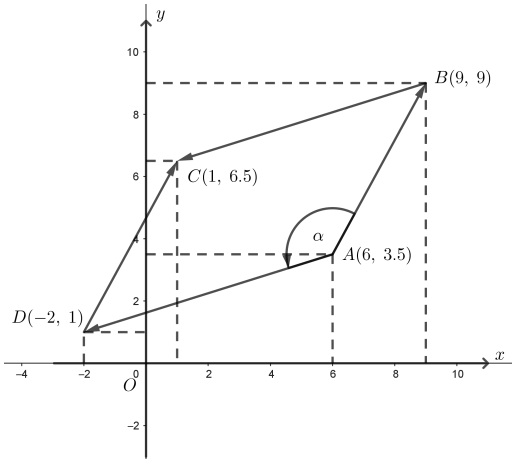


Figura 30: *Paralelogramo con cuatro puntos (Ejemplo 2.2)*

Se realiza la gráfica uniendo los puntos y trazando las líneas auxiliares, se identifica el ángulo α cuyo vértice es el punto A.

Para encontrar el ángulo α se trabaja con la recta $\overline{AD}$ y la recta $\overline{AB}$ que se denomina como L_a y L_b respectivamente.

$$m_{AD} = m_a = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{(1) - \left(\frac{7}{2}\right)}{(-2) - (6)} = \frac{\frac{2-7}{2}}{-8} = \frac{\frac{-5}{2}}{-8} = \frac{5}{16}$$

$$m_{AB} = m_b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(9) - \left(\frac{7}{2}\right)}{(9) - (6)} = \frac{\frac{18-7}{2}}{3} = \frac{\frac{11}{2}}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\tan\theta = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a}$$

$$\tan\theta = \frac{\left(\frac{11}{6}\right) - \left(\frac{5}{16}\right)}{1 + \left(\frac{11}{6}\right)\left(\frac{5}{16}\right)} = \frac{\frac{176-30}{96}}{\frac{96+55}{96}} = \frac{146}{151}$$

$$\tan\theta = \frac{146}{151}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{146}{151}\right) = 44,04°$$

Como se muestra en los cálculos, el valor del θ corresponde al ángulo agudo formado por las dos rectas, para este caso se opera bajo el criterio del ángulo complementario, es decir, restamos de $180°$ para encontrar α.

$$\alpha = 180° - \theta = 180° - (44,04°)$$

$$\alpha = 135,96°$$

Ecuaciones de la recta

DEFINICIÓN DE LA RECTA

La línea recta es una secuencia infinita de puntos uno detrás de otro, manteniendo una dirección común [4], es decir, es un lugar geométrico donde si se toman dos puntos cualesquiera, estos forman un segmento de recta contenido en dicho lugar, y cuya pendiente siempre es la misma.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}; x_0 \neq x_f$$

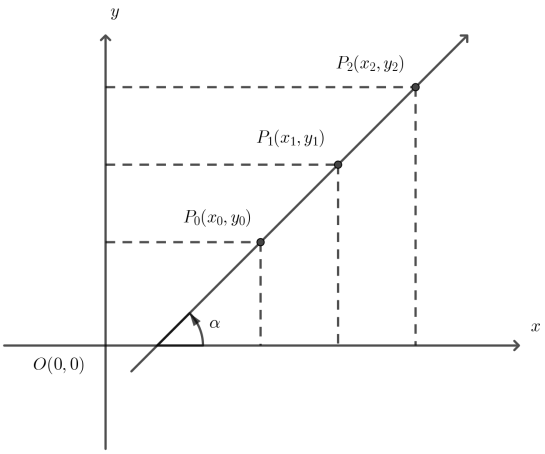


Figura 31: *Recta con tres puntos*

Se representa una recta con tres puntos cualesquiera para identificar la pendiente con las combinaciones que se producen.

$$m = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con esto se identifica que la pendiente calculada con las opciones disponibles es la misma, es decir, se mantiene constante.

Ecuaciones de la recta

ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO Y SE CONOCE LA PENDIENTE

Una recta que pasa por un punto P cualquiera y que tiene una pendiente m tiene la siguiente ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Se tiene en consideración que $P_0(x_0, y_0)$ es un punto que pertenezca a la recta. Se representa la recta en el sistema coordenado y se ubica un punto cualquiera, en este caso P_0, aunque se puede utilizar también P_f sin ningún inconveniente.

Para la comprobación al punto $P_f(x_f, y_f) = P(x, y)$ como un punto desconocido que pertenece a la recta y se opera aplicando la expresión de la pendiente.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$m(x - x_0) = y - y_0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Teniendo así la expresión de una recta que pasa por un punto conocido y tiene la pendiente conocida.

Ejemplo 2.3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 1/2)$ y tiene un ángulo de inclinación de $30°$.

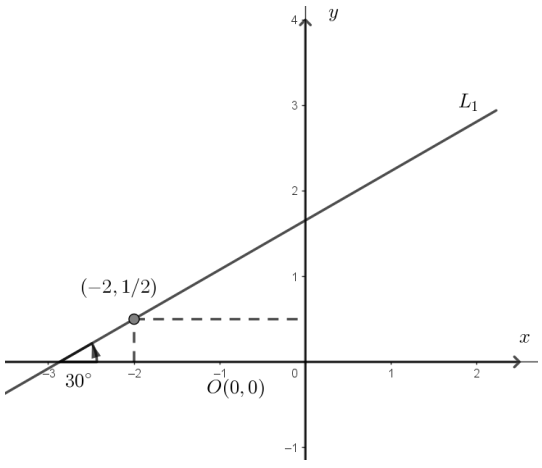


Figura 32: *Recta con un punto y ángulo de inclinación (Ejemplo 2.3)*

$$P_0\left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 30°; m = \tan\alpha$$

$$m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x - (-2))$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x + 2) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}(x + 2) + 3(1)}{6}$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + 3}{6}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{4\sqrt{3} + 3}{6}$$

$$y - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{4\sqrt{3} + 3}{6} = 0$$

$$y - 0,577x - 1,655 = 0$$

ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDA SU PENDIENTE Y LA ORDENADA EN EL ORIGEN

La recta que posee una pendiente m conocida y el valor de la ordenada b si $x = 0$, tiene una ecuación de la forma:

$$y = mx + b$$

Se tiene un valor b que es el cruce con la ordenada en el origen de las abscisas, por lo que tenemos los puntos representados $B(0, b)$ y $A(a, 0)$, en este caso el punto B pertenece a la recta y corta el eje de las ordenadas en un punto, con una pendiente m conocida [4, 5].

Se debe identificar la relación existente entre la ecuación general de la recta y la pendiente conocida. Para $B(0, b)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

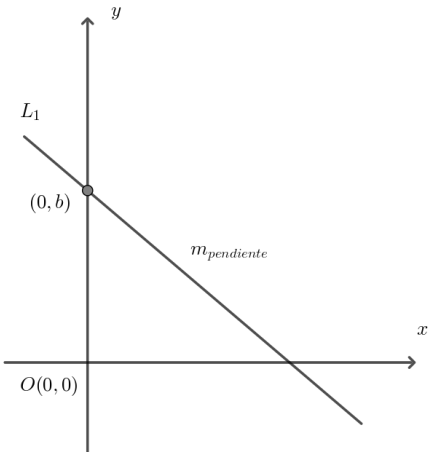


Figura 33: *Recta que corta el eje y y se conoce la pendiente m*

Ejemplo 2.4. Encuentre la ecuación de la recta con una pendiente de -3 y el punto con el que corta con el eje y es $1/2$.

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$y = \frac{-6x + 1}{2}$$

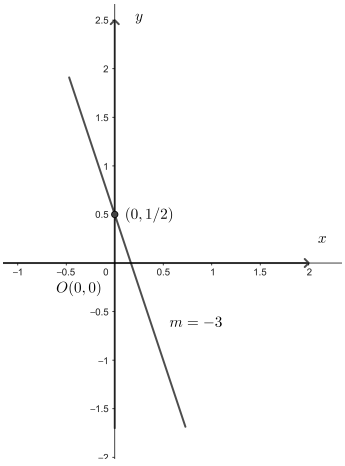


Figura 34: *Recta con la pendiente y un punto (Ejemplo 2.4)*

Usando la ecuación general.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - \left(\frac{1}{2}\right) = -3(x - (0))$$

$$y = -3x + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{-6x + 1}{2}$$

ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

La recta que pasa por dos puntos conocidos P_0 y por ende estos puntos forman parte de la recta, se usa la ecuación.

$$y - y_0 = m(x - x_0); m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

$$y - y_0 = \left(\frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}\right)(x - x_0); x_f \neq x_0$$

Se tiene una recta de la cual se conocen dos puntos P_0 y P_f y que con los puntos conocidos se determina la pendiente m.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}; x_f \neq x_0$$

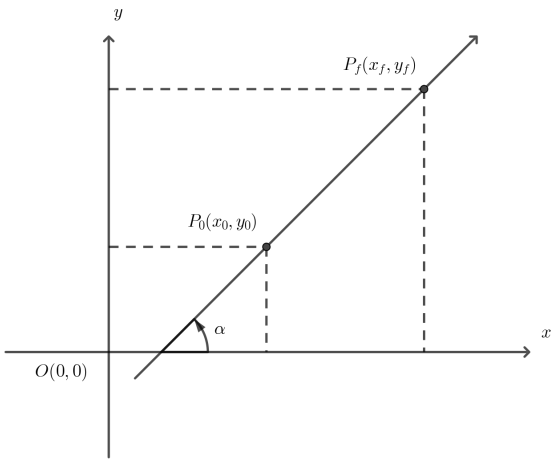


Figura 35: *Recta que pasa por dos puntos*

En este caso, se puede determinar la ecuación de la recta reemplazando la pendiente m en la ecuación general y usando cualquiera de los dos puntos P_0 o P_f.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

$$y - y_0 = \left(\frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}\right)(x - x_0); x_f \neq x_0$$

Ejemplo 2.5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B(5,3/2)$.

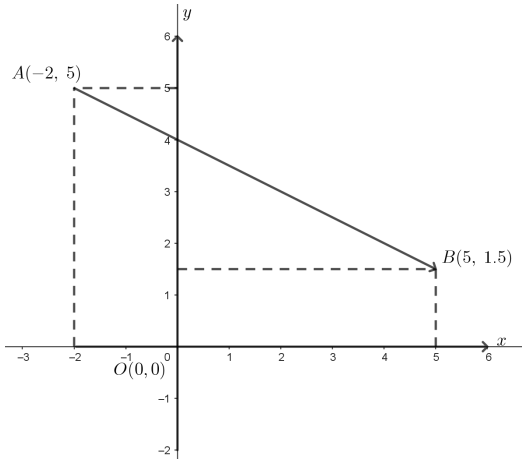


Figura 36: *Recta que pasa por dos puntos (Ejemplo 2.5)*

Se determina la pendiente m:

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{(\frac{3}{2}) - (5)}{(5) - (-2)}$$

$$m = \frac{\frac{3-10}{2}}{7}$$

$$m = \frac{\frac{-7}{2}}{7} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación de la recta con $A(-2,5)$:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - (5) = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2) + 5 = \frac{-(x+2)+10}{2}$$

$$y = \frac{-x+8}{2}$$

$$2y = -x + 8$$

$$x + 2y - 8 = 0$$

Ecuación de la recta con $B(5,3/2)$:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x - (5))$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - 5) + \frac{3}{2} = \frac{-x + 5 + 3}{2}$$

$$y = \frac{-x + 8}{2}$$

$$2y = -x + 8$$

$$x + 2y - 8 = 0$$

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

La recta que posee la intersecciones con los ejes x y y, los valores de a y b son diferentes de cero, la expresión es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta expresión es similar a la ecuación de la elipse que se estudiará posteriormente.

Los valores a y b son la abscisa y ordenada respectivamente, con los valores ordenados al origen, es decir, son los valores donde se cruza la recta con los ejes [5, 6]. Los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ son aquellos que definen la pendiente m.

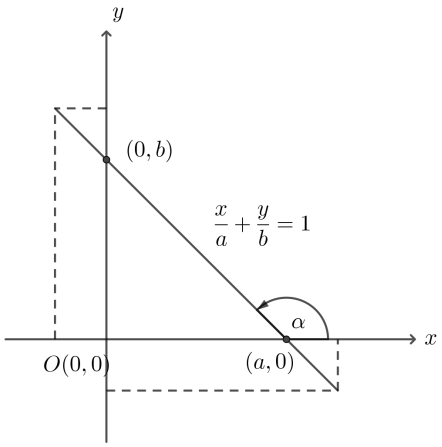


Figura 37: *Recta de forma simétrica*

Para identificar la expresión mostrada anteriormente se debe operar con la pendiente m y los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0} = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$$

Se utiliza el punto $A(a,0)$ para identificar la ecuación.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - (0) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x - a)$$

$$y = \left(\frac{-bx + ab}{a}\right)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay - ab = 0$$

Se divide para ab toda la expresión:

$$\frac{1}{ab}(bx + ay) = \frac{1}{ab}(ab)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo 2.6. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ y $B\left(\frac{7}{2}, 0\right)$.

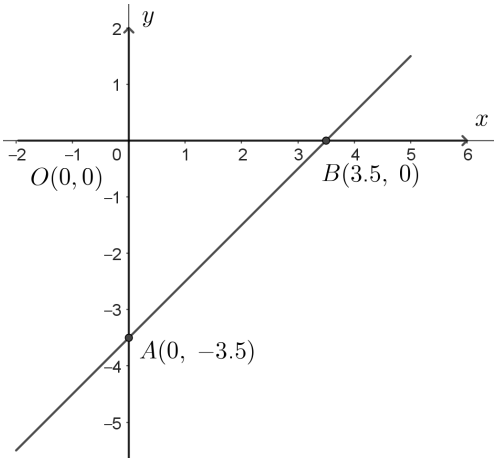


Figura 38: *Recta que pasa por dos puntos (Ejemplo 2.6)*

Se calcula la pendiente.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - \left(-\frac{7}{2}\right)}{\frac{7}{2} - (0)} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = 1$$

Se encuentra la ecuación de la recta usando la expresión general

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \left(-\frac{7}{2}\right)) = (1)(x - (0))$$

$$y + \frac{7}{2} = x$$

$$x - y - \frac{7}{2} = 0$$

Se realiza el mismo cálculo con la expresión simétrica de la recta.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{7}{2}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

$$\frac{7}{2}\left(\frac{x}{-\frac{7}{2}} + \frac{y}{\frac{7}{2}}\right) = 1\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$-x + y = \frac{7}{2}$$

$$x - y - \frac{7}{2} = 0$$

Usando cualquiera de las ecuaciones determinamos la misma ecuación de la recta.

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

La ecuación general de la recta está descrita en el plano coordenado con los coeficientes A, B y C que multiplican a las variables.

$$Ax + By + C = 0 \longrightarrow A \neq 0 \vee B \neq 0$$

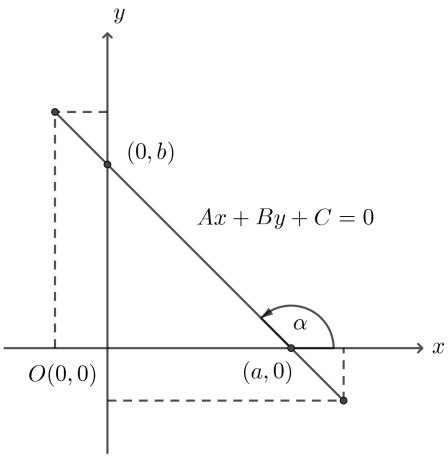


Figura 39: *Recta de la forma general* $Ax + By + C = 0$

Ejemplo 2.7. Determine los valores de los coeficientes A, B y C de la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$ y $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$, escriba la ecuación de la recta.

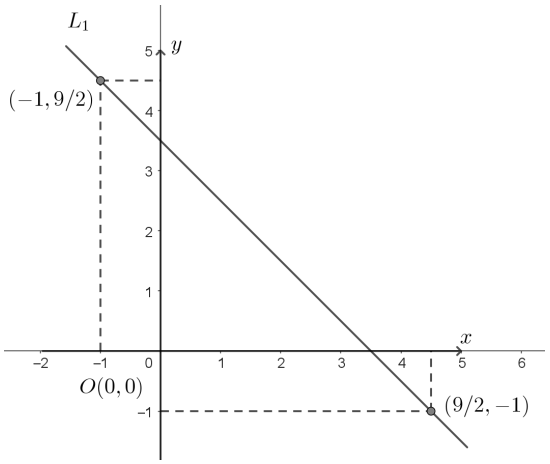


Figura 40: *Recta que pasa por dos puntos (Ejemplo 2.7)*

Se utiliza cada punto que forma parte de la recta y se obtiene una ecuación con los coeficientes.

Para $P_1\left(-1, \frac{9}{2}\right)$

$$Ax + By + C = 0$$

$$A(-1) + \left(\frac{9}{2}\right) B + C = 0$$

$$-A + \frac{9B}{2} + C = 0$$

Para $P_2\left(\frac{9}{2}, -1\right)$

$$Ax + By + C = 0$$

$$\left(\frac{9}{2}\right) A + (-1)B + C = 0$$

$$\frac{9A}{2} - B + C = 0$$

Despejamos una variable en las dos ecuaciones e igualamos, en este caso la variable C y resolvemos el sistema.

$$C = A - \frac{9B}{2}$$

$$C = -\frac{9A}{2} + B$$

$$C = C$$

$$A - \frac{9B}{2} = -\frac{9A}{2} + B$$
$$A + \frac{9A}{2} = B + \frac{9B}{2}$$
$$\frac{2A + 9A}{2} = \frac{2B + 9B}{2}$$
$$\frac{11A}{2} = \frac{11B}{2}$$
$$A = B$$

Con el valor encontrado reemplazamos en cualquier ecuación y dejamos en función de la variable C para que después podamos simplificar.

$$-A + \frac{9A}{2} + C = 0$$
$$\frac{-2A + 9A}{2} = -C$$
$$\frac{7A}{2} = -C$$
$$A = -\frac{2C}{7}$$
$$B = -\frac{2C}{7}$$

Remplazamos en la ecuación general de la recta los valores encontrados.

$$Ax + By + C = 0$$
$$\left(-\frac{2C}{7}\right)x + \left(-\frac{2C}{7}\right)y + C = 0$$
$$-\frac{2}{7}x + -\frac{2}{7}y + 1 = 0$$
$$-2x - 2y + 7 = 0$$
$$2x + 2y - 7 = 0$$

RELACIÓN DE COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

En la relación existente entre los coeficientes A, B, C de la ecuación general de la recta y los coeficientes de la ecuación simétrica de la recta, la pendiente m y los valores a (abscisa) y b (ordenada).

Se tiene directamente que al escribir la ecuación general de la recta, de forma que sea similar a la ecuación simétrica.

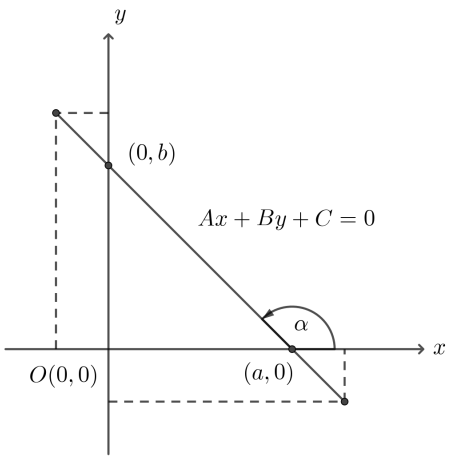


Figura 41: *Recta de la forma general y las relaciones entre coeficientes*

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax + By}{-C} = 1$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

De la expresión tenemos que:

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}$$

Aplicamos la ecuación de la pendiente.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0} = -\frac{b}{a}$$

$$m = -\left(\frac{-\frac{C}{B}}{-\frac{C}{A}}\right)$$

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo 2.8. Determine la ecuación general de la recta, encontrando los coeficientes de la misma, a partir de los puntos de intersección de la recta con los ejes que son $(4, 0)$ y $(0, 5)$.

$$a = 4; b = 5$$

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}; m = -\frac{A}{B} = -\frac{b}{a}$$

$$m = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{5x + 4y}{20} = 1$$

$$5x + 4y = 20$$

$$5x + 4y - 20 = 0$$

$$A = 5; B = 4; C = -20$$

Debe cumplir con las expresiones anteriores.

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}$$

$$4 = -\left(\frac{-20}{5}\right); 5 = -\left(\frac{-20}{4}\right)$$

$$4 = 4; 5 = 5$$

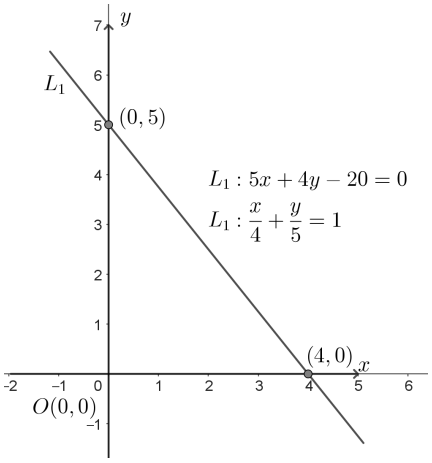


Figura 42: *Recta que pasa por dos puntos, ecuación general (Ejemplo 2.8)*

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Se tienen dos ecuaciones que pueden interactuar entre ellas, generando condiciones específicas que son: paralelismo, perpendicularidad, colinealidad (coincidencia), corte en un punto .

Para el desarrollo de las condiciones mencionadas se utilizarán dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad y \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Cabe aclarar que el criterio del ángulo entre dos rectas se considera del manejo de vectores, como lo es el producto punto.

PARALELISMO

En el paralelismo de dos rectas, la pendiente de las dos es la misma y las rectas no se cruzan.

$$m_1 = m_2$$
$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$$
$$A_1B_2 = A_2B_1$$
$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

PERPENDICULARIDAD

En la perpendicularidad dos rectas se cruzan en un solo punto y forman un ángulo de $90°$, cumpliendo la siguiente condición.

$$m_1m_2 = -1$$
$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$$
$$A_1A_2 = -B_1B_2$$
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

COLINEALIDAD

En la colinealidad de dos rectas todos los puntos en proporción coinciden, manteniendo la misma pendiente o su correspondiente opuesta (negativa) [2,

4], se tiene:

$$m_1 = m_2$$
$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) = \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)$$
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Para el caso en que las pendientes son las mismas y se cruzan, tenemos:

$$m_1 = m_2$$
$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) = \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)$$
$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)$$

Bajo lo especificado anteriormente.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = K$$

$$K \neq 0; A_1 = KA_2; B_1 = KB_2; C_1 = KC_2$$

Teniendo la proporción K equivalente para cada coeficiente de la ecuación de la recta, tenemos que es la misma recta en diferente dimensión limitada por K.

CORTE EN UN PUNTO

Cuando dos rectas se cortan en un solo punto, siempre y cuando no sean paralelas.

$$m_1 \neq m_2$$
$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) \neq \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)$$
$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$$
$$A_1B_2 \neq B_1A_2$$
$$A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$$

Ejemplo 2.9. Se tiene una recta cuya ecuación es $5x - 7y + 11 = 0$, encuentre la familia de rectas paralelas y evalúe para determinar la recta paralela que pasa por el punto $P(4, 2)$.

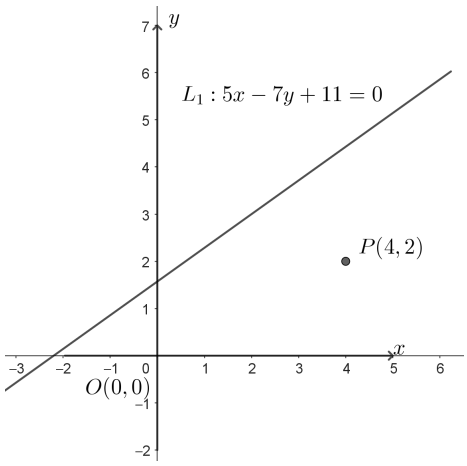


Figura 43: *Recta y un punto para determinar rectas paralelas (Ejemplo 2.9)*

$$5x - 7y + 11 = 0, A = 5, B = -7$$

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$m = -\frac{5}{-7} = \frac{5}{7}$$

Generamos la ecuación de la familia de rectas, considerando que todas las ecuaciones de la familia mantienen la misma pendiente y solo cambian los puntos por donde pasan las rectas.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(y - y_0) = \frac{5}{7}(x - x_0)$$

$$7(y - y_0) = 5(x - x_0)$$

$$7y - 7y_0 = 5x - 5x_0$$

$$7y - 5x + (5x_0 - 7y_0) = 0$$

$$5x - 7y + (-5x_0 + 7y_0) = 0$$

Aplicamos la ecuación para el punto $P(4, 2)$

$$5x - 7y + (-5(4) + 7(2)) = 0$$

$$5x - 7y + (-20 + 14) = 0$$

$$5x - 7y - 6 = 0$$

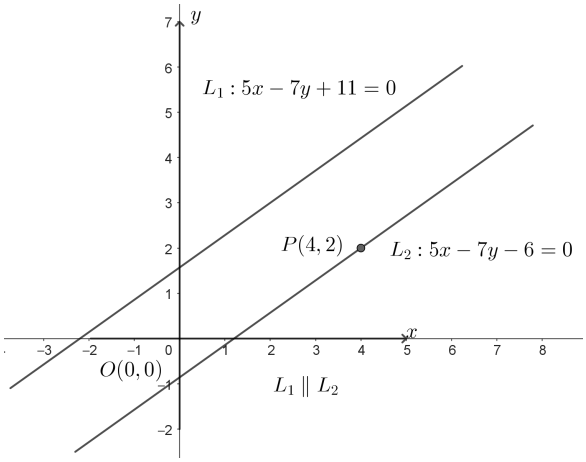


Figura 44: *Recta paralela que pasa por el punto P (Ejemplo 2.9)*

FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

La ecuación normal de la recta tiene relación directa con las coordenadas polares y con un valor real L que es la distancia perpendicular entre la recta y el origen.

$$xcos(\theta) + ysen(\theta) = d$$

$$L > 0, \theta \in [0, 360]$$

El ángulo θ es medido desde el eje x positivo en dirección antihoraria y la longitud d es equivalente al radio de rotación [3], lo que cambia la posición de la recta referente al sistema de coordenadas, a su vez, cambiando la pendiente.

Debido a la distancia d y el ángulo θ se tiene un triángulo rectángulo donde obtenemos las componentes del punto $P(x_0, y_0)$.

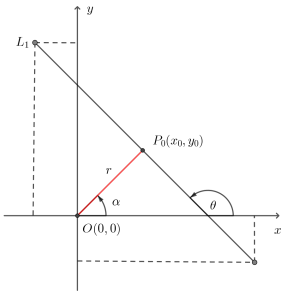
$$cos(\theta) = \frac{x_0}{d}$$

$$x_0 = dcos(\theta)$$

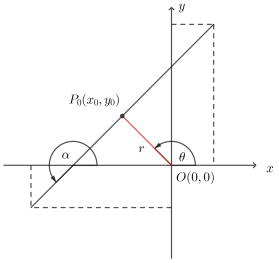
$$sen(\theta) = \frac{x_0}{d}$$

$$y_0 = dsen(\theta)$$

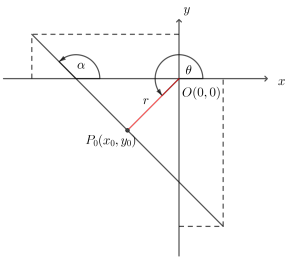
Utilizando la relación existente se identifica el ángulo α trabajando con los triángulos que se forman entre la recta, el radio y los ejes. En la gráfica se identifica que en el interior del triángulo tenemos el ángulo θ y un ángulo



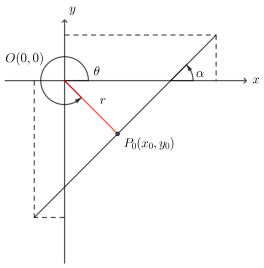
(a) *Recta en el cuadrante I*



(b) *Recta en el cuadrante II*



(c) *Recta en el cuadrante III*



(d) *Recta en el cuadrante IV*

Figura 45: *Disposición de la rotación de una recta en cada cuadrante*

auxiliar $\hat{1}$, sumados nos da 90 porque es un triángulo rectángulo y en el punto A tenemos que la suman entre $\hat{1}$ y θ nos da 180 por lo que al operar tenemos lo siguiente:

$$\theta + \hat{1} = 90°$$

$$\alpha + \hat{1} = 180°$$

$$\hat{1} = 90° - \theta$$

$$\alpha + 90° - \theta = 180°$$

$$\alpha = 90° + \theta$$

Esta relación se repite en los demás cuadrantes del sistema de coordenadas, teniendo:
Cuadrante I: $\alpha = 90° + \theta$
Cuadrante II: $\alpha = 270° + \theta$
Cuadrante III: $\alpha = 270° + \theta$
Cuadrante IV: $\alpha = 90° + \theta$

Si operamos las expresiones anteriores buscando relacionarlas con las funciones trigonométricas, determinamos la pendiente de la recta en función de una función trigonométrica en cualquier condición de la misma.

Sabiendo que $m = tan(\alpha)$, operamos la igualdad para encontrar la pen-

diente en función del ángulo de rotación del radio.

$$\alpha = 90^\circ + \theta$$

$$\tan(\alpha) = \tan(90^\circ + \theta)$$

$$m = -\cot(\theta)$$

Con la relación de la pendiente con el ángulo θ desarrollamos en la ecuación de la recta con un punto y la pendiente para encontrar la forma normal de la recta.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - (dsen(\theta)) = (-\cot(\theta))(x - (dcos(\theta)))$$

$$y - dsen(\theta) = -\cot(\theta)(x - dcos(\theta))$$

$$y - dsen(\theta) = -\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}(x - dcos(\theta))$$

$$\operatorname{sen}(\theta)(y - dsen(\theta)) = -\cos(\theta)(x - dcos(\theta))$$

$$y\operatorname{sen}(\theta) - dsen^2(\theta) = -x\cos(\theta) + dcos^2(\theta))$$

$$y\operatorname{sen}(\theta) + x\cos(\theta) - dsen^2(\theta) - dcos^2(\theta)) = 0$$

$$x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta) - d(sen^2(\theta) + cos^2(\theta)) = 0$$

$$x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta) - d = 0$$

Encontrando así la ecuación de la recta de la forma normal relacionada con el ángulo θ medido desde el eje x positivo en rotación del radio d perpendicular a la recta.

$$x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta) - d = 0$$

REDUCCIÓN DE LA FORMA GENERAL A LA NORMAL

Conociendo la forma general de la ecuación de la recta,

$$Ax + By + C = 0$$

tenemos similitud en la forma de escritura con la forma normal,

$$x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta) - d = 0$$

Operamos la ecuación de la forma general para encontrar la forma normal identificando que $A = \cos(\theta)$, $B = \operatorname{sen}(\theta)$ y $C = -d$. Se revela una relación k

que es la misma para las tres igualdades.

$$\frac{A}{\cos(\theta)} = k; \frac{B}{\text{sen}(\theta)} = k; \frac{C}{-d} = k$$

$$\frac{A}{k} = \cos(\theta); \frac{B}{k} = \text{sen}(\theta); \frac{C}{k} = -d$$

Aplico identidades trigonométricas:

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta)) = 1$$
$$\left(\frac{A}{k}\right)^2 + \left(\frac{B}{k}\right)^2 = 1$$
$$\frac{A^2}{k^2} + \frac{B^2}{k^2} = 1$$
$$A^2 + B^2 = k^2$$
$$k = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos(\theta); \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \text{sen}(\theta); \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -d$$

Reemplazamos:

$$x\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + y\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0$$
$$\left(\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \left(\frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0$$
$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

La relación que identificamos en el denominador la denominamos como $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, los signos se asignan de acuerdo a las siguientes condicionantes:

- Cuando $C = 0$ y $B = 0$, r y A poseen el mismo signo.
- Cuando $C = 0$ y $B \neq 0$, r y A poseen el mismo signo.
- Cuando $C \neq 0$, r posee signo contrario al término C.

Ejemplo 2.10. Se tiene una recta de ecuación $5x + 6y - 10 = 0$, determine la ecuación de forma normal y encuentre los valores del radio y el ángulo θ, dibuje la recta y los términos relevantes.

Tenemos una recta que el punto de intersección está en el primer cuadrante, para lo que identificamos los valores correspondientes.

Tomamos los valores de la ecuación: $A = 5$, $B = 6$, $C = -10$.

$$r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$
$$r = \pm\sqrt{(5)^2 + (6)^2}$$
$$r = \pm\sqrt{25 + 36}$$
$$r = \pm\sqrt{61}$$

Como $C = -10$ y este es menor a 0, entonces r es positivo $r = \sqrt{61}$.

Sabiendo que:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{61}}$$
$$\cos(\alpha) = 0{,}64$$
$$\alpha = \arc\cos(0{,}64)$$
$$\alpha = 50{,}19°$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -d$$
$$d = -\frac{-10}{\sqrt{61}}$$
$$d = 1{,}28$$

Los valores indican que la recta corresponde a una del primer cuadrante, identificamos θ.

$$90° = \alpha + \hat{1}$$
$$180° = \theta + \hat{1}$$
$$90° - \alpha = 180° - \theta$$

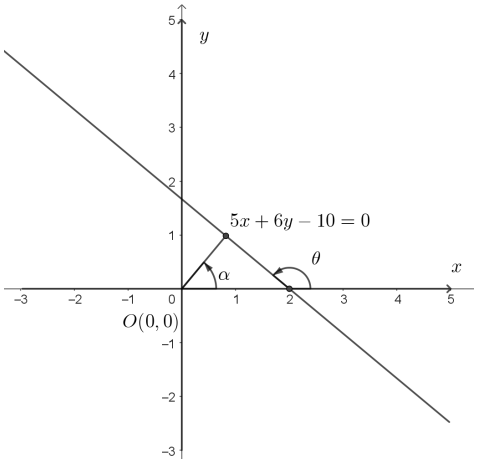


Figura 46: *Recta con ángulos y radio (Ejemplo 2.10)*

$$\theta = 180° - 90° + \alpha$$

$$\theta = 90° + (50{,}19°)$$

$$\theta = 140{,}19°$$

Ejemplo 2.11. Determine la ecuación general de la recta, encontrando los coeficientes de la misma, a partir de los puntos de intersección de la recta con los ejes que son $(4, 0)$ y $(0, 5)$.

$$a = 4; b = 5$$

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}; m = -\frac{A}{B} = -\frac{b}{a}$$

$$m = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{5x + 4y}{20} = 1$$

$$5x + 4y = 20$$

$$5x + 4y - 20 = 0$$

$$A = 5; B = 4; C = -20$$

Debe cumplir con las expresiones anteriores.

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}$$

$$4 = -\left(\frac{-20}{5}\right); 5 = -\left(\frac{-20}{4}\right)$$
$$4 = 4; 5 = 5$$

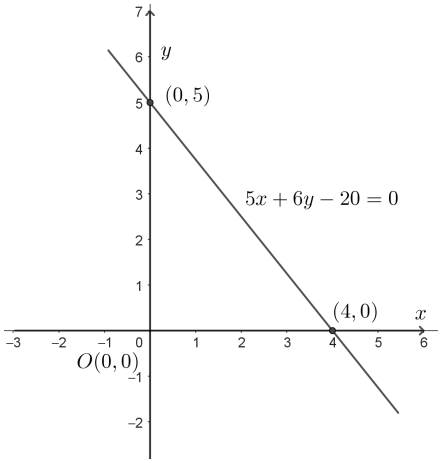


Figura 47: *Recta que corta con los ejes (Ejemplo 2.11)*

Usos de la forma normal de la recta

DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PUNTO

La consideración inicial con respecto a la distancia entre una recta y un punto es que el segmento de recta que une la recta con el punto debe ser perpendicular a la recta, sabiendo que la magnitud del segmento de recta es la distancia más corta entre la recta y el punto [1, 5].

Para desarrollar la fórmula de la distancia debemos colocar una recta paralela a la recta referencial que pase por el punto indicado.

$$x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) - d = 0$$

ECUACIONES DE LAS BISECTRICES

Debemos entender que la bisectriz es una recta que divide en la mitad la intersección a dos rectas cualquiera que tienen el mismo un punto en común, la bisectriz forma el mismo ángulo entre cada una de las rectas referenciales, como se muestra en la figura

Para identificar las expresiones de las bisectrices, se trazan dos rectas que se cortan en un punto y por definición se sabe que una bisectriz es la recta que tiene puntos equidistantes en referencia al ángulo que forman [3, 6], recuerde

que la equidistancia está relacionada con la perpendicularidad. Los puntos de la bisectriz relacionados con las rectas son igual.

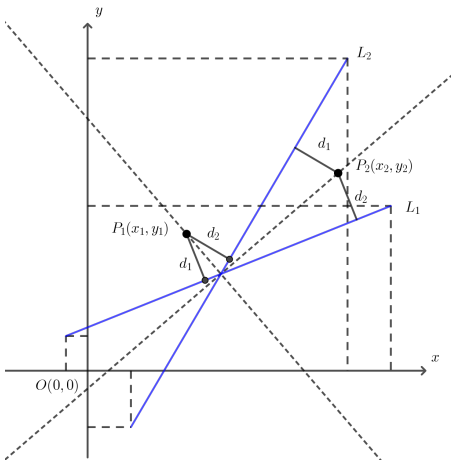


Figura 48: *Bisectrices que se generan en el cruce de dos rectas*

Por definición tenemos que las distancias marcadas a los puntos P_1 y P_2 son:

$$d_1 = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$d_2 = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Para la generalidad debemos considerar los signos, la que las expresiones de las rectas rotan el mismo ángulo medio con centro del punto de intersección, considerando los signos de la raíz. Para la bisectriz en el punto P y la distancia d_1 tiene la expresión $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$ y para la distancia d_2 la expresión es $-\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$ Por lo que la expresión de igualdad es:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\mp\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Ejemplo 2.12. Se tiene un triángulo con los siguientes vértices $A(1, 5)$, $B(-2, 4)$, $C(3, -2)$, determine la ecuación de la bisectriz en el ángulo formado por los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$.

Determinamos las ecuaciones de las rectas que forman cada uno de los pares de puntos, aplicando la pendiente y un punto de la recta.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(4) - (5)}{(-2) - (1)} = \frac{1}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{(-2) - (4)}{(3) - (-2)} = -\frac{6}{5}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{(5) - (-2)}{(1) - (3)} = -\frac{7}{2}$$

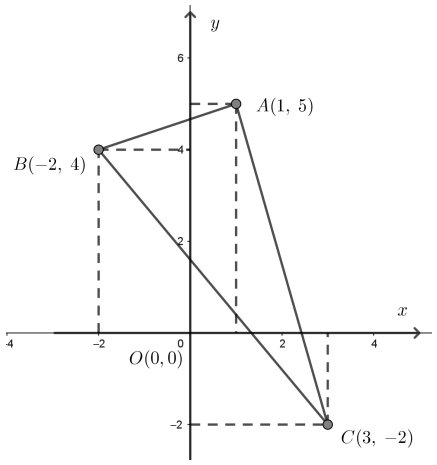


Figura 49: *Triángulo con tres puntos en el plano (Ejemplo 2.12)*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 5 = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$$

$$y - \frac{x}{3} - 5 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y - \frac{x}{3} + \frac{-15 + 1}{3} = 0$$

$$y - \frac{x}{3} - \frac{14}{3} = 0$$

$$3y - x - 14 = 0$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B)$$

$$y - 4 = -\frac{6}{5}(x - (-2))$$

$$y-4=-\frac{6x}{5}-\frac{12}{5}$$
$$y+\frac{6x}{5}-4+\frac{12}{5}=0$$
$$y+\frac{6x}{5}+\frac{-20+12}{5}=0$$
$$y+\frac{6x}{5}-\frac{8}{5}=0$$
$$5y+6x-8=0$$

$$y-y_C=m_{CA}(x-x_C)$$
$$y-(-2)=-\frac{7}{2}(x-3)$$
$$y+2=-\frac{7x}{2}+\frac{21}{2}$$
$$y+\frac{7x}{2}+2-\frac{21}{2}=0$$
$$y+\frac{7x}{2}+\frac{4-21}{2}=0$$
$$y+\frac{7x}{2}-\frac{17}{2}=0$$
$$2y+7x-17=0$$

Para el ángulo solicitado vamos a usar las ecuaciones: $3y-x-14=0$ y $2y+7x-17=0$ y operamos de acuerdo a las condiciones de la expresión general de la recta.

$$A_1=-1; B_1=3; C_1=-14$$
$$A_2=7; B_2=2; C_2=-17$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\mp\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$
$$\frac{3y-x-14}{\sqrt{(-1)^2+(3)^2}}=\frac{2y+7x-17}{\sqrt{(7)^2+(2)^2}}$$
$$\frac{3y-x-14}{\sqrt{10}}=\frac{2y+7x-17}{\sqrt{53}}$$
$$\sqrt{53}\,(3y-x-14)=\sqrt{10}\,(2y+7x-17)$$
$$\left(3\sqrt{53}y-\sqrt{53}x-14\sqrt{53}\right)=\left(2\sqrt{10}y+7\sqrt{10}x-17\sqrt{10}\right)$$
$$3\sqrt{53}y-2\sqrt{10}y-\sqrt{53}x-7\sqrt{10}x-14\sqrt{53}+17\sqrt{10}=0$$

Ecuación de la bisectriz:

$$\left(-\sqrt{53}-7\sqrt{10}\right)x+\left(3\sqrt{53}-2\sqrt{10}\right)y+\left(-14\sqrt{53}+17\sqrt{10}\right)=0$$

$$29{,}42x-15{,}52y+48{,}16=0$$

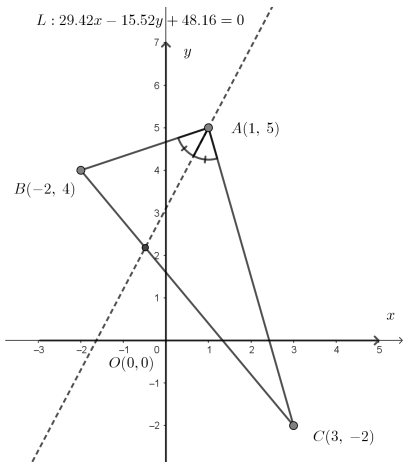


Figura 50: *Bisectriz en el vértice A (Ejemplo 2.12)*

Familia de rectas

Una familia de rectas se define como un grupo de rectas que cumplen con una condición común, cuando no existe restricción matemática en el campo de los reales la familia de rectas es infinita [2, 5].

Las condiciones geométricas más comunes son la pendiente y un punto. En el caso de la pendiente la expresión general es $y-y_0=k(x-x_0)$ siendo $k=m$ la pendiente de todas las rectas pertenecientes a la familia, por lo que las rectas son paralelas.

Consideramos el valor que cambia a partir de la ecuación general $Ax+By+X=0$, manteniendo los valores de A y B como constantes y C como variable.

En el caso del punto en común la expresión general es $y-b=m(x-a)$ siendo el punto $P(a,b)$ por donde todas las rectas pasarán y cambiará la pendiente en cada caso.

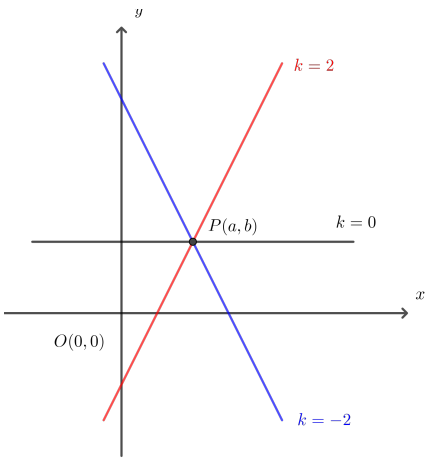


Figura 51: *Familia de rectas que pasan por el mismo punto*

Ejemplo 2.13. Determine dos ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(4,-2)$, sabiendo que la recta referencial pasa por el punto $B(0,3)$.

$$m = \frac{y_f - y_0}{x_f - x_0}$$
$$m = \frac{3-(-2)}{0-4} = -\frac{5}{4}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y-(-2) = -\frac{5}{4}(x-4)$$
$$y+2 = -\frac{5x}{4} + 5$$
$$\frac{5x}{4} + y - 3 = 0$$

Ecuación referencial: $5x + 4y - 12 = 0$ Determinamos las dos ecuaciones solicitadas asignando pendientes $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$.

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$
$$y-(-2) = 1(x-4)$$
$$y+2 = x-4$$
$$x - y - 6 = 0$$

$$y - y_0 = m_2(x - x_0)$$
$$y-(-2) = -1(x-4)$$

$$y + 2 = -x + 4$$

$$x + y - 2 = 0$$

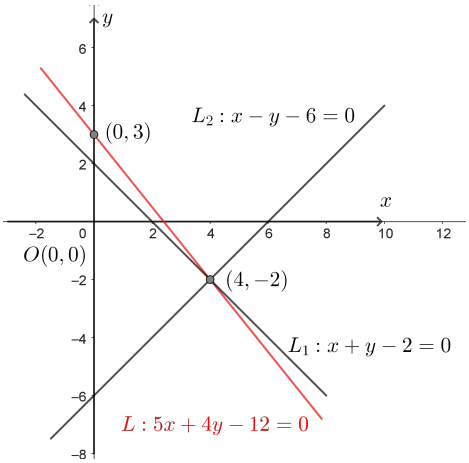


Figura 52: *Rectas con pendientes* 1 *y* -1 *en un punto (Ejemplo 2.13)*

Ejemplo 2.14. Determine las ecuaciones de las rectas que tienen la pendiente $m = 2$ constante y que pasan por los puntos $A(2, 4)$, $B(0, 2)$ y $C(-3, 1)$ respectivamente.

Para el punto A:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

$$y - 4 = 2x - 4$$

$$2x - y = 0$$

Para el punto B:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 2(x - 0)$$

$$y - 2 = 2x$$

$$2x - y + 2 = 0$$

Para el punto C:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2(x - (-3))$$

$$y - 1 = 2x + 6$$

$$2x - y + 7 = 0$$

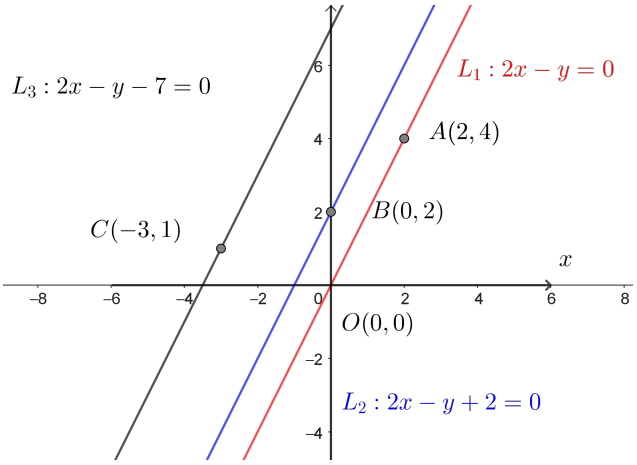


Figura 53: *Rectas paralelas en puntos específicos (Ejemplo 2.14)*

Ejercicios propuestos Capítulo II

1. Encuentre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que posee como puntos de la misma P_0 y P_f. Grafique.

   a) $P_0(0,0)$, $P_f(4,4)$
   b) $P_0(1,2)$, $P_f(5,8)$
   c) $P_0(-2,3)$, $P_f(4,9)$
   d) $P_0(0,0)$, $P_f(5,0)$
   e) $P_0(0,0)$, $P_f(0,6)$
   f) $P_0(2,1)$, $P_f(8,7)$
   g) $P_0(-3,-1)$, $P_f(3,5)$
   h) $P_0(4,2)$, $P_f(10,2)$
   i) $P_0(1,4)$, $P_f(7,1)$
   j) $P_0(-2,-4)$, $P_f(4,2)$
   k) $P_0(0,3)$, $P_f(6,9)$
   l) $P_0(3,0)$, $P_f(9,6)$
   m) $P_0(-1,5)$, $P_f(5,2)$
   n) $P_0(2,-2)$, $P_f(8,4)$
   ñ) $P_0(0,1)$, $P_f(7,8)$
   o) $P_0(-4,2)$, $P_f(2,5)$
   p) $P_0(5,3)$, $P_f(5,9)$
   q) $P_0(3,7)$, $P_f(9,4)$
   r) $P_0(-5,-3)$, $P_f(1,3)$
   s) $P_0(2,6)$, $P_f(8,12)$

2. Determine los ángulos interiores de la figura formada por los puntos A, B, C y D. Grafique.

   a) $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(6,4)$, $D(2,4)$
   b) $A(2,3)$, $B(7,3)$, $C(8,7)$, $D(3,7)$
   c) $A(-1,2)$, $B(5,2)$, $C(3,6)$, $D(1,6)$

d) $A(3,1)$, $B(7,1)$, $C(8,3)$, $D(4,3)$

e) $A(1,4)$, $B(6,4)$, $C(8,7)$, $D(3,7)$

f) $A(2,0)$, $B(6,0)$, $C(5,2)$, $D(3,2)$

g) $A(1,2)$, $B(6,2)$, $C(7,5)$, $D(2,5)$

h) $A(3,4)$, $B(7,4)$, $C(8,8)$, $D(4,8)$

i) $A(2,1)$, $B(5,1)$, $C(6,4)$, $D(3,4)$

j) $A(1,3)$, $B(6,3)$, $C(5,6)$, $D(2,6)$

k) $A(3,2)$, $B(7,2)$, $C(9,4)$, $D(5,4)$

l) $A(2,5)$, $B(7,5)$, $C(9,8)$, $D(4,8)$

m) $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$

n) $A(4,2)$, $B(10,2)$, $C(9,6)$, $D(5,6)$

ñ) $A(2,2)$, $B(6,2)$, $C(4,5)$, $D(4,3)$

o) $A(1,5)$, $B(6,5)$, $C(4,9)$, $D(4,6)$

p) $A(3,1)$, $B(7,1)$, $C(8,4)$, $D(3,4)$

q) $A(2,3)$, $B(5,3)$, $C(6,5)$, $D(3,5)$

r) $A(1,6)$, $B(7,6)$, $C(9,9)$, $D(3,9)$

s) $A(3,0)$, $B(7,0)$, $C(8,2)$, $D(4,2)$

3. Determine la ecuación de la recta (simétrica y general) que pasa por los puntos A y B. Grafique.

a) $A(2,3)$, $B(5,7)$

b) $A(1,4)$, $B(6,2)$

c) $A(-2,1)$, $B(4,5)$

d) $A(3,-1)$, $B(8,4)$

e) $A(-3,2)$, $B(1,-2)$

f) $A(4,5)$, $B(9,5)$

g) $A(2,-3)$, $B(2,6)$

h) $A(1,1)$, $B(7,9)$

i) $A(-4,3)$, $B(2,-1)$

j) $A(5,2)$, $B(10,7)$

k) $A(3,6)$, $B(8,3)$

l) $A(-1,4)$, $B(5,-2)$

m) $A(2,0)$, $B(7,8)$

n) $A(4,1)$, $B(9,4)$

ñ) $A(-2,-3)$, $B(3,2)$

o) $A(1,5)$, $B(6,1)$

p) $A(3,4)$, $B(8,9)$

q) $A(0,3)$, $B(5,3)$

r) $A(4,2)$, $B(4,7)$

s) $A(-3,-1)$, $B(2,4)$

4. Determine la ecuación general de la recta, encontrando los coeficientes A, B y C. Sabiendo que los puntos de intersección con los ejes son P_1 y P_2. Grafique.

a) $P_1(2,0)$, $P_2(0,3)$

b) $P_1(4,0)$, $P_2(0,5)$

c) $P_1(-3,0)$, $P_2(0,2)$

d) $P_1(5,0)$, $P_2(0,-4)$

e) $P_1(-2,0)$, $P_2(0,-3)$

f) $P_1(6,0)$, $P_2(0,6)$

g) $P_1(3,0)$, $P_2(0,-2)$

h) $P_1(-4,0)$, $P_2(0,4)$

i) $P_1(1,0)$, $P_2(0,7)$

j) $P_1(8,0)$, $P_2(0,-5)$

k) $P_1(-5,0)$, $P_2(0,-2)$

l) $P_1(7,0)$, $P_2(0,3)$

m) $P_1(4,0)$, $P_2(0,-6)$

n) $P_1(-6,0)$, $P_2(0,8)$

ñ) $P_1(2,0)$, $P_2(0,-1)$

o) $P_1(9,0)$, $P_2(0,4)$

p) $P_1(-3,0)$, $P_2(0,-4)$

q) $P_1(5,0)$, $P_2(0,9)$

r) $P_1(10,0)$, $P_2(0,-3)$

s) $P_1(-2,0)$, $P_2(0,5)$

5. Se tiene una recta de ecuación L, determine la ecuación de forma normal y encuentre el radio y ángulo θ. Grafique.

a) $L: 3x+4y-12=0$

b) $L: 5x+12y-60=0$

c) $L: x+y-5=0$

d) $L: 4x-3y+10=0$

e) $L: 2x+2y-7=0$

f) $L: 6x-8y+15=0$

g) $L: x-y+3=0$

h) $L: 8x+15y-40=0$

i) $L: 3x-4y-20=0$

j) $L: 12x+5y-30=0$

k) $L: 2x-y-4=0$

l) $L: 7x+24y-50=0$

m) $L: 5x-12y+26=0$

n) $L: 9x+12y-36=0$

ñ) $L: 4x+3y+8=0$

o) $L: 15x-8y-34=0$

p) $L: 20x+21y-42=0$

q) $L: 8x-6y+25=0$

r) $L: 24x-7y-50=0$

s) $L: 3x+5y-15=0$

6. Se tienen dos rectas que pasan por los puntos A y B, B y C respectivamente, encuentre la bisectriz en el punto B de intersección. Grafique.

a) $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,1)$

b) $A(0,1)$, $B(2,5)$, $C(4,2)$

c) $A(-1,3)$, $B(2,2)$, $C(6,4)$

d) $A(2,0)$, $B(4,3)$, $C(7,1)$

e) $A(1,4)$, $B(3,1)$, $C(5,5)$

f) $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$

g) $A(3,2)$, $B(5,5)$, $C(8,3)$

h) $A(0,3)$, $B(2,0)$, $C(5,4)$

i) $A(4,1)$, $B(6,4)$, $C(9,2)$

j) $A(1,0)$, $B(3,3)$, $C(6,1)$

k) $A(2,4)$, $B(4,2)$, $C(7,5)$

l) $A(-1,2)$, $B(2,4)$, $C(5,3)$

m) $A(3,1)$, $B(5,4)$, $C(8,2)$

n) $A(0,2)$, $B(2,5)$, $C(4,3)$

ñ) $A(4,3)$, $B(6,1)$, $C(9,4)$

o) $A(1,5)$, $B(3,2)$, $C(6,4)$

p) $A(2,1)$, $B(4,4)$, $C(7,2)$

q) $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(5,6)$

r) $A(3,3)$, $B(5,0)$, $C(8,3)$

s) $A(0,4)$, $B(2,2)$, $C(5,5)$

7. Encuentre 4 rectas (2 paralelas y 2 perpendiculares) a la recta referencial que pasa por los puntos P_0 y P_F. Grafique.

a) $P_0(1,2)$, $P_F(4,5)$

b) $P_0(2,3)$, $P_F(6,7)$

c) $P_0(0,1)$, $P_F(5,4)$

d) $P_0(-1,2)$, $P_F(3,6)$

e) $P_0(2,0)$, $P_F(7,3)$

f) $P_0(3,1)$, $P_F(8,4)$

g) $P_0(1,4)$, $P_F(5,8)$

h) $P_0(0,3)$, $P_F(4,7)$

i) $P_0(-2,1)$, $P_F(3,6)$

j) $P_0(4,2)$, $P_F(9,5)$

k) $P_0(1,1)$, $P_F(6,6)$

l) $P_0(2,5)$, $P_F(7,8)$

m) $P_0(3,2)$, $P_F(8,7)$

n) $P_0(0,4)$, $P_F(5,9)$

ñ) $P_0(-1,3)$, $P_F(4,8)$

o) $P_0(5,1)$, $P_F(10,4)$

p) $P_0(2,2)$, $P_F(7,7)$

q) $P_0(1,5)$, $P_F(6,2)$

r) $P_0(3,6)$, $P_F(8,3)$

s) $P_0(4,7)$, $P_F(9,4)$

8. Encuentre las rectas con pendiente m y que pasan por los puntos A, B y C. Grafique.

a) $m=2$, $A(1,3)$, $B(4,1)$, $C(6,5)$

b) $m=-1$, $A(2,5)$, $B(3,2)$, $C(7,4)$

c) $m=\frac{1}{2}$, $A(0,1)$, $B(3,4)$, $C(5,2)$

d) $m=-\frac{3}{4}$, $A(1,4)$, $B(4,6)$, $C(7,3)$

e) $m=3$, $A(2,1)$, $B(5,4)$, $C(3,7)$

f) $m=0$, $A(1,3)$, $B(4,5)$, $C(6,2)$

g) $m=\frac{4}{3}$, $A(0,2)$, $B(3,0)$, $C(5,5)$

h) $m=-2$, $A(2,6)$, $B(4,1)$, $C(7,4)$

i) $m=5$, $A(1,0)$, $B(3,7)$, $C(6,2)$

j) $m=-\frac{2}{5}$, $A(0,4)$, $B(5,2)$, $C(8,6)$

k) $m=1$, $A(2,2)$, $B(5,4)$, $C(7,1)$

l) $m=-3$, $A(1,5)$, $B(4,2)$, $C(6,7)$

m) $m=\frac{3}{2}$, $A(0,0)$, $B(4,5)$, $C(7,3)$

n) $m=-\frac{1}{3}$, $A(2,4)$, $B(5,2)$, $C(8,5)$

ñ) $m=4$, $A(1,3)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$

o) $m=0$, $A(2,4)$, $B(5,1)$, $C(7,-2)$

p) $m=\frac{5}{2}$, $A(0,3)$, $B(3,5)$, $C(6,2)$

q) $m=-4$, $A(1,7)$, $B(4,3)$, $C(6,8)$



CAPÍTULO III

Lugares geométricos

Definición

DEFINICIÓN DE GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN O LUGAR GEOMÉTRICO

El lugar geométrico es un conjunto de puntos con coordenadas (x, y), los mismos que satisfacen las condiciones de una ecuación específica [1, 3, 4]. El lugar geométrico también es conocido como el conjunto de coordenadas que satisfacen o coinciden con la representación de la sucesión de coordenadas.

PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICAS

- Condición 1: Conocida la ecuación construir la gráfica.
- Condición 2: Conocida la gráfica coincidir puntos referenciales y encontrar la ecuación.

Gráficos de lugares geométricos

INTERCEPCIONES CON LOS EJES

- Condición 1: Intercepción con el eje x.

  Sabiendo que el eje x (abscisas) tiene un punto donde corta la curva y el eje de las abscisas, esto se cumple cuando $y = 0$ en la ecuación.

- Condición 2: Intercepción con el eje y.

  Sabiendo que el eje y (ordenadas) y si tiene un punto donde corta la curva y el eje de las ordenadas, esto se cumple cuando $x = 0$ en la ecuación.

SIMETRÍA

- Simetría respecto al eje x

  Se tiene simetría con respecto al eje x cuando a la otra variable y se le cambia por su negativa y la gráfica continúa siendo simétrica, es decir, no se altera.

- Simetría respecto al eje y

  Se tiene simetría con respecto al eje y cuando a la otra variable x se le cambia por su negativa y la gráfica continúa siendo simétrica, es decir, no se altera.

- Simetría respecto al origen $(0, 0)$

  Se tiene simetría con respecto al origen $(0, 0)$ cuando las variables x y y se reemplazan por sus negativas y la gráfica continúa siendo simétrica, es decir, no se altera.

EXTENSIÓN DE UNA CURVA

La extensión de una curva o función se refiere a los intervalos en la que dicha función es continua [5], es decir, donde los valores de evaluación x nos entregue un resultado en valores reales y o viceversa.

- Dominio x

  Es el intervalo o intervalos donde la función y o $f(x)$ es evaluada en términos de x.

- Rango y

  Es el intervalo o intervalos donde la función x o $f(y)$ es evaluada en términos de y.

Generalizando para determinar el dominio y rango se despejaría la ecuación en términos de x y y respectivamente.

ASÍNTOTAS

Una asíntota es una recta que no interseca a la función en estudio, es decir, a medida que la función crece o decrece se va acercando a la asíntota pero nunca llegan a cortarse [3, 5]. Se tienen diferentes asíntotas:

- Asíntota Horizontal

  Es una recta paralela al eje de las abscisas o eje x.

- Asíntota Vertical

  Es una recta paralela al eje de las ordenadas o eje y.

- Asíntota Oblicua

  Es una recta cualquiera que no es paralela a los ejes x o y.

En las ecuaciones que tienen asíntotas, los casos más comunes es que tengan asíntotas horizontales o verticales.

Ejemplo 3.1. Realice el análisis y representación de la siguiente función $x^2 - 2xy + y = 0$.

- Cortes con los ejes coordenados.

  Para $y = 0$ el corte es con el eje x.

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x^2 - 2x(0) + (0) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

  El punto de intersección es $(0, 0)$

  Para $x = 0$ el corte es con el eje y.

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$(0)^2 - 2(0)y + y = 0$$

$$y = 0$$

  El punto de intersección es $(0, 0)$

- Simetría

  Analizar respecto a y cambiando x por $-x$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$(-x)^2 - 2(-x)y + y = 0$$

$$x^2 + 2xy + y = 0$$

  La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a y y tenemos: $f(x, y) \neq (-x, y)$

  Analizar respecto a x cambiando y por $-y$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x^2 - 2x(-y) + (-y) = 0$$

$$x^2 + 2xy - y = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a x y tenemos: $f(x,y) \neq (x,-y)$

Analizar respecto al origen cambiando x por $-x$ y y por $-y$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$(-x)^2 - 2(-x)(-y) + (-y) = 0$$

$$x^2 - 2xy - y = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto, no tiene simetría respecto al origen y tenemos: $f(x,y) \neq (-x,-y)$

- Extensión de la ecuación

Determinar el dominio despejando y

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x^2 + y(-2x+1) = 0$$

$$y(-2x+1) = -x^2$$

$$y = \frac{-x^2}{(-2x+1)}$$

$$y = \frac{x^2}{2x-1}$$

$$2x - 1 \neq 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} | x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

Determinar el rango resolviendo x

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x^2 + (-2y)x + (y) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(1)(y)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4y}}{2}$$
$$x = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2 - y)}}{2}$$
$$x = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - y}}{2}$$
$$x = y \pm \sqrt{y^2 - y}$$
$$y^2 - y \geq 0$$
$$y(y - 1) \geq 0$$

Operamos

$$y \leq 0$$
$$y - 1 \geq 0; y \geq 1$$
$$R_f = \{y \in \mathbf{R} | 1 \geq y \leq 0\}$$

- Asíntotas

  Recta paralela al eje x asignando $y = c$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$
$$x^2 + -2x(c) + (c) = 0$$
$$x^2 + -2xc + c = 0$$

  La expresión no es una recta, por lo que no existe asíntota paralela a x.

  Recta paralela al eje y asignando $x = d$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$
$$(d)^2 + -2(d)y + y = 0$$
$$d^2 + -2dy + y = 0$$
$$y(-2d + 1) = -d^2$$
$$y = \frac{-d^2}{-2d + 1}$$
$$y = \frac{d^2}{2d - 1}$$
$$2d - 1 = 0$$

$$2d = 1$$
$$d = \frac{1}{2}$$

La expresión es una recta en $x = \frac{1}{2}$, por lo que existe asíntota paralela a y.

Recta oblicua $y = mx + b$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x^2 - 2x(mx + b) + (mx + b) = 0$$
$$x^2 - 2x^2m - 2xb + mx + b = 0$$
$$x^2(1 - 2m) + x(-2b + m) + b = 0$$

Operamos individualmente

$$1 - 2m = 0$$

$$-2m = -1$$
$$m = \frac{1}{2}$$

$$-2b + m = 0$$

$$-2b = -m$$
$$b = \frac{m}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$$
$$b = \frac{1}{4}$$

Reemplazamos

$$y = mx + b$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$
$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$
$$y = \frac{2x + 1}{4}$$

La expresión es una recta que cumple las características de una asíntota oblicua a la función $f(x, y) = 0$.

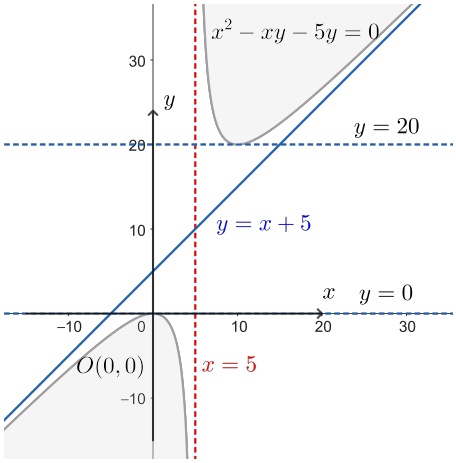


Figura 54: *Lugar geométrico con sus elementos (Ejemplo 3.1)*

Ejemplo 3.2. Realice el análisis y representación de la siguiente función $y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$.

- Cortes con los ejes coordenados.

  Para $y = 0$ el corte es con el eje x.

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$

$$(0)^2 - x^2(0) + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 0$$

$$x = 0$$

  El punto de intersección es $(0, 0)$

  Para $x = 0$ el corte es con el eje y.

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$

$$y^2 - (0)^2y + 2(0)^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

  El punto de intersección es $(0, 0)$

- Simetría

  Analizar respecto a y cambiando x por $-x$

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$

$$y^2 - (-x)^2 y + 2(-x)^2 = 0$$

$$y^2 - x^2 y + 2x^2 = 0$$

La expresión no cambió, por lo tanto tiene simetría respecto a y y tenemos: $f(x, y) = (-x, y)$

Analizar respecto a x cambiando y por $-y$

$$y^2 - x^2 y + 2x^2 = 0$$

$$(-y)^2 - x^2(-y) + 2x^2 = 0$$

$$y^2 + x^2 y + 2x^2 = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a x y tenemos: $f(x, y) \neq (x, -y)$

Analizar respecto al origen cambiando x por $-x$ y y por $-y$

$$y^2 - x^2 y + 2x^2 = 0$$

$$(-y)^2 - (-x)^2(-y) + 2(-x)^2 = 0 = 0$$

$$y^2 + x^2 y + 2x^2 = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto al origen y tenemos: $f(x, y) \neq (-x, -y)$

- Extensión de la ecuación

Determinar el dominio despejando y

$$y^2 - x^2 y + 2x^2 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-x^2) \pm \sqrt{(-x^2)^2 - 4(1)(2x^2)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 8x^2}}{2}$$

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2(x^2 - 8)}}{2}$$

$$y = \frac{x^2 \pm x\sqrt{x^2 - 8}}{2}$$

$$x^2 - 8 \geq 0$$

$$x \geq \pm\sqrt{8}$$

Operamos

$$-\sqrt{8} \leq x \geq \sqrt{8}$$
$$D_f = \left\{x \in \mathbf{R} | -\sqrt{8} \leq x \geq \sqrt{8}\right\}$$

Determinar el rango resolviendo x

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$
$$x^2(-y+2) + y^2 = 0$$
$$x^2(-y+2) = -y^2$$
$$x = \frac{-y^2}{(-y+2)}$$
$$x = \frac{y^2}{y-2}$$
$$y - 2 > 0$$
$$y > 2$$
$$\frac{y^2}{y-2} \geq 0$$
$$R_f = \{y \in \mathbf{R} | y > 2\}$$

- Asíntotas

Recta paralela al eje x asignando $y = c$

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$
$$(c)^2 - x^2(c) + 2x^2 = 0$$
$$c^2 - x^2c + 2x^2 = 0$$
$$x^2(-c+2) = -c^2$$
$$x^2 = \frac{c^2}{c-2}$$
$$x = \pm\frac{c^2}{c-2}$$
$$c - 2 = 0$$
$$c = 2; y = 2$$

La expresión es una recta, por lo que existe una asíntota paralela a x en $y = 2$.

Recta paralela al eje y asignando $x = d$

$$y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$$

$$y^2 - (d)^2y + 2(d)^2 = 0$$

$$y^2 - d^2y + 2d^2 = 0$$

La expresión no es una recta, por lo que no existe asíntota paralela a y.

Recta oblicua $y = mx + b$

$$(mx + b)^2 - x^2(xm + b) + 2x^2 = 0$$

$$m^2x^2 + 2mxb + b^2 - x^3m - x^2b + 2x^2 = 0$$

$$-mx^3 + (m^2 - b + 2)x^2 + (2mb)x + b^2 = 0$$

Operamos individualmente

$$-m = 0$$

$$m = 0$$

$$m^2 - b + 2 = 0$$

$$-b = -2$$

$$b = 2$$

Reemplazamos

$$y = (0)x + 2$$

$$y = 2$$

La expresión es una recta que cumple las características a la función $f(x, y) = 0$, considerando que es igual a la asíntota horizontal.

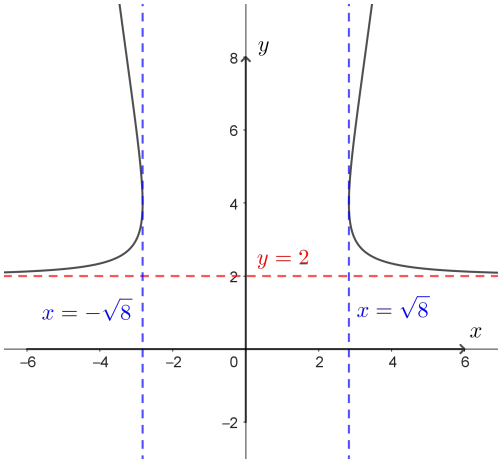


Figura 55: *Lugar geométrico con sus elementos (Ejemplo 3.2)*

Ejercicios propuestos Capítulo III

1. Realice el análisis y representación de la función $f(x, y) = 0$. Determine el corte con los ejes coordenados, simetría, rango, dominio y asíntotas.

a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$

c) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$

d) $y - \dfrac{1}{x} = 0$

e) $xy - 4 = 0$

f) $y^2 - 4x = 0$

g) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

h) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - 1 = 0$

i) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} - 1 = 0$

j) $y - \ln x = 0$

k) $y - e^x = 0$

l) $x^2 - y^2 - 4 = 0$

m) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

n) $y - \tan x = 0$

ñ) $x^2y - 1 = 0$

o) $y - \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$

p) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0$

q) $xy^2 - 4 = 0$

r) $y - \sqrt{9 - x^2} = 0$

s) $y - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$



CAPÍTULO IV

Transformación de Coordenadas

Introducción

INTRODUCCIÓN

En la geometría analítica se analizan las propiedades y características de figuras geométricas que se relacionan con funciones, se identifican los conceptos que definen cada una de las figuras y cómo se aplican propiedades comunes en cada una de ellas, relacionando los conceptos básicos aprendidos.

TRANSFORMACIONES

La transformación de una expresión es un conjunto de operaciones que representan la misma expresión original pero en diferentes formas, y que representan lo mismo [2, 3, 4]. Existen varias transformaciones que se pueden realizar, específicamente trabajaremos con la traslación de los ejes coordenados, lo que provocará que el elemento que está siendo analizado sea reescrito en relación a la mencionada traslación.

Transformaciones de coordenadas

TRASLACIÓN DE EJES COORDENADOS

En esta sección vamos a desplazar el origen del sistema de coordenadas, es decir, el punto $(0, 0)$ a una nueva posición auxiliar para facilitar el análisis bajo ciertas condiciones.

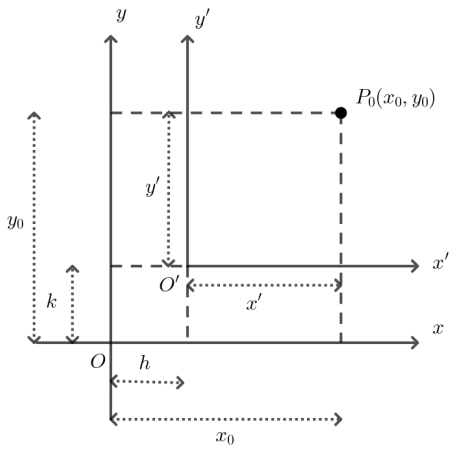


Figura 56: *Traslación de ejes coordenados*

Vamos a definir el punto auxiliar que será nuestro nuevo origen como punto $O'(h, k)$. De acuerdo a la figura 56 tenemos las coordenadas del punto $P(x, y)$ y las relaciones:

$$x = h + x'; x' = x - h$$

$$y = k + y'; y' = y - k$$

Ejemplo 4.1. Transforme la ecuación $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$ moviendo los ejes coordenados al punto $(-2, -4)$, determine el lugar geométrico en el nuevo sistema de coordenadas.

Tenemos: $O(0, 0)$, $O'(-2, -4)$, $h = -2$ y $k = -4$
$x' = x - h; x' = x - (-2); x = x' - 2$
$y' = y - k; y' = y - (-4); y = y' - 4$

$$4x^2 - y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$$
$$4(x' - 2)^2 - (y' - 4)^2 - 2(x' - 2) - 5(y' - 4) - 5 = 0$$
$$4(x'^2 - 4x' + 4) - (y'^2 - 8y + 16) - 2(x' - 2) - 5(y' - 4) - 5 = 0$$
$$4x'^2 - 16x' + 16 - y'^2 + 8y' - 16 - 2x' + 4 - 5y' + 20 - 5 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

- Cortes con los ejes coordenados.

  Para $y' = 0$ el corte es con el eje x'.

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$4(0)'^2 - 18(0)' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$-y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$y'^2 - 3y' - 19 = 0$$
$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y' = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-19)}}{2(1)}$$
$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{85}}{2}$$
$$y'_1 = \frac{3 + \sqrt{85}}{2}$$
$$y'_2 = \frac{3 - \sqrt{85}}{2}$$

Los puntos de intersección son $\left(0, \frac{3+\sqrt{85}}{2}\right)$, $\left(0, \frac{3-\sqrt{85}}{2}\right)$

Para $x' = 0$ el corte es con el eje y'.

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$4x'^2 - 18x' - (0)'^2 + 3(0)' + 19 = 0$$

$$4x'^2 - 18x' + 19 = 0$$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(4)(19)}}{2(4)}$$

$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{4(5)}}{8}$$

$$x' = \frac{18 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$x' = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x'_1 = \frac{9 + \sqrt{5}}{4}$$

$$x'_2 = \frac{9 - \sqrt{5}}{4}$$

Los puntos de intersección son $\left(\frac{9+\sqrt{5}}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{9-\sqrt{5}}{4}, 0\right)$

- Simetría

Analizar respecto a y' cambiando x' por $-x'$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$4(-x')^2 - 18(-x') - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$4x'^2 + 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a y' y tenemos: $f(x', y') \neq f(-x', y')$

Analizar respecto a x' cambiando y' por $-y'$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$4x'^2 - 18x' - (-y')^2 + 3(-y)' + 19 = 0$$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 - 3y' + 19 = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a x' y tenemos: $f(x', y') \neq f(x', -y')$

Analizar respecto al origen cambiando x' por $-x'$ y y' por $-y'$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$4(-x')^2 - 18(-x') - (-y')^2 + 3(-y)' + 19 = 0$$

$$4x'^2 + 18x' - y'^2 - 3y' + 19 = 0$$

La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto al origen y tenemos: $f(x', y') \neq f(-x', -y')$

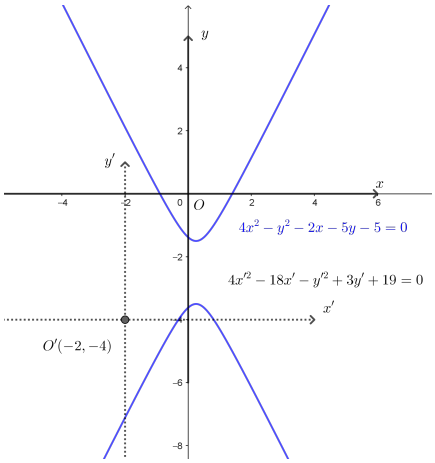


Figura 57: *Ejes coordenados trasladados al punto O' (Ejemplo 4.1)*

- Extensión de la ecuación

  Determinar el dominio despejando y'

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$-y'^2 + 3y' + 19 + 4x'^2 - 18x' = 0$$

$$y'^2 - 3y' - 4x'^2 + 18x' - 19 = 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y' = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4x'^2 + 18x' - 19)}}{2(1)}$$

$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16x'^2 - 72x' + 76}}{2}$$

$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{16x'^2 - 72x' + 85}}{2}$$

$$16x'^2 - 72x' + 85 \geq 0$$

$$x' \geq \frac{-(-72) \pm \sqrt{(-72)^2 - 4(16)(85)}}{2(16)}$$

$$x' \geq \frac{72 \pm \sqrt{-256}}{32}$$

No se tiene respuesta real, por lo tanto, todos los valores de x' cumplen con ser diferentes de 0.

$$D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$$

Determinar el rango resolviendo x'

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(4)(-y'^2 + 3y' + 19)}}{2(4)}$$

$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 16y'^2 - 48y' - 304)}}{8}$$

$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{16y'^2 - 48y' + 20}}{8}$$

$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{4(4y'^2 - 12y' + 5)}}{8}$$

$$x' = \frac{18 \pm 2\sqrt{4y'^2 - 12y' + 5}}{8}$$

$$x' = \frac{9 \pm \sqrt{4y'^2 - 12y' + 5}}{4}$$

$$4y'^2 - 12y' + 5 \geq 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y' = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(5)}}{2(4)}$$

$$y' = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{8}$$

$$y' = \frac{12 \pm 8}{8}$$
$$y'_1 \geq \frac{12+8}{8}; y'_1 \geq \frac{5}{2}$$
$$y'_2 \leq \frac{12-8}{8}; y'_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$R_f = \left\{ y \in \mathbf{R} | \frac{1}{2} \leq y \geq \frac{5}{2} \right\}$$

- Asíntotas

  Recta paralela al eje x' asignando $y' = c$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - (c)^2 + 3(c) + 19 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - c^2 + 3c + 19 = 0$$
$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x' = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(4)(-c^2 + 3c + 19)}}{2(4)}$$
$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 16c^2 - 48c - 304)}}{8}$$
$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{16c^2 - 48c + 20}}{8}$$
$$x' = \frac{18 \pm \sqrt{4(4c^2 - 12c + 5)}}{8}$$
$$x' = \frac{18 \pm 2\sqrt{4c^2 - 12c + 5}}{8}$$
$$x' = \frac{9 \pm \sqrt{4c^2 - 12c + 5}}{4}$$
$$4c^2 - 12c + 5 = 0$$
$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$c = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(5)}}{2(4)}$$
$$c = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{8}$$
$$c = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$c_1 \geq \frac{12+8}{8}; y_1' = \frac{5}{2}$$
$$c_2 \leq \frac{12-8}{8}; y_2' = \frac{1}{2}$$

Las expresiones son rectas, por lo que existen dos asíntotas paralelas a x' en $y' = \frac{5}{2}$ y $y' = \frac{1}{2}$.

Recta paralela al eje y' asignando $x' = d$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$4(d)^2 - 18(d) - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$4d^2 - 18d - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$y'^2 - 3y' - 4d^2 + 18d - 19 = 0$$
$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y' = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4d^2 + 18d - 19)}}{2(1)}$$
$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16d^2 - 72d + 76}}{2}$$
$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{16d^2 - 72d + 85}}{2}$$
$$16d^2 - 72d + 85 \geq 0$$
$$d = \frac{-(-72) \pm \sqrt{(-72)^2 - 4(16)(85)}}{2(16)}$$
$$d = \frac{72 \pm \sqrt{-256}}{32}$$

No tiene respuesta real, por lo que no posee asíntotas paralelas a y'.

Recta oblicua $y' = mx' + b$

$$4x'^2 - 18x' - y'^2 + 3y' + 19 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - (mx + b)^2 + 3(mx + b) + 19 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - (m^2x^2 + 2mx + b^2) + 3(mx + b) + 19 = 0$$
$$4x'^2 - 18x' - m^2x^2 - 2mxb - b^2 + 3mx + 3b + 19 = 0$$
$$x'^2(4 - m^2) + x'(-18 - 2mb + 3m) + (-b^2 + 3b + 19) = 0$$

Operamos:

$$4 - m^2 = 0$$

$$-m^2 = -4$$

$$m^2 = 4$$

$$(m^2)^{1/2} = (4)^{1/2}$$

$$m = \pm 2; m_1 = 2; m_2 = -2$$

$$-18 - 2mb + 3m = 0$$

Para $m_1 = 2$

$$-18 - 2(2)b + 3(2) = 0$$

$$-4b_1 = 12$$

$$b_1 = \frac{12}{-4}$$

$$b_1 = -3$$

Para $m_2 = -2$

$$-18 - 2(-2)b + 3(-2) = 0$$

$$4b_2 = 24$$

$$b_2 = \frac{24}{4}$$

$$b_2 = 6$$

Reemplazamos:

$$y' = mx' + b$$

$$y' = (2)x' + (-3)$$

$$y'_1 = 2x' - 3$$

$$y' = (-2)x' + (6)$$

$$y'_2 = -2x' + 6$$

Las expresiones son rectas que cumple las características de una asíntota oblicua a la función $f(x', y') = 0$, son $y' = 2x' - 3$ y $y' = -2x' + 6$.

Ejemplo 4.2. Considerando la función $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$, encuentre el lugar geométrico si desplazamos los ejes coordenados al punto $(2,5)$. Realice el análisis correspondiente.

Tenemos: $O(0,0)$, $O'(2,5)$, $h = 2$ y $k = 5$
$x' = x - h; x' = x - (2); x = x' + 2$
$y' = y - k; y' = y - (5); y = y' + 5$

$$3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$$
$$3(x'+2)^2 + 2(y'+5)^2 + 18(x'+2) - 8(y'+5) + 29 = 0$$
$$3(x'^2 + 4x' + 4) + 2(y'^2 + 10y' + 25) + 18(x'+2) - 8(y'+5) + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 12x' + 12 + 2y'^2 + 20y' + 50 + 18x' + 36 - 8y' - 40 + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

- Cortes con los ejes coordenados.

  Para $y' = 0$ el corte es con el eje x'.

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$
$$3x'^2 + 2(0)'^2 + 30x' + 12(0)' + 87 = 0$$
$$3x'^2 + 30x' + 87 = 0$$
$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y' = \frac{-(30) \pm \sqrt{(30)^2 - 4(3)(87)}}{2(3)}$$
$$y' = \frac{-30 \pm \sqrt{-144}}{2}$$

  No tiene solución real, por lo tanto no existen puntos de corte con el eje x'.

  Para $x' = 0$ el corte es con el eje y'.

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$
$$3(0)^2 + 2y'^2 + 30(0) + 12y' + 87 = 0$$
$$2y'^2 + 12y' + 87 = 0$$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(2)(87)}}{2(2)}$$

$$x' = \frac{-12 \pm \sqrt{-552}}{4}$$

No tiene solución real, por lo tanto no existen puntos de corte con el eje y'.

- Simetría

  Analizar respecto a y' cambiando x' por $-x'$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3(-x')^2 + 2y'^2 + 30(-x') + 12y' + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2y'^2 - 30x' + 12y' + 87 = 0$$

  La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a y' y tenemos: $f(x', y') \neq f(-x', y')$

  Analizar respecto a x' cambiando y' por $-y'$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2(-y')^2 + 30x' + 12(-y') + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' - 12y' + 87 = 0$$

  La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto a x' y tenemos: $f(x', y') \neq f(x', -y')$

  Analizar respecto al origen cambiando x' por $-x'$ y y' por $-y'$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3(-x')^2 + 2(-y')^2 + 30(-x') + 12(-y') + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2y'^2 - 30x' - 12y' + 87 = 0$$

  La expresión cambió, por lo tanto no tiene simetría respecto al origen y tenemos: $f(x', y') \neq f(-x', -y')$

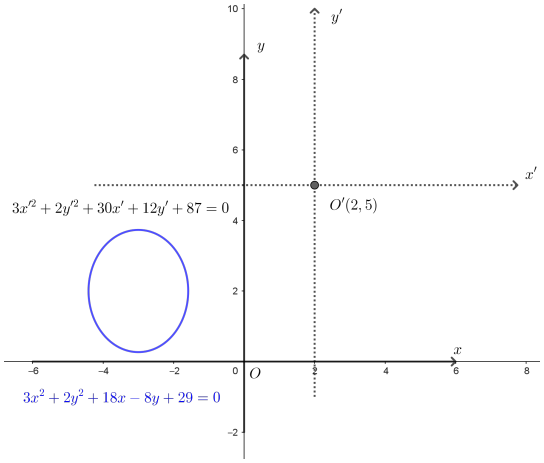


Figura 58: *Ejes coordenados trasladados al punto O' (Ejemplo 4.2)*

- Extensión de la ecuación

  Determinar el dominio despejando y'

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$2y'^2 + 12y' + 3x'^2 + 30x' + 87 = 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y' = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(2)(3x'^2 + 30x' + 87)}}{2(2)}$$

$$y' = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 24x'^2 - 240x' - 696}}{4}$$

$$y' = \frac{-12 \pm \sqrt{-24x'^2 - 240x' - 552}}{4}$$

$$-24x'^2 - 240x' - 552 \geq 0$$

$$x' \geq \frac{-(-240) \pm \sqrt{(-240)^2 - 4(-24)(-552)}}{2(-24)}$$

$$x' \geq \frac{240 \pm \sqrt{4608}}{-48}$$

$$x' \geq \frac{240 \pm \sqrt{2304(2)}}{-48}$$

$$x' \geq \frac{240 \pm 48\sqrt{2}}{-48}$$

$$x' \geq \frac{5 \pm \sqrt{2}}{-1}$$

$$x' \geq -5 \pm \sqrt{2}$$

$$x'_1 \leq -5 + \sqrt{2}$$

$$x'_2 \geq -5 - \sqrt{2}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} | -5 - \sqrt{2} \geq x' \leq -5 + \sqrt{2} \right\}$$

Determinar el rango resolviendo x'

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 30x' + 2y'^2 + 12y' + 87 = 0$$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(30) \pm \sqrt{(30)^2 - 4(3)(2y'^2 + 12y' + 87)}}{2(3)}$$

$$x' = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 24y'^2 - 144y' - 1044)}}{6}$$

$$x' = \frac{-30 \pm \sqrt{-24y'^2 - 144y' - 144}}{6}$$

$$-24y'^2 - 144y' - 144 \geq 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y' = \frac{-(-144) \pm \sqrt{(-144)^2 - 4(-24)(-144)}}{2(-24)}$$

$$y' = \frac{144 \pm \sqrt{6912}}{-48}$$

$$y' = \frac{144 \pm \sqrt{2304(3}}{-48}$$

$$y' = \frac{144 \pm 48\sqrt{3}}{-48}$$

$$y' = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{-1}$$

$$y' = -3 \pm \sqrt{3}$$

$$y'_1 \leq -3 + \sqrt{3}$$

$$y'_2 \geq -3 - \sqrt{3}$$

$$R_f = \left\{ y \in \mathbf{R} | -3 - \sqrt{3} \geq y' \leq -3 + \sqrt{3} \right\}$$

- Asíntotas

  Recta paralela al eje x' asignando $y' = c$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2(c)^2 + 30x' + 12(c) + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2c^2 + 30x' + 12c + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 30x' + 2c^2 + 12c + 87 = 0$$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-(30) \pm \sqrt{(30)^2 - 4(3)(2c^2 + 12c + 87)}}{2(3)}$$

$$x' = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 24c^2 - 144c - 1044)}}{6}$$

$$x' = \frac{-30 \pm \sqrt{-24c^2 - 144c - 144}}{6}$$

$$-24c^2 - 144c - 144 \geq 0$$

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$c = \frac{-(-144) \pm \sqrt{(-144)^2 - 4(-24)(-144)}}{2(-24)}$$

$$c = \frac{144 \pm \sqrt{6912}}{-48}$$

$$c = \frac{144 \pm \sqrt{2304(3}}{-48}$$

$$c = \frac{144 \pm 48\sqrt{3}}{-48}$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{-1}$$

$$c = -3 \pm \sqrt{3}$$

$$c_1 = -3 + \sqrt{3}$$

$$c_2 = -3 - \sqrt{3}$$

Las expresiones son rectas, por lo que existen dos asíntotas paralela a x' en $y' = -3 + \sqrt{3}$ y $y' = -3 + \sqrt{3}$.

Recta paralela al eje y' asignando $x' = d$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$2y'^2 + 12y' + 3(d)^2 + 30(d) + 87 = 0$$

$$2y'^2 + 12y' + 3d^2 + 30d + 87 = 0$$

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y' = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(2)(3d^2 + 30d + 87)}}{2(2)}$$

$$y' = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 24d^2 - 240d - 696}}{4}$$

$$y' = \frac{-12 \pm \sqrt{-24d^2 - 240d - 552}}{4}$$

$$-24d^2 - 240d - 552 \geq 0$$

$$d = \frac{-(-240) \pm \sqrt{(-240)^2 - 4(-24)(-552)}}{2(-24)}$$

$$d = \frac{240 \pm \sqrt{4608}}{-48}$$

$$d = \frac{240 \pm \sqrt{2304(2)}}{-48}$$

$$d = \frac{240 \pm 48\sqrt{2}}{-48}$$

$$d = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{-1}$$

$$d = -5 \pm \sqrt{2}$$

$$d_1 = -5 + \sqrt{2}$$

$$d_2 = -5 - \sqrt{2}$$

Las expresiones son rectas, por lo que existen dos asíntotas paralelas a y' en $x' = -5 + \sqrt{2}$ y $x' = -5 - \sqrt{2}$.

Recta oblicua $y' = mx' + b$

$$3x'^2 + 2y'^2 + 30x' + 12y' + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2(mx' + b)^2 + 30x' + 12(mx' + b) + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2(m^2x'^2 + 2mx'b + b^2) + 30x' + 12(mx' + b) + 87 = 0$$

$$3x'^2 + 2m^2x'^2 + 4mx'b + 2b^2 + 30x' + 12mx' + 12b + 87 = 0$$

$$x'^2(3 + 2m^2) + x'(4mb + 30 + 12m) + (2b^2 + 12b + 87) = 0$$

Operamos:

$$3 + 2m^2 = 0$$

$$2m^2 = -3$$

$$m^2 = -\frac{3}{2}$$

$$m = \sqrt{-\frac{3}{2}}$$

No tiene solución real, esto indica que no existen asíntotas oblicuas a la función.

Ejercicios propuestos Capítulo IV

1. Considere la función $f(x, y) = 0$, encuentre el lugar geométrico si se desplaza el sistema coordenado al punto O'. Realice el análisis correspondiente. Grafique.

   a) $x^2+y^2-6x-8y+9 = 0, O'(3, 4)$

   b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0, O'(-2, 3)$

   c) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0, O'(5, -2)$

   d) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0, O'(-4, -1)$

   e) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0, O'(2, -2)$

   f) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0, O'(-2, 1)$

   g) $16x^2+25y^2-64x-50y-311 = 0, O'(2, 1)$

   h) $25x^2+16y^2+100x-32y-284 = 0, O'(-2, 1)$

   i) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0, O'(3, -2)$

   j) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 29 = 0, O'(-2, 3)$

   k) $16x^2-9y^2-64x-36y-44 = 0, O'(2, -2)$

   l) $9x^2-25y^2-36x-50y-214 = 0, O'(2, -1)$

   m) $y = x^2 - 6x + 5, O'(3, -4)$

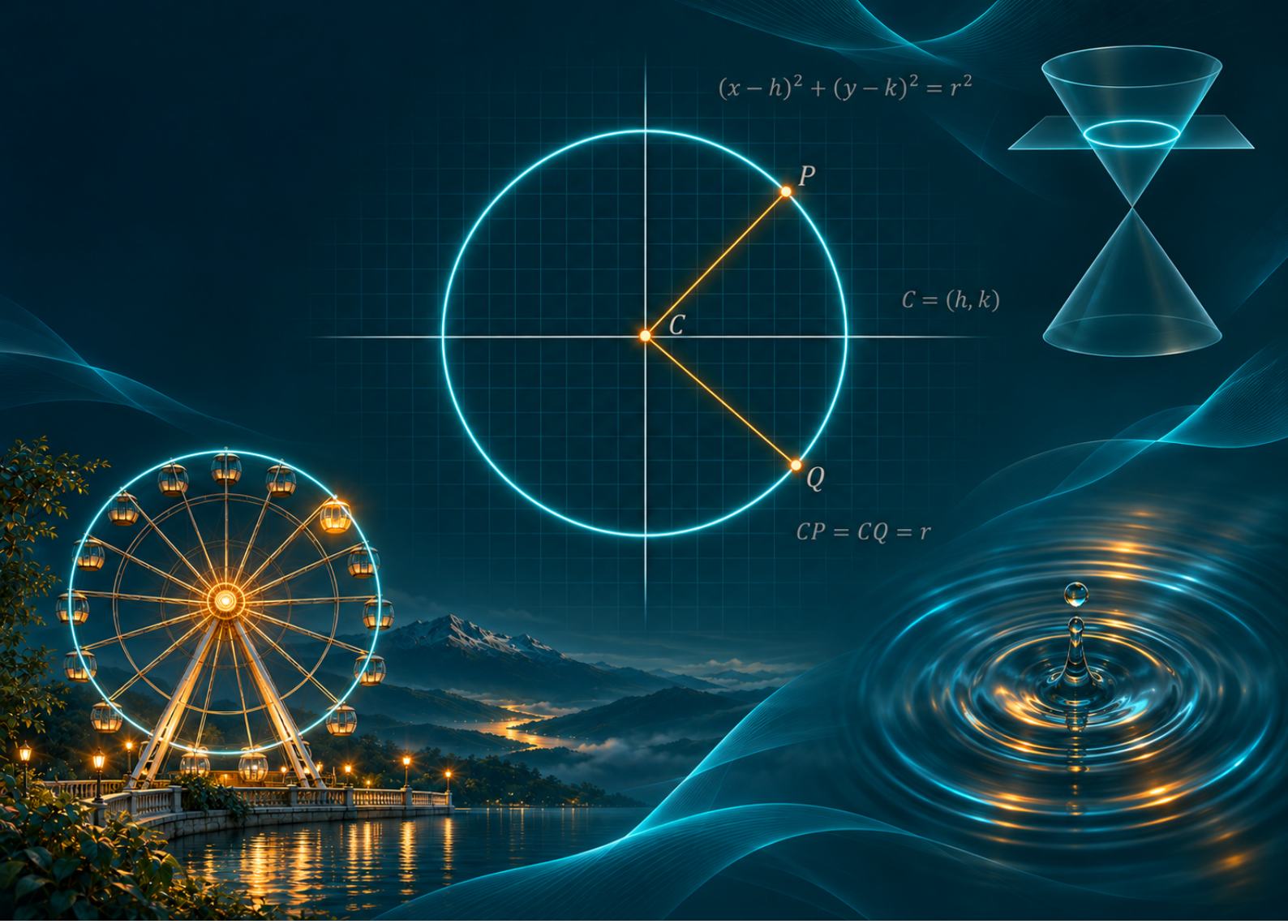
   n) $y = -x^2 + 4x + 1, O'(2, 5)$

   ñ) $x = y^2 + 8y + 10, O'(-6, -4)$

   o) $x = -y^2 - 2y + 3, O'(4, -1)$

   p) $2x + 3y - 6 = 0, O'(1, 2)$

   q) $3x - 4y + 12 = 0, O'(-2, 3)$



CAPÍTULO V

La Circunferencia

Definición y Elementos

DEFINICIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es una sucesión de puntos que tienen la misma distancia a un punto en específico del plano, este punto sería el centro de la circunferencia [1].

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Los elementos de la circunferencia son los siguientes:

- Cuerda: $(\overline{EF})$ es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
- Centro: (C) es el punto fijo en el plano en relación a la circunferencia que siempre es equidistante a cualquier punto de la circunferencia.
- Radio: (r) es la distancia medida desde el centro C hasta cualquier punto de la circunferencia.
- Diámetro: $(\overline{BD})$ es la distancia medida entre dos puntos de la circunferencia siempre que pase por el centro y es el doble del radio r.
- Secante: $(\overline{AF})$ es la recta que corta la circunferencia en dos puntos cualesquiera.
- Tangente: $(\overline{AP})$ es la recta que interseca en un solo punto de la circunferencia y que siempre forma un ángulo de $90°$ con el segmento del radio en el punto de corte.

Ecuaciones de la circunferencia

FORMA CANÓNICA

La circunferencia tiene la ecuación de forma canónica siempre considerando que el centro $(0, 0)$ está en el origen del sistema de coordenadas [3, 6].

Consideramos la forma ordinaria de la circunferencia y la analizamos para la condición indicada del centro en el origen:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-(0))^2+(y-(0))^2=r^2$$

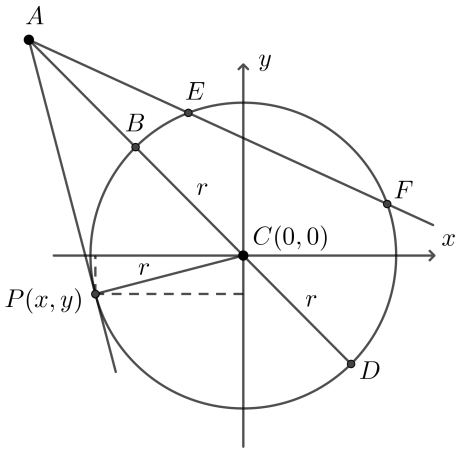


Figura 59: *Elementos de una circunferencia*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuación de la circunferencia siempre tiene las dos variables x y y en potencia 2.

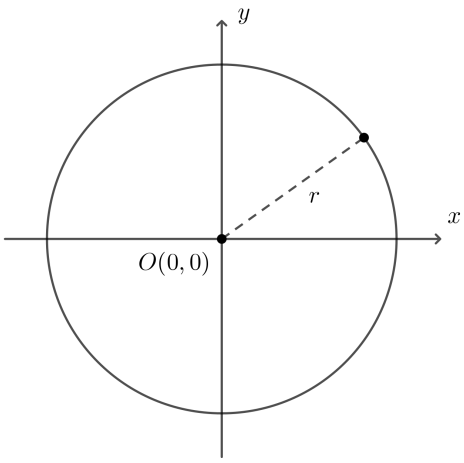


Figura 60: *Componentes en la circunferencia*

Ejemplo 5.1. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene un radio de 3 y que su centro está en el origen.

Tenemos $O(0, 0$ y $r = 3$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = (3)^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

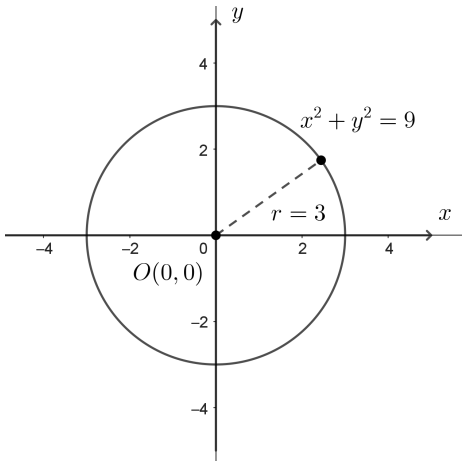


Figura 61: *Circunferencia con centro en el origen y radio 3*

FORMA ORDINARIA

La circunferencia tiene la ecuación de forma ordinaria siempre considerando que el centro es un punto diferente del origen, es decir, el centro tiene coordenadas (h, k), aunque no restringe que pueda ser el origen $(0, 0)$ [3, 5].

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Usamos la forma canónica de la circunferencia y aplicamos el criterio de la traslación de ejes.

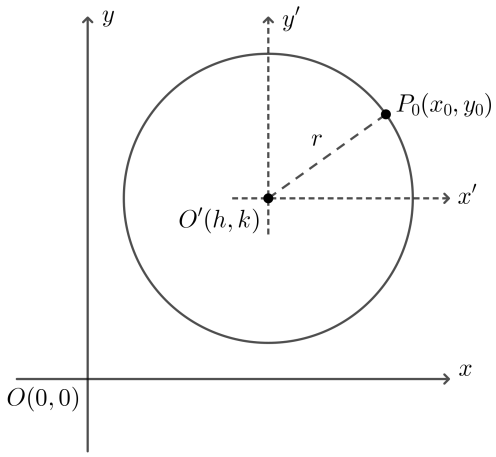


Figura 62: *Circunferencia con centro en* (h, k)

Usamos el proceso aprendido anteriormente y determinamos que:

$$x = x' + h; y = y' + k$$

Siendo la ecuación de la circunferencia en el centro C.

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

$$x' = x - h; y' = y - k$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Entendiendo que el valor del radio r siempre debe ser mayor que 0, de ser el caso que fuese igual a 0, ya no sería una circunferencia sino un punto.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2; r > 0$$

Ejemplo 5.2. Determine la ecuación de la circunferencia con radio 4 y con su centro en el punto $(4, 3)$.

Tenemos $r = 4$ y $O'(4, 3)$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(4))^2 + (y-(3))^2 = (4)^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16^2$$

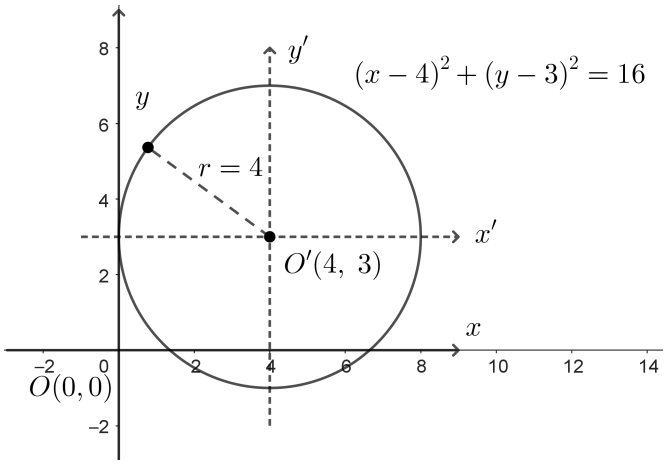


Figura 63: *Circunferencia con radio 4 y centro en O' (Ejemplo 5.2)*

Ejemplo 5.3. Determine la ecuación de la forma ordinaria teniendo la circunferencia $4x^2 - 4y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

$$4x^2 + 4y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$$4x^2 + 2x + 4y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$(4x^2 + 2x) + (4y^2 - 4y) - 4 = 0$$

$$\left(4x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right) + \left(4y^2 - 4y + 1\right) - 4 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + (2y - 1)^2 = 4 + \frac{1}{4} + 1$$

$$\left(2\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(2\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{16 + 1 + 4}{4}$$

$$4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

$$4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{21}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{16}$$

Tenemos $r^2 = \frac{21}{16}; r = \frac{\sqrt{21}}{4}$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = -\frac{1}{4}; k = \frac{1}{2}$$

$$O'\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

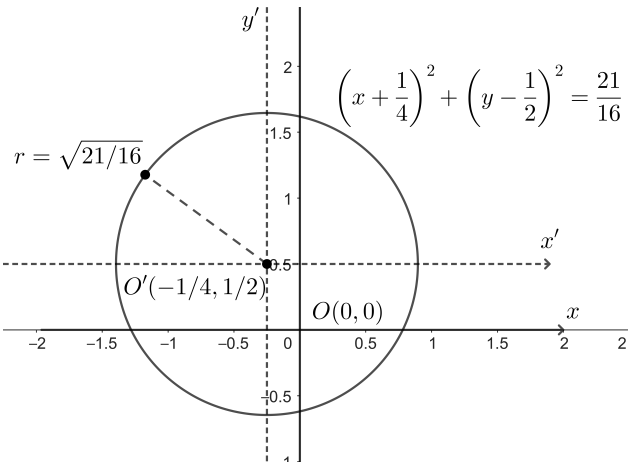


Figura 64: *Circunferencia de forma ordinaria (Ejemplo 5.3)*

FORMA GENERAL

La ecuación de la forma general de la circunferencia está descrita por:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

No debemos confundirnos con los coeficientes A, B y C de la forma general de la recta.

Para identificar las equivalencias empezamos desde la forma general y re-escribirla de la forma canónica:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0$$
$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) + C = 0$$

Completamos los binomios.

$$\left(x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2\right) + C = 0$$
$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) + C = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$
$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$
$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Igualamos a los términos de la forma canónica.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$-h = \frac{A}{2}; -k = \frac{B}{2}; r^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$
$$h = -\frac{A}{2}; k = -\frac{B}{2}; r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

El centro tiene por coordenadas $C(h, k) = C(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

Ejemplo 5.4. Determine la ecuación de la circunferencia de aquella que pase por los puntos $(0,1)$, $(2,4)$ y $(-3,3)$.

Utilizamos la ecuación de la forma general:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Para $(0,1)$

$$(0)^2 + (1)^2 + A(0) + B(1) + C = 0$$

$$1 + B + C = 0$$

$$B + C = -1$$

Para $(2,4)$

$$(2)^2 + (4)^2 + A(2) + B(4) + C = 0$$

$$4 + 16 + 2A + 4B + C = 0$$

$$2A + 4B + C = -20$$

Para $(-3,3)$

$$(-3)^2 + (3)^2 + A(-3) + B(3) + C = 0$$

$$9 + 9 - 3A + 3B + C = 0$$

$$-3A + 3B + C = -18$$

Encontramos un sistema de ecuaciones y lo resolvemos:

$$B + C = -1$$

$$2A + 4B + C = -20$$

$$-3A + 3B + C = -18$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -20 \\ -3 & 3 & 1 & -18 \end{array}\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -20 & 4 & 1 \\ -18 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -20 & 1 \\ -3 & -18 & 1 \end{pmatrix} \quad M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -20 \\ -3 & 3 & -18 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 6 + 12 + 0 - 2 = 13$$

$$|M_A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -20 & 4 & 1 & -20 & 4 \\ -18 & 3 & 1 & -18 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 18 - 60 + 72 + 3 + 20 = 13$$

$$|M_B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -20 & 1 & 2 & -20 \\ -3 & -18 & 1 & -3 & -18 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 36 - 60 + 0 + 2 = -91$$

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -20 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -18 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 60 - 6 - 12 + 0 + 36 = 78$$

$$A = \frac{|M_A|}{|M|}; B = \frac{|M_B|}{|M|}; C = \frac{|M_C|}{|M|}$$

$$A = \frac{13}{13}; B = \frac{-91}{13}; C = \frac{78}{13}$$

$$A = 1; B = -7; C = 6$$

Reemplazamos en la forma general:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + (1)x + (-7)y + (6) = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - 7y + 6 = 0$$

$$x^2 + x + y^2 + -7y + 6 = 0$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + -7y + \frac{49}{4}\right) + 6 - \frac{1}{4} - \frac{49}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \frac{1}{4} + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

Tenemos $r^2 = \frac{13}{2}; r = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$h = -\frac{1}{2}; k = \frac{7}{2}$$

$$O'\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

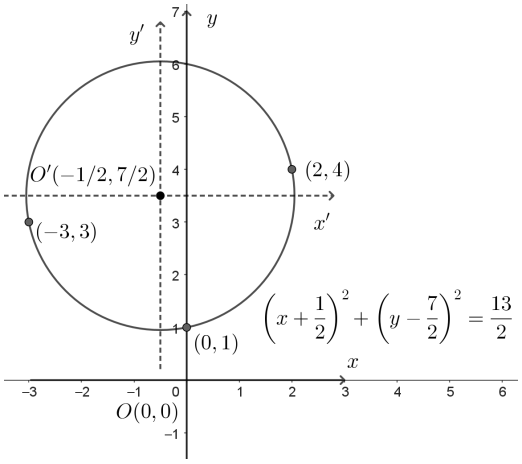


Figura 65: *Circunferencia con los ejes desplazados al punto O' (Ejemplo 5.4)*

Familia de circunferencias

INTRODUCCIÓN

Hablamos de familia de circunferencias a la ecuación de la circunferencia en la que varía un valor que se relaciona con los elementos de la circunferencia, es decir, con el radio r y el centro (h, k) [4, 6]. Se realiza una equivalencia de las familias relacionándolo con un valor que va cambiando de acuerdo a las condiciones, mientras los otros coeficientes se mantienen.

Comúnmente se asigna un valor cualquiera representado por una constante que la llamaremos K, como condición inicial asignamos al radio $r = K$, manteniendo el centro sin cambios.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (K)^2$$

La ecuación que se tiene representa un familia de circunferencias que mantienen el centro en (h, k) y de radios variables asignados a K.

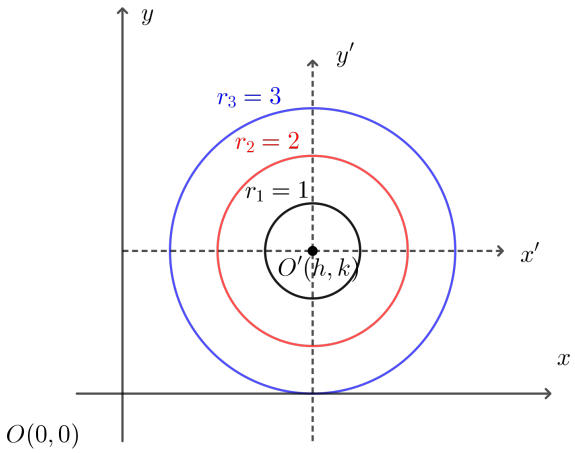


Figura 66: *Circunferencias concéntricas*

Para ejemplificar asignamos los valores de $K = 1, 2, 3$, tenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (K)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (1)^2; (x-h)^2 + (y-k)^2 = 1$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (2)^2; (x-h)^2 + (y-k)^2 = 4$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (3)^2; (x-h)^2 + (y-k)^2 = 9$$

FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS QUE PASA POR LA INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Tenemos dos circunferencias que se cruzan y que tienen las siguientes ecuaciones:

$$C_1 : x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Multiplicamos por la constante K para encontrar una ecuación que se pueda igualar a cero.

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$K(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + K(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Operamos para relacionar con la constante K.

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + Kx^2 + Ky^2 + KA_2x + KB_2y + KC_2 = 0$$

$$x^2(1+K) + y^2(1+K) + x(A_1 + KA_2) + y(B_1 + KB_2) + (C_1 + KC_2) = 0$$

Evaluamos con los valores de $K = \{-1, 0, 1\}$ para identificar el comportamiento de la ecuación.

$$x^2(1+K) + y^2(1+K) + x(A_1 + KA_2) + y(B_1 + KB_2) + (C_1 + KC_2) = 0$$

Para $K = 1$

$$x^2(1+(1)) + y^2(1+(1)) + x(A_1 + (1)A_2) + y(B_1 + (1)B_2) + (C_1 + (1)C_2) = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + x(A_1 + A_2) + y(B_1 + B_2) + (C_1 + C_2) = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + x(A_1 + A_2) + y(B_1 + B_2) + (C_1 + C_2) = 0$$

Tenemos la ecuación de una circunferencia. Para $K = 0$

$$x^2(1+(0)) + y^2(1+(0)) + x(A_1 + (0)A_2) + y(B_1 + (0)B_2) + (C_1 + (0)C_2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

Tenemos la ecuación de la circunferencia C_1. Para $K = -1$

$$x^2(1+(-1)) + y^2(1+(-1)) + x(A_1 + (-1)A_2) + y(B_1 + (-1)B_2) + (C_1 + (-1)C_2) = 0$$

$$x(A_1 - A_2) + y(B_1 - B_2) + (C_1 - C_2) = 0$$

Tenemos la ecuación de una recta.

Podemos generalizar las condicionantes siguientes.

- Con $K \neq -1$ tenemos una circunferencia cualquiera.
- Con $K = 0$ tenemos la circunferencia C_1.
- Con $K = -1$ tenemos una recta.

Ejemplo 5.5. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 5x + 2y + 2 = 0$, considerando que el centro forma parte de la recta $-x + 2y - 3 = 0$.

Primero, analizamos las ecuaciones de las circunferencias para saber si se cruzan.

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 = 0; x^2 + y^2 = -2x + 3y + 10$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 2y + 2 = 0; x^2 + y^2 = 5x - 2y - 2$$

Igualamos $x^2 + y^2$:

$$-2x + 3y + 10 = 5x - 2y - 2$$

$$-2x - 5x + 3y + 2y = -10 - 2$$

$$-7x + 5y = -12$$

Encontramos la ecuación de la recta que cruza por la intersección de las dos circunferencias, por lo que confirmamos que las circunferencias se intersecan, aplicamos la ecuación de familias de circunferencias.

$$A_1 = 2; B_1 = -3; C_1 = -10; A_2 = -5; B_2 = 2; C_2 = 2$$

$$x^2(1+K) + y^2(1+K) + x(A_1 + KA_2) + y(B_1 + KB_2) + (C_1 + KC_2) = 0$$

$$x^2(1+K) + y^2(1+K) + x((2) + K(-5)) + y((-3) + K(2)) + ((-10) + K(2)) = 0$$

$$x^2(1+K) + y^2(1+K) + x(2-5K) + y(-3+2K) + (-10+2K) = 0$$

$$\frac{x^2(1+K)}{1+K} + \frac{y^2(1+K)}{1+K} + \frac{x(2-5K)}{1+K} + \frac{y(-3+2K)}{1+K} + \frac{-10+2K}{1+K} = 0$$

$$x^2 + y^2 + x\left(\frac{2-5K}{1+K}\right) + y\left(\frac{-3+2K}{1+K}\right) + \frac{-10+2K}{1+K} = 0$$

$$A_3 = \frac{2-5K}{1+K}; B_3 = \frac{-3+2K}{1+K}; C_3 = \frac{-10+2K}{1+K}$$

Aplicamos la condición del centro de la circunferencia encontrada $C(h,k)$ es $\left(-\frac{A_3}{2}, -\frac{B_3}{2}\right)$.

$$O_{C_3}\left(-\frac{\frac{2-5K}{1+K}}{2}, -\frac{\frac{-3+2K}{1+K}}{2}\right)$$

$$O_{C_3}\left(\frac{-2+5K}{2(1+K)}, \frac{3-2K}{2(1+K)}\right)$$

Relacionamos con la ecuación de la recta:

$$-x + 2y - 3 = 0$$

$$-\left(\frac{-2+5K}{2(1+K)}\right) + \left(\frac{3-2K}{2(1+K)}\right) - 3 = 0$$

$$-\left(\frac{-2+5K}{2(1+K)}\right) + \left(\frac{3-2K}{2(1+K)}\right) = 3$$

$$-(-2+5K) + (3-2K) = 3(2(1+K))$$

$$-(-2+5K) + (3-2K) - 6(1+K) = 0$$

$$2 - 5K + 3 - 2K - 6 - 6K = 0$$

$$-13K = 1$$

$$K = -\frac{1}{13}$$

Reemplazamos en la ecuación de C_3.

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 + K(x^2 + y^2 - 5x + 2y + 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 + \left(-\frac{1}{13}\right)(x^2 + y^2 - 5x + 2y + 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 - \left(\frac{x^2}{13}\right) - \left(\frac{y^2}{13}\right) + \left(\frac{5x}{13}\right) - \left(\frac{2y}{13}\right) - \left(\frac{2}{13}\right) = 0$$

$$\frac{13x^2 + 13y^2 + 13(2x) - 13(3y) - 13(10) - x^2 - y^2 + 5x - 2y - 2}{13} = 0$$

$$13x^2 + 13y^2 + 26x - 39y - 130 - x^2 - y^2 + 5x - 2y - 2 = 0$$

$$12x^2 + 12y^2 + 31x - 41y - 132 = 0$$

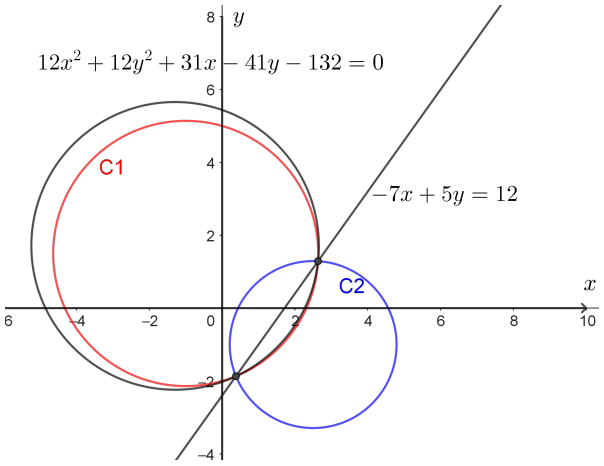


Figura 67: *Recta de intersección entre circunferencias (Ejemplo 5.5)*

Eje radical

DEFINICIÓN DE EJE RADICAL

El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico donde los puntos de relación tienen igual distancia y se pueden trazar tangentes iguales [4, 6]. En ciertos casos el eje radical es la línea perpendicular que corta al segmento que une los centros de dos circunferencias, siempre que corte al segmento en condiciones equidistantes respecto a las circunferencias.

CIRCUNFERENCIAS SECANTES

El eje radical pasa por los puntos de intersección entre dos circunferencias, dicha condición genera que la distancia d sea menor que la suma de los radios r_a y r_b.

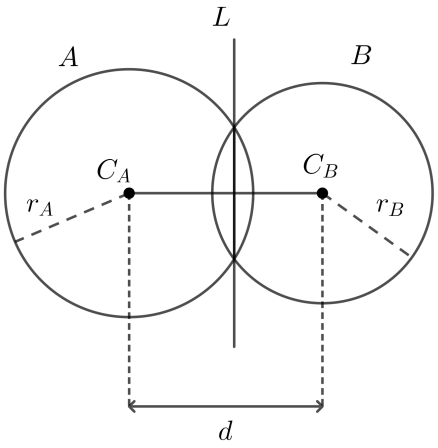


Figura 68: *Circunferencias secantes*

CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

El eje radical corta el segmento que une los dos radios y cumple con la condición que pasa por la mitad de la distancia entre los contornos de las circunferencias, la distancia d es mayor a la suma de los radios r_a y r_b.

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES

El eje radical pasa por el único punto de intersección de dos circunferencias, la distancia d es igual a la suma de los radios r_a y r_b. En esta condición las dos circunferencia están conectadas externamente.

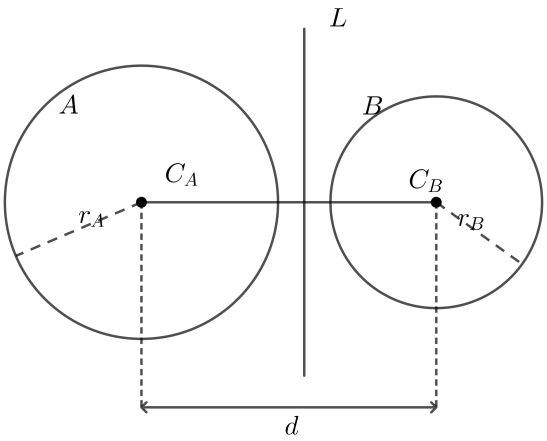


Figura 69: *Circunferencias exteriores*

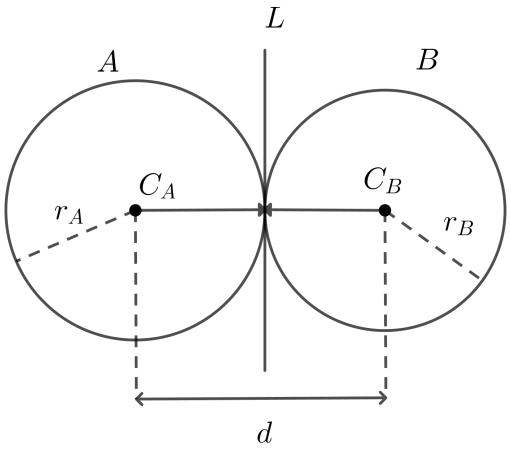


Figura 70: *Circunferencias tangentes exteriores*

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIORES

El eje radical pasa por el único punto de intersección de dos circunferencias, la distancia d es igual a la suma de los radios r_a y r_b. En esta condición las dos circunferencia están conectadas internamente.

Tangente a una circunferencia

MÉTODO DE DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA

Se aplica el criterio de la distancia entre una recta y un punto como lo revisamos anteriormente, se debe considerar que es la distancia es entre el centro y cualquier punto que forme parte del contorno de la circunferencia, cumpliendo con la condición de que la recta tangente siempre es perpendicular al radio.

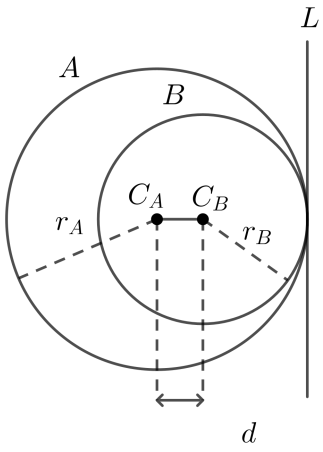


Figura 71: *Circunferencias tangentes interiores*

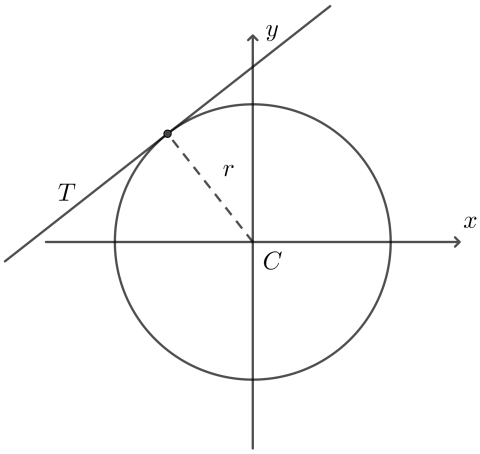


Figura 72: *Distancia entre un punto y recta, primer método*

MÉTODO DE RAÍCES

Para resolver una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sabemos que las condiciones posibles entre una recta y una circunferencia son: no se crucen, se crucen en 1 punto, se crucen en 2 puntos [3, 5]. Se debe analizar el argumento de la raíz y considerar una respuesta real para que exista intersección.

$b^2 - 4ac = 0$: Significa que solo existe un punto de corte entre la circunferencia y la recta, por lo tanto la recta es una tangente.

$b^2 - 4ac > 0$: Significa que solo existen dos puntos de corte entre la circunferencia y la recta, por lo tanto la recta es una secante.

$b^2 - 4ac < 0$: Significa que no existe respuesta real de la raíz e implica que

no existen puntos de corte entre la circunferencia y la secante.

La ecuación de segundo grado $ax^{+}bx + c = 0$ la obtenemos de igualar las ecuaciones de la recta y la circunferencia suponiendo inicialmente que se cruzan.

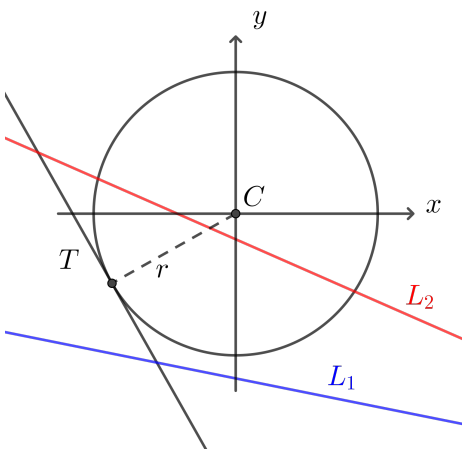


Figura 73: *Distancia entre un punto y recta, segundo método*

Ejemplo 5.6. Determine para que valor de K la recta $y = Kx + 2$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$:

- Se corten.
- Sean tangentes.
- No se corten.

Desarrollamos la igualdad por cruce.

$$y = Kx + 2; x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

$$x^2 + (Kx + 2)^2 - 4x + 2(Kx + 2) - 4 = 0$$

$$x^2 + (K^2x^2 + 4Kx + 4) - 4x + 2Kx + 4 - 4 = 0$$

$$x^2 + K^2x^2 + 4Kx + 4 - 4x + 2Kx + 4 - 4 = 0$$

$$x^2(1 + K^2) + x(6K - 4) + 4 = 0$$

Resolvemos el término que está en la raíz

$$a = 1 + K^2; b = 6K - 4; c = 4$$

$$(6K - 4)^2 - 4(1 + K^2)(4)$$

$$36K^2 - 48K + 16 - 16(1 + K^2)$$

$$36K^2 - 48K + 16 - 16 - 16K^2$$

$$20K^2 - 48K$$

$$4K(5K - 12)$$

- Se corten.

$$4K(5K - 12) > 0$$

$$K_1 < 0$$

$$5K_2 - 12 > 0$$

$$K_2 > \frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5} < K < 0$$

$$L_1 : y_1 = K_1x + 2; y_1 = -1x + 2; y_1 = -x + 2$$

$$L_2 : y_2 = K_2x + 2; y_2 = (7)x + 2; y_2 = 7x + 2$$

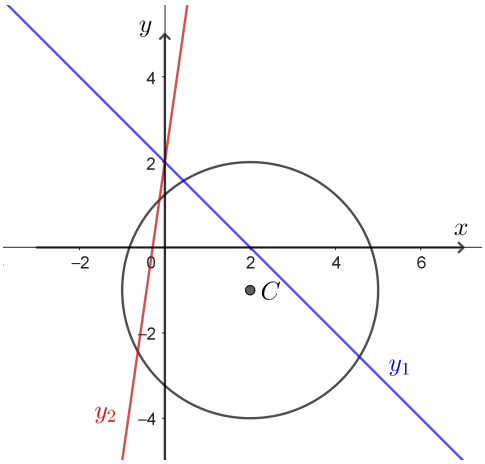


Figura 74: *Cruce entre una recta y una circunferencia (Ejemplo 5.6)*

- Sean tangentes.

$$4K(5K - 12) = 0$$

$$K_1 = 0$$

$$5K_2 - 12 = 0$$

$$K_2 = \frac{12}{5}$$

$$K_2 = \left\{0, \frac{12}{5}\right\}$$

$$L_1 : y_1 = K_1x + 2; y_1 = (0)x + 2; y_1 = 2$$

$$L_2 : y_2 = K_2x + 2; y_2 = \left(\frac{12}{5}\right)x + 2; y_2 = \frac{12x + 10}{5}$$

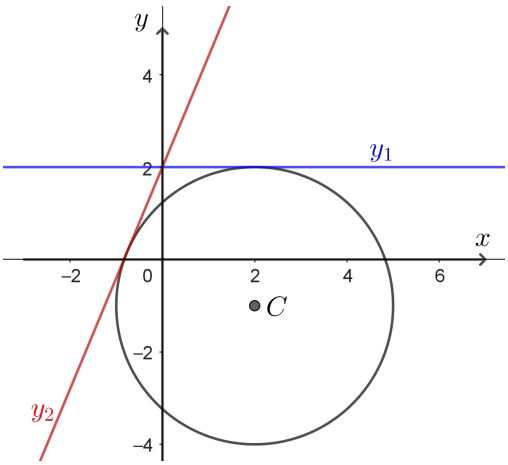


Figura 75: *Rectas tangentes a una circunferencia (Ejemplo 5.6)*

- No se corten.

$$4K(5K - 12) < 0$$

$$K_1 > 0$$

$$5K_2 - 12 < 0$$

$$K_2 < \frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5} > K > 0$$

$$L_1 : y_1 = K_1x + 2; y_1 = (1)x + 2; y_1 = x + 2$$

$$L_2 : y_2 = K_2x + 2; y_2 = (2)x + 2; y_2 = 2x + 2$$

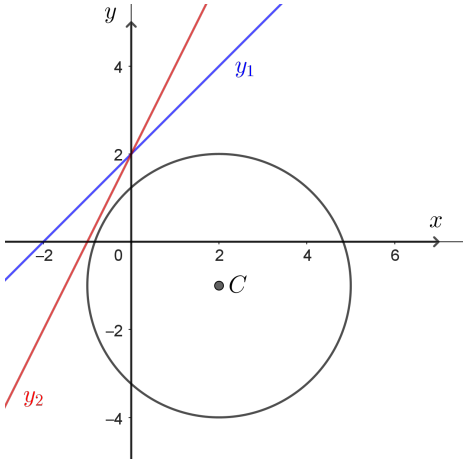


Figura 76: *Rectas que no se cruzan con una circunferencia (Ejemplo 5.6)*

Ejercicios propuestos Capítulo V

1. Determine las ecuaciones de la circunferencias que tienen por centro el origen y el punto P, cono radio r. Grafique.

   a) $P(3,4)$, $r=5$
   b) $P(5,12)$, $r=13$
   c) $P(8,15)$, $r=17$
   d) $P(7,24)$, $r=25$
   e) $P(1,1)$, $r=\sqrt{2}$
   f) $P(2,2)$, $r=2\sqrt{2}$
   g) $P(0,6)$, $r=6$
   h) $P(4,0)$, $r=4$
   i) $P(-3,4)$, $r=5$
   j) $P(-5,-12)$, $r=13$
   k) $P(9,40)$, $r=41$
   l) $P(6,8)$, $r=10$
   m) $P(12,5)$, $r=13$
   n) $P(20,21)$, $r=29$
   ñ) $P(11,60)$, $r=61$
   o) $P(0,-5)$, $r=5$
   p) $P(-2,0)$, $r=2$
   q) $P(3,-4)$, $r=5$
   r) $P(-7,-24)$, $r=25$
   s) $P(15,8)$, $r=17$

2. Determine la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A, B y C. Grafique.

   a) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$
   b) $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(3,4)$
   c) $A(2,2)$, $B(6,2)$, $C(4,5)$
   d) $A(0,2)$, $B(4,2)$, $C(2,5)$
   e) $A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(3,1)$
   f) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3,4)$
   g) $A(2,0)$, $B(8,0)$, $C(5,5)$
   h) $A(0,3)$, $B(4,3)$, $C(2,6)$

i) $A(1,2)$, $B(7,2)$, $C(4,6)$

j) $A(0,1)$, $B(6,1)$, $C(3,5)$

k) $A(2,3)$, $B(8,3)$, $C(5,7)$

l) $A(0,4)$, $B(6,4)$, $C(3,1)$

m) $A(1,0)$, $B(7,0)$, $C(4,4)$

n) $A(3,2)$, $B(9,2)$, $C(6,6)$

ñ) $A(0,5)$, $B(5,0)$, $C(8,8)$

o) $A(2,4)$, $B(7,4)$, $C(4,8)$

p) $A(1,3)$, $B(6,3)$, $C(3,7)$

q) $A(0,6)$, $B(6,0)$, $C(9,9)$

r) $A(3,1)$, $B(9,1)$, $C(6,5)$

s) $A(2,5)$, $B(8,5)$, $C(5,9)$

3. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias C_1 y C_2, considerando que el centro de dicha circunferencia está en la recta L. Grafique.

a) $C_1 : x^2+y^2-4x-6y+9=0$,
$C_2 : x^2+y^2-10x-4y+20=0$,
$L : x-y+1=0$

b) $C_1 : x^2+y^2-2x-8y+13=0$,
$C_2 : x^2+y^2-8x-2y+13=0$,
$L : x+y-5=0$

c) $C_1 : x^2+y^2-6x-4y+9=0$,
$C_2 : x^2+y^2-2x-8y+13=0$,
$L : 2x-y-1=0$

d) $C_1 : x^2+y^2-4x-2y-4=0$,
$C_2 : x^2+y^2-10x-6y+30=0$,
$L : x+2y-7=0$

e) $C_1 : x^2+y^2-8x-6y+21=0$,
$C_2 : x^2+y^2-2x-4y+1=0$,
$L : 3x-y-5=0$

f) $C_1 : x^2+y^2-4x-10y+20=0$,
$C_2 : x^2+y^2-12x-2y+33=0$,
$L : x-2y+4=0$

g) $C_1 : x^2+y^2-2x-6y+6=0$,
$C_2 : x^2+y^2-10x-2y+22=0$,
$L : 2x+y-6=0$

h) $C_1 : x^2+y^2-6x-8y+21=0$,
$C_2 : x^2+y^2-12x-4y+36=0$,
$L : x+3y-7=0$

i) $C_1 : x^2+y^2-4x-4y+4=0$,
$C_2 : x^2+y^2-12x-8y+43=0$,
$L : x-y+2=0$

j) $C_1 : x^2+y^2-8x-2y+13=0$,
$C_2 : x^2+y^2-2x-10y+22=0$,
$L : 2x-3y+1=0$

k) $C_1 : x^2+y^2-6x-6y+14=0$,
$C_2 : x^2+y^2-10x-2y+22=0$,
$L : x+2y-8=0$

l) $C_1 : x^2+y^2-4x-8y+16=0$,
$C_2 : x^2+y^2-14x-4y+49=0$,
$L : 3x+y-10=0$

m) $C_1 : x^2+y^2-2x-4y+1=0$,
$C_2 : x^2+y^2-10x-6y+30=0$,
$L : x-3y+2=0$

n) $C_1 : x^2+y^2-8x-4y+16=0$,
$C_2 : x^2+y^2-4x-8y+16=0$,
$L : 2x-y-4=0$

ñ) $C_1 : x^2+y^2-6x-2y+6=0$,
$C_2 : x^2+y^2-2x-10y+22=0$,
$L : x+y-5=0$

o) $C_1 : x^2+y^2-4x-6y+9=0$,
$C_2 : x^2+y^2-12x-2y+33=0$,
$L : 2x+y-7=0$

p) $C_1 : x^2+y^2-8x-10y+37=0$, $C_2 : x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $L : 3x-2y-4=0$

q) $C_1 : x^2+y^2-2x-8y+13=0$, $C_2 : x^2+y^2-10x-4y+20=0$, $L : x-2y+3=0$

r) $C_1 : x^2+y^2-4x-10y+20=0$, $C_2 : x^2+y^2-14x-2y+46=0$, $L : 2x-3y+2=0$

s) $C_1 : x^2+y^2-6x-8y+21=0$, $C_2 : x^2+y^2-2x-12y+33=0$, $L : x+4y-10=0$

4. Determine los valores de K si la recta es $y = Kx + a$ y la circunferencia C, para que a) La recta corte la circunferencia, b) La recta sea tangente a la circunferencia, y c) La recta no corte la circunferencia. Grafique.

a) $C : x^2+y^2=25$, $a=3$

b) $C : x^2+y^2=25$, $a=-3$

c) $C : x^2+y^2=16$, $a=4$

d) $C : x^2+y^2=16$, $a=-4$

e) $C : x^2+y^2=9$, $a=5$

f) $C : x^2+y^2=9$, $a=-5$

g) $C : (x-2)^2+(y-1)^2=9$, $a=4$

h) $C : (x-2)^2+(y-1)^2=9$, $a=-2$

i) $C : (x+1)^2+(y-3)^2=16$, $a=2$

j) $C : (x+1)^2+(y-3)^2=16$, $a=-6$

k) $C : (x-3)^2+(y+2)^2=25$, $a=7$

l) $C : (x-3)^2+(y+2)^2=25$, $a=-4$

m) $C : x^2+(y-2)^2=9$, $a=1$

n) $C : x^2+(y-2)^2=9$, $a=-3$

ñ) $C : (x-1)^2+y^2=16$, $a=5$

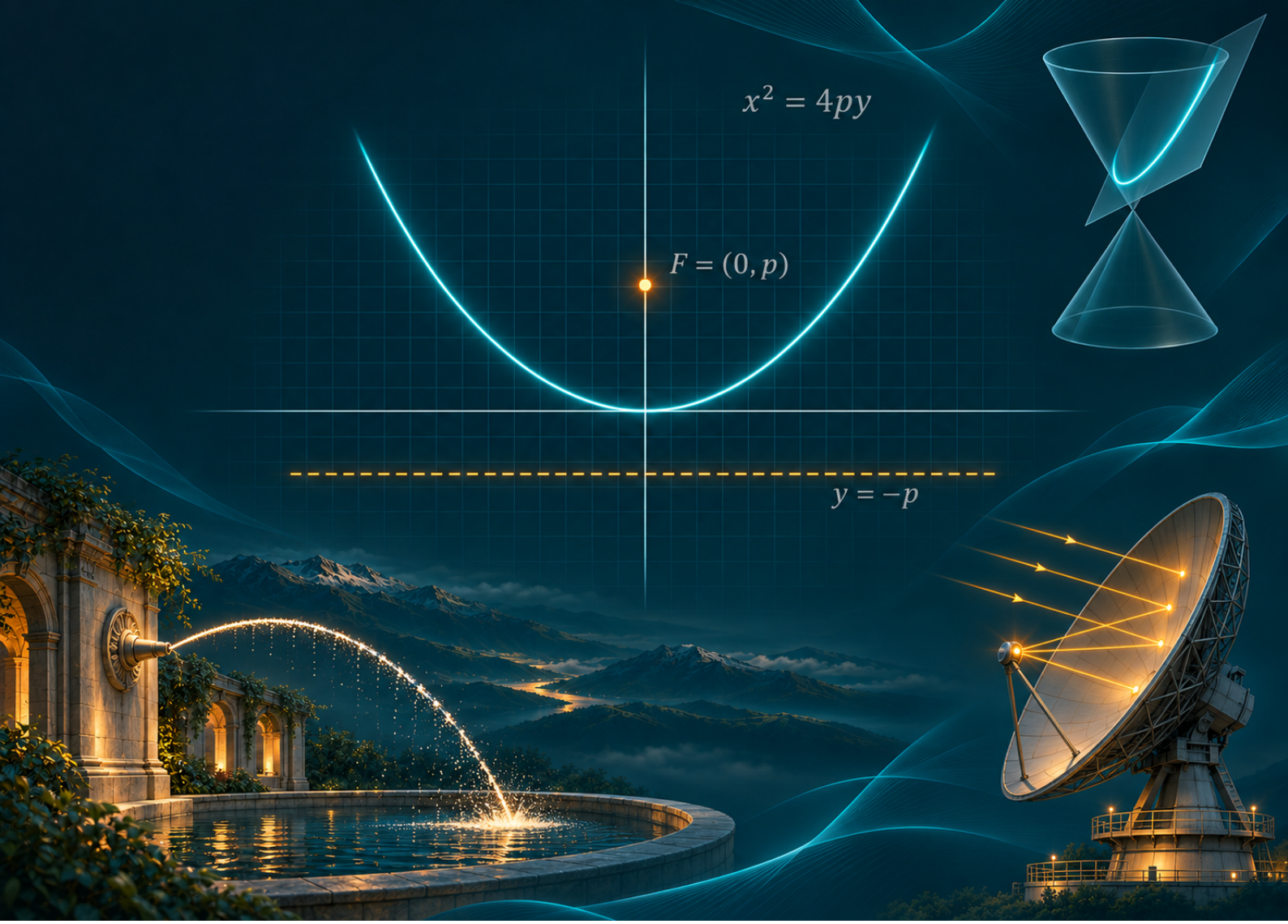
o) $C : (x-1)^2+y^2=16$, $a=-5$

p) $C : x^2+y^2-4x-6y+9=0$, $a=4$

q) $C : x^2+y^2-4x-6y+9=0$, $a=-2$

r) $C : x^2+y^2+2x-4y-4=0$, $a=3$

s) $C : x^2+y^2+2x-4y-4=0$, $a=-5$



CAPÍTULO VI

La Parábola

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Los elementos de la parábola son los siguientes:

- Foco: (F) Es un punto de referencia sobre el eje de simetría.
- Eje de simetría: (L_f) Es la recta que divide a la parábola en dos partes iguales, además, es perpendicular a la directriz.
- Cuerda focal: $(\overline{AB})$ es un segmento de recta que une dos puntos de la parábola pero pasando por el foco.
- Cuerda: $(\overline{HI})$ es un segmento de recta que une dos puntos de la parábola.
- Directriz: (L_s) es la recta perpendicular al eje de simetría y que es paralela al eje x o y dependiendo de la orientación.
- Lado recto: $(\overline{CD})$ es un segmento de recta que une dos puntos de la parábola, pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.
- Radio: $(\overline{FG})$ es un segmento de recta que une cualquier punto de la parábola con el foco.
- Vértice: (V) es un punto central de simetría, es un punto de inflexión (cambio de crecimiento-decrecimiento) que interseca el eje de simetría con la parábola.

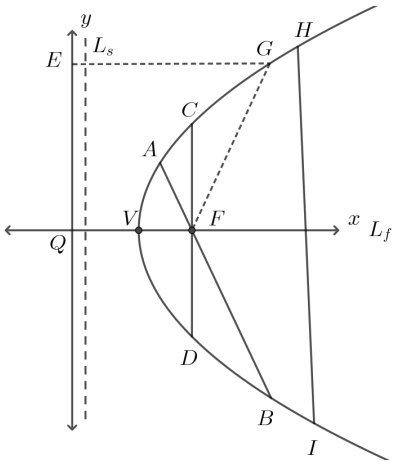


Figura 77: *Elementos de una parábola*

DEFINICIÓN DE LA PARÁBOLA

La parábola es un lugar geométrico que posee simetría a un punto llamado foco F, a una recta denominada directriz L_d y a una recta llamada eje de simetría L_s, orientada respecto al vértice [1, 6].

Ecuaciones de la parábola

PARÁMETROS GENERALES

La parábola normalmente está orientada paralela a los ejes x o y, en cualquiera de los casos debe cumplir con las condiciones de:

La distancia entre el vértice y la directriz es 4 veces de longitud del lado recto.

FORMAS CANÓNICAS

La ecuación de la forma canónica es la que tiene el vértice en el origen del sistema coordenado $(0, 0)$ y cuyo eje de simetría es el eje x [1, 4].

$$y^2 = 4px$$

Siempre que $p \neq 0$, tenemos: Si $4px < 0$ la parábola no existe en el campo de los reales, por lo tanto, es necesario que $4px \geq 0$. Los términos p y x deben tener el mismo signo.

$p > 0$ y $x > 0$, significa que los valores de x son positivos y la parábola se abre a la derecha.

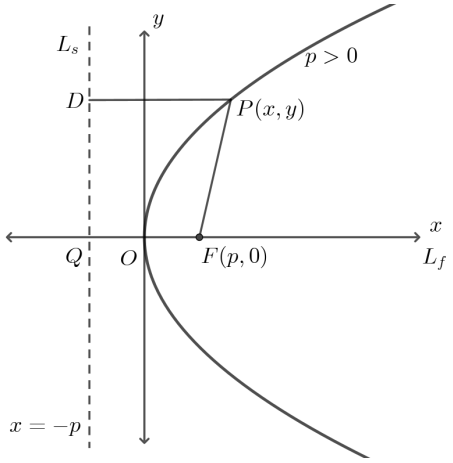


Figura 78: *Parábola alineada con x y se abre a la derecha*

Tenemos que $p = OF = QO$ todo medido en referencia al origen que es el vértice V, la directriz L_d se define como $x = -p$ por la ubicación referente

al vértice. Asumimos que la distancia horizontal DP es la misma que el radio PF y usamos la ecuación de la distancia entre dos puntos para desarrollar la expresión de la parábola.

$$D(-p,y);P(x,y);F(p,0)$$

$$DP = P - D$$

$$DP = (x,y) - (-p,y)$$

$$DP = (x+p, y-y) = (x+p, 0)$$

$$|DP| = \sqrt{(x+p)^2 + (0)^2}$$

$$|DP| = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$|DP| = x + p$$

$$PF = F - P$$

$$PF = (p,0) - (x,y)$$

$$PF = (p-x, 0-y)$$

$$|PF| = \sqrt{(p-x)^2 + (0-y)^2}$$

$$|PF| = \sqrt{p^2 - 2px + x^2 + y^2}$$

Igualamos:

$$DP = PF$$

$$(x+p) = \sqrt{p^2 - 2px + x^2 + y^2}$$

$$(x+p)^2 = \left(\sqrt{p^2 - 2px + x^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2xp + p^2 = p^2 - 2px + x^2 + y^2$$

$$4xp = y^2$$

$$y^2 = 4px$$

$p < 0$ y $x < 0$, significa que los valores de x son negativos y la parábola se abre a la izquierda.

Para la ecuación de la forma canónica que tiene el vértice en el origen del sistema coordenado $(0,0)$ y cuyo eje de simetría es el eje y.

$$x^2 = 4py$$

Siempre que $p \neq 0$, tenemos: Si $4py < 0$ la parábola no existe en el campo de los

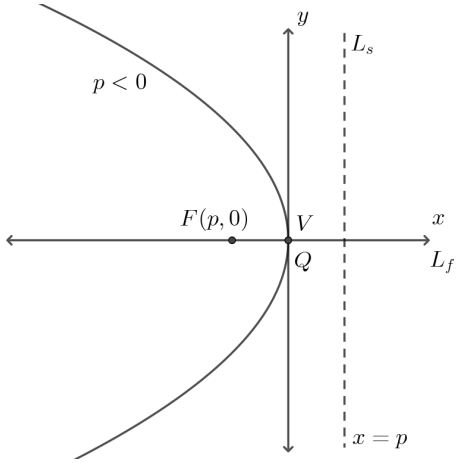


Figura 79: *Parábola alineada con x y se abre a la izquierda*

reales, por lo tanto, es necesario que $4py \geq 0$. Los términos p y y deben tener el mismo signo.

$p > 0$ y $y > 0$, significa que los valores de y son positivos y la parábola se abre hacia arriba.

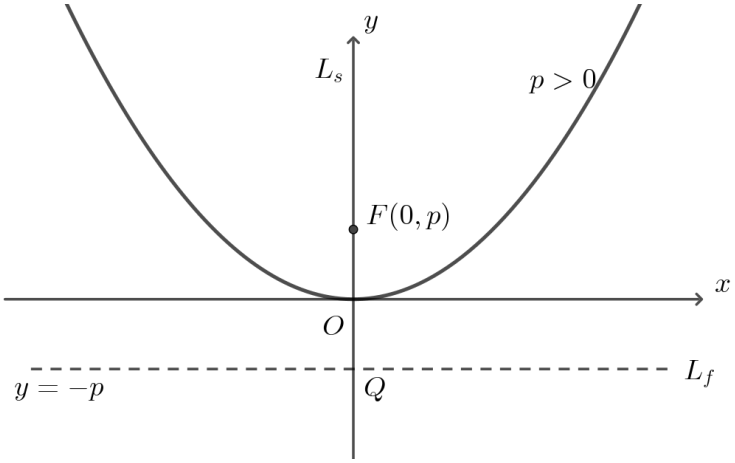


Figura 80: *Parábola alineada con y y se abre hacia arriba*

Tenemos que $p = OF = QO$ todo medido en referencia al origen que es el vértice V, la directriz L_d se define como $y = -p$ por la ubicación referente al vértice. Asumimos que la distancia vertical DP es la misma que el radio PF y usamos la ecuación de la distancia entre dos puntos para desarrollar la expresión de la parábola.

$$D(x,-p); P(x,y); F(0,y)$$

$$DP = P - D$$

$$DP = (x,y) - (x,-p)$$

$$DP = (x - x, y + p) = (0, y + p)$$

$$|DP| = \sqrt{(0)^2 + (y + p)^2}$$

$$|DP| = \sqrt{(y + p)^2}$$

$$|DP| = y + p$$

$$PF = F - P$$

$$PF = (0, p) - (x, y)$$

$$PF = (0 - x, p - y)$$

$$|PF| = \sqrt{(0 - x)^2 + (p - y)^2}$$

$$|PF| = \sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2}$$

Igualamos:

$$DP = PF$$

$$(y + p) = \sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2}$$

$$(y + p)^2 = \left(\sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2}\right)^2$$

$$y^2 + 2yp + p^2 = x^2 + p^2 - 2py + y^2$$

$$4yp = x^2$$

$$x^2 = 4py$$

$p < 0$ y $y < 0$, significa que los valores de y son negativos y la parábola se abre hacia abajo.

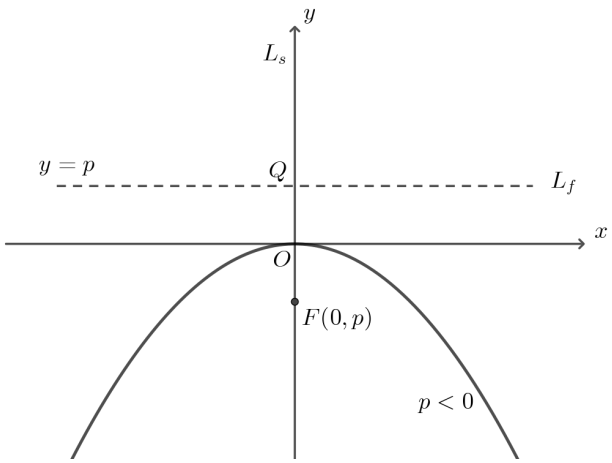


Figura 81: *Parábola alineada con y y se abre hacia abajo*

Ejemplo 6.1. Se tiene una parábola con ecuación $y^2 - 4x = 0$, determine: el foco, directriz, dominio, rango y el lado recto.

$$y^2 - 4x = 0$$
$$y^2 = 4x; y^2 = 4px$$
$$4 = 4p; p = 1$$

Tenemos $p > 0$ la parábola se abre a la derecha en $+x$, por definición.

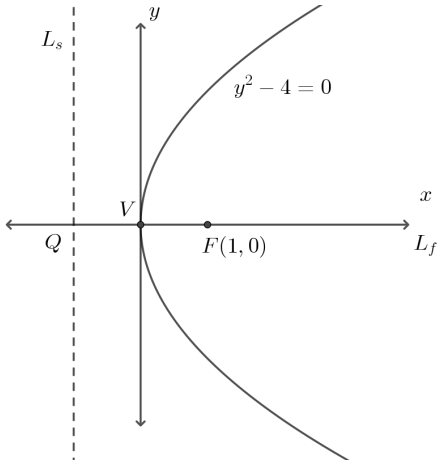


Figura 82: *Parábola centrada en x (Ejemplo 6.1)*

- Foco $(p, 0)$: $F(1, 0)$.
- Directriz $x = -p$: $L_d : x = -1$.
- Lado recto $|4p|$: $\overline{GH} = 4$.
- Dominio x: $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.
- Rango y: $x = \frac{y^2}{4}$, $y \in R$.

Ejemplo 6.2. La ecuación de la parábola $x^2 + 6y = 0$, determine el foco, la directriz, dominio, rango y el lado recto.

$$x^2 + 6y = 0$$
$$6y = -x^2$$
$$x^2 = -6y; x^2 = 4py$$

$$-6 = 4p; p = -\frac{3}{2}$$

Tenemos $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo en $-y$, por definición.

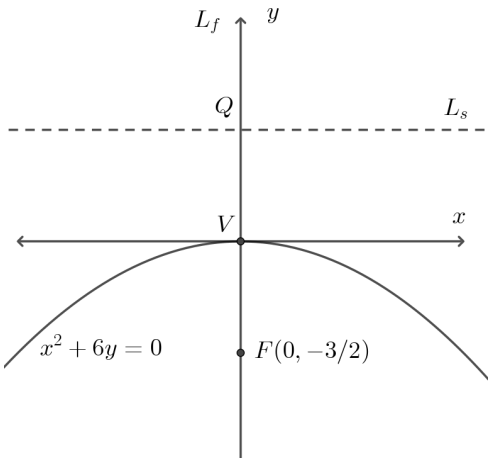


Figura 83: *Parábola centrada en y (Ejemplo 6.2)*

- Foco $(0, p)$: $F(0, -\frac{3}{2})$.
- Directriz $y = -p$: $L_d : y = -(-\frac{3}{2}); y = \frac{3}{2}$.
- Lado recto $|4p|$: $\overline{GH} = 4\left(-\frac{3}{2}\right)$.
- Dominio x: $x^2 = -6y$, $x \in R$.
- Rango y: $y = -\frac{x^2}{6}$, $y \in (-\infty, 0]$.

FORMAS ORDINARIAS

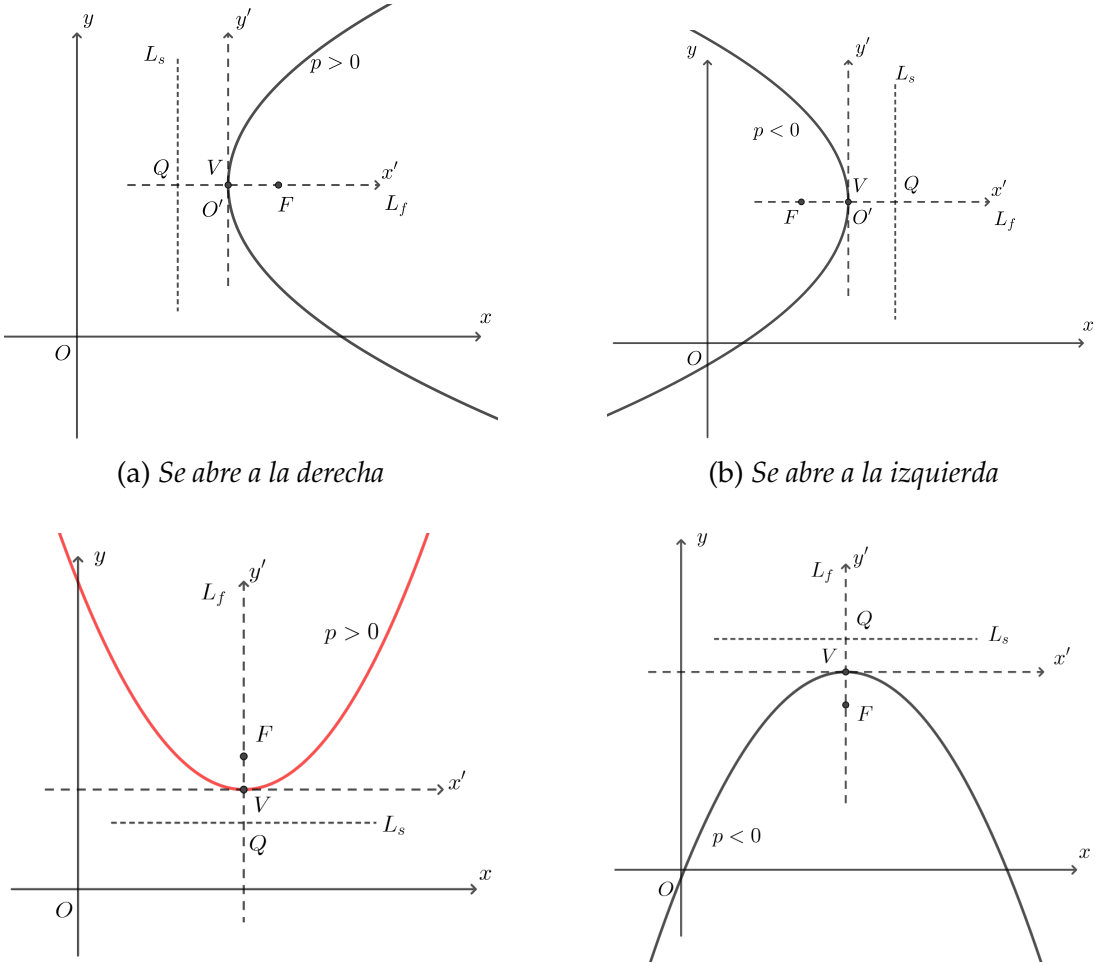
La ecuación de la parábola de forma ordinaria varía respecto a la forma canónica que el vértice ya no es el origen, sino el vértice tiene por coordenadas $V(h, k)$ con las mismas condiciones [2, 3]. Aplicamos el desplazamiento de coordenadas $x = x' + h$ y $y = y' + k$.

$$y^2 = 4px; y'^2 = 4px'$$

$$y'^2 = 4px'$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Las condiciones de la ecuación son iguales a la forma canónica, $p > 0$ y $x > 0$, significa que los valores de x son positivos y la parábola se abre hacia la derecha.



(a) *Se abre a la derecha*

(b) *Se abre a la izquierda*

(c) *Se abre hacia arriba*

(d) *Se abre hacia abajo*

Figura 84: *Parábolas con centro en* (h, k)

$$x^2 = 4py; x'^2 = 4py'$$

$$x'^2 = 4py'$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Las condiciones de la ecuación son iguales a la forma canónica, $p > 0$ y $y > 0$, significa que los valores de y son positivos y la parábola se abre hacia arriba.

Ejemplo 6.3. Tiene la siguiente ecuación de una parábola $9x^2 - 10x - 12y + 25 = 0$, determine el vértice, el foco, la directriz, el lado recto.

$$9x^2 - 10x - 12y + 25 = 0$$

$$\left(9x^2 - 10x + \frac{25}{9}\right) - 12y + 25 - \frac{25}{9} = 0$$

$$9\left(x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{25}{81}\right) = 12y - 25 + \frac{25}{9}$$

$$9\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{108y - 225 + 25}{9}$$

$$\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{108y - 200}{81}$$

$$\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{108}{81}\left(y - \frac{50}{27}\right)$$

$$O(h,k); O\left(\frac{5}{9}, \frac{50}{27}\right)$$

$$4p = \frac{108}{81}$$

$$p = \frac{108}{324} = \frac{1}{3}$$

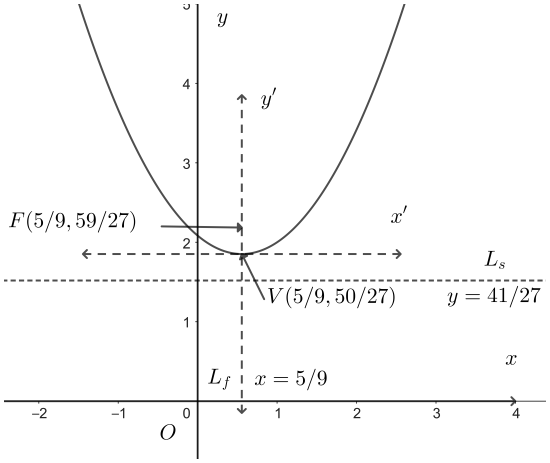


Figura 85: *Parábola con el vértice desplazado al punto O' (Ejemplo 6.3)*

Tenemos:

- Centro (h,k): $O\left(\frac{5}{9}, \frac{50}{27}\right)$.
- Foco $(h, k+p)$: $F\left(\frac{5}{9}, \frac{50}{27} + \frac{1}{3}\right); F\left(\frac{5}{9}, \frac{59}{27}\right)$.
- Directriz $y = k - p$: $L_d : y = \frac{50}{27} - \left(\frac{1}{3}\right); y = \frac{41}{27}; y \approx 1{,}52$.
- Lado recto $|4p|$: $\overline{GH} = 4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.
- Dominio x: $\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{108}{81}\left(y - \frac{50}{27}\right), x \in R$.

- Rango y:

$$\sqrt{\left(x-\frac{5}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{108}{81}\left(y-\frac{50}{27}\right)}$$

$$\left(x-\frac{5}{9}\right)=\sqrt{\frac{108}{81}\left(y-\frac{50}{27}\right)}$$

$$x=\sqrt{\frac{108}{81}\left(y-\frac{50}{27}\right)}+\frac{5}{9}$$

$$y-\frac{50}{27}\geq 0$$

$$y\geq\frac{50}{27}; y\in\left[\frac{50}{27},+\infty\right)$$

Ejemplo 6.4. Tiene la siguiente ecuación de una parábola $y^2+4y-16x-44=0$, determine el vértice, el foco, la directriz, el lado recto.

$$y^2+4y-16x-44=0$$

$$\left(y^2+4y+4\right)-16x-44-4=0$$

$$\left(y^2+4y+4\right)=16x+48$$

$$(y+2)^2=16(x+3)$$

$$O(h,k); O\left(-3,-2\right)$$

$$4p=16$$

$$p=\frac{16}{4}=4$$

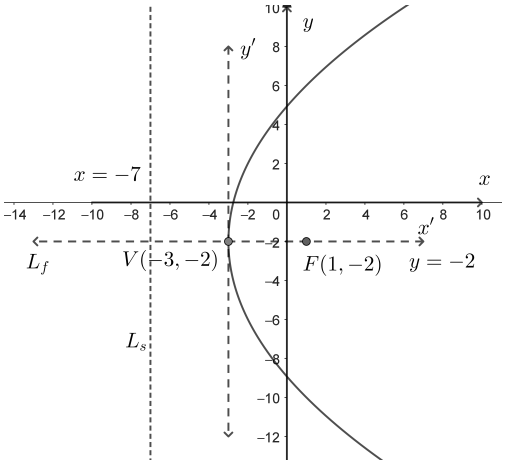


Figura 86: *Parábola con el vértice desplazado al punto O′ (Ejemplo 6.4)*

Tenemos:

- Centro (h, k): $O\,(-3, -2)$.
- Foco $(h + p, k)$: $F\,(-3 + 4, -2)\,; F\,(1, -2)$.
- Directriz $x = h - p$: $L_d : x = -3 - 4; x = -7$.
- Lado recto $|4p|$: $\overline{GH} = 4\,(4) = 16$.
- Dominio x:

$$(y + 2)^2 = 16(x + 3)$$
$$16(x + 3) = (y + 2)^2$$
$$\sqrt{(y + 2)^2} = \sqrt{16(x + 3)}$$
$$(y + 2) = \sqrt{16(x + 3)}$$
$$y = \sqrt{16(x + 3)} - 2$$
$$x + 3 \geq 0$$
$$x \geq -3; x \in [-3, \infty)$$

- Rango y: $(y + 2)^2 = 16(x + 3); y \in R$.

FORMAS GENERALES

La forma general de la parábola tiene dos opciones, con respecto a x y y. La estructura es la misma pero intercambiadas las variables.

Respecto al eje y, es decir, el eje de simetría paralela a x.

$$y^2 + Ax + By + C = 0$$

Desarrollando utilizamos la forma general y la transformamos en la ecuación de forma ordinaria para identificar los coeficientes de la ecuación general.

$$y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$y^2 + By = -Ax - C$$
$$y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -Ax - C + \frac{B^2}{4}$$
$$\left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = -Ax + \frac{-4C + B^2}{4}$$

$$\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=-A\left(x-\frac{-4C+B^2}{4A}\right)$$
$$\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=-A\left(x-\frac{B^2-4C}{4A}\right)$$

Usamos la equivalencia

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$-k=\frac{B}{2};-h=-\frac{B^2-4C}{4A};4p=-A$$
$$k=-\frac{B}{2};h=\frac{B^2-4C}{4A};p=-\frac{A}{4}$$

Respecto al eje x, es decir, el eje de simetría paralela a y.

$$x^2+Ax+By+C=0$$

Desarrollando utilizamos la forma general y la transformamos en la ecuación de forma ordinaria para identificar los coeficientes de la ecuación general.

$$x^2+Ax+By+C=0$$
$$x^2+Ax=-By-C$$
$$x^2+Ax+\frac{A^2}{4}=-By-C+\frac{A^2}{4}$$
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=-By+\frac{-4C+A^2}{4}$$
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=-B\left(y-\frac{-4C+A^2}{4B}\right)$$
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=-B\left(y-\frac{A^2-4C}{4B}\right)$$

Usamos la equivalencia

$$(x-k)^2=4p(y-h)$$
$$-k=\frac{A}{2};-h=-\frac{A^2-4C}{4B};4p=-B$$
$$k=-\frac{A}{2};h=\frac{A^2-4C}{4B};p=-\frac{B}{4}$$

Ejemplo 6.5. Encuentre la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(3,2)$, $(-1,0)$, $(-3,4)$.

Tiene dos soluciones con respecto al eje vertical y horizontal.

- Eje vertical y: $x^2+Ax+By+C=0$

  Evaluamos en los puntos $(3,2)$, $(-1,0)$, $(-3,4)$

$$(3)^2+A(3)+B(2)+C=0; 9+3A+2B+C=0; 3A+2B+C=-9$$

$$(-1)^2+A(-1)+B(0)+C=0; 1-A+C=0; -A+C=-1$$

$$(-3)^2+A(-3)+B(4)+C=0; 9-3A+4B+C=0; -3A+4B+C=-9$$

  Encontramos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A+2B+C=-9 \\ -A+C=-1 \\ -3A+4B+C=-9 \end{cases}$$

  Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales usando el método de Cramer.

$$A=-\frac{4}{5}; B=-\frac{12}{5}; C=-\frac{9}{5}$$

$$x^2+\left(-\frac{4}{5}\right)x+\left(-\frac{12}{5}\right)y-\frac{9}{5}=0$$

$$x^2-\frac{4x}{5}-\frac{12y}{5}-\frac{9}{5}=0$$

$$\left(x^2-\frac{4x}{5}+\frac{4}{25}\right)=\frac{12y}{5}+\frac{9}{5}+\frac{4}{25}$$

$$\left(x^2-\frac{4x}{5}+\frac{4}{25}\right)=\frac{12y}{5}+\frac{49}{25}$$

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{12}{5}\left(y+\frac{49}{60}\right)$$

$$h=\frac{2}{5}; k=-\frac{49}{60}; 4p=\frac{12}{5}$$

- Eje horizontal x: $y^2+Ax+By+C=0$

  Evaluamos en los puntos $(3,2)$, $(-1,0)$, $(-3,4)$

$$(2)^2+A(3)+B(2)+C=0; 4+3A+2B+C=0; 3A+2B+C=-4$$

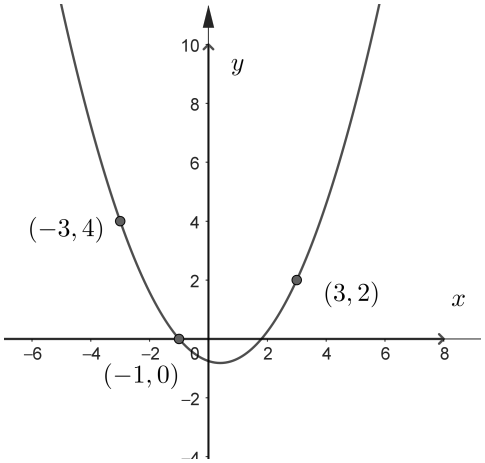


Figura 87: *Parábola que pasa por 3 puntos, opción 1 (Ejemplo 6.5)*

$$(0)^2 + A(-1) + B(0) + C = 0; -A + C = 0; -A + C = 0$$

$$(4)^2 + A(-3) + B(4) + C = 0; 16 - 3A + 4B + C = 0; -3A + 4B + C = -16$$

Encontramos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A + 2B + C = -4 \\ -A + C = 0 \\ -3A + 4B + C = -16 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales usando el método de Cramer.

$$A = \frac{4}{5}; B = -\frac{18}{5}; C = \frac{4}{5}$$

$$y^2 + \left(\frac{4}{5}\right)x + \left(-\frac{18}{5}\right)y + \frac{4}{5} = 0$$

$$y^2 + \frac{4x}{5} - \frac{18y}{5} + \frac{4}{5} = 0$$

$$5y^2 + 4x - 18y + 4 = 0$$

$$\left(y^2 - \frac{18y}{5} + \frac{81}{25}\right) = -4x - \frac{4}{5} + \frac{81}{25}$$

$$\left(y - \frac{9}{5}\right)^2 = -\frac{4x}{5} + \frac{61}{25}$$

$$\left(y - \frac{9}{5}\right)^2 = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{61}{20}\right)$$

$$h = -\frac{81}{100}; k = \frac{9}{5}; 4p = -4$$

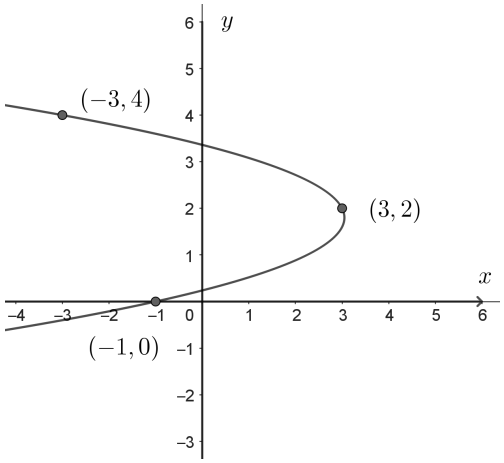


Figura 88: *Parábola que pasa por 3 puntos, opción 2 (Ejemplo 6.5)*

Ejercicios propuestos Capítulo VI

1. Se tiene la parábola de ecuación P, encuentre el foco, la directriz, el dominio, el rango y el lado recto. Grafique.

   a) $y^2 = 8x$
   b) $y^2 = 12x$
   c) $y^2 = 4x$
   d) $y^2 = 16x$
   e) $y^2 = -8x$
   f) $y^2 = -12x$
   g) $y^2 = -4x$
   h) $y^2 = -20x$
   i) $x^2 = 8y$
   j) $x^2 = 12y$
   k) $x^2 = 4y$
   l) $x^2 = 16y$
   m) $x^2 = -8y$
   n) $x^2 = -12y$
   ñ) $x^2 = -4y$
   o) $x^2 = -24y$
   p) $y^2 = 6x$
   q) $y^2 = -10x$
   r) $x^2 = 10y$
   s) $x^2 = -14y$

2. Tiene la ecuación de la parábola P, encuentre el vértice, el foco, la directriz, el dominio, el rango y el lado recto. Grafique.

   a) $(y-2)^2 = 8(x-1)$
   b) $(y+1)^2 = 12(x-3)$
   c) $(y-3)^2 = -8(x+2)$
   d) $(y+2)^2 = -12(x-4)$
   e) $(y-1)^2 = 4(x+1)$
   f) $(y+3)^2 = 16(x-2)$
   g) $(y-4)^2 = -4(x+3)$
   h) $(y+5)^2 = -20(x-1)$

i) $(x-2)^2 = 8(y-1)$

j) $(x+1)^2 = 12(y+2)$

k) $(x-3)^2 = -8(y+1)$

l) $(x+2)^2 = -12(y-3)$

m) $(x-1)^2 = 4(y-4)$

n) $(x+3)^2 = 16(y-2)$

ñ) $(x-4)^2 = -4(y+2)$

o) $(x+4)^2 = -24(y-1)$

p) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

q) $y^2 + 4y + 12x - 8 = 0$

r) $x^2 - 8x + 4y + 12 = 0$

s) $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$

3. Determine la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A, B y C. Grafique.

a) $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,8)$

b) $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,9)$

c) $A(-1,2)$, $B(0,1)$, $C(2,5)$

d) $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(3,6)$

e) $A(0,4)$, $B(1,3)$, $C(2,4)$

f) $A(-2,3)$, $B(0,1)$, $C(2,3)$

g) $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(3,4)$

h) $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(4,2)$

i) $A(-1,6)$, $B(1,2)$, $C(2,3)$

j) $A(0,3)$, $B(2,5)$, $C(4,11)$

k) $A(1,4)$, $B(3,10)$, $C(4,19)$

l) $A(-2,1)$, $B(1,4)$, $C(3,16)$

m) $A(0,5)$, $B(2,3)$, $C(4,5)$

n) $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,13)$

ñ) $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,8)$

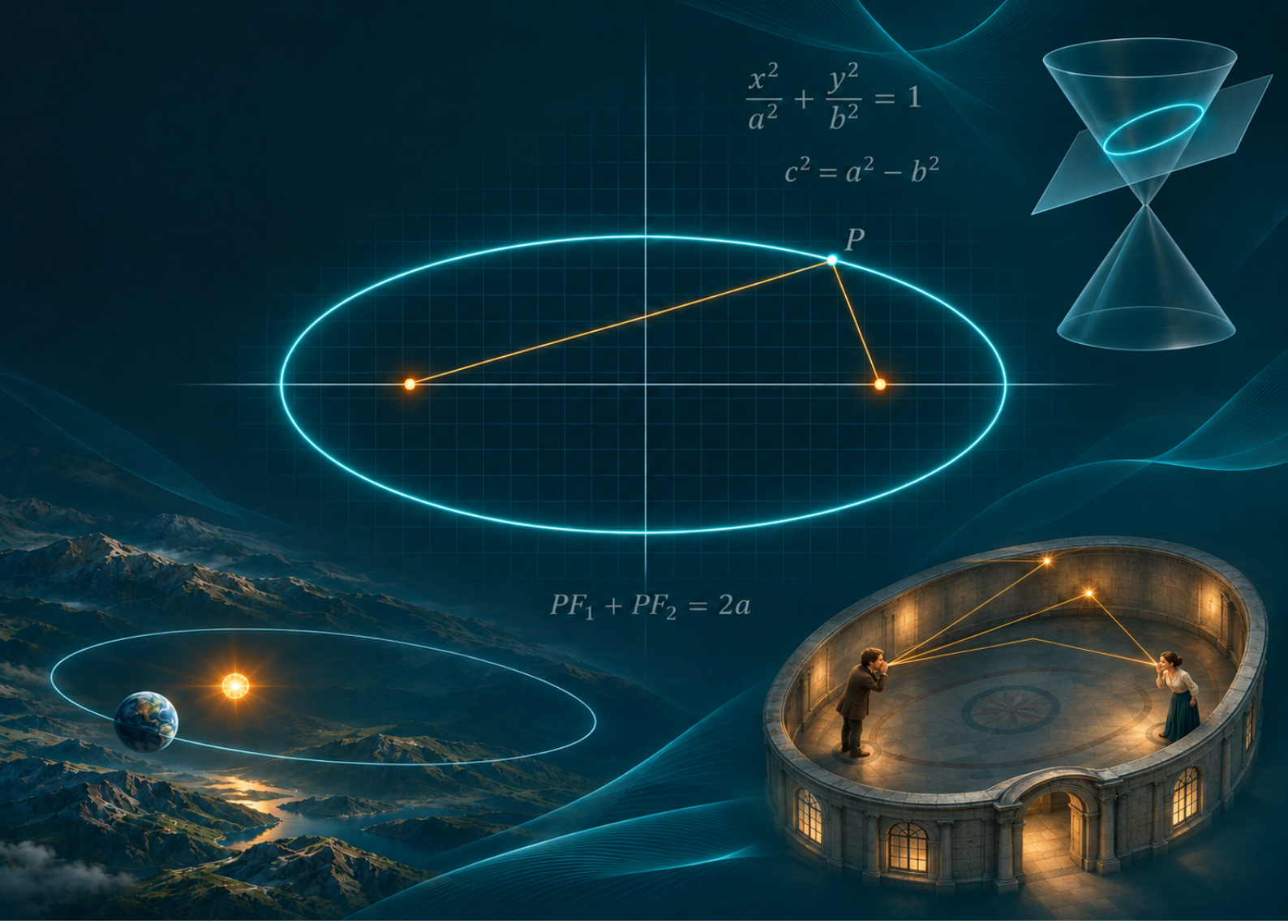
o) $A(0,6)$, $B(2,4)$, $C(4,6)$

p) $A(2,3)$, $B(3,5)$, $C(5,11)$

q) $A(-3,7)$, $B(0,1)$, $C(2,3)$

r) $A(1,5)$, $B(3,9)$, $C(5,17)$

s) $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(4,16)$



CAPÍTULO VII

La Elipse

Elementos y definición de la elipse

ELEMENTOS DE LA ELIPSE

La elipse es una curva que es simétrica respecto a ejes coordenados o ejes arbitrarios paralelos.

Los elementos de la elipse son los siguientes:

- Centro: (C) Es el punto central de simetría respecto a los vértices (V_1), (V_2), (B_1) y (B_2), este punto está sobre el eje focal y el eje normal.
- Focos: (F_1) y (F_2) Son puntos de referencia sobre el eje focal.
- Eje focal: (L_f) Es la recta que divide a la elipse en dos partes iguales respecto a un eje coordenado, ya sea x, y o uno paralelo a dichos ejes. Se considera el eje focal donde la elipse tiene mayor distancia medida desde el origen.
- Eje normal: (L_n) Es la recta que divide a la elipse en dos partes iguales respecto a un eje coordenado, ya sea x, y o uno paralelo a dichos ejes. Se considera el eje normal donde la elipse tiene menor distancia medida desde el origen y es perpendicular al eje focal.
- Cuerda focal: $\left(\overline{QE'}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la elipse pero pasando por el foco.
- Cuerda: $\left(\overline{DD'}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la elipse.
- Directrices: (L_{d1}) y (L_{d2}) Son las rectas perpendiculares al eje focal que se encuentran fuera de la elipse, medido desde el vértice está a la misma distancia que un vértice y un foco cercanos.
- Lado recto: $\left(\overline{LL'}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la elipse, pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.
- Radio: $\left(\overline{F_1P}\right)$ y $\left(\overline{F_2P}\right)$ es un segmento de recta que une cualquier punto de la elipse con un foco.
- Diámetro: $\left(\overline{GG'}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la elipse pasando por el centro.
- Vértices Mayores: (V_1) y (V_2) son los puntos externos más alejados desde el centro y estos puntos están en el eje focal.

- Vértices Menores: (B_1) y (B_2) son los puntos externos más cercanos desde el centro y estos puntos están en el eje normal.

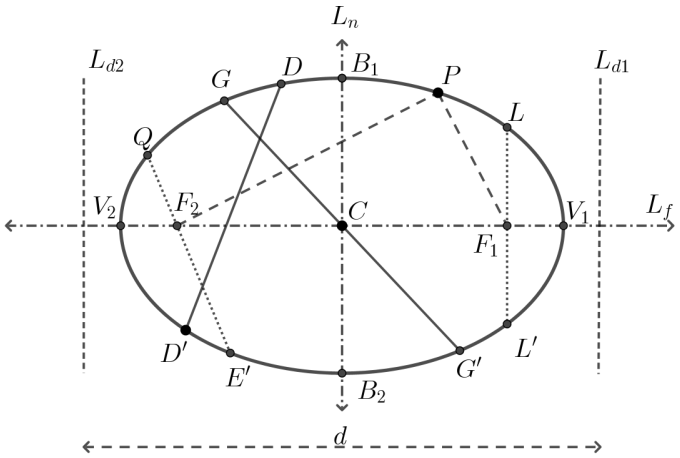


Figura 89: Componentes de la elipse

DEFINICIÓN DE LA ELIPSE

La elipse es un conjunto de puntos consecutivos de tal forma que la suma de las distancias entre un punto cualesquiera de la elipse y los focos siempre es la misma, dicha suma siempre es mayor a la distancia entre los focos [3, 5, 6].

Ecuaciones de la elipse

PARÁMETROS GENERALES

Las condiciones generales se consideran a partir de la geometría de la elipse

- a: Longitud medida desde el foco hasta el vértice menor, la misma medida tiene desde el centro al vértice mayor.
- b: Longitud medida desde el centro al vértice menor.
- c: Longitud medida desde el centro al foco.

$$a^2 = b^2 + c^2; a > 0; b > 0; c > 0$$

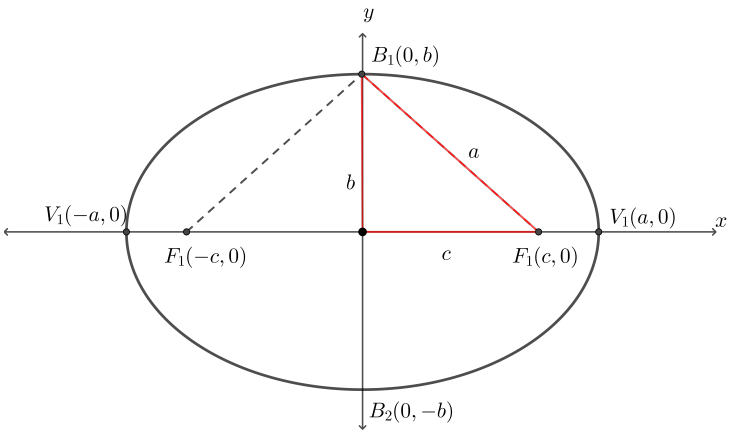


Figura 90: *Parámetros generales de la elipse*

FORMA CANÓNICA

La ecuación de la forma canónica es la elipse que tiene por centro el origen del sistema de coordenadas [3]. La forma canónica tiene dos opciones, es decir, la opción 1 es la elipse que tiene por eje focal el eje x, la opción 2 es la elipse que tiene por eje focal el eje y.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La orientación de la hipérbola depende de los valores de a y b.

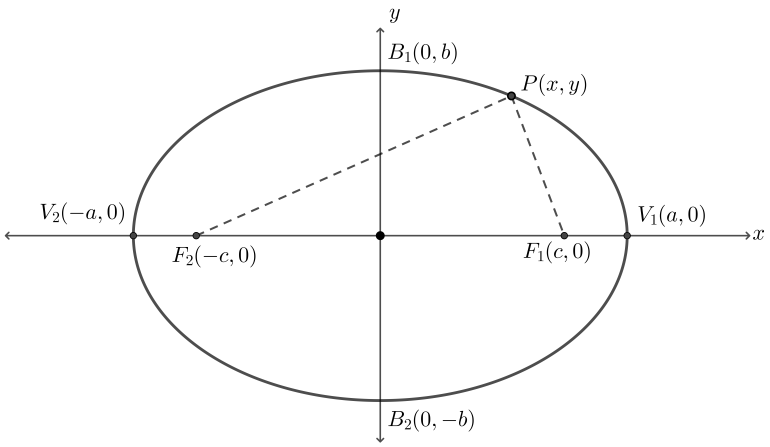


Figura 91: *Proporciones en la elipse*

Desarrollamos tomando los datos de la elipse referencial respecto al punto $P(x,y)$, la asignación del orden de los focos y los vértices se relaciona con los signos de forma directa u opuesta. Manejaremos la forma directa, es decir, los términos V_1, F_1, B_1 se asignan a los positivos.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = m$$

m es un valor desconocido que es la suma de las distancias entre los focos y un punto cualquiera de la elipse, el término m es constante debido a la geometría de la elipse.

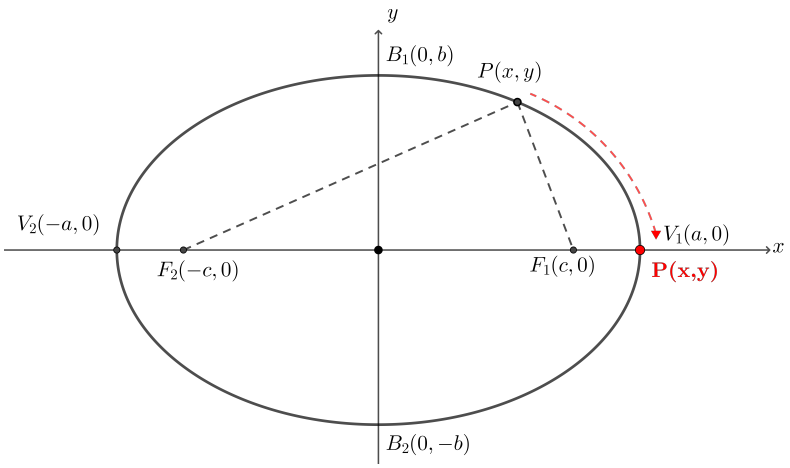


Figura 92: *Nueva posición de P coincide con V_1, orientación horizontal*

Cuando P es igual a V_1, tenemos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = m$$

$$|F_1 - P| + |F_2 - P| = m$$

$$|(c,0) - (a,0)| + |(-c,0) - (a,0)| = m$$

$$|c - a| + |-c - a| = m; a > c$$

$$(a - c) + (a + c) = m$$

$$a - c + a + c = m; m = 2a$$

Cuando P es igual a B_1, tenemos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = m$$

$$|F_1 - P| + |F_2 - P| = m$$

$$|(c,0) - (0,b)| + |(-c,0) - (0,b)| = m$$

$$|(c,-b)| + |(-c,-b)| = m$$

$$\overline{(c,b)} + \overline{(c,b)} = 2\overline{(c,b)} = m$$

$$2\sqrt{c^2 + b^2} = m$$

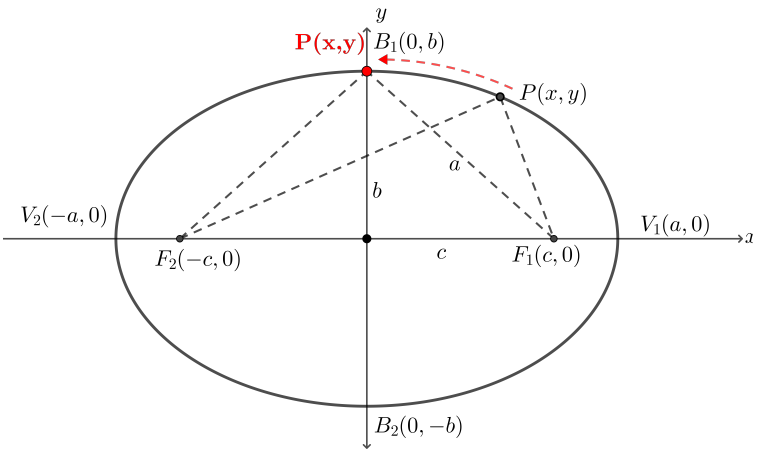


Figura 93: *Nueva posición de P coincide con B_1, orientación horizontal*

$$\left(2\sqrt{c^2+b^2}\right)^2 = (m)^2$$
$$4(c^2+b^2) = m^2$$
$$c^2+b^2 = \frac{m^2}{4}$$
$$c^2+b^2 = \frac{(2a)^2}{4} = \frac{4a^2}{4}$$
$$c^2+b^2 = a^2$$

Cuando P es cualquier punto de la hipérbola, tenemos:

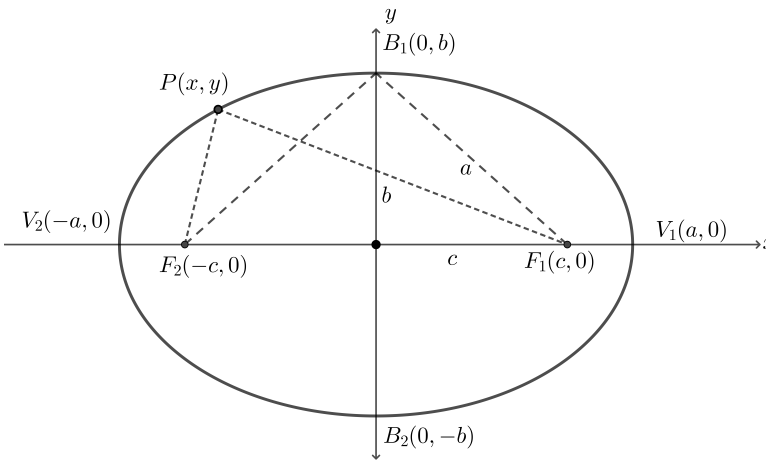


Figura 94: *Elipse en relación a cualquier punto P*

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = m$$
$$|F_1 - P| + |F_2 - P| = 2a$$
$$|(c,0) - (x,y)| + |(-c,0) - (x,y)| = 2a$$

$$|(c-x,-y)|+|(-c-x,-y)|=2a$$

$$\overline{(x-c,y)}+\overline{(c+x,y)}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=2a-\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+\left(\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$

$$\left(cx+a^2\right)^2=\left(a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$\left(c^2x^2+2a^2cx+a^4\right)=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$\frac{x^2(c^2-a^2)}{c^2-a^2}-\frac{a^2y^2}{c^2-a^2}=\frac{a^2(c^2-a^2)}{c^2-a^2}$$

$$x^2-\frac{a^2y^2}{c^2-a^2}=a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2y^2}{a^2(c^2-a^2)}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1;a^2=b^2+c^2;-b^2=c^2-a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{-b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;a\wedge b\neq 0$$

Para identificar el lado recto, tenemos los puntos G y H que resultan del corte de la recta $x=c$ perpendicular al eje focal que pasa por un foco F_1. Evaluamos en la expresión de la elipse.

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$
$$y^2 = \frac{(a^2 - c^2)b^2}{a^2}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{(b^2)b^2}{a^2}}$$
$$y = \pm\frac{b^2}{a}$$

Las coordenadas de los puntos son $G\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ y $H\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$.
Calculamos la distancia entre los dos puntos:

$$\overline{GH} = |H - G|$$
$$\overline{GH} = |\left(c, -\frac{b^2}{a}\right) - \left(c, \frac{b^2}{a}\right)|$$
$$\overline{GH} = |\left(-2\frac{b^2}{a}\right)|$$
$$\overline{GH} = \frac{2b^2}{a}; a > 0$$

Para identificar la excentricidad que indica que tan ovalada o achatada es la elipse, es la relación que existe entre la distancia c desde el centro al foco y la distancia a entre el vértice menor y el foco.

$$ec = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; a > 0$$

La excentricidad debe estar entre 0 y 1, cuando e tiende al cero 0 la elipse se aplana respecto al eje focal y si e tiene al 1 la elipse tiende a ser una circunferencia [3, 5]. Las directrices se identifican con $x = \pm\frac{a}{e}$.

Para analizar el dominio y rango de la elipse analizamos la ecuación de la forma canónica despejando cada una de las variables.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dominio: $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$
$$y = b\sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$

$$a^2 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -a^2$$

$$x^2 \leq a^2; x \leq \pm a$$

$$-a \leq x \leq a$$

Rango: $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$x = a\sqrt{\left(\frac{b^2 - y^2}{b^2}\right)}$$

$$b^2 - y^2 \geq 0$$

$$-y^2 \geq -b^2$$

$$y^2 \leq b^2; y \leq \pm b$$

$$-b \leq y \leq b$$

Para la opción 2 de la elipse con orientación vertical, es decir, el eje focal se encuentra en el eje vertical y y el eje normal en x.

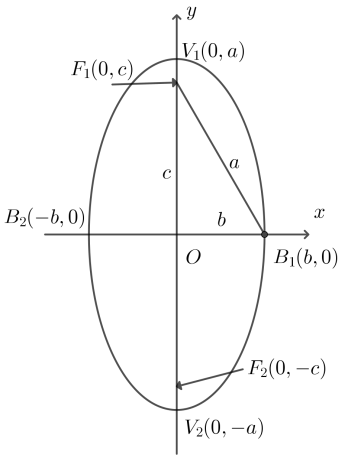


Figura 95: *Elipse con orientación vertical*

Se cambian las posiciones de los focos al eje y y los vértices mayores se intercambian con los vértices menores, la directriz es $y = \pm\frac{a}{e}$.

Ejemplo 7.1. Una elipse tiene la ecuación $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$, determine todos los puntos y valores de interés.

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 + 4y^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 12$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Tenemos, $a = 2; b = \sqrt{3}; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$, la orientación es horizontal, es decir, el eje focal es el eje x.

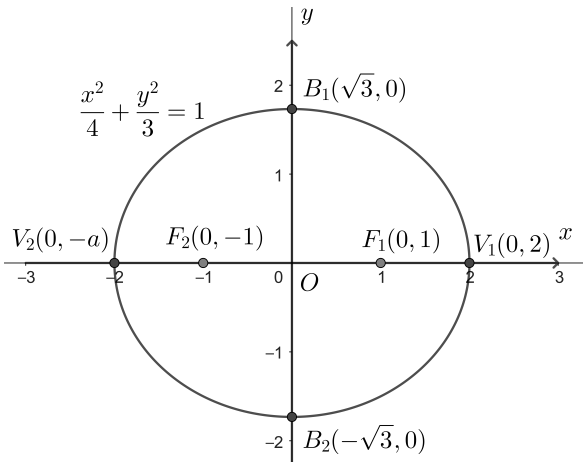


Figura 96: *Elipse horizontal centrada en el origen (Ejemplo 7.1)*

- Focos: $F_1(c, 0) = F_1(1, 0)$, $F_2(-c, 0) = F_1(-1, 0)$.
- Vértices mayores: $V_1(a, 0) = V_1(2, 0)$, $V_2(-a, 0) = V_2(-2, 0)$.
- Vértices menores: $B_1(0, b) = B_1(0, \sqrt{3})$, $B_2(0, -b) = B_2(0, -\sqrt{3})$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{1}{2}$
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e}$, $x = \pm\frac{2}{\frac{1}{2}}$, $x = \pm 4$.
- Dominio: $x \in [-a, a]$, $x \in [-2, 2]$
- Rango: $y \in [-b, b]$, $y \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$

Ejemplo 7.2. Una elipse tiene la ecuación $4x^2 = 5 - y^2$, determine todos los puntos y valores de interés.

$$4x^2 = 5 - y^2$$
$$4x^2 + y^2 = 5$$
$$\frac{4x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1$$
$$\frac{\frac{4}{1}x^2}{\frac{5}{1}} + \frac{y^2}{5} = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Tenemos, $b = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; a = \sqrt{5}; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, la orientación es vertical, es decir, el eje focal es el eje y.

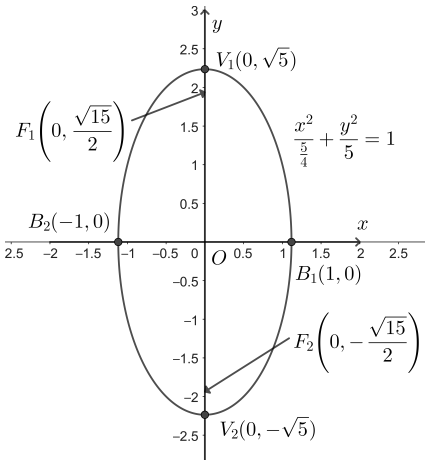


Figura 97: *Elipse vertical centrada en el origen (Ejemplo 7.2)*

- Focos: $F_1(0, c) = F_1\left(0, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $F_2(0, -c) = F_1\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.
- Vértices mayores: $V_1(0, a) = V_1\left(0, \sqrt{5}\right)$, $V_2(0, -a) = V_2\left(0, -\sqrt{5}\right)$.
- Vértices menores: $B_1(b, 0) = B_1\left(\sqrt{\frac{5}{4}}, 0\right)$, $B_2(-b, 0) = B_2\left(-\sqrt{\frac{5}{4}}, 0\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Directrices: $y = \pm\frac{a}{e}$, $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
- Dominio: $x \in [-b, b]$, $x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{5}{4}}\right]$

- Rango: $y \in [-a, a]$, $y \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

Ejemplo 7.3. Una elipse tiene los siguientes vértices $(5, 0)$ y $(0, 3)$, encuentre la ecuación, los puntos y valores de interés.

Tenemos, $a = 5; b = 3; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$, la orientación es horizontal, es decir, el eje focal es el eje x.

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

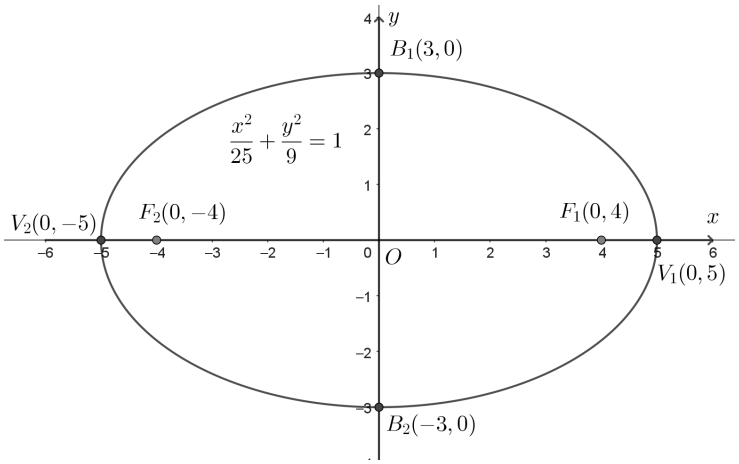


Figura 98: *Elipse vertical centrada en el origen (Ejemplo 7.3)*

- Focos: $F_1(c, 0) = F_1(4, 0)$, $F_2(-c, 0) = F_1(-4, 0)$.
- Vértices mayores: $V_1(a, 0) = V_1(5, 0)$, $V_2(-a, 0) = V_2(-5, 0)$.
- Vértices menores: $B_1(0, b) = B_1(0, 3)$, $B_2(0, -b) = B_2(0, -3)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{4}{5}$
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e}$, $x = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}}$, $x = \pm\frac{25}{4}$.
- Dominio: $x \in [-a, a]$, $x \in [-5, 5]$
- Rango: $y \in [-b, b]$, $y \in [-3, 3]$

FORMA ORDINARIA

La elipse que tiene la forma ordinaria es la misma forma canónica pero desplazado el centro en las coordenadas $O'(h,k)$, usamos el criterio del traslado de coordenadas [6].

$$x' = x - h; y' = y - k$$

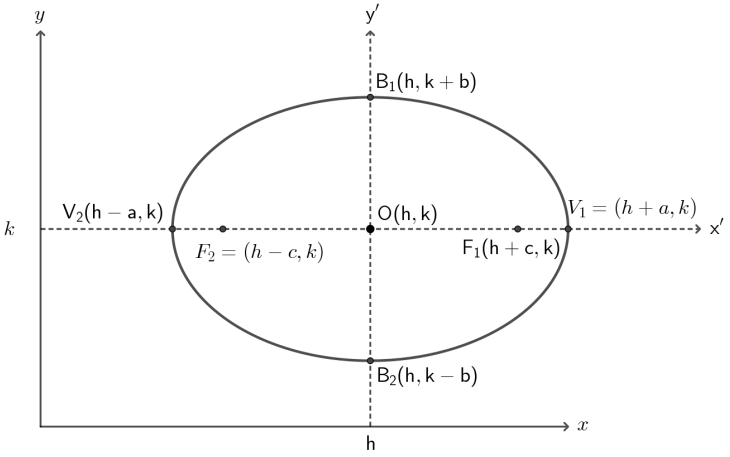


Figura 99: *Elipse con centro en* (h,k) *y orientación horizontal*

Utilizamos las expresiones de la forma canónica: Orientación horizontal: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, $e = \frac{c}{a}$, $x' = \sqrt{\frac{a}{e}}$.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$(x-h) = \pm\frac{a}{e}; x = \pm\frac{a}{e} + h$$

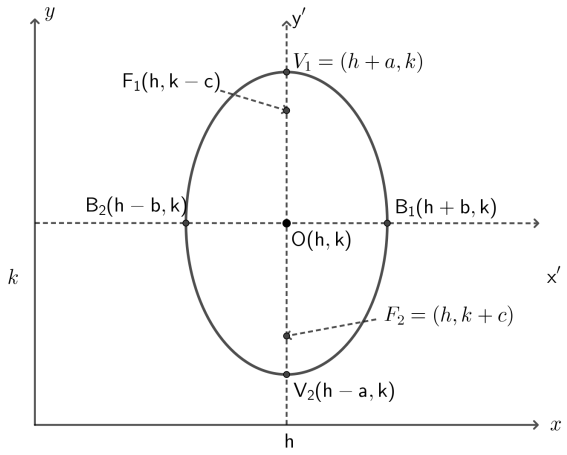


Figura 100: *Elipse con centro en* (h,k) *y orientación vertical*

Orientación vertical: $\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$, $e=\frac{c}{a}$, $y'=\sqrt{\frac{a}{e}}$.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$(y-k)=\pm\frac{a}{e};y=\pm\frac{a}{e}+k$$

Ejemplo 7.4. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene por vértices los puntos $(1,1)$ y $(-1,4)$, los puntos y valores de interés.

Considerando que tenemos dos puntos nada más las opciones para que estos formen parte de una elipse son 2, para este caso determinamos las distancias entre los puntos de $x=1-(-1)=2$ y $y=1-4=-3$, por lo que $a=3$, $b=2$ la elipse es de orientación vertical, el eje vertical es paralelo al eje y.

Opción 1:

$$h=-1;k=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(x-(-1))^2}{(2)^2}+\frac{(y-(1))^2}{(3)^2}=1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

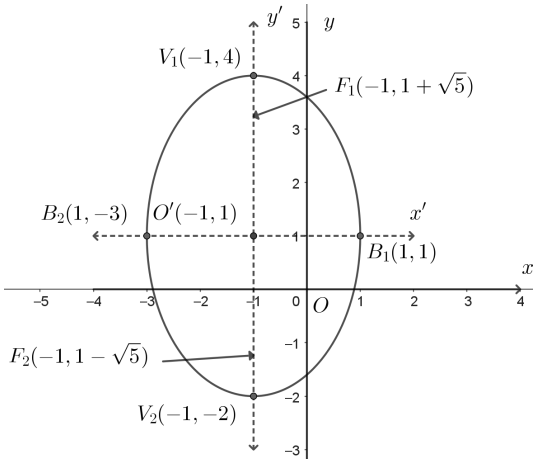


Figura 101: *Elipse horizontal con el centro en el punto O' (Ejemplo 7.4)*

$$a^2=b^2+c^2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(3)^2-(2)^2}$$

$$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

- Focos: $F_1(h, k+c) = F_1\left(-1, 1+\sqrt{5}\right)$, $F_2(h, k-c) = F_2\left(-1, 1-\sqrt{5}\right)$.
- Vértices mayores: $V_1(h, k+a) = V_1\left(-1, 1+3\right) = V_1\left(-1, 4\right)$, $V_2(h, k-a) = V_2\left(-1, 1-3\right) = V_2(-1, -2)$.
- Vértices menores: $B_1(h+b, k) = B_1\left(-1+2, 1\right) = B_1\left(1, 1\right)$, $B_2(h-b, k) = B_2\left(-1-2, 1\right) = B_2\left(-3, 1\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- Directrices: $y = \pm\frac{a}{e} + k$, $y = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + 1$, $y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}} + 1$

  $y_1 = \frac{9}{\sqrt{5}} + 1$, $y_1 = \frac{9+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $y_1 \approx 5{,}02$ $y_2 = -\frac{9}{\sqrt{5}} + 1$, $y_2 = \frac{-9+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, $y_2 \approx -3{,}02$
- Dominio: $x \in [h-b, h+b]$, $x \in [-1-(2), -1+(2)]$, $x \in [-3, 1]$
- Rango: $y \in [k-a, k+a]$, $y \in [1-3, 1+3]$, $y \in [-2, 4]$

Opción 2:

$$h = 1; k = 4$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-(1))^2}{(2)^2} + \frac{(y-(4))^2}{(3)^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

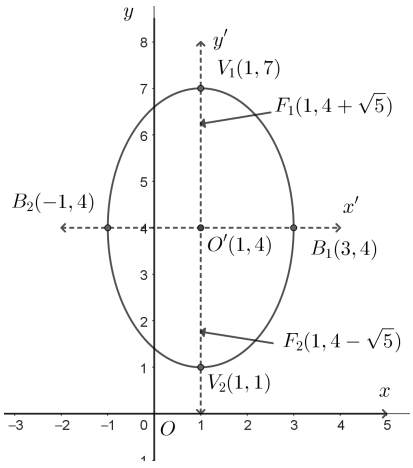


Figura 102: *Elipse vertical con el centro en el punto O′ (Ejemplo 7.4)*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(3)^2 - (2)^2}$$

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

- Focos: $F_1(h, k+c) = F_1\left(1, 4+\sqrt{5}\right)$, $F_2(h, k-c) = F_2\left(1, 4-\sqrt{5}\right)$.
- Vértices mayores: $V_1(h, k+a) = V_1(1, 4+3) = V_1(1, 7)$, $V_2(h, k-a) = V_2(1, 4-3) = V_2(1, 1)$.
- Vértices menores: $B_1(h+b, k) = B_1(1+2, 4) = B_1(3, 4)$, $B_2(h-b, k) = B_2(1-2, 4) = B_2(-1, 4)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- Directrices: $y = \pm\frac{a}{e} + k$, $y = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + 4$, $y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}} + 4$

  $y_1 = \frac{9}{\sqrt{5}} + 4$, $y_1 = \frac{9+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $y_1 \approx 8{,}02$ $y_2 = -\frac{9}{\sqrt{5}} + 4$, $y_2 = \frac{-9+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, $y_2 \approx -0{,}02$
- Dominio: $x \in [h-b, h+b]$, $x \in [1-(2), 1+(2)]$, $x \in [-1, 3]$
- Rango: $y \in [k-a, k+a]$, $y \in [4-3, 4+3]$, $y \in [1, 7]$

Ejemplo 7.5. Tenemos la ecuación de la elipse $x^2+4y^2-8x+8y = -4$, reescriba la ecuación de la forma ordinaria, determine los puntos y valores de interés.

$$x^2 + 4y^2 - 8x + 8y = -4$$

$$x^2 - 8x + 4y^2 + 8y = -4$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (4y^2 + 8y + 4) = -4 + 16 + 4$$

$$(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 + 2y + 1) = 16$$

$$(x-4)^2 + 4(y+1)^2 = 16$$

$$\left(\frac{(x-4)^2}{16}\right) + \left(\frac{4(y+1)^2}{16}\right) = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$$a = 4, b = 2, h = 4, k = -1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(4)^2 - (2)^2}$$

$$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$$

- Focos: $F_1(h+c, k) = F_1\left(4+\sqrt{12}, -1\right)$, $F_2(h-c, k) = F_2\left(4-\sqrt{12}, -1\right)$.

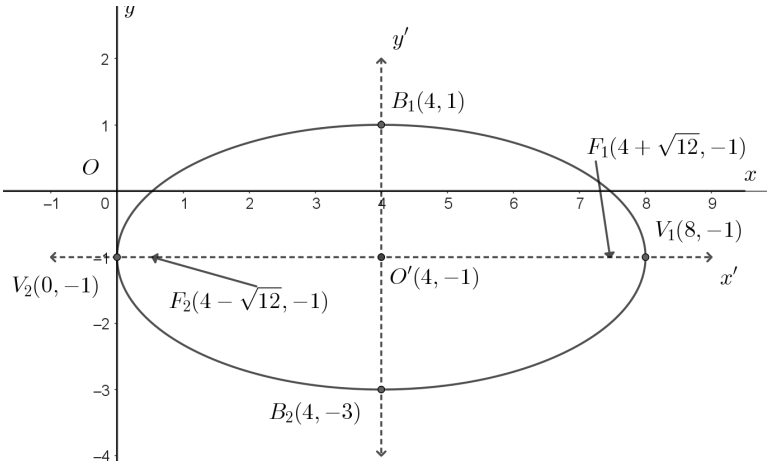


Figura 103: *Elipse con el centro en el punto O′ (Ejemplo 7.5)*

- Vértices mayores: $V_1(h+a,k) = V_1\,(4+4,-1) = V_1\,(8,-1)$, $V_2(h-a,k) = V_2\,(4-4,-1) = V_2(0,-1)$.
- Vértices menores: $B_1(h,k+b) = B_1\,(4,-1+2) = B_1\,(4,1)$, $B_2(h,k-b) = B_2\,(4,-1-2) = B_2\,(4,-3)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{12}}{4}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e} + h$, $x = \pm\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 4$, $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}} + 4$

  $x_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} + 4$, $x_1 = \frac{8+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $x_1 \approx 8{,}61$ $x_2 = -\frac{8}{\sqrt{3}} + 4$, $x_2 = \frac{-8+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $x_2 \approx -0{,}61$
- Dominio: $x \in [h-a, h+a]$, $x \in [4-(4), 4+(4)]$, $x \in [0, 8]$
- Rango: $y \in [k-b, k+b]$, $y \in [-1-(2), -1+(2)]$, $y \in [-3, 1]$

FORMA GENERAL

La ecuación de la elipse de la forma general tiene 5 coeficientes y esta descrita por:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Desarrollamos a partir de la forma ordinaria.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2(x-h)^2 + a^2(y-h)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2xh+h^2)+a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2+a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2=0$$

Asignamos las equivalencias:
$A=b^2$, $B=a^2$, $C=-2hb^2$, $D=-2ka^2$, $E=a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2$

Ejemplo 7.6. Tenemos la ecuación de la elipse $2x^2+8y^2-x+6y-4=0$, use los coeficientes de la forma general y determine los puntos y valores de interés.

$$2x^2+8y^2-x+6y-4=0$$

$$A=b^2, B=a^2, C=-2hb^2, D=-2ka^2, E=a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2$$

$$2=b^2, 8=a^2, -1=-2hb^2, 6=-2ka^2, -4=a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2$$

$$b=\sqrt{2}, a=\sqrt{8}$$

$$-1=-2h(\sqrt{2})^2, 1=4h, h=\frac{1}{4}$$

$$6=-2k(\sqrt{8})^2, 6=-16k, k=-\frac{6}{16}, k=-\frac{3}{8}$$

$$a=\sqrt{8}, b=\sqrt{2}, h=\frac{1}{4}, k=-\frac{3}{8}$$

Como el valor de a es mayor que b la elipse es horizontal.

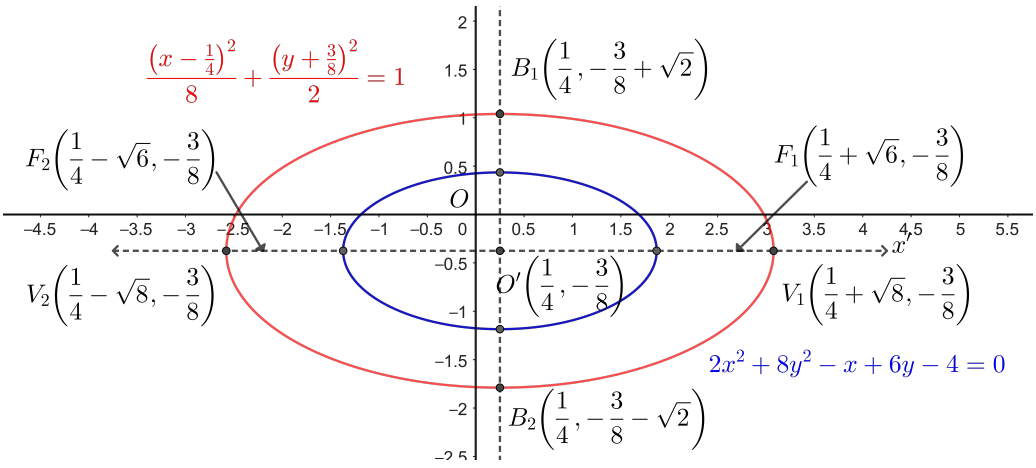


Figura 104: *Elipses concéntricas en el punto O′ (Ejemplo 7.6)*

$$a^2=b^2+c^2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$c = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$$

- Focos: $F_1(h+c,k) = F_1\left(\frac{1}{4}+\sqrt{6},-\frac{3}{8}\right)$, $F_2(h-c,k) = F_2\left(\frac{1}{4}-\sqrt{6},-\frac{3}{8}\right)$.
- Vértices mayores: $V_1(h+a,k) = V_1\left(\frac{1}{4}+\sqrt{8},-\frac{3}{8}\right)$, $V_2(h-a,k) = V_2\left(\frac{1}{4}-\sqrt{8},-\frac{3}{8}\right)$.
- Vértices menores: $B_1(h,k+b) = B_1\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{8}+\sqrt{2}\right)$, $B_2(h,k-b) = B_2\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{8}-\sqrt{2}\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e} + h$, $x = \pm\frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}} + \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{8}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} + \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{8\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{4\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{4}$, $x = \frac{\pm 16\sqrt{6}+3}{12}$
  $x_1 = \frac{16\sqrt{6}+3}{12}$, $x_1 = \approx 3{,}51$ $x_2 = \frac{-16\sqrt{6}+3}{12}$, $x_2 \approx -3{,}01$
- Dominio: $x \in [h-a, h+a]$, $x \in \left[\frac{1}{4}-\sqrt{8}, \frac{1}{4}+\sqrt{8}\right]$
- Rango: $y \in [k-b, k+b]$, $y \in \left[-\frac{3}{8}-\sqrt{2}, -\frac{3}{8}+\sqrt{2}\right]$

Se debe considerar que al calcular usando el despeje de la forma general genera una elipse proporcional y que mantiene el centro (h,k), ya que al calcular a y b de forma directa no considera el resto de coeficientes.

Ejercicios propuestos Capítulo VII

1. Se tiene una elipse E, encuentre los vértices, focos, extremos del eje menor, excentricidad, lado recto, dominio y rango. Grafique.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
c) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
d) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$
e) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$
f) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
g) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$
h) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{121} = 1$
i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
j) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
k) $36x^2 + 16y^2 = 576$
l) $49x^2 + 25y^2 = 1225$
m) $64x^2 + 36y^2 = 2304$
n) $100x^2 + 64y^2 = 6400$
ñ) $81x^2 + 45y^2 = 3645$
o) $144x^2 + 121y^2 = 17424$
p) $5x^2 + 20y^2 = 100$
q) $18x^2 + 8y^2 = 144$
r) $8x^2 + 32y^2 = 256$
s) $27x^2 + 12y^2 = 324$

2. Encuentre todos los puntos y valores de interés de una elipse E. Grafique.

a) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

b) $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

c) $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

d) $\frac{(x+2)^2}{49}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$

e) $\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$

f) $\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{64}=1$

g) $\frac{(x-3)^2}{81}+\frac{(y+2)^2}{45}=1$

h) $\frac{(x+5)^2}{144}+\frac{(y-4)^2}{121}=1$

i) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

j) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

k) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$

l) $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{49}=1$

m) $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$

n) $\frac{(x+2)^2}{64}+\frac{(y-1)^2}{100}=1$

ñ) $\frac{(x-5)^2}{45}+\frac{(y+3)^2}{81}=1$

o) $\frac{(x+3)^2}{121}+\frac{(y-2)^2}{144}=1$

p) $9x^2+25y^2-36x-50y-164=0$

q) $16x^2+4y^2+32x-16y-48=0$

r) $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$

s) $4x^2+9y^2+24x-36y+36=0$

3. Encuentre las elipses que cuyos vértices son A y B, determine los valores y puntos de interés. Grafique.

a) $A(5,0)$, $B(0,3)$

b) $A(-5,0)$, $B(0,4)$

c) $A(0,6)$, $B(2,0)$

d) $A(0,-6)$, $B(3,0)$

e) $A(4,2)$, $B(1,5)$

f) $A(-4,2)$, $B(1,-5)$

g) $A(3,5)$, $B(6,1)$

h) $A(-3,-5)$, $B(-6,1)$

i) $A(7,2)$, $B(4,5)$

j) $A(-7,-2)$, $B(-4,-5)$

k) $A(2,8)$, $B(5,3)$

l) $A(-2,8)$, $B(-5,3)$

m) $A(6,1)$, $B(3,4)$

n) $A(-6,-1)$, $B(-3,-4)$

ñ) $A(1,7)$, $B(4,2)$

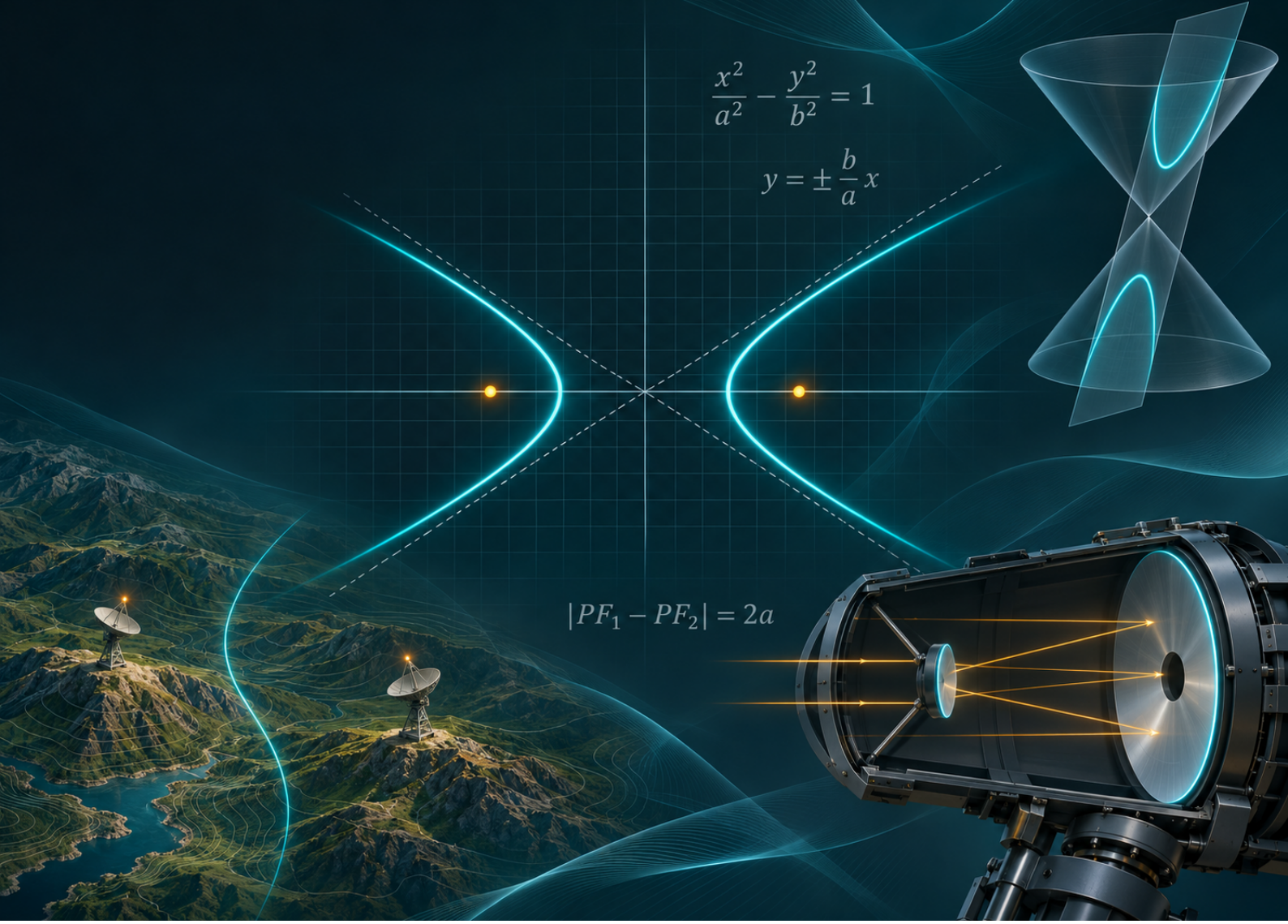
o) $A(-1,-7)$, $B(-4,-2)$

p) $A(8,3)$, $B(5,6)$

q) $A(-8,3)$, $B(-5,-6)$

r) $A(3,9)$, $B(6,4)$

s) $A(-3,-9)$, $B(-6,-4)$



CAPÍTULO VIII

La Hipérbola

ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es una curva que es simétrica respecto a ejes coordenados o ejes arbitrarios paralelos.

Los elementos de la hipérbola son los siguientes:

- Centro: (C) Es el punto central de simetría respecto a los vértices (V_1), (V_2), (B_1) y (B_2), este punto está sobre el eje focal y el eje normal.
- Focos: (F_1) y (F_2) Son puntos de referencia sobre el eje focal.
- Eje focal: (L_f) Es la recta que divide a la hipérbola en dos partes iguales respecto a un eje coordenado, ya sea x, y o uno paralelo a dichos ejes. Se considera el eje focal donde la hipérbola crece en sentido positivo y negativo.
- Eje normal: (L_n) Es la recta que está en el punto medio de la hipérbola y es perpendicular al eje focal.
- Cuerda focal: $\left(\overline{AB}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la hipérbola pero pasando por el foco.
- Cuerda: $\left(\overline{PQ}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la hipérbola.
- Directrices: (L_{d1}) y (L_{d2}) Son las rectas perpendiculares al eje focal que se encuentran fuera de la hipérbola, medido desde el vértice.
- Lado recto: $\left(\overline{GH}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la hipérbola, pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.
- Radio: $\left(\overline{JF}\right)$ es un segmento de recta que une cualquier punto de la hipérbola con un foco.
- Diámetro: $\left(\overline{ST}\right)$ es un segmento de recta que une dos puntos de la hipérbola pasando por el centro.
- Eje transversal y eje conjugado: Son los segmentos que unen los vértices y vértices imaginarios respectivamente.
- Vértices: (V_1) y (V_2) son los puntos centrales más cercanos al centro y estos puntos están en el eje focal.

- Vértices Imaginarios: (B_1) y (B_2) Puntos que no forman parte de la hipérbola pero que serían los vértices de la hipérbola de orientación opuesta.
- Asíntotas: (L_{A1}) y (L_{A2}) Son las rectas que limitan a la hipérbola, pasan por el centro y nunca tocan la hipérbola.

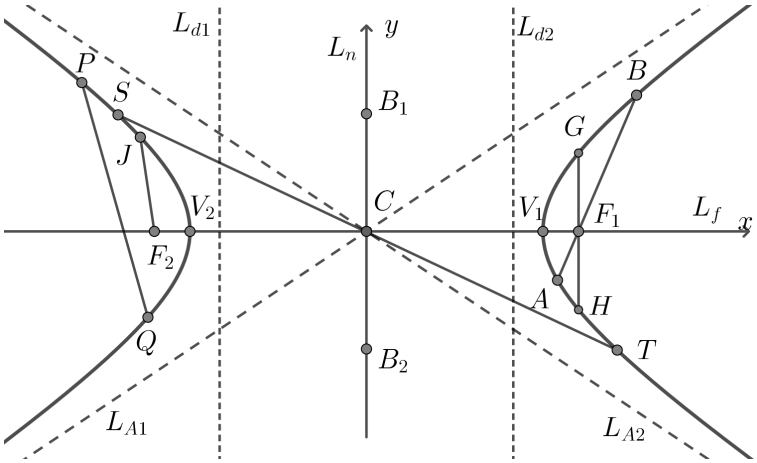


Figura 105: *Componentes de la hipérbola*

DEFINICIÓN DE LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es un conjunto de puntos consecutivos de tal forma que la diferencia de las distancias entre un punto cualesquiera de la hipérbola y los focos siempre es la misma, dicha diferencia siempre es menor a la distancia entre los focos [1, 2, 4].

Ecuaciones de la hipérbola

PARÁMETROS GENERALES DE LA HIPÉRBOLA

Las condiciones generales se consideran a partir de la geometría de la hipérbola.

- a: Longitud medida desde el centro al vértice.
- b: Longitud medida desde el centro al vértice imaginario.
- c: Longitud encontrada a partir de los catetos a y b, siendo c la hipotenusa.
- $\overline{V_1V_2}$: Eje transversal es $2a$.
- $\overline{B_1B_2}$: Eje conjugado es $2b$.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

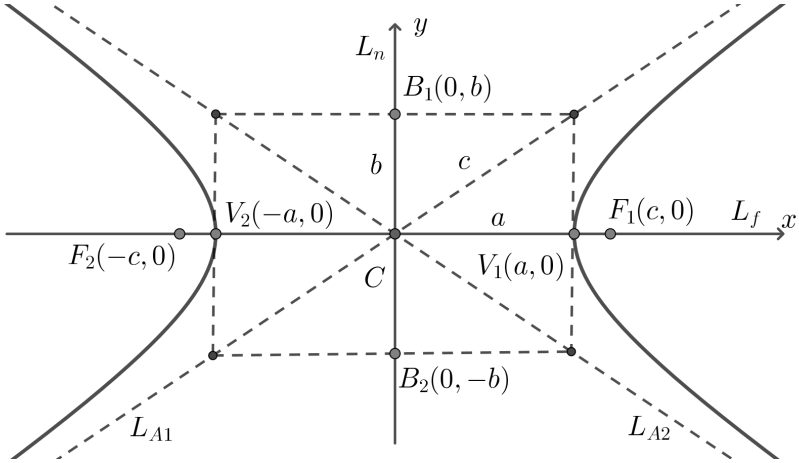


Figura 106: *Parámetros generales de la hipérbola*

FORMA CANÓNICA

La ecuación de la forma canónica es la hipérbola que tiene por centro el origen del sistema de coordenadas [2]. La forma canónica tiene dos opciones, es decir, la opción 1 es la hipérbola que tiene por eje focal el eje x, la opción 2 es la hipérbola que tiene por eje focal el eje y.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La orientación de la elipse depende de los valores de a y b.

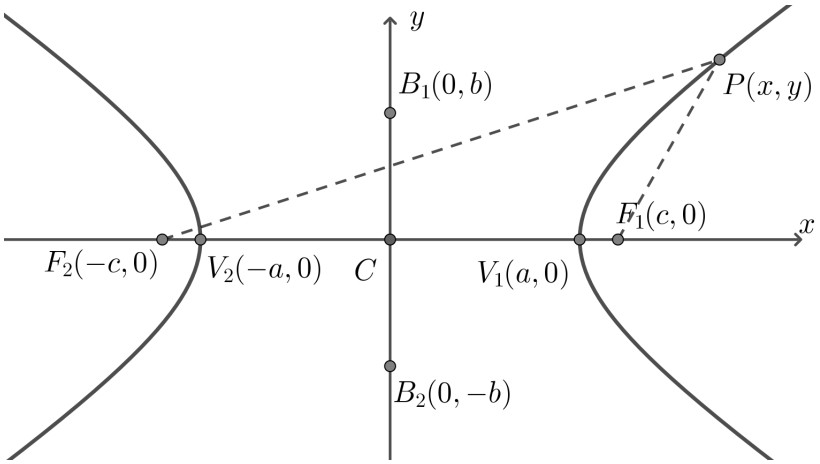


Figura 107: *Hipérbola en referencia a un punto $P(x,y)$*

Desarrollamos tomando los datos de la hipérbola referencial respecto al punto $P(x,y)$, la asignación del orden de los focos y los vértices se relaciona con los signos de forma directa u opuesta. Manejaremos la forma directa, es decir, los términos V_1, F_1, B_1 se asignan a los positivos.

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = m$$

m es un valor desconocido que es la diferencia de las distancias entre los focos y un punto cualquiera de la hipérbola, el término m es constante debido a la geometría de la hipérbola.

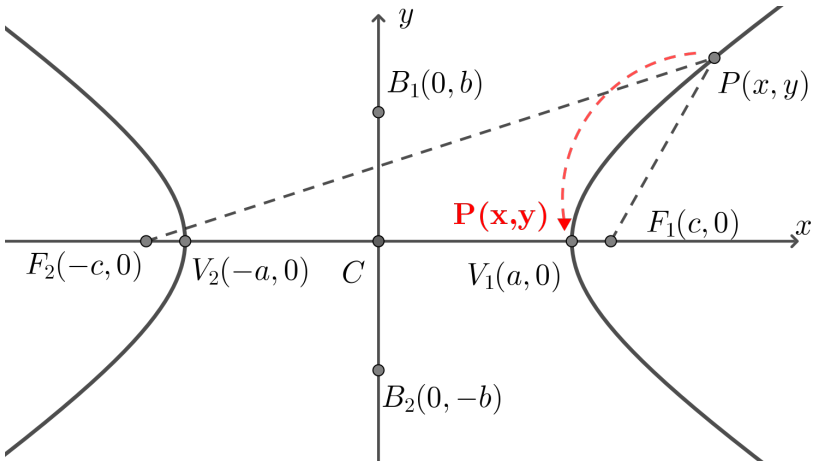


Figura 108: *Nueva posición de P coincide con V_1, orientación horizontal*

Cuando P es igual a V_1, tenemos:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = m$$

$$|F_1 - P| - |F_2 - P| = m$$

$$|(c,0) - (a,0)| - |(-c,0) - (a,0)| = m$$

$$|c - a| - |-c - a| = m; a > c$$

$$(c - a) - (a + c) = m$$

$$c - a - a - c = m; m = -2a$$

Aplicamos el criterio del valor absoluto, ya que necesitamos solo el valor de m.

$$m = |-2a|$$

$$m = 2a$$

Cuando P es igual a V_2, tenemos:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = m$$

$$|F_1 - P| - |F_2 - P| = m$$

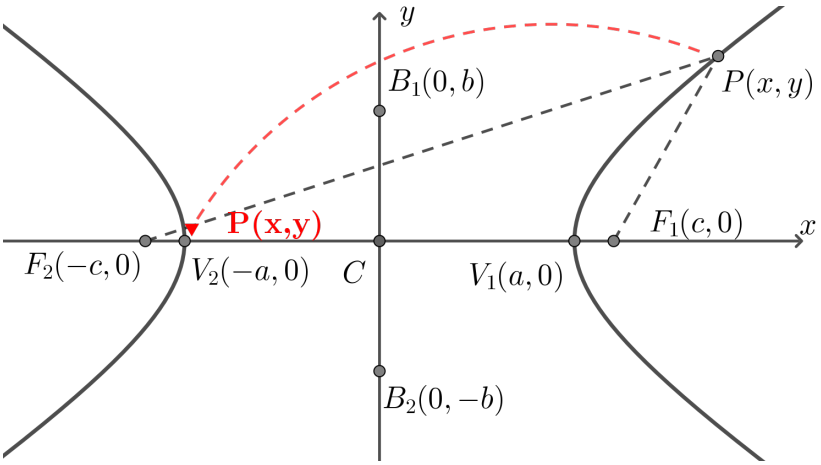


Figura 109: *Nueva posición de P coincide con V_2, orientación horizontal*

$$|(c,0)-(-a,0)|-|(-c,0)-(-a,0)|=m$$

$$|(c+a)|-|(-c+a,0)|=m$$

$$\overline{(c+a)}-\overline{(-c+a)}=m$$

$$(c+a)-(-a+c)=m$$

$$m=2a$$

Cuando P es cualquier punto de la elipse, tenemos:

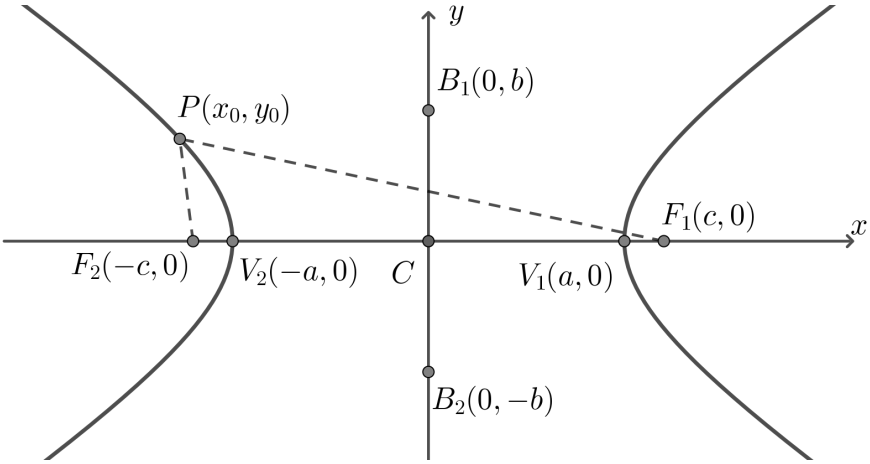


Figura 110: *Cualquier punto $P(x_0,y_0)$ de una hipérbola*

$$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=m, m>0$$

$$|PF_2|>|PF_1|$$

$$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$$

$$|(x,y)-(-c,0)|-|(x,y)-(c,0)|=2a$$

$$|(x+c,y)|-|(x-c,y)|=2a$$

$$\overline{(x+c,y)}-\overline{(x-c,y)}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=2a+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\left(\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$

$$\left(cx-a^2\right)^2=\left(a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$\left(c^2x^2-2a^2cx+a^4\right)=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$\frac{x^2(c^2-a^2)}{c^2-a^2}-\frac{a^2y^2}{c^2-a^2}=\frac{a^2(c^2-a^2)}{c^2-a^2}$$

$$x^2-\frac{a^2y^2}{c^2-a^2}=a^2, c^2=a^2+b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2y^2}{a^2(a^2+b^2-a^2)}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a\wedge b\neq 0$$

Para identificar el lado recto, tenemos los puntos G y H que resultan del corte de la recta $x=c$ perpendicular al eje focal que pasa por un foco F_1. Evaluamos en la expresión de la hipérbola.

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$$

$$-y^2 = \frac{(a^2 - c^2)b^2}{a^2}, c^2 = a^2 + b^2$$

$$y^2 = \frac{(a^2 + b^2 - a^2)b^2}{a^2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(b^2)b^2}{a^2}}$$

$$y = \pm\frac{b^2}{a}$$

Las coordenadas de los puntos son $G\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ y $H\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$.
Calculamos la distancia entre los dos puntos:

$$\overline{GH} = |H - G|$$

$$\overline{GH} = |\left(c, -\frac{b^2}{a}\right) - \left(c, \frac{b^2}{a}\right)|$$

$$\overline{GH} = |\left(-2\frac{b^2}{a}\right)|$$

$$\overline{GH} = \frac{2b^2}{a}; a > 0$$

Para identificar la excentricidad que indica que tan abierta o achatada es la hipérbola, es la relación que existe entre la distancia c desde el centro al foco y la distancia a entre el vértice y el foco [1].

$$ec = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}; a > 0$$

La excentricidad debe estar entre 0 y 1, cuando e tiende al cero 0 la hipérbola se aplana respecto al eje focal y si e tiende al 1 la hipérbola tiende a ser una abrirse. Las directrices se identifican con $x = \pm\frac{a}{e}$.

Para analizar el dominio y rango de la hipérbola analizamos la ecuación de la forma canónica despejando cada una de las variables.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dominio: $-y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}$$

$$y = b\sqrt{\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)}$$

$$x^2 - a^2 \geq 0$$

$$x^2 \geq a^2$$

$$x^2 \geq a^2; x \geq \pm a$$

$$-a \geq x \geq a$$

Rango: $x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$x = a\sqrt{\left(\frac{b^2 + y^2}{b^2}\right)}$$

$$b^2 + y^2 \geq 0$$

$$y^2 \geq -b^2$$

$$y \in \mathbf{R}$$

Para la opción 2 de la hipérbola con orientación vertical, es decir, el eje focal se encuentra en el eje vertical y y el eje normal en x.

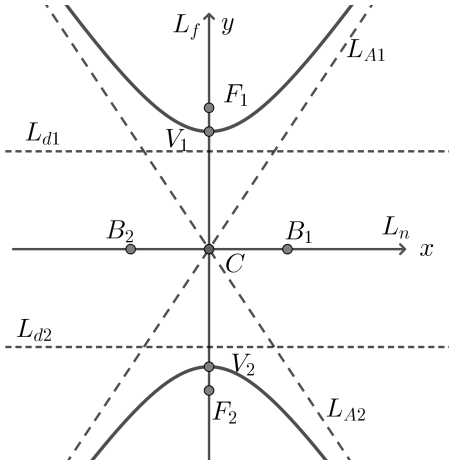


Figura 111: *Hipérbola con orientación vertical*

Se cambian las posiciones de los focos al eje y y los vértices se intercambian con los vértices imaginarios, la directriz es $y = \pm\frac{a}{e}$.

Ejemplo 8.1. Teniendo la ecuación de la hipérbola $2y^2 - 8x^2 = 8$, determine los puntos y valores de interés.

$$2y^2 - 8x^2 = 8$$
$$\frac{2y^2}{8} - \frac{8x^2}{8} = 1$$
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$$
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$
$$a^2 = 4, a = \pm 2, b^2 = 1, b = \pm 1$$

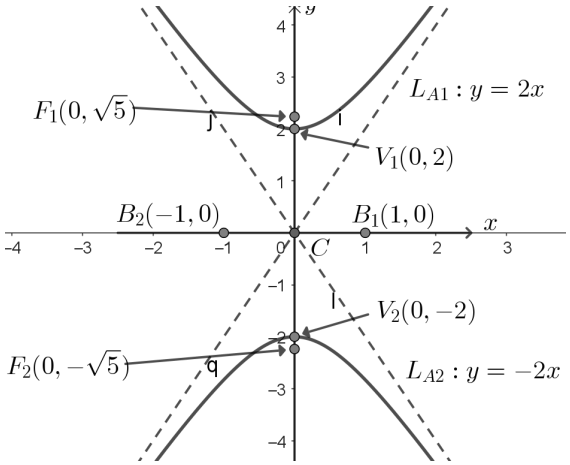


Figura 112: *Hipérbola centrada en y (Ejemplo 8.1)*

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4 + 1, c = \sqrt{5}$$

- Focos: $F_1(0, c) = F_1\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F_2(0, -c) = F_2\left(0, -\sqrt{5}\right)$.
- Vértices: $V_1(0, a) = V_1\left(0, 2\right)$, $V_2(0, -a) = V_2\left(0, -2\right)$.
- Vértices imaginarios: $B_1(b, 0) = B_1\left(1, 0\right)$, $B_2(-b, 0) = B_2\left(1, 0\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Directrices: $y = \pm\frac{a}{e}$, $y = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$, $y = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.
- Dominio: $2y^2 - 8x^2 = 8$, $y = \sqrt{4(1 + x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$.

- Rango: $2y^2 - 8x^2 = 8$, $x = \frac{\sqrt{y^2-4}}{4}$, $y^2 - 4 \geq 0$, $y^2 \geq 4$, $y \geq \pm 2$, $-2 \geq y \geq 2$.
- Asíntotas: $y = \pm\frac{ax}{b}$, $y = \pm\frac{2x}{1}$, $y = \pm 2x$.

Ejemplo 8.2. Teniendo la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, determine los puntos y valores de interés.

$$a^2 = 9, a = \pm 3, b^2 = 4, b = \pm 2$$

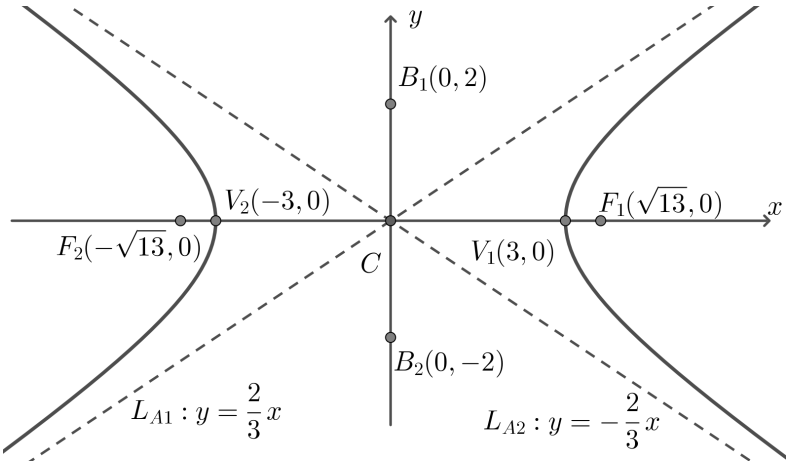


Figura 113: *Hipérbola centrada en x (Ejemplo 8.2)*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 4, c = \sqrt{13}$$

- Focos: $F_1(c, 0) = F_1\left(\sqrt{13}, 0\right)$, $F_2(-c, 0) = F_2\left(-\sqrt{13}, 0\right)$.
- Vértices: $V_1(a, 0) = V_1\left(3, 0\right)$, $V_2(-a, 0) = V_2\left(-3, 0\right)$.
- Vértices imaginarios: $B_1(0, b) = B_1\left(0, 2\right)$, $B_2(0, -b) = B_2\left(0, -2\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e}$, $x = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}}$, $x = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y^2 = 4\left(\frac{x^2}{9} - 1\right)$$

$$y = 2\sqrt{\frac{x^2 - 9}{9}}$$

- Dominio: $x^2 - 9 \geq 0$, $x^2 =\geq 9$, $x \geq \pm 3$, $-3 \geq x \geq 3$.
- Rango: $x = 3\sqrt{\frac{y^2+4}{4}}$, $y^2 + 4 \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$.
- Asíntotas: $y = \pm\frac{bx}{a}$, $y = \pm\frac{2x}{3}$.

FORMAS ORDINARIAS

La hipérbola que tiene la forma ordinaria es la misma forma canónica pero desplazado el centro en las coordenadas $O'(h,k)$, usamos el criterio del traslado de coordenadas [4].

$$x' = x - h; y' = y - k$$

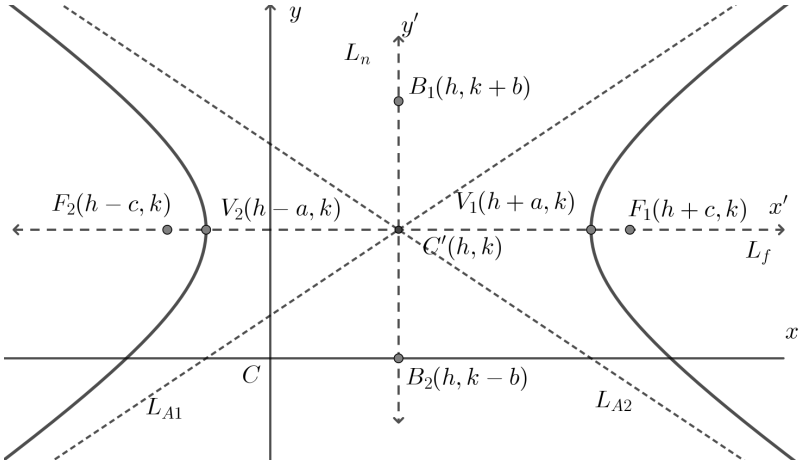


Figura 114: *Hipérbola con centro en (h,k) con orientación horizontal*

Para una hipérbola que tiene orientación horizontal el eje focal es paralelo al eje x, utilizamos las expresiones de la forma canónica:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
$$e = \frac{c}{a}, x' = \frac{a}{e}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Directrices: $x' = \pm\frac{a}{e}$, $(x-h) = \pm\frac{a}{e}$, tenemos dos rectas paralelas al eje y que se encuentran entre el centro (h,k) y los vértices V_1 y V_2.

Asíntotas: $y' = \pm\frac{b}{a}x'$, $(y-k) = \pm\frac{b}{a}(x-h)$, la expresión tiene la estructura de la ecuación de la recta donde la pendiente $m = \pm\frac{b}{a}$ y el punto por donde pasa tiene coordenadas (h,k).

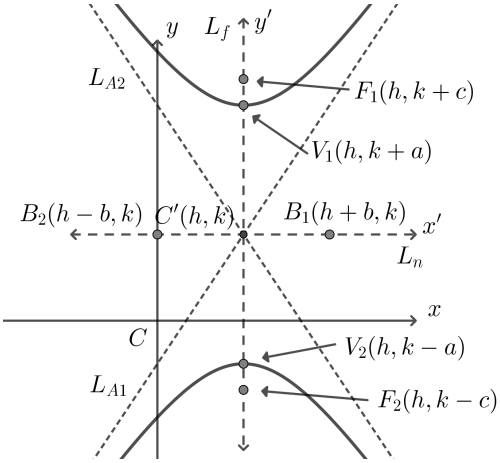


Figura 115: *Hipérbola con centro en (h, k) con orientación vertical*

Para una hipérbola que tiene orientación vertical el eje focal es paralelo al eje y, utilizamos las expresiones de la forma canónica:

$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a}, y' = \frac{a}{e}$$

Directrices: $y' = \pm\frac{a}{e}$, $(y-k) = \pm\frac{a}{e}$, tenemos dos rectas paralelas al eje x que se encuentran entre el centro (h, k) y los vértices V_1 y V_2.

Asíntotas: $y' = \pm\frac{a}{b}x'$, $(y-k) = \pm\frac{a}{b}(x-h)$, la expresión tiene la estructura de la ecuación de la recta donde la pendiente $m = \pm\frac{a}{b}$ y el punto por donde pasa tiene coordenadas (h, k).

Ejemplo 8.3. Tiene la ecuación de una hipérbola $9x^2-16y^2-18x-32y-151 = 0$, determine el centro, puntos y valores de interés.

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$$

$$9x^2 - 18x - 16y^2 - 32y - 151 = 0$$

$$(9x^2 - 18x) - (16y^2 + 32y) - 151 = 0$$

$$(9x^2 - 18x + 9) - (16y^2 + 32y + 16) - 151 - 9 + 16 = 0$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 2y + 1) = 144$$

$$\frac{9(x^2 - 2x + 1)}{144} - \frac{16(y^2 + 2y + 1)}{144} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, a = \pm 4, b^2 = 9, b = \pm 3, h = 1, k = -1$$

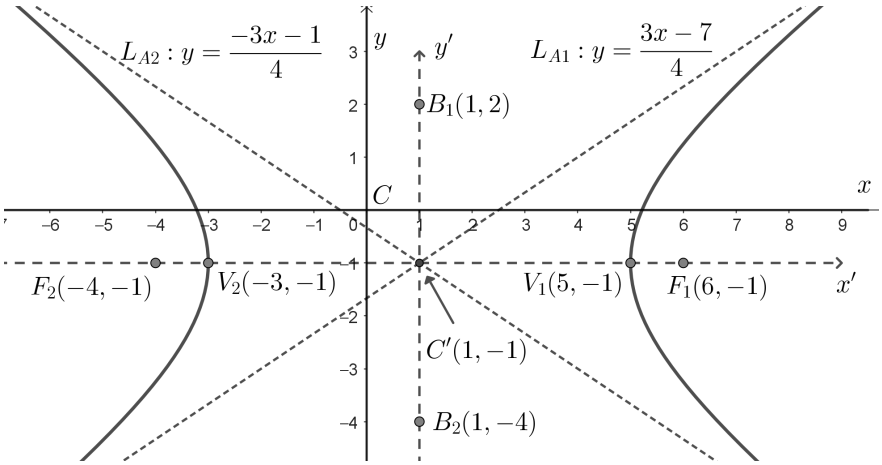


Figura 116: *Hipérbola con centro en C' (Ejemplo 8.3)*

$$O'(h,k), O'(1,-1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9, c = \sqrt{25}, c = 5$$

- Focos: $F_1(c+h,k) = F_1(5+1,-1) = F_1(6,-1)$, $F_2(-c+h,k) = F_2(-5+1,-1) = F_2(-4,-1)$.
- Vértices: $V_1(a+h,k) = V_1(4+1,-1) = V_1(5,-1)$, $V_2(-a+h,k) = V_2(-4+1,-1) = V_2(-3,-1)$.
- Vértices imaginarios: $B_1(h,b+k) = B_1(1,3-1) = B_1(1,2)$, $B_2(h,-b+k) = B_2(1,-3-1) = B_2(1,-4)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{5}{4}$.
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e} + k$, $x = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}} - 1$, $x = \pm\frac{16}{5} - 1$.
  $x_1 = \frac{16}{5} - 1, x_1 = \frac{16-5}{5}, x_1 = \frac{11}{5}$ $x_2 = -\frac{16}{5} - 1, x_1 = \frac{-16-5}{5}, x_1 = \frac{-21}{5}$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$(y+1)^2 = 9\left(\frac{(x-1)^2}{16} - 1\right)$$

$$y = 3\sqrt{\frac{(x-1)^2 - 16}{16}} + 1$$

- Dominio: $(x-1)^2-16 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 16$, $x-1 \geq \pm 4$, $x \geq \pm 4+1$, $-3 \geq x \geq 5$.
- Rango: $x = 4\sqrt{\frac{(y+1)^2+9}{9}}+1$, $(y+1)^2+9 \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$.
- Asíntotas: $y = \pm\frac{b(x-h)}{a}+k$, $y = \pm\frac{3(x-1)}{4}+(-1)$

  $y_1 = \frac{3x-3-4}{4}$, $y_1 = \frac{3x-7}{4}$ $y_2 = \frac{-3x+3-4}{4}$, $y_2 = \frac{-3x-1}{4}$

Ejemplo 8.4. Tiene la ecuación de una hipérbola $\frac{(y-3)^2}{25}-\frac{(x-5)^2}{4}=1$, determine el centro, puntos y valores de interés.

$$a^2 = 25, a = \pm 5, b^2 = 4, b = \pm 2, h = 5, k = 3$$

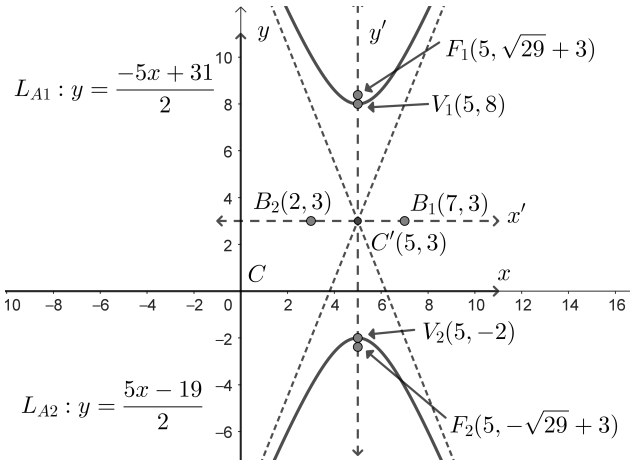


Figura 117: *Hipérbola con centro en C' (Ejemplo 8.4)*

$$O'(h,k), O'(5,3)$$

$$c^2 = a^2+b^2$$

$$c^2 = 25+4, c = \sqrt{29}$$

- Focos: $F_1(h, c+k) = F_1\left(5, \sqrt{29}+3\right)$, $F_2(h, -c+k) = F_2\left(5, -\sqrt{29}+3\right)$.
- Vértices: $V_1(h, a+k) = V_1(5, 5+3) = V_1(5,8)$, $V_2(h, -a+k) = V_2(5, -5+3) = V_2(5,-2)$.
- Vértices imaginarios: $B_1(b+h, k) = B_1(2+5, 3) = B_1(7,3)$, $B_2(-b+h, k) = B_2(-2+5, 3) = B_2(2,3)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

- Directrices: $y = \pm\frac{a}{e} + k$, $y = \pm\frac{5}{\frac{\sqrt{29}}{5}} + 3$.

  $y_1 = \frac{\sqrt{29}}{5} + 3, y_1 = \frac{\sqrt{29}+15}{5}$ $y_2 = -\frac{\sqrt{29}}{5} + 3, y_2 = \frac{-\sqrt{29}+15}{5}$

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$$

$$(y-3)^2 = 25\left(\frac{(x-5)^2}{4} + 1\right)$$

$$y = 5\sqrt{\frac{(x-5)^2+4}{4}} + 4$$

- Dominio: $(x-5)^2 + 4 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq -4$, $x \in \mathbf{R}$.

- Rango: $x = 2\sqrt{\frac{(y-3)^2-25}{25}}$, $(y-3)^2 - 25 \geq 0$, $y - 3 \geq \pm 5$, $y \geq \pm 5 + 3$, $-2 \geq y \geq 8$.

- Asíntotas: $y = \pm\frac{a(x-h)}{b} + k$, $y = \pm\frac{5(x-5)}{2} + 3$

  $y_1 = \frac{5x-25+6}{2}, y_1 = \frac{5x-19}{2}$, $y_2 = \frac{-5x+25+6}{2}, y_2 = \frac{-5x+31}{2}$

FORMA GENERAL

La ecuación de la hipérbola de la forma general tiene 5 coeficientes y esta descrita por:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

La ecuación general de la hipérbola es similar a la ecuación general de la elipse, estas se diferencian por los signos de sus coeficientes. Específicamente los coeficientes A y B deben tener diferentes signos, si A es negativa significa que la orientación es vertical y si B es negativa, la orientación es horizontal [2, 4].

Desarrollamos a partir de la forma ordinaria, para orientación horizontal.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-h)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) - a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2yk - a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky - a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0$$

Asignamos las equivalencias:

$A = b^2$, $B = -a^2$, $C = -2hb^2$, $D = 2ka^2$, $E = -a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2$

Para identificar los valores de los puntos referenciales y descriptivos de la hipérbola, debemos despejar y operar las ecuaciones.

Cuando la hipérbola tiene el eje focal paralelo al eje y, tenemos: $A = a^2$, $B = -b^2$, $C = -2ha^2$, $D = +2kb^2$, $E = -b^2k^2 + a^2h^2 - b^2a^2$

Ejemplo 8.5. Se tiene la ecuación de una hipérbola $4x^2 - 6y^2 - 8x + 9y - 31 = 0$, determine el centro, puntos y valores de interés.

$$4x^2 - 6y^2 - 8x + 9y - 31 = 0$$

$$A = 4, B = -6, C = -8, D = 9, E = -31$$

Como es una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje x.

$$A = b^2, B = -a^2, C = -2hb^2, D = +2ka^2, E = -a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2$$

$$4 = b^2, -6 = -a^2, -8 = -2hb^2, 9 = +2ka^2, -31 = -a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2$$

$$b = 2, a = \sqrt{6}$$

$$8 = 2h(4), 9 = 2k(6)$$

$$h = 1, k = \frac{3}{4}$$

Se debe considerar que el valor de E debe adaptarse a los valores de a, b, h y k, porque no depende directamente de dichos datos, o viceversa, a partir de E identificar los demás valores.

$$E = -(6)(\frac{9}{16}) + (4)(1) - (6)(4)$$

$$E = -\frac{187}{8} \approx -23{,}37$$

Como vemos no coincide con el valor de -31 y para mantener dicho valor se debe desarrollar y reescribir la ecuación general de forma ordinaria.

$$O'(h,k), O'\left(1, \frac{3}{4}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 6 + 4, c = \sqrt{10}$$

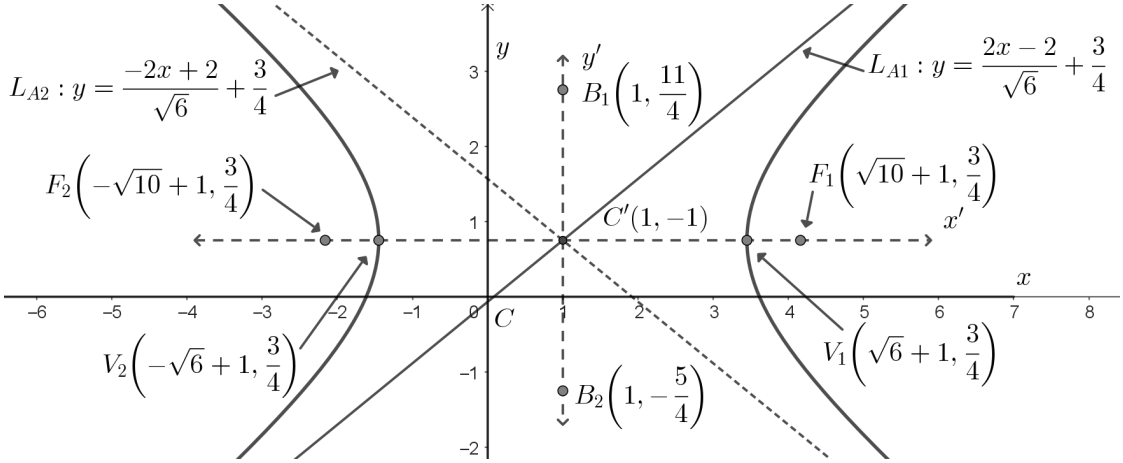


Figura 118: *Hipérbola con centro en C′ (Ejemplo 8.5)*

- Focos: $F_1(c+h,k) = F_1\left(\sqrt{10}+1, \frac{3}{4}\right)$, $F_2(-c+h,k) = F_2\left(-\sqrt{10}+1, \frac{3}{4}\right)$.
- Vértices: $V_1(a+h,k) = V_1\left(\sqrt{6}+1, \frac{3}{4}\right)$, $V_2(-a+h,k) = V_2\left(-\sqrt{6}+1, \frac{3}{4}\right)$.
- Vértices imaginarios: $B_1(h, b+k) = B_1\left(1, 2+\frac{3}{4}\right)$, $B_2(h, -b+k) = B_2\left(1, -2+\frac{3}{4}\right)$.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$.
- Directrices: $x = \pm\frac{a}{e} + k$, $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}} + \frac{3}{4}$, $x = \pm\frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{3}{4}$.

  $x_1 = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{3}{4}$ $x_2 = -\frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{3}{4}$

$$\frac{(x-1)^2}{6} - \frac{\left(y-\frac{3}{4}1\right)^2}{4} = 1$$

$$\left(y - \frac{3}{4}1\right)^2 = 4\left(\frac{(x-1)^2}{6} - 1\right)$$

$$y = 2\sqrt{\frac{(x-1)^2-6}{16}} + \frac{3}{4}$$

- Dominio: $(x-1)^2 - 6 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 6$, $x-1 \geq \pm\sqrt{6}$, $x \geq \pm\sqrt{6}+1$, $-\sqrt{6}+1 \geq x \geq \sqrt{6}+1$.
- Rango: $x = \sqrt{6}\sqrt{\frac{\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+4}{4}} + 1$, $\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$.
- Asíntotas: $y = \pm\frac{b(x-h)}{a} + k$, $y = \pm\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}$

  $y_1 = \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}$, $y_1 = \frac{2x-2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}$, $y_2 = \frac{-2(x-1)}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}$, $y_2 = \frac{-2x+2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}$

Ejercicios propuestos Capítulo VIII

1. Se tiene la hipérbola H, encuentre los vértices, focos, asíntotas, excentricidad, dominio y rango. Grafique.

   a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
   b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
   c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
   d) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$
   e) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
   f) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
   g) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$
   h) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$
   i) $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = 1$
   j) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$
   k) $9x^2 - 16y^2 = 144$
   l) $16x^2 - 9y^2 = 144$
   m) $25x^2 - 4y^2 = 100$
   n) $4x^2 - 25y^2 = 100$
   ñ) $49x^2 - 36y^2 = 1764$
   o) $9y^2 - 16x^2 = 144$
   p) $16y^2 - 9x^2 = 144$
   q) $25y^2 - 4x^2 = 100$
   r) $4y^2 - 25x^2 = 100$
   s) $36y^2 - 49x^2 = 1764$

2. En función de la hipérbola H, determine los valores y puntos de interés. Grafique.

   a) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
   b) $\frac{(y+1)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$
   c) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$
   d) $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$
   e) $\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$
   f) $16y^2 - 9x^2 + 64y + 36x + 44 = 0$
   g) $\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$
   h) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-2)^2}{25} = 1$
   i) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
   j) $\frac{(x+2)^2}{49} - \frac{(y+3)^2}{25} = 1$
   k) $\frac{(y-5)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{36} = 1$
   l) $4y^2 - 25x^2 + 16y + 50x - 109 = 0$
   m) $\frac{(x-4)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$
   n) $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$
   ñ) $49x^2 - 36y^2 - 196x - 72y - 1112 = 0$
   o) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 36y + 44 = 0$
   p) $9y^2 - 16x^2 - 36y - 32x - 124 = 0$
   q) $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$
   r) $36y^2 - 49x^2 - 72y - 196x - 1112 = 0$
   s) $25y^2 - 4x^2 - 100y - 16x - 16 = 0$

3. Considerando la hipérbola H de forma general, determine los valores y puntos de interés, tomando en cuenta las particularidades de la forma general.

   a) $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0$

   b) $16y^2-9x^2+64y+36x+44=0$

   c) $25x^2-4y^2-100x-16y-16=0$

   d) $4y^2-25x^2+16y+50x-109=0$

   e) $49x^2-36y^2-196x-72y-1112=0$

   f) $36y^2-49x^2-72y-196x-1112=0$

   g) $x^2-4y^2+6x+8y-11=0$

   h) $9y^2-4x^2-18y-16x-43=0$

   i) $16x^2-25y^2+32x-50y-391=0$

   j) $25y^2-9x^2+50y+36x-236=0$

Referencias

[1] Carpinteyro, E. (2018). Geometría analítica.

[2] Kindler, J. (1985). Geometría analítica.

[3] Lehman, C. H. (2012). Geometría analítica.

[4] Mercado Shuler, C. (2015). Geometría: planimetría y geometría analítica.

[5] Totter, R. J. (2010). Geometría analítica para ciencias e ingeniería.

[6] Wooton, W., Beckenbach, E. F., & Fleming, W. (1975). Geometría analítica moderna.

Introducción a la Geometría Analítica

¿Cómo se traza la gráfica de una ecuación? ¿Cómo se encuentra la ecuación que describe una figura? Estas preguntas guían el recorrido de este libro de geometría analítica, dirigido a quienes se preparan para ingresar a la universidad y a estudiantes de los primeros niveles de carreras de ciencias e ingeniería.

El texto parte de las coordenadas rectangulares para estudiar la distancia entre puntos, la división de segmentos y la ecuación de la recta. A partir de estos fundamentos, aborda los lugares geométricos y muestra cómo los cortes con los ejes, la simetría y las asíntotas ayudan a interpretar una gráfica. El libro también estudia la traslación de los ejes coordenados y presenta las cuatro secciones cónicas clásicas, que son la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

Los ejemplos desarrollados y los ejercicios propuestos permiten practicar el paso de la ecuación a la gráfica y de la gráfica a la ecuación. Las aplicaciones ilustradas vinculan esas ideas con situaciones concretas y reales, como la pendiente de una rampa, la forma de una antena parabólica y la trayectoria elíptica de un planeta.

ISBN: 978-9942-652-67-6

Departamento de Ciencias Exactas
Sede Latacunga