

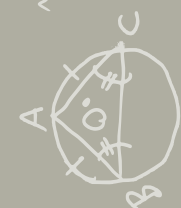
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$y^{1/n} = x$$

$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sim \forall x \forall y [p(x,y) \equiv \exists x \exists y [\sim p(x,y)]]$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$



$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



Integral indefinida

Técnicas de integración paso a paso

Juan Carlos Tandazo Cando, Lucía Eudocia Castro Gordón,
Nury Gabriela Ortiz Moya, Santiago David Quinga Socasi
Martha Ximena Hidalgo Zurita

Integral indefinida - Técnicas de integración paso a paso

Juan Carlos Tandazo Cando, Lucía Eudocia Castro Gordón, Nury Gabriela Ortiz Moya,
Santiago David Quinga Socasi y Martha Ximena Hidalgo Zurita

Primera edición electrónica: abril, 2026

ISBN: 978-9942-652-49-2

Ingreso al proceso: 28/11/2025 • Aprobación de ingreso: 21/01/2026

Aprobación de pares: 26/02/2026 • Finalización de edición: 13/04/2026

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

CrnI. Oswaldo Mauricio González Mosquera, Ph. D.

Rector

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

CrnI. CSM. AVC. Gonzalo Javier Pullas Tapia, Ph.D. - Vicerrector de Investigación,
Innovación y Transferencia de Tecnología - Presidente

Corrección de estilo y diseño

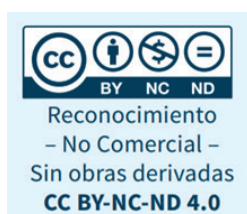
Mtr. Xavier Chinga Mármol

Imagen de cubierta: <https://n9.cl/cp7wp>

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE,
para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en
www.repositorio.espe.edu.ec.



Departamento de
Ciencias Exactas

Integral Indefinida

"Técnicas de Integración
Paso a Paso"

Juan Carlos Tandazo Cando

Lucía Eudocia Castro Gordón

Nury Gabriela Ortiz Moya

Santiago David Quinga Socasi

Martha Ximena Hidalgo Zurita

EDITORIAL



UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

Presentación

El Cálculo Integral es una de las ramas fundamentales de las matemáticas, una disciplina esencial cuyo dominio es crucial en toda la ingeniería, la física y la modelización científica. A través de la Integral Indefinida, somos capaces de determinar la función original de la cual una función dada es la derivada, un concepto que permite resolver problemas fundamentales de la cinemática, la acumulación y el cambio.

Este libro es una puerta de entrada al fascinante mundo de la Integral Indefinida, con un enfoque práctico y exhaustivo en las diversas técnicas de resolución. A lo largo de estas páginas exploraremos la relación íntima entre la Primitiva y la Integración y descubriremos cómo las propiedades de linealidad nos preparan para abordar cualquier forma de integrando.

Nuestro viaje se centra en el dominio de las técnicas de integración, herramientas esenciales de un matemático y un ingeniero. El Capítulo 2 te guiará a través de las técnicas fundamentales como la sustitución, la integración por partes y el manejo especializado de funciones trigonométricas e hiperbólicas. En el Capítulo 3 profundizaremos en la resolución de integrales de funciones racionales mediante fracciones parciales y el Método de Ostrogradski y atacaremos las funciones irracionales con herramientas como la sustitución trigonométrica y el binomio diferencial (Capítulo 4).

Sin embargo, este texto va más allá de la manipulación algebraica, también te proporciona una visión de futuro (Capítulo 5), examinando el papel de la Inteligencia Artificial como facilitador en el aprendizaje y la verificación del cálculo integral.

Ya seas un estudiante que se adentra por primera vez en el cálculo o un profesional que necesita consolidar el dominio de estas técnicas esenciales, esperamos que este libro sea una guía invaluable en tu camino hacia la maestría. ¡Bienvenido al arte de revertir la derivación y revelar la función original!

Dedicatoria

Dedicamos esta obra, en primer lugar, a Dios, fuente infinita de sabiduría y verdad, cuya luz guía el entendimiento humano y nos permite descubrir, a través de las matemáticas, el orden profundo que rige el universo.

A la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE y, en particular, al Departamento de Ciencias Exactas, espacio académico donde el pensamiento científico, la disciplina intelectual y el compromiso con la excelencia se cultivan cada día. En sus aulas se forman profesionales capaces de enfrentar los retos de la ingeniería con rigor, ética y espíritu de servicio a la sociedad.

A nuestros estudiantes de Ingeniería, quienes representan la esencia de nuestra vocación docente. Su curiosidad intelectual, su perseverancia frente a los desafíos del cálculo y su deseo de comprender los principios que gobiernan los fenómenos naturales constituyen la inspiración permanente de este trabajo. Que estas páginas se conviertan en una guía clara y rigurosa en su camino hacia la comprensión profunda de la integral indefinida y las técnicas de integración.

A nuestras familias, por su amor incondicional, su paciencia y su apoyo permanente, que han sido una fuente constante de fortaleza y motivación en cada etapa de este proyecto. Su comprensión, confianza y cercanía han constituido el sustento humano que hizo posible la realización de esta obra.

Finalmente, dedicamos este trabajo a todos aquellos que creen en el poder transformador de la educación y en la belleza de las matemáticas como lenguaje universal para comprender, explicar y mejorar el mundo.

Los Autores.

Juan Carlos Tandazo Cando

jctandazo@espe.edu.ec

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, Magister en la Enseñanza de la Matemática. Docente del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE.

Lucía Eudocia Castro Gordón

lecastro4@espe.edu.ec

Magister en la Enseñanza de la Matemática, Doctora en Ciencias de la Educación, Licenciada en Matemática y Física, Diplomado en Educación STEAM. Docente del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE.

Nury Gabriela Ortiz Moya

ngortiz14@espe.edu.ec

Ingeniera en Mecatrónica, Máster en Ingeniería en Matemática y Computación. Docente del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE.

Santiago David Quinga Socasi

sdquina1@espe.edu.ec

Ingeniero en Electrónica y Control, Magister en Eficiencia Energética, Máster en Ingeniería Matemática y Computación. Docente del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE.

Martha Ximena Hidalgo Zurita

mxhidalgo@espe.edu.ec

Ingeniera Civil, Magister en la Enseñanza de la Matemática. Docente del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE.

Índice

Capítulo I - Definiciones preliminares	13
Introducción	15
Primitiva	15
Definición	15
Propiedades de la primitiva	16
Primitiva genérica	16
Interpretación Geométrica	18
Notación	19
Principios	20
Propiedades de la integral indefinida	20
Fórmulas de integración inmediata	20
Tabla	20
Ejercicios Resueltos	22
Ejercicios Propuestos	31
Capítulo II - Técnicas básicas de integración	33
Integración por sustitución	35
Ejercicios Resueltos	35
Ejercicios Propuestos	39
Integración de potencias naturales de funciones trigonométricas	40
Caso 1. Integrales de la forma $\int \sin^m(x)dx$ ó $\int \cos^m(x)dx$	40
Ejercicios Resueltos si m es par	40
Ejercicios Resueltos si m es impar	42
Caso 2. Integrales de la forma $\int \tan^p(x)dx$ ó $\int \cot^p(x)dx$	43
Ejercicios Resueltos si p es par	44
Ejercicios Resueltos si p es impar	46
Caso 3. Integrales de la forma $\int \sec^q(x)dx$ ó $\int \csc^q(x)dx$	49
Ejercicios Resueltos si q es par	50
Ejercicios Propuestos	51
Integración de producto de potencias naturales de funciones trigonométricas	52
Caso 1. Integrales de la forma $\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$	52

Ejercicios Resueltos si m y n son pares	52
Ejercicios Resueltos si m ó n es impar	54
Ejercicio Resuelto si m y n son impares	55
Caso 2. Integrales de la forma $\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx$ ó	
$\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$	56
Ejercicios Resueltos si q es par	56
Ejercicios Resueltos si p es impar	59
Ejercicios Propuestos	61
Integración de producto de Funciones Trigonómicas de ángulos múltiples	62
Ejercicios Resueltos	63
Ejercicios Propuestos	64
Integración por completación de trinomios	65
Ejercicios Resueltos caso 1	65
Ejercicios Resueltos caso 2	68
Ejercicio Resuelto caso 3	71
Ejercicios Propuestos	72
Integración por partes	73
Ejercicios Resueltos	74
Ejercicios Propuestos	82
Integración de funciones hiperbólicas	82
Ejercicios Resueltos	84
Ejercicios Propuestos	88
Capítulo III - Integración de funciones racionales.....	89
Integración por fracciones parciales	91
Caso 1. Factores lineales distintos	92
Ejercicios Resueltos	92
Caso 2. Factores lineales repetidos	95
Ejercicios Resueltos	96
Caso 3. Factores cuadráticos distintos irreducibles	98
Ejercicios Resueltos	98
Caso 4. Factores cuadráticos irreducibles repetidos	103
Ejercicios Resueltos	103
Ejercicios Propuestos	107
Método de Hermite-Ostrogradski	108
Ejercicios Resueltos	109
Ejercicios Propuestos	116

Integración de Funciones Racionales con senos y cosenos (Sustitución de Weierstrass)	117
Caso 1. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx \neq \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$	117
Ejercicios Resueltos	119
Caso 2. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx = -\int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$	124
Ejercicios Resueltos	125
Caso 3. Si $\int Q(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx = -\int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$	128
Ejercicios Resueltos	128
Caso 4. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx = \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$	132
Ejercicios Resueltos	133
Ejercicios Propuestos	139
Capítulo IV - Integración de funciones irracionales	141
Integración por sustitución trigonométrica o hiperbólica	143
Ejercicios Resueltos	143
Ejercicios Propuestos	154
Sustitución por el recíproco	155
Ejercicios Resueltos	155
Ejercicios Propuestos	161
Sustitución por racionalización	162
Ejercicios Resueltos	163
Ejercicios Propuestos	169
Método Alemán	170
Ejercicios Resueltos	171
Ejercicios Propuestos	178
Integración del Binomio Diferencial	179
Caso 1. Si p es un número entero.	179
Ejercicios Resueltos	179
Caso 2. Si p es un número fraccionario $\left(p = \frac{r}{s}\right)$ y $\frac{m+1}{n}$ es un número entero.	182
Ejercicios Resueltos	182
Caso 3. Si p es un número fraccionario $\left(p = \frac{r}{s}\right)$ y $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero.	187
Ejercicios Resueltos	188
Ejercicios Propuestos	192
Miscelánea	194

Capítulo V - IA como Facilitador en el Aprendizaje de Integrales Indefinidas.....197

Uso de ChatGPT 199

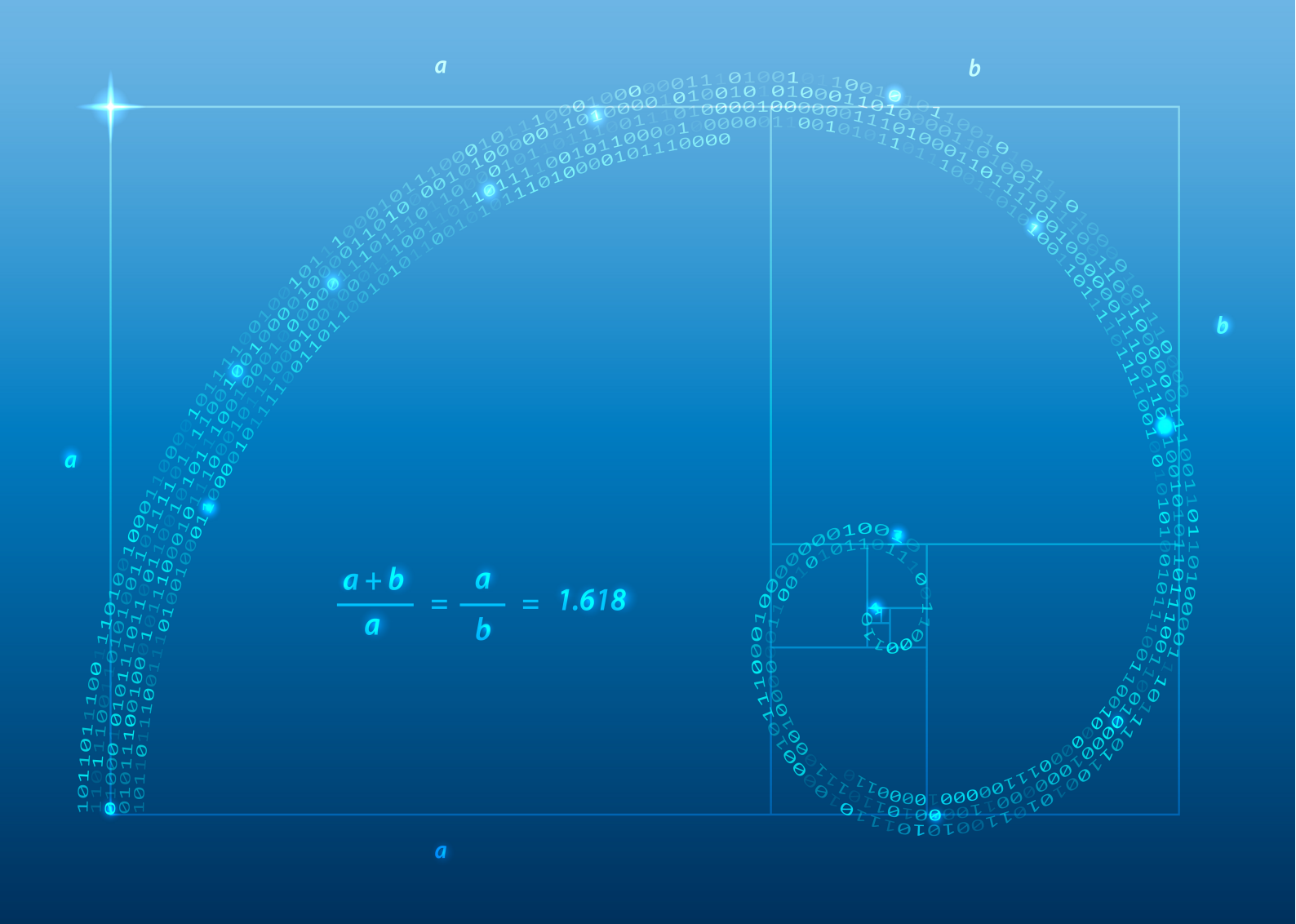
Uso de Perplexity 209

Uso de M365 Copilot 211

Uso de KIMI 214

Uso de Gemini 218

La ética de la IA en el aprendizaje de integrales indefinidas 226



<https://tinyurl.com/2d43gzmj>

CAPÍTULO I

Definiciones preliminares

Introducción

La radicación y la potenciación de números reales son dos operaciones inversas, puesto que, si al resultado de elevar un número real x a un exponente n , x^n , se le toma la raíz n -ésima, $\sqrt[n]{x^n}$, el resultado es el número real x original. Por ejemplo:

si

$$2^3 = 8,$$

entonces:

$$\sqrt[3]{8} = 2.$$

Así como la radicación es la operación inversa de la potenciación, la integración es la operación inversa de la derivación. Es decir, si se deriva la función $y = f(x)$ y luego al resultado se le integra de forma indefinida, la solución es la función $f(x)$ original sumada una constante c [1, 11].

Esto es, si:

$$y = f(x),$$

derivando se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

despejando dy se obtiene:

$$dy = f'(x)dx.$$

Ahora bien, al tomar la integral indefinida a ambos lados de esta ecuación, esto es:

$$\int dy = \int f'(x)dx,$$

se obtiene:

$$y = f(x) + c.$$

Primitiva

Definición

Se dice que $F(x)$ es primitiva o antiderivada de $y = f(x)$, para todo $x \in]a, b[$, si $F(x)$ es diferenciable para todo $x \in]a, b[$, es decir, es continua en este intervalo, tal que [1, 11, 2, 9]:

$$F'(x) = f(x).$$

Ejemplos:

1. $F(x) = \frac{x^5}{5}$ es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{x^5}{5}\right)}{dx} = x^4 = f(x).$$

2. $G(x) = \text{sen}(x)$ es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G'(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{d\text{sen}(x)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

Propiedades de la primitiva

1. Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente y α es una constante cualquiera, entonces [1, 11]:

- a) $\alpha F(x)$ es primitiva de $\alpha f(x)$.

Si $F(x) = \text{sen}(x)$ es primitiva de $f(x) = \cos(x)$ y $\alpha = 5$, entonces $\alpha F(x) = 5\text{sen}(x)$ es primitiva de $\alpha f(x) = 5\cos(x)$.

- b) $F(x) + G(x)$ es primitiva de $f(x) + g(x)$.

Si $F(x) = \frac{x^5}{5}$ es primitiva de $f(x) = x^4$ y $G(x) = \text{sen}(x)$ es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, entonces $F(x) + G(x) = \frac{x^5}{5} + \text{sen}(x)$ es primitiva de $f(x) + g(x) = x^4 + \cos(x)$.

2. Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de la función $f(x)$, entonces $F(x)$ y $G(x)$ difieren únicamente en una constante [1, 16, 10, 5].

$F(x) = \tan^2(x)$ y $G(x) = \sec^2(x)$ son primitivas de la función $f(x) = 2\tan(x)\sec^2(x)$ ya que $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$

Primitiva genérica

La primitiva genérica es aquella primitiva que genera a todas y cada una de las primitivas de una función. Por lo tanto, si la primitiva de la función $f(x)$ es $F(x)$, entonces la primitiva genérica es [1, 11, 10]:

$$F(x) + c.$$

Nótese que sin importar el valor de la constante c , $F(x) + c$ siempre será una primitiva de $f(x)$, ya que:

$$\frac{d(F(x) + c)}{dx} = f(x).$$

Veamos algunos ejemplos.

1. $F_1(x) = \frac{x^5}{5} + 10$ es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F_1'(x) = \frac{d\left(\frac{x^5}{5} + 10\right)}{dx} = x^4 = f(x).$$

- $F_2(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}$, también es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F_2'(x) = \frac{d\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}\right)}{dx} = x^4 = f(x).$$

- $F_3(x) = \frac{x^5}{5} - 0,7$, también es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F_3'(x) = \frac{d\left(\frac{x^5}{5} - 0,7\right)}{dx} = x^4 = f(x).$$

- $F_4(x) = \frac{x^5}{5} + e$, también es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F_4'(x) = \frac{d\left(\frac{x^5}{5} + e\right)}{dx} = x^4 = f(x).$$

Por lo tanto, en forma general:

- $F(x) = \frac{x^5}{5} + c$ es primitiva de $f(x) = x^4$, puesto que:

$$F'(x) = \frac{d\left(\frac{x^5}{5} + c\right)}{dx} = x^4 = f(x)$$

2. $G_1(x) = \text{sen}(x) + \frac{1}{2}$ es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G_1'(x) = \frac{d\left(\text{sen}(x) + \frac{1}{2}\right)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

$G_2(x) = \text{sen}(x) - 1$ es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G_2'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) - 1)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

$G_3(x) = \text{sen}(x) + 1,3$ es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G_3'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) + 1,3)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

$G_4(x) = \text{sen}(x) - \pi$, es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G_4'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) - \pi)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

Por lo tanto, en forma general:

$G(x) = \text{sen}(x) + c$, es primitiva de $g(x) = \cos(x)$, puesto que:

$$G'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) + c)}{dx} = \cos(x) = g(x).$$

Interpretación Geométrica

La primitiva genérica o antiderivada representa a una familia de curvas.

Ejemplo:

Determinar la primitiva genérica de $f(x) = 2x$ y graficarla para los valores de $c = -2, -1, 0, 1$ y 2 .

La primitiva genérica es $F(x) = x^2 + c$, ya que $\frac{d(x^2 + c)}{dx} = 2x$

Dependiendo de los valores que se den a la constante arbitraria c podemos obtener un número infinito de funciones que sean primitivas de $f(x)$. En particular para los cinco valores de c dados, se tienen las siguientes primitivas:

$$\text{Si } c = -2 \implies F_1(x) = x^2 - 2$$

$$\text{Si } c = -1 \implies F_2(x) = x^2 - 1$$

$$\text{Si } c = 0 \implies F_3(x) = x^2$$

$$\text{Si } c = 1 \implies F_4(x) = x^2 + 1$$

$$\text{Si } c = 2 \implies F_5(x) = x^2 + 2$$

Graficando estas funciones, se tiene:

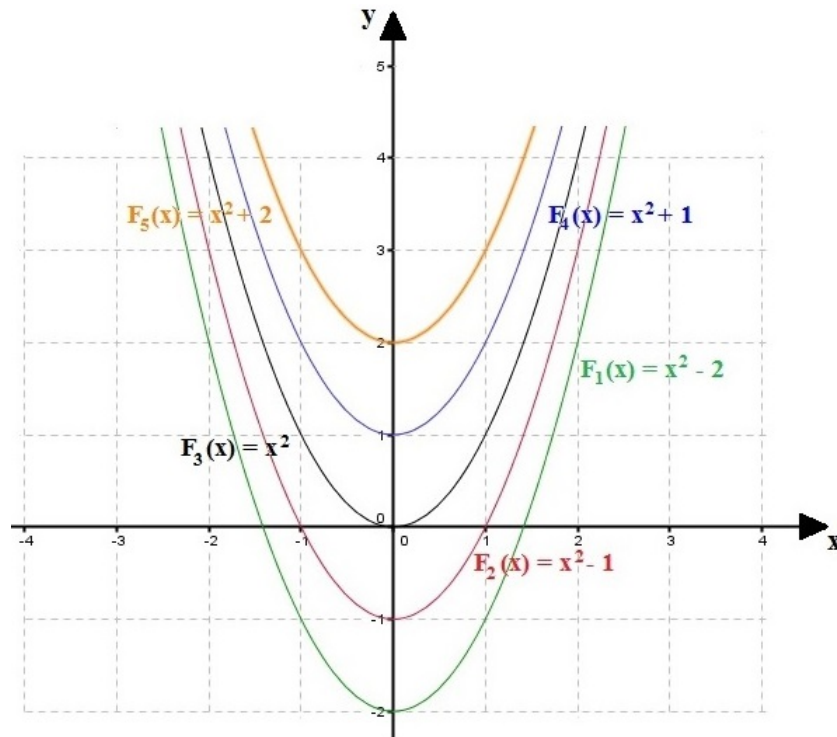


Figura I.1: Gráfica de algunas primitivas de $f(x) = 2x$

Como se puede observar en la figura I.1, la primitiva genérica $F(x) = x^2 + c$ representa una familia de parábolas simétricas al eje y , cuyas directrices son paralelas al eje x y sus vértices se encuentran sobre el eje y .

El valor de la constante c traslada verticalmente la gráfica de la función. Si el valor de la constante c es negativo la gráfica se traslada c unidades hacia abajo, mientras que si es positivo se traslada c unidades hacia arriba [1, 10].

Notación

La integral indefinida se nota:

$$\int f(x)dx$$

donde:

$\int$ es el símbolo de integración

$f(x)$ el integrando, y

$f(x) dx$ es el elemento de integración [11, 16, 3, 1]

Principios

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$
2. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$
3. $\int d[f(x)] = f(x) + c$

Propiedades de la integral indefinida

1. $\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$
2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'dx = f(x) \cdot g(x) + c$
4. $\int \left[\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \right] dx = \int \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
5. $\int f'[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int [(f \circ g)(x)]'dx = (f \circ g)(x) + c$

Fórmulas de integración inmediata

Existen muchos ejercicios que se pueden resolver aplicando de forma directa una fórmula de integración. Estas fórmulas se obtienen aplicando el criterio de que la integral es la operación inversa de la derivación.

Por ejemplo, si se conoce que la derivada de $\ln(x)$ es $\frac{1}{x}$, entonces se puede deducir que la $\int \frac{1}{x} dx$ es $\ln(x) + c$.

A continuación se presenta una tabla con estas fórmulas [1, 11, 16, 2, 4, 9].

Tabla

1. $\int dx = x + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (\forall n \in \mathbb{R} - \{-1\})$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$5. \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$6. \int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$7. \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$$

$$8. \int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + c$$

$$9. \int \sec(x)\tan(x) dx = \sec(x) + c$$

$$10. \int \csc(x)\cot(x) dx = -\csc(x) + c$$

$$11. \int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$12. \int \cot(x) dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + c$$

$$13. \int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c$$

$$14. \int \csc(x) dx = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + c$$

$$15. \int \operatorname{senh}(x) dx = \cosh(x) + c$$

$$16. \int \cosh(x) dx = \operatorname{senh}(x) + c$$

$$17. \int \operatorname{sech}^2(x) dx = \tanh(x) + c$$

$$18. \int \operatorname{csch}^2(x) dx = -\coth(x) + c$$

$$19. \int \operatorname{sech}(x)\tanh(x) dx = -\operatorname{sech}(x) + c$$

$$20. \int \operatorname{csch}(x)\coth(x) dx = -\operatorname{csch}(x) + c$$

$$21. \int \tanh(x) dx = \ln|\cosh(x)| + c$$

$$22. \int \coth(x) dx = \ln|\operatorname{senh}(x)| + c$$

23. $\int \operatorname{sech}(x) dx = 2 \arctan(e^x) + c$
24. $\int \operatorname{csch}(x) dx = \ln \left| \tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + c = -\operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) + c$
26. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \left(\frac{x}{a} \right) + c$
27. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{|x|}{a} \right) + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arccsc} \left(\frac{|x|}{a} \right) + c, \quad \text{Si } a > 0$
28. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$
30. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$
31. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + c$
32. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + c$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales mediante la aplicación de las propiedades de la integral indefinida y las fórmulas de integración inmediata.

$$1. \int \left(\sqrt[7]{x^{13}} - \cos(x) + \frac{7}{4 - 3x^2} + 9 \tan(x) \right) dx$$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\sqrt[7]{x^{13}} - \cos(x) + \frac{7}{4 - 3x^2} + 9 \tan(x) \right) dx \\ &= \int \sqrt[7]{x^{13}} dx - \int \cos(x) dx + 7 \int \frac{dx}{4 - 3x^2} + 9 \int \tan(x) dx \end{aligned}$$

Designamos como I_1 , I_2 , I_3 e I_4 respectivamente a cada una de las integrales de la expresión anterior y las resolvemos por separado.

$$\text{a) } I_1 = \int \sqrt[7]{x^{13}} dx$$

Escribamos la raíz como potencia, esto es $\sqrt[7]{x^{13}} = x^{\frac{13}{7}}$, de ahí que

$$I_1 = \int x^{\frac{13}{7}} dx$$

Aplicamos la fórmula 3

$$I_1 = \frac{7}{20} x^{\frac{20}{7}} + c_1$$

Por último, escribamos el exponente como raíz

$$I_1 = \frac{7}{20} \sqrt[7]{x^{20}} + c_1$$

$$\text{b) } I_2 = \int \cos(x) dx$$

Aplicamos la fórmula 6

$$I_2 = \text{sen}(x) + c_2$$

$$\text{c) } I_3 = 7 \int \frac{dx}{4 - 3x^2}$$

Sacamos de factor común el (-3) en el denominador

$$I_3 = -\frac{7}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{3}}$$

Aplicamos la fórmula 28, con el valor de $a^2 = \frac{4}{3}$, es decir, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, por lo tanto

$$I_3 = -\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + c_3$$

Simplificamos

$$I_3 = -\frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + c_3$$

$$d) \quad I_4 = 9 \int \tan(x) \, dx$$

Aplicamos la fórmula 11

$$I_4 = -9 \ln|\cos(x)| + c_4$$

Dado que $I = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{7}{20} \sqrt[3]{x^{20}} + c_1 - (\sin(x) + c_2) + \left(-\frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + c_3 \right) + (-9 \ln|\cos(x)| + c_4) \\ &= \frac{7}{20} \sqrt[3]{x^{20}} + c_1 - \sin(x) - c_2 - \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + c_3 - 9 \ln|\cos(x)| + c_4 \\ &= \frac{7}{20} \sqrt[3]{x^{20}} - \sin(x) - \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| - 9 \ln|\cos(x)| + c \end{aligned}$$

Como se puede ver en el último paso la suma y resta de las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 puede ser sustituida por una sola constante c , de ahí que, cuando se resuelva la suma o resta de varias integrales indefinidas, se debe colocar una sola constante una vez que se han resuelto todas las integrales.

$$2. \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^8}} + \frac{5}{\sqrt{25 - 9x^2}} - x(x - 3)(x^2 + 5) + \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) dx$$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^8}} + \frac{5}{\sqrt{25 - 9x^2}} - x(x - 3)(x^2 + 5) + \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^8}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}} - \int x(x - 3)(x^2 + 5) \, dx + \int \frac{dx}{1 + \cos(x)} \end{aligned}$$

Designamos como I_1, I_2, I_3 e I_4 respectivamente a cada una de las integrales de la expresión anterior y las resolvemos por separado.

$$a) \quad I_1 = 2 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^8}}$$

Escribamos la raíz como potencia, esto es $\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} = x^{-\frac{8}{3}}$, de ahí que

$$I_1 = 2 \int x^{-\frac{8}{3}} dx$$

Aplicamos la fórmula 3

$$I_1 = 2 \left(-\frac{3}{5} x^{-\frac{5}{3}} \right) + c_1 = -\frac{6}{5} x^{-\frac{5}{3}} + c_1$$

Por último, escribamos el exponente como raíz

$$I_1 = -\frac{6}{5 \sqrt[3]{x^5}} + c_1$$

$$\text{b) } I_2 = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$$

En la expresión que se encuentra dentro de la raíz sacamos de factor común el 9

$$I_2 = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{9 \left(\frac{25}{9} - x^2 \right)}}$$

Aplicamos la propiedad de la radicación $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$I_2 = \frac{5}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{9} - x^2}}$$

Aplicamos la fórmula 25, con el valor de $a^2 = \frac{25}{9}$, es decir, $a = \frac{5}{3}$, por lo tanto

$$I_2 = \frac{5}{3} \arcsen \left(\frac{x}{\frac{5}{3}} \right) + c_2$$

Simplificamos

$$I_2 = \frac{5}{3} \arcsen \left(\frac{3x}{5} \right) + c_2$$

$$\text{c) } I_3 = \int x(x-3)(x^2+5) dx$$

Multiplicamos los polinomios que se encuentran dentro de la integral

$$I_3 = \int (x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x) dx$$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida

$$I_3 = \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx - 15 \int x dx$$

Aplicamos la fórmula 3 en cada integral

$$I_3 = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} + c_3$$

d)
$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + \cos(x)}$$

Esta integral no es inmediata, sin embargo, se la puede transformar en una resta de integrales inmediatas multiplicando el numerador y denominador por $1 - \cos(x)$, esto es

$$I_4 = \int \frac{1}{1 + \cos(x)} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x)} dx$$

Realizamos el producto de las fracciones

$$I_4 = \int \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$$

En el denominador, aplicamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

De ahí que,

$$I_4 = \int \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx$$

Separamos en la resta de dos integrales

$$I_4 = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx - \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx$$

Aplicamos las identidades trigonométricas

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \quad ; \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Por lo tanto,

$$I_4 = \int \csc^2(x) dx - \int \cot(x) \csc(x) dx$$

Aplicamos las fórmulas 8 y 10, respectivamente

$$I_4 = -\cot(x) - (-\csc(x)) + c_4$$

es decir,

$$I_4 = -\cot(x) + \csc(x) + c_4$$

Dado que $I = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$, se tiene que

$$I = -\frac{6}{5\sqrt[3]{x^5}} + c_1 + \frac{5}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{3x}{5}\right) + c_2 - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} + c_3\right) + (-\cot(x) + \csc(x) + c_4)$$

$$I = -\frac{6}{5\sqrt[3]{x^5}} + c_1 + \frac{5}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{3x}{5}\right) + c_2 - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{15x^2}{2} - c_3 - \cot(x) + \csc(x) + c_4$$

$$I = -\frac{6}{5\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{3x}{5}\right) - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{15x^2}{2} - \cot(x) + \csc(x) + c$$

$$3. \int \left(\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} - \sqrt{3x^2 + 49} - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} - \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 17}} \right) dx$$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} - \sqrt{3x^2 + 49} - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} - \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 17}} \right) dx \\ &= \int \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} dx - \int \sqrt{3x^2 + 49} dx - \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 17}} \end{aligned}$$

Designamos como I_1 , I_2 , I_3 e I_4 respectivamente a cada una de las integrales de la expresión anterior y las resolvemos por separado.

$$\text{a) } I_1 = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} dx$$

Esta integral la podemos reescribir como

$$I_1 = \int \frac{1}{\sinh(x)} \cdot \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} dx$$

Aplicamos las identidades hiperbólicas

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \quad ; \quad \operatorname{coth}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Por lo tanto,

$$I_1 = \int \operatorname{csch}(x) \operatorname{coth}(x) dx$$

Aplicamos la fórmula 20

$$I_1 = -\operatorname{csch}(x) + c_1$$

$$\text{b) } I_2 = \int \sqrt{3x^2 + 49} dx$$

Sacamos factor común el 3 dentro de la integral

$$I_2 = \int \sqrt{3 \left(x^2 + \frac{49}{3} \right)} dx$$

Aplicamos la propiedad de la radicación $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$I_2 = \sqrt{3} \int \sqrt{x^2 + \frac{49}{3}} dx$$

A continuación, aplicamos la fórmula 30, con el valor de $a^2 = \frac{49}{3}$, por lo tanto

$$I_2 = \sqrt{3} \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \frac{49}{3}} + \frac{49}{6} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{49}{3}} \right| \right) + c_2$$

es decir,

$$I_2 = \frac{\sqrt{3} x}{2} \sqrt{\frac{3x^2 + 49}{3}} + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| x + \sqrt{\frac{3x^2 + 49}{3}} \right| + c_2$$

Aplicamos la propiedad de las raíces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, en el primer término y sacamos mínimo común múltiplo en el argumento del logaritmo natural del segundo término

$$I_2 = \frac{\sqrt{3} x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3x^2 + 49}}{\sqrt{3}} + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2 + 49}}{\sqrt{3}} \right| + c_2$$

Simplificamos el primer término y aplicamos la propiedad de los logaritmos $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ en el segundo término

$$I_2 = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3x^2 + 49} + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3} x + \sqrt{3x^2 + 49} \right| - \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln |\sqrt{3}| + c_2$$

$$c) I_3 = \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} dx$$

Esta integral no es inmediata, sin embargo, se la puede transformar en una resta de integrales inmediatas, aplicando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

en el numerador, de ahí que

$$I_3 = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} dx$$

Separamos en la resta de dos fracciones homogéneas

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos(x)} dx - \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} dx$$

es decir,

$$I_3 = \int \sec(x) dx - \int \cos(x) dx$$

Aplicamos las fórmulas 13 y 6, respectivamente

$$I_3 = \ln|\sec(x) + \tan(x)| - \sec(x) + c_3$$

$$d) \quad I_4 = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 17}}$$

Sacamos factor común el 4 dentro de la integral

$$I_4 = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4 \left(x^2 + \frac{17}{4} \right)}}$$

Aplicamos la propiedad de la radicación $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$I_4 = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{17}{4}}}$$

A continuación, aplicamos la fórmula 29, con el valor de $a^2 = \frac{17}{4}$, por lo tanto

$$I_4 = \frac{3}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{17}{4}} \right| + c_4$$

Sacamos mínimo común múltiplo en el argumento del logaritmo natural

$$I_4 = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 17}}{2} \right| + c_4$$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln(a) - \ln(b)$

$$I_4 = \frac{3}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 + 17} \right| - \frac{3}{2} \ln|2| + c_4$$

Dado que $I = I_1 - I_2 - I_3 - I_4$, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= -\operatorname{csch}(x) + c_1 - \left(\frac{x}{2} \sqrt{3x^2 + 49} + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3} x + \sqrt{3x^2 + 49} \right| - \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3} \right| + c_2 \right) - \\ &\quad - (\ln|\sec(x) + \tan(x)| - \sec(x) + c_3) - \left(\frac{3}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 + 17} \right| - \frac{3}{2} \ln|2| + c_4 \right) \\ &= -\operatorname{csch}(x) + c_1 - \frac{x}{2} \sqrt{3x^2 + 49} - \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3} x + \sqrt{3x^2 + 49} \right| + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln \left| \sqrt{3} \right| - c_2 - \\ &\quad - \ln|\sec(x) + \tan(x)| + \sec(x) - c_3 - \frac{3}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 + 17} \right| + \frac{3}{2} \ln|2| - c_4 \end{aligned}$$

Reemplazamos

$$c_1 + \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln |\sqrt{3}| - c_2 - c_3 + \frac{3}{2} \ln |2| - c_4$$

por una nueva constante c . La solución es

$$\begin{aligned} I = & -\operatorname{csch}(x) - \frac{x}{2} \sqrt{3x^2 + 49} - \frac{49\sqrt{3}}{6} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 + 49}| - \\ & - \ln |\sec(x) + \tan(x)| + \operatorname{sen}(x) - \frac{3}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 + 17}| + c \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

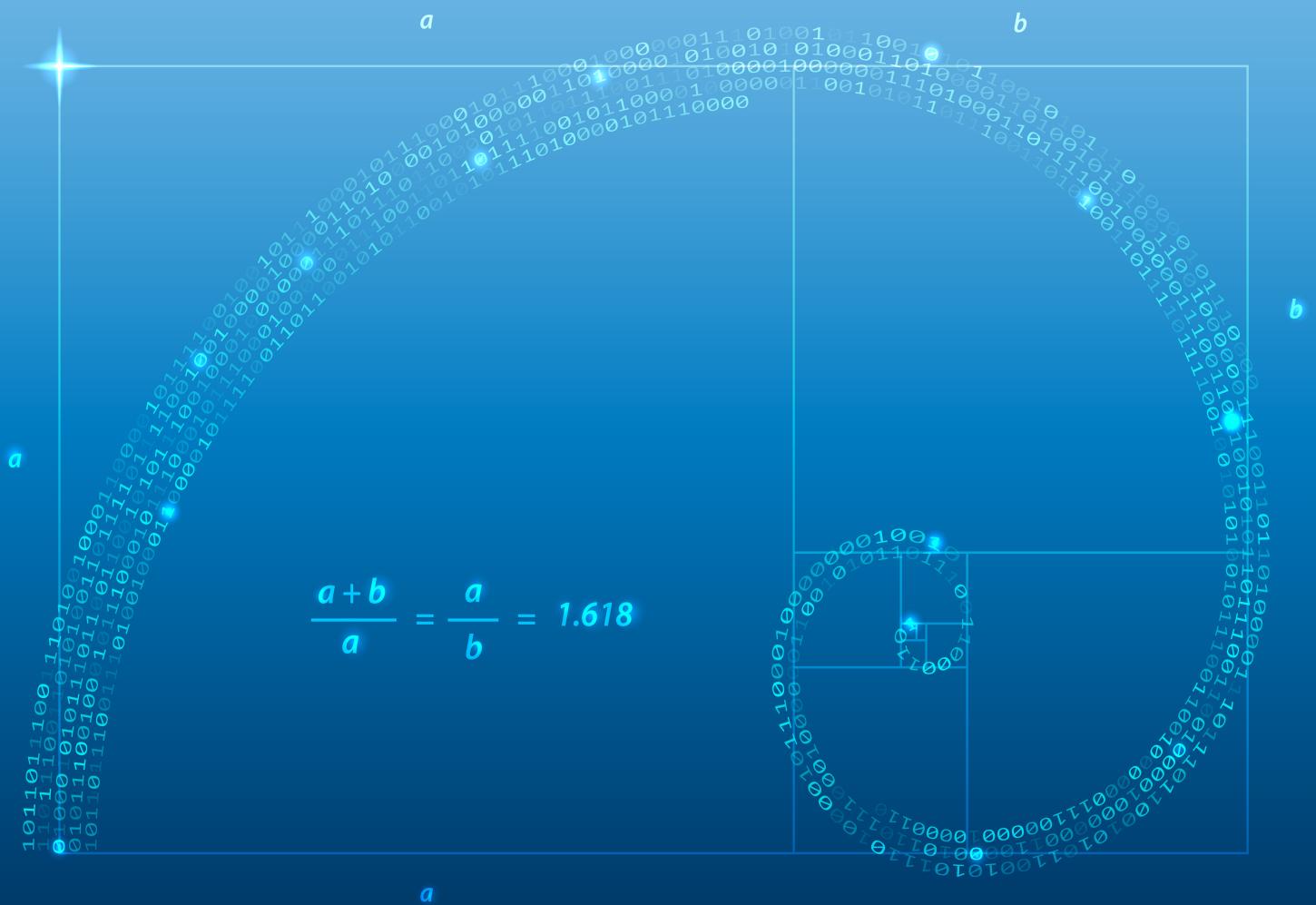
Resolver las siguientes integrales utilizando las propiedades de la integral indefinida y las fórmulas de integración inmediata.

1. $\int \left(24\sqrt[7]{x^5} - \sec(x) \right) dx$
2. $\int \left(\frac{4}{2x^2 - 5} - \sqrt{4x^2 - 1} - e^x \right) dx$
3. $\int \left(\pi^u + \frac{3}{u\sqrt{2u^2 - 9}} + \operatorname{csch}(u) \right) du$
4. $\int \left(\frac{7}{x} + x(x^2 + 1) - \frac{6}{1 - \cos(x)} + \sqrt{64 - 5x^2} \right) dx$
5. $\int \left(\sqrt{25 - 5x^2} - \frac{13}{\operatorname{sen}(x)} + 18 \operatorname{sech}(x) \right) dx$
6. $\int \left(\frac{8}{u\sqrt[8]{u^5}} - \frac{5}{1 + \operatorname{sen}(u)} + \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)} \right) du$
7. $\int \left(8z^2\sqrt[5]{z^3} - \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh^2(z)} - \frac{4}{\sqrt{16 - 49z^2}} - \frac{2}{7z^2 + 4} \right) dz$
8. $\int \left(9 \cot(x) + \frac{\sqrt{9x^2 + 25}}{2} - 13 \frac{\cosh^2(x)}{\operatorname{senh}(x)} - \frac{7}{\sqrt{x^2 - 12}} \right) dx$
9. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{t^2}} + 3 \cosh(t) - \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}} + 6^t \right) dt$

$$10. \int \left(\frac{4}{w} - 7\sec^2(w) + \frac{9}{w^2 + 49} - \frac{1}{w\sqrt{w^2 - 16}} \right) dw$$

$$11. \int \left(\frac{3\sqrt{2}}{x^2 + 1} - \frac{5}{\sqrt{x^2 + 25}} + \csc(x)\cot(x) \right) dx$$

$$12. \int \left(\frac{z^3 - 5z^2 + 4z}{z^2} + \tan(z) \right) dz$$



<https://tinyurl.com/2d43gzmj>

CAPÍTULO II

Técnicas básicas de integración

Integración por sustitución

Permite calcular integrales indefinidas de la forma

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, mediante un cambio de variable, una integral poco conocida se puede convertir en una integral que se pueda evaluar mediante las fórmulas de integración inmediata haciendo la sustitución [1, 16, 11, 3, 10],

$$u = g(x) \implies du = g'(x) dx$$

Por lo tanto:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$$

Si

$$u = \sqrt{x} \implies du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx &= \int \text{sen}(u) du \\ &= -\cos(u) + c \\ &= -\cos(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

$$2. \int 3x^8 e^{-\frac{5x^9}{7}} dx$$

Si

$$\begin{aligned} u = -\frac{5x^9}{7} &\implies du = -\frac{45x^8}{7} dx \\ -\frac{7}{45} du &= x^8 dx \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int 3x^8 e^{-\frac{5x^9}{7}} dx &= -\frac{7}{15} \int e^u du \\
 &= -\frac{7}{15} e^u + c \\
 &= -\frac{7}{15} e^{-\frac{5x^9}{7}} + c
 \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx$$

Si

$$u = x^2 - 9x + 1 \Rightarrow du = (2x - 9)dx$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{u^{1/2}}{1/2} + c \\
 &= 2\sqrt{u} + c \\
 &= 2\sqrt{x^2-9x+1} + c
 \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{\csc(3x)\cot(3x)}{\sqrt{9-4\csc^2(3x)}} dx$$

Si

$$\begin{aligned}
 u = \csc(3x) &\Rightarrow du = -3\csc(3x)\cot(3x) dx \\
 -\frac{du}{3} &= \csc(3x)\cot(3x) dx
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\csc(3x)\cot(3x)}{\sqrt{9-4\csc^2(3x)}} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{9-4u^2}} \\
 &= -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{9}{4}-u^2}} \\
 &= -\frac{1}{6} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2u}{3}\right) + c \\
 &= -\frac{1}{6} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\csc(3x)}{3}\right) + c
 \end{aligned}$$

5. $\int \frac{x^4 - 2}{(3 - 2x)^7} dx$

Si

$$\begin{aligned} u = 3 - 2x &\Rightarrow du = -2 dx \\ -\frac{du}{2} &= dx \end{aligned}$$

Despejando x , se tiene

$$x = \frac{3 - u}{2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2}{(3 - 2x)^7} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{\left(\frac{3-u}{2}\right)^4 - 2}{u^7} du \\ &= -\frac{1}{32} \int \frac{(3-u)^4 - 32}{u^7} du \\ &= -\frac{1}{32} \int \frac{81 - 108u + 54u^2 - 12u^3 + u^4 - 32}{u^7} du \\ &= -\frac{1}{32} \int \frac{49 - 108u + 54u^2 - 12u^3 + u^4}{u^7} du \\ &= -\frac{49}{32} \int u^{-7} du + \frac{27}{8} \int u^{-6} du - \frac{27}{16} \int u^{-5} du + \\ &\quad + \frac{3}{8} \int u^{-4} du - \frac{1}{32} \int u^{-3} du \\ &= \frac{49}{192} u^{-6} - \frac{27}{40} u^{-5} + \frac{27}{64} u^{-4} - \frac{1}{8} u^{-3} + \frac{1}{64} u^{-2} + c \\ &= \frac{49}{192u^6} - \frac{27}{40u^5} + \frac{27}{64u^4} - \frac{1}{8u^3} + \frac{1}{64u^2} + c \\ &= \frac{49}{192(3-2x)^6} - \frac{27}{40(3-2x)^5} + \frac{27}{64(3-2x)^4} - \\ &\quad - \frac{1}{8(3-2x)^3} + \frac{1}{64(3-2x)^2} + c \end{aligned}$$

6. $\int \frac{dx}{1 + 2\sqrt{x}}$

Si

$$\begin{aligned} u = 1 + 2\sqrt{x} &\Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ \sqrt{x} du &= dx \\ \frac{u-1}{2} du &= dx \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1+2\sqrt{x}} &= \int \frac{\left(\frac{u-1}{2}\right) du}{u} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u} du \\
 &= \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
 &= \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \ln(u) + c \\
 &= \frac{1+2\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+2\sqrt{x}| + c \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|1+2\sqrt{x}| + c \\
 &= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|1+2\sqrt{x}| + c_1
 \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

Si

$$\begin{aligned}
 u^2 = e^x + 1 &\Rightarrow 2u \, du = e^x \, dx \\
 \frac{2u \, du}{e^x} &= dx \\
 \frac{2u \, du}{u^2 - 1} &= dx
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \int \frac{2u \, du}{u^2 - 1} \\
 &= 2 \int \frac{du}{u^2 - 1} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c \\
 &= \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| + c
 \end{aligned}$$

$$8. \int 2^{(\cos^3(x)-3\cos(x))} \operatorname{sen}^3(x) dx$$

Si

$$\begin{aligned}
 u = \cos^3(x) - 3\cos(x) &\Rightarrow du = (-3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(x)) \, dx \\
 du &= 3\operatorname{sen}(x) (1 - \cos^2(x)) \, dx
 \end{aligned}$$

$$du = 3\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}^2(x) dx$$

$$du = 3\operatorname{sen}^3(x) dx$$

$$\frac{du}{3} = \operatorname{sen}^3(x) dx$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int 2^{(\cos^3(x)-3\cos(x))} \operatorname{sen}^3(x) dx &= \frac{1}{3} \int 2^u du \\ &= \frac{2^u}{3 \ln(2)} + c \\ &= \frac{2^{(\cos^3(x)-3\cos(x))}}{3 \ln(2)} + c \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx$$

$$2. \int (2x - 7)(x^2 - 7x + 5)^7 dx$$

$$3. \int \frac{6x^2 - 4x - 2}{\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 7}} dx$$

$$4. \int \frac{\operatorname{senh}(2x)}{\sqrt[5]{16 - 3\operatorname{senh}^2(x)}} dx$$

$$5. \int \frac{3^{x^2+2} - 4x}{3^{x^2}} dx$$

$$6. \int \frac{\ln^5(x) - 7\ln^3(x) + 9}{x \ln(x)} dx$$

$$7. \int \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}^2(3x) \sqrt{\csc^2(3x) + 11}} dx$$

$$8. \int \frac{a \operatorname{sen}(p)}{\cos^3(p)} \sqrt{b^2 - a^2 \tan^4(p)} dp$$

$$9. \int \frac{x^5 + 3}{(2 - x)^4} dx$$

$$10. \int \frac{\tan(4x) \ln(\sec(4x))}{\sqrt{25 \ln^2(\sec(4x)) + 64}} dx$$

$$11. \int \frac{2^{\ln(x)+3}}{x(2^{\ln(x^2)+6} - 16)} dx$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{9\sqrt{x} + 16}}$$

Integración de potencias naturales de funciones trigonométricas

Caso 1. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x) dx$ ó $\int \cos^m(x) dx$

a) Si m es entero positivo PAR, entonces $m = 2r$; $r \in \mathbb{Z}^+$ [11, 16, 2]

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m(x) dx &= \int \operatorname{sen}^{2r}(x) dx & \int \cos^m(x) dx &= \int \cos^{2r}(x) dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^r dx & &= \int (\cos^2(x))^r dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^r dx & &= \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^r dx \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos si m es par

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^2(x) dx$

Dado que $m = 2r = 2 \Rightarrow r = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2(x) dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + c \end{aligned}$$

2. $\int \cos^4(2x - 5) dx$

Dado que $m = 2r = 4 \Rightarrow r = 2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \cos^4(2x - 5) dx &= \int \left(\frac{1 + \cos(4x - 10)}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(4x - 10) + \cos^2(4x - 10)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(4x - 10) dx + \\
&\quad + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(8x - 20)}{2} dx \\
&= \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(4x - 10)}{4} + \frac{1}{8} \int dx + \\
&\quad + \frac{1}{8} \int \cos(8x - 20) dx \\
&= \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \text{sen}(4x - 10) + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{\text{sen}(8x - 20)}{8} + c \\
&= \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \text{sen}(4x - 10) + \frac{1}{64} \text{sen}(8x - 20) + c
\end{aligned}$$

b) Si m es entero positivo IMPAR, entonces $m = 2r + 1$; $r \in \mathbb{Z}^+$ [16, 3, 11, 2]

Para el seno se tiene

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^m(x) dx &= \int \text{sen}^{2r+1}(x) dx \\
&= \int \text{sen}^{2r}(x) \cdot \text{sen}(x) dx \\
&= \int (\text{sen}^2(x))^r \cdot \text{sen}(x) dx \\
&= \int (1 - \cos^2(x))^r \cdot \text{sen}(x) dx
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\text{sen}(x) dx$$

se sigue que

$$\int \text{sen}^m(x) dx = - \int (1 - u^2)^r du$$

Mientras que para el coseno se tiene

$$\begin{aligned}
\int \cos^m(x) dx &= \int \cos^{2r+1}(x) dx \\
&= \int \cos^{2r}(x) \cdot \cos(x) dx \\
&= \int (\cos^2(x))^r \cdot \cos(x) dx \\
&= \int (1 - \text{sen}^2(x))^r \cdot \cos(x) dx
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \text{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

se sigue que

$$\int \cos^m(x) dx = \int (1 - u^2)^r du$$

Ejercicios Resueltos si m es impar

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \sen^5(x) dx$

Dado que $m = 2r + 1 = 5 \Rightarrow r = 2$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \sen^5(x) dx &= \int (\sen^2(x))^2 \cdot \sen(x) dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x))^2 \cdot \sen(x) dx; \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sen(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \sen^5(x) dx &= - \int (1 - u^2)^2 du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= - \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} \right) + c \\ &= -\cos(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + c \end{aligned}$$

2. $\int \cos^7(3x - 1) dx$

Haciendo la sustitución:

$$z = 3x - 1 \Rightarrow dz = 3 dx$$

Se tiene que:

$$\int \cos^7(3x - 1) dx = \frac{1}{3} \int \cos^7(z) dz.$$

Ahora bien, dado que $m = 2r + 1 = 7 \Rightarrow r = 3$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\int \cos^7(3x - 1) dx &= \frac{1}{3} \int (\cos^2(z))^3 \cdot \cos(z) dz \\ &= \frac{1}{3} \int (1 - \sin^2(z))^3 \cdot \cos(z) dz;\end{aligned}$$

Realizando la sustitución:

$$u = \sin(z) \Rightarrow du = \cos(z) dz$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \cos^7(3x - 1) dx &= \frac{1}{3} \int (1 - u^2)^3 du \\ &= \frac{1}{3} \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\ &= \frac{1}{3} \left(u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right) + c \\ &= \frac{\sin(z)}{3} - \frac{\sin^3(z)}{3} + \frac{3\sin^5(z)}{15} - \frac{\sin^7(z)}{21} + c \\ &= \frac{\sin(3x - 1)}{3} - \frac{\sin^3(3x - 1)}{3} + \frac{\sin^5(3x - 1)}{5} - \\ &\quad - \frac{\sin^7(3x - 1)}{21} + c\end{aligned}$$

Caso 2. Integrales de la forma $\int \tan^p(x) dx$ ó $\int \cot^p(x) dx$

a) Si p es entero positivo PAR, entonces $p = 2 + 2r$; $r \in \mathbb{Z}^+ [1, 11, 2]$

Recordando que:

$$\begin{aligned}\tan^2(x) &= \sec^2(x) - 1 \quad \wedge \quad d(\tan(x)) = \sec^2(x) dx \\ \cot^2(x) &= \csc^2(x) - 1 \quad \wedge \quad d(\cot(x)) = -\csc^2(x) dx\end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\int \tan^p(x) dx &= \int \tan^{2+2r}(x) dx \\ &= \int \tan^2(x) \tan^{2r}(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1) \tan^{2r}(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) \tan^{2r}(x) - \tan^{2r}(x)) dx \\ &= \int (\sec^2(x) \tan^{2r}(x) - \tan^{2+2k}(x)) dx; \quad \text{donde } 2r = 2 + 2k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (\sec^2(x)\tan^{2r}(x) - \tan^2(x)\tan^{2k}(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^{2r}(x) - (\sec^2(x) - 1)\tan^{2k}(x)) dx \\
&\vdots \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^{2r}(x) - \sec^2(x)\tan^{2k}(x) + \cdots + \tan^2(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^{2r}(x) - \sec^2(x)\tan^{2k}(x) + \cdots + (\sec^2(x) - 1)) dx
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x)dx$$

Se tiene que:

$$\int \tan^p(x) dx = \int u^{2r} du - \int u^{2k} du + \cdots + \int (\sec^2(x) - 1) dx$$

De la misma manera se puede realizar la $\int \cot^p(x) dx$ con p par.

Ejercicios Resueltos si p es par

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \tan^6(x) dx$$

Sea I la integral propuesta y dado que: $p = 6 = 2 + 2r \Rightarrow 2r = 4$, se sigue que:

$$I = \int \tan^6(x) dx = \int \tan^2(x)\tan^4(x) dx$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int (\sec^2(x) - 1)\tan^4(x) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^4(x) - \tan^4(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^4(x) - \tan^2(x)\tan^2(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^4(x) - (\sec^2(x) - 1)\tan^2(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^4(x) - \sec^2(x)\tan^2(x) + \tan^2(x)) dx \\
&= \int (\sec^2(x)\tan^4(x) - \sec^2(x)\tan^2(x) + \sec^2(x) - 1) dx
\end{aligned}$$

$$= \int \sec^2(x)\tan^4(x) dx - \int \sec^2(x)\tan^2(x) dx + \int \sec^2(x) dx - \int dx$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x)dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} I = \int \tan^6(x)dx &= \int u^4 du - \int u^2 du + \int du - \int dx \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u - x + c \\ &= \frac{\tan^5(x)}{5} - \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) - x + c \end{aligned}$$

$$2. \int \cot^8(x) dx$$

Sea I la integral propuesta y dado que: $p = 8 = 2 + 2r \Rightarrow 2r = 6$, se sigue que:

$$\cot^8(x)dx = \int \cot^2(x)\cot^6(x) dx$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int (\csc^2(x) - 1)\cot^6(x) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \cot^6(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \cot^2(x)\cot^4(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - (\csc^2(x) - 1)\cot^4(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \csc^2(x)\cot^4(x) + \cot^2(x)\cot^2(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \csc^2(x)\cot^4(x) + (\csc^2(x) - 1)\cot^2(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \csc^2(x)\cot^4(x) + \csc^2(x)\cot^2(x) - \cot^2(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x)\cot^6(x) - \csc^2(x)\cot^4(x) + \csc^2(x)\cot^2(x) - \csc^2(x) + 1) dx \\ &= \int \csc^2(x)\cot^6(x)dx - \int \csc^2(x)\cot^4(x)dx + \int \csc^2(x)\cot^2(x)dx - \int \csc^2(x)dx + \int dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \cot(x) \Rightarrow du = -\csc^2(x)dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} I = \int \cot^8(x)dx &= -\int u^6 du + \int u^4 du - \int u^2 du + \int du + \int dx \\ &= -\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u + x + c \\ &= -\frac{\cot^7(x)}{7} + \frac{\cot^5(x)}{5} - \frac{\cot^3(x)}{3} + \cot(x) + x + c \end{aligned}$$

b) Si p es entero positivo IMPAR, entonces $p = 2r + 1$; $r \in \mathbb{Z}^+$ [16, 11, 2]

$$\begin{aligned} \int \tan^p(x)dx &= \int \tan^{2r+1}(x)dx \\ &= \int (\tan^2(x))^r \tan(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^r \tan(x) dx \end{aligned}$$

Se desarrolla el binomio $(\sec^2(x) - 1)^r$ y aplica $d(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x) dx$.

De la misma manera se puede realizar la $\int \cot^p(x)dx$ con p impar.

Ejercicios Resueltos si p es impar

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \tan^7(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \tan^7(x)dx &= \int (\tan^2(x))^3 \tan(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^3 \tan(x) dx \\ &= \int (\sec^6(x) - 3\sec^4(x) + 3\sec^2(x) - 1) \tan(x) dx \\ &= \int \sec^6(x) \tan(x) dx - 3 \int \sec^4(x) \tan(x) dx + \\ &\quad + 3 \int \sec^2(x) \tan(x) dx - \int \tan(x) dx \\ &= \int \sec^5(x) \cdot \sec(x) \tan(x) dx - 3 \int \sec^3(x) \cdot \sec(x) \tan(x) dx + \\ &\quad + 3 \int \sec(x) \cdot \sec(x) \tan(x) dx - \int \tan(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x)\tan(x)dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\int \tan^7(x)dx &= \int u^5 du - 3 \int u^3 du + 3 \int u du - \int \tan(x) dx \\ &= \frac{u^6}{6} - 3 \cdot \frac{u^4}{4} + 3 \cdot \frac{u^2}{2} + \ln|\cos(x)| + c \\ &= \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{3}{4}\sec^4(x) + \frac{3}{2}\sec^2(x) + \ln|\cos(x)| + c\end{aligned}$$

$$2. \int e^t \cot^5(e^t) dt$$

Primera forma de solución.

Sea I la integral y por el cambio de variable, se tiene:

$$\begin{aligned}x &= e^t \\ dx &= e^t dt\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$I = \int e^t \cot^5(e^t) dt = \int \cot^5(x) dx$$

Ahora bien, resolviendo esta integral, se sigue que

$$\begin{aligned}I = \int \cot^5(x) dx &= \int (\cot^2(x))^2 \cot(x) dx \\ &= \int (\csc^2(x) - 1)^2 \cot(x) dx \\ &= \int (\csc^4(x) - 2\csc^2(x) + 1) \cot(x) dx \\ &= \int \csc^4(x) \cot(x) dx - 2 \int \csc^2(x) \cot(x) dx + \int \cot(x) dx \\ &= \int \csc^3(x) \cdot \csc(x) \cot(x) dx - 2 \int \csc(x) \csc(x) \cot(x) dx + \\ &\quad + \int \cot(x) dx\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned}u &= \csc(x) \\ du &= -\csc(x)\cot(x)dx\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}I &= -\int u^3 du + 2\int u du + \int \cot(x) dx \\ &= -\frac{u^4}{4} + 2 \cdot \frac{u^2}{2} + \ln|\operatorname{sen}(x)| + c \\ &= -\frac{\csc^4(x)}{4} + \csc^2(x) + \ln|\operatorname{sen}(x)| + c\end{aligned}$$

Regresando a la variable original t , se obtiene:

$$I = \int e^t \cot^5(e^t) dt = -\frac{\csc^4(e^t)}{4} + \csc^2(e^t) + \ln|\operatorname{sen}(e^t)| + c$$

Segunda forma de solución

También se puede resolver este tipo de integrales con el método utilizado cuando p es par.

Sea I la integral y haciendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned}x &= e^t \\ dx &= e^t dt\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$I = \int e^t \cot^5(e^t) dt = \int \cot^5(x) dx$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\int \cot^5(x) dx &= \int \cot^2(x) \cot^3(x) dx \\ &= \int (\csc^2(x) - 1) \cot^3(x) dx \\ &= \int (\csc^2(x) \cot^3(x) - \cot^3(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x) \cot^3(x) - \cot^2(x) \cot(x)) dx \\ &= \int (\csc^2(x) \cot^3(x) - (\csc^2(x) - 1) \cot(x)) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (csc^2(x)cot^3(x) - csc^2(x)cot(x) + cot(x)) dx \\
&= \int csc^2(x)cot^3(x)dx - \int csc^2(x)cot(x)dx + \int cot(x)dx
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = cot(x) \Rightarrow du = -csc^2(x)dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int cot^5(x)dx &= - \int u^3 du + \int u du + \int cot(x)dx \\
&= -\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + \ln|sen(x)| + c \\
&= -\frac{cot^4(x)}{4} + \frac{cot^2(x)}{2} + \ln|sen(x)| + c
\end{aligned}$$

Regresando a la variable original t , se obtiene:

$$I = \int e^t cot^5(e^t) dt = -\frac{cot^4(e^t)}{4} + \frac{cot^2(e^t)}{2} + \ln|sen(e^t)| + c$$

Nota: el lector puede demostrar que la primitiva obtenida es equivalente a la encontrada con la primera forma de solución.

Caso 3. Integrales de la forma $\int sec^q(x)dx$ ó $\int csc^q(x)dx$

a) Si q es entero positivo PAR, entonces $q = 2 + 2r$; $r \in \mathbb{Z}^+$ [11, 10, 2]

$$\begin{aligned}
\int sec^q(x)dx &= \int sec^{2+2r}(x)dx \\
&= \int sec^{2r}(x)sec^2(x) dx \\
&= \int (sec^2(x))^r sec^2(x) dx \\
&= \int (1 + tan^2(x))^r sec^2(x) dx
\end{aligned}$$

Se desarrolla el binomio $(1 + tan^2(x))^r$ y se aplica $d(tan(x)) = sec^2(x) dx$.

De la misma manera se puede realizar la $\int csc^q(x)dx$ con q par.

Ejercicios Resueltos si q es par

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \sec^6(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \sec^6(x) dx &= \int (\sec^2(x))^2 \sec^2(x) dx \\ &= \int (1 + \tan^2(x))^2 \sec^2(x) dx \\ &= \int (1 + 2\tan^2(x) + \tan^4(x)) \sec^2(x) dx \\ &= \int \sec^2(x) dx + 2 \int \tan^2(x) \sec^2(x) dx + \int \tan^4(x) \sec^2(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \sec^6(x) dx &= \int du + 2 \int u^2 du + \int u^4 du \\ &= u + 2 \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c \\ &= \tan(x) + \frac{2}{3} \tan^3(x) + \frac{\tan^5(x)}{5} + c \end{aligned}$$

$$2. \int \csc^{10}(x) dx$$

Llamando I a la integral propuesta, se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \int \csc^{10}(x) dx \\ &= \int (\csc^2(x))^4 \csc^2(x) dx \\ &= \int (1 + \cot^2(x))^4 \csc^2(x) dx \\ &= \int (1 + 4\cot^2(x) + 6\cot^4(x) + 4\cot^6(x) + \cot^8(x)) \csc^2(x) dx \\ &= \int \csc^2(x) dx + 4 \int \cot^2(x) \csc^2(x) dx + 6 \int \cot^4(x) \csc^2(x) dx + \\ &\quad + 4 \int \cot^6(x) \csc^2(x) dx + \int \cot^8(x) \csc^2(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \cot(x) \Rightarrow du = -\csc^2(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I &= - \int du - 4 \int u^2 du - 6 \int u^4 du - 4 \int u^6 du - \int u^8 du \\
 &= -u - 4 \cdot \frac{u^3}{3} - 6 \cdot \frac{u^5}{5} - 4 \cdot \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + c \\
 &= -\cot(x) - \frac{4}{3}\cot^3(x) - \frac{6}{5}\cot^5(x) - \frac{4}{7}\cot^7(x) - \frac{\cot^9(x)}{9} + c
 \end{aligned}$$

b) Si q es entero positivo IMPAR

Para resolver las integrales $\int \sec^q(x)dx$ ó $\int \csc^q(x)dx$ con q **Impar** se utiliza el método de **integración por partes**, el cuál será estudiado más adelante en este capítulo.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \sec^4(x) dx$
2. $\int \sec^8(4x) dx$
3. $\int \tan^{10}(7z) dz$
4. $\int \cos^{11}(x-2) dx$
5. $\int \tan^{13}(6x-13) dx$
6. $\int \csc^{12}(1-x) dx$
7. $\int \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) dx$
8. $\int \cot^6\left(\frac{2u}{3}\right) du$
9. $\int \tan^8(5x-9) dx$
10. $\int \sec^8(3p) dp$
11. $\int e^z \cos^5(e^z) dz$
12. $\int \frac{\tan^5(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Integración de producto de potencias naturales de funciones trigonométricas

Caso 1. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$

- a) Si los dos exponentes (m y n) son PARES, es decir si m par $\wedge$ n par, se baja el grado de m y n utilizando las fórmulas [1, 2, 16, 4]:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos si m y n son pares

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x) dx$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x) dx &= \int \operatorname{sen}^2(x) (\cos^2(x))^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos(2x)) (1 + \cos(2x))^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(2x))(1 - \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(2x)) \operatorname{sen}^2(2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2(2x) dx + \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2(2x) \cos(2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2(2x) \cos(2x) dx\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \operatorname{sen}(2x) \Rightarrow du = 2\cos(2x) dx$$

para la segunda integral, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x) dx &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos(4x) dx + \frac{1}{16} \int u^2 du \\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + c\end{aligned}$$

$$2. \int \operatorname{sen}^4(x) \cos^4(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^4(x) \cos^4(x) dx &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^2 (\cos^2(x))^2 dx \\
 &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos(2x))^2 (1 + \cos(2x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2(2x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (\operatorname{sen}^2(2x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{64} \int (1 - 2\cos(4x) + \cos^2(4x)) dx \\
 &= \frac{1}{64} \int dx - \frac{1}{32} \int \cos(4x) dx + \frac{1}{64} \int \frac{1 + \cos(8x)}{2} dx \\
 &= \frac{x}{64} - \frac{1}{32} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + \frac{1}{128} \int dx + \frac{1}{128} \int \cos(8x) dx \\
 &= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{128} + \frac{x}{128} + \frac{1}{128} \cdot \frac{\operatorname{sen}(8x)}{8} + c \\
 &= \frac{3}{128}x - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{128} + \frac{\operatorname{sen}(8x)}{1024} + c
 \end{aligned}$$

b) Si uno de los dos exponentes (m o n) es IMPAR, ésto es para los casos:

$$m \text{ par} \quad \wedge \quad n \text{ impar}$$

$$m \text{ impar} \quad \wedge \quad n \text{ par}$$

$$m \text{ impar} \quad \wedge \quad n \text{ impar}$$

Se separa un $\operatorname{sen}(x)$ o $\cos(x)$ de la función trigonométrica que tenga el exponente impar y lo que sobra se lo escribe mediante la cofunción utilizando las fórmulas [16, 11, 2]:

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

Ejercicios Resueltos si m ó n es impar

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^5(x) \cos^{16}(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5(x) \cos^{16}(x) dx &= \int \operatorname{sen}^4(x) \cos^{16}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^2 \cos^{16}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x))^2 \cos^{16}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5(x) \cos^{16}(x) dx &= - \int (1 - u^2)^2 u^{16} du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^{16} du \\ &= - \int (u^{16} - 2u^{18} + u^{20}) du \\ &= - \left(\frac{u^{17}}{17} - 2 \cdot \frac{u^{19}}{19} + \frac{u^{21}}{21} \right) + c \\ &= -\frac{\cos^{17}(x)}{17} + \frac{2}{19} \cos^{19}(x) - \frac{\cos^{21}(x)}{21} + c \end{aligned}$$

2. $\int \operatorname{sen}^{12}(x) \cos^7(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{12}(x) \cos^7(x) dx &= \int \operatorname{sen}^{12}(x) \cos^6(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{12}(x) (\cos^2(x))^3 \cdot \cos(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{12}(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^3 \cdot \cos(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^{12}(x) \cos^7(x) dx &= \int u^{12} (1 - u^2)^3 du \\
 &= \int u^{12} (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\
 &= \int (u^{12} - 3u^{14} + 3u^{16} - u^{18}) du \\
 &= \frac{u^{13}}{13} - 3 \cdot \frac{u^{15}}{15} + 3 \cdot \frac{u^{17}}{17} - \frac{u^{19}}{19} + c \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^{13}(x)}{13} - \frac{\operatorname{sen}^{15}(x)}{5} + \frac{3}{17} \operatorname{sen}^{17}(x) - \frac{\operatorname{sen}^{19}(x)}{19} + c
 \end{aligned}$$

Cuando los dos exponentes son impares se puede separar cualquiera de ellos. Si los exponentes son diferentes es mejor separar un $\operatorname{sen}(x)$ o $\cos(x)$ de la función trigonométrica que tenga el menor exponente y si los exponentes son iguales lo mejor es separar un $\cos(x)$ [16, 2].

Ejercicio Resuelto si m y n son impares

Resolver la integral: $\int \operatorname{sen}^9(x) \cos^9(x) dx$

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^9(x) \cos^9(x) dx &= \int \operatorname{sen}^9(x) \cos^8(x) \cdot \cos(x) dx \\
 &= \int \operatorname{sen}^9(x) (\cos^2(x))^4 \cdot \cos(x) dx \\
 &= \int \operatorname{sen}^9(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^4 \cdot \cos(x) dx
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^9(x) \cos^9(x) dx &= \int u^9 (1 - u^2)^4 du \\
 &= \int u^9 (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8) du \\
 &= \int (u^9 - 4u^{11} + 6u^{13} - 4u^{15} + u^{17}) du \\
 &= \frac{u^{10}}{10} - 4 \cdot \frac{u^{12}}{12} + 6 \cdot \frac{u^{14}}{14} - 4 \cdot \frac{u^{16}}{16} + \frac{u^{18}}{18} + c \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{10} - \frac{\operatorname{sen}^{12}(x)}{3} + \frac{3}{7} \operatorname{sen}^{14}(x) - \frac{\operatorname{sen}^{16}(x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}^{18}(x)}{18} + c
 \end{aligned}$$

Caso 2. Integrales de la forma $\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx$ ó $\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$

a) Si q es entero positivo PAR sin importar el valor de p , esto es para los casos:

$$\begin{aligned} p \text{ par} \quad \wedge \quad q \text{ par} \\ p \text{ impar} \quad \wedge \quad q \text{ par} \end{aligned}$$

Entonces $q = 2r + 2; \quad r \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \int \tan^p(x) \sec^q(x) dx &= \int \tan^p(x) \sec^{2r+2}(x) dx \\ &= \int \tan^p(x) \sec^{2r}(x) \sec^2(x) dx \\ &= \int \tan^p(x) (1 + \tan^2(x))^r \sec^2(x) dx \end{aligned}$$

Por el cambio de variable [11, 10, 2, 9]:

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x) dx$$

Se tiene que:

$$\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx = \int u^p (1 + u^2)^r du$$

De la misma manera se puede realizar la $\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$ recordando que, si:

$$u = \cot(x) \Rightarrow du = -\csc^2(x) dx$$

Ejercicios Resueltos si q es par

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \tan^{11}(x) \sec^8(x) dx$
Sea

$$\begin{aligned} I = \int \tan^{11}(x) \sec^8(x) dx &= \int \tan^{11}(x) \sec^6(x) \sec^2(x) dx \\ &= \int \tan^{11}(x) (1 + \tan^2(x))^3 \sec^2(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I &= \int u^{11}(1+u^2)^3 du \\
 &= \int u^{11}(1+3u^2+3u^4+u^6) du \\
 &= \int (u^{11}+3u^{13}+3u^{15}+u^{17}) du \\
 &= \frac{u^{12}}{12} + 3 \cdot \frac{u^{14}}{14} + 3 \cdot \frac{u^{16}}{16} + \frac{u^{18}}{18} + c \\
 &= \frac{\tan^{12}(x)}{12} + \frac{3}{14}\tan^{14}(x) + \frac{3}{16}\tan^{16}(x) + \frac{\tan^{18}(x)}{18} + c
 \end{aligned}$$

$$2. \int \cot^{14}(x)\csc^{10}(x) dx$$

Sea

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cot^{14}(x)\csc^{10}(x) dx = \int \cot^{14}(x)\csc^8(x)\csc^2(x) dx \\
 &= \int \cot^{14}(x)(1+\cot^2(x))^4\csc^2(x) dx
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \cot(x) \Rightarrow du = -\csc^2(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I &= - \int u^{14}(1+u^2)^4 du \\
 &= - \int u^{14}(1+4u^2+6u^4+4u^6+u^8) du \\
 &= - \int (u^{14}+4u^{16}+6u^{18}+4u^{20}+u^{22}) du \\
 &= - \left(\frac{u^{15}}{15} + 4 \cdot \frac{u^{17}}{17} + 6 \cdot \frac{u^{19}}{19} + 4 \cdot \frac{u^{21}}{21} + \frac{u^{23}}{23} \right) + c \\
 &= -\frac{\cot^{15}(x)}{15} - \frac{4}{17}\cot^{17}(x) - \frac{6}{19}\cot^{19}(x) - \frac{4}{21}\cot^{21}(x) - \frac{\cot^{23}(x)}{23} + c
 \end{aligned}$$

Nota: este método también se puede utilizar para resolver integrales del tipo: $\int \tan^p(x)\sec^q(x)dx$ ó $\int \cot^p(x)\csc^q(x)dx$ cuando p es cualquier número racional.

$$3. \int \frac{\sec^4(\ln(x))}{x \tan^{3/2}(\ln(x))} dx$$

Sea I la integral y por el cambio de variable:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

Se tiene que:

$$I = \int \frac{\sec^4(\ln(x))}{x \tan^{3/2}(\ln(x))} dx = \int \tan^{-3/2}(u) \sec^4(u) du$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} I = \int \tan^{-3/2}(u) \sec^4(u) du &= \int \tan^{-3/2}(u) \sec^2(u) \sec^2(u) du \\ &= \int \tan^{-3/2}(u) (1 + \tan^2(u)) \sec^2(u) du \end{aligned}$$

Por el cambio de variable:

$$z = \tan(u) \Rightarrow dz = \sec^2(u) du$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \int z^{-3/2} (1 + z^2) dz \\ &= \int (z^{-3/2} + z^{1/2}) dz \\ &= \frac{z^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + \frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= -2 \tan^{-1/2}(u) + \frac{2}{3} \tan^{3/2}(u) + c \\ &= -\frac{2}{\tan^{1/2}(u)} + \frac{2}{3} \tan^{3/2}(u) + c \end{aligned}$$

De ahí que:

$$I = \int \frac{\sec^4(\ln(x))}{x \tan^{3/2}(\ln(x))} dx = -\frac{2}{\tan^{1/2}(\ln(x))} + \frac{2}{3} \tan^{3/2}(\ln(x)) + c$$

b) Si p es entero positivo IMPAR sin importar el valor de q , esto es para los casos:

$$p \text{ impar} \quad \wedge \quad q \text{ par}$$

$$p \text{ impar} \quad \wedge \quad q \text{ impar}$$

Entonces $p = 2r + 1$; $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx &= \int \tan^{2r+1}(x) \sec^q(x) dx \\ &= \int (\tan^2(x))^r \sec^{q-1}(x) \cdot \sec(x) \tan(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^r \sec^{q-1}(x) \cdot \sec(x) \tan(x) dx\end{aligned}$$

Por el cambio de variable [11, 16, 2]:

$$u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x) \tan(x) dx$$

Se tiene que:

$$\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx = \int (u^2 - 1)^r u^{q-1} du$$

De la misma manera se puede realizar la $\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$ recordando que, si:

$$u = \csc(x) \Rightarrow du = -\csc(x) \cot(x) dx$$

Ejercicios Resueltos si p es impar

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \tan^{11}(x) \sec^8(x) dx$$

Sea

$$\begin{aligned}I = \int \tan^{11}(x) \sec^8(x) dx &= \int \tan^{10}(x) \sec^7(x) \cdot \tan(x) \sec(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^5 \sec^7(x) \cdot \tan(x) \sec(x) dx\end{aligned}$$

Por el cambio de variable:

$$u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x) \tan(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}I &= \int (u^2 - 1)^5 u^7 du \\ &= \int (u^{10} - 5u^8 + 10u^6 - 10u^4 + 5u^2 - 1) u^7 du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (u^{17} - 5u^{15} + 10u^{13} - 10u^{11} + 5u^9 - u^7) du \\
&= \frac{u^{18}}{18} - 5 \cdot \frac{u^{16}}{16} + 10 \cdot \frac{u^{14}}{14} - 10 \cdot \frac{u^{12}}{12} + 5 \cdot \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^8}{8} + c \\
&= \frac{\sec^{18}(x)}{18} - \frac{5}{16} \sec^{16}(x) + \frac{5}{7} \sec^{14}(x) - \frac{5}{6} \sec^{12}(x) + \frac{\sec^{10}(x)}{2} - \frac{\sec^8(x)}{8} + c
\end{aligned}$$

2. $\int \cot^7(x) \csc^{17}(x) dx$
Sea

$$\begin{aligned}
I = \int \cot^7(x) \csc^{17}(x) dx &= \int \cot^6(x) \csc^{16}(x) \cdot \cot(x) \csc(x) dx \\
&= \int (\csc^2(x) - 1)^3 \csc^{16}(x) \cdot \cot(x) \csc(x) dx
\end{aligned}$$

Por el cambio de variable:

$$u = \csc(x) \Rightarrow du = -\csc(x) \cot(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
I &= - \int (u^2 - 1)^3 u^{16} du \\
&= - \int (u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1) u^{16} du \\
&= - \int (u^{22} - 3u^{20} + 3u^{18} - u^{16}) du \\
&= - \left(\frac{u^{23}}{23} - 3 \cdot \frac{u^{21}}{21} + 3 \cdot \frac{u^{19}}{19} - \frac{u^{17}}{17} \right) + c \\
&= - \frac{\csc^{23}(x)}{23} + \frac{\csc^{21}(x)}{7} - \frac{3}{19} \csc^{19}(x) + \frac{\csc^{17}(x)}{17} + c
\end{aligned}$$

Nota: este método también se puede utilizar para resolver integrales del tipo:

$\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx$ ó $\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$ cuando q es cualquier número racional.

3. $\int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}} dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x) \sec^{-1/2}(x) dx &= \int \tan^2(x) \sec^{-3/2}(x) \cdot \tan(x) \sec(x) dx \\
&= \int (\sec^2(x) - 1) \sec^{-3/2}(x) \cdot \tan(x) \sec(x) dx
\end{aligned}$$

Por el cambio de variable:

$$u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x) \tan(x) dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3(x) \sec^{-1/2}(x) dx &= \int (u^2 - 1)u^{-3/2} du \\
 &= \int (u^{1/2} - u^{-3/2}) du \\
 &= \frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{-1/2} + c \\
 &= \frac{2}{3}\sec^{3/2}(x) + 2\sec^{-1/2}(x) + c \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{\sec^3(x)} + \frac{2}{\sqrt{\sec(x)}} + c \\
 &= \frac{2\sec^2(x) + 6}{3\sqrt{\sec(x)}} + c \\
 &= \frac{2(\sec^2(x) + 3)}{3\sqrt{\sec(x)}} + c
 \end{aligned}$$

Observación: el caso, p impar $\wedge$ q par, puede ser resuelto utilizando cualquiera de los métodos propuestos en los literales a) y b).

El lector puede comprobar que las primitivas obtenidas al resolver la integral $\int \tan^{11}(x) \sec^8(x) dx$ por los dos métodos son equivalentes.

c) Si p es entero positivo PAR y q es entero positivo IMPAR

Para resolver las integrales $\int \tan^p(x) \sec^q(x) dx$ ó $\int \cot^p(x) \csc^q(x) dx$ donde p es par y q es impar se utiliza el método de **integración por partes**, el cuál será estudiado más adelante en este capítulo.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \cos^9(z) \sen^{13}(z) dz$
2. $\int \tan^6(x+3) \sec^6(x+3) dx$
3. $\int \sec^7(4x) \tan^5(4x) dx$
4. $\int \csc^8(2-3x) \cot^{15}(2-3x) dx$
5. $\int \sen^2(p) \cos^6(p) dp$

$$6. \int \operatorname{sen}^7(5+x) \cos^{14}(5+x) dx$$

$$7. \int \csc^4\left(\frac{3x}{2}\right) \cot^4\left(\frac{3x}{2}\right) dx$$

$$8. \int \cos^{12}(u) \operatorname{sen}^{15}(u) du$$

$$9. \int \sec^{10}(x) \sqrt[3]{\tan(x)} dx$$

$$10. \int \frac{\cos^7(w)}{\sqrt{\operatorname{sen}(w)}} dw$$

$$11. \int 3^x \cot^4(3^x) \csc^8(3^x) dx$$

$$12. \int \frac{\operatorname{sen}^5(\ln(x)) \cos^5(\ln(x))}{x} dx$$

Integración de producto de Funciones Trigonométricas de ángulos múltiples

Se refiere a la solución de Integrales de la forma:

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{sen}(ax+b) \cos(cx+d) dx \\ & \int \cos(ax+b) \operatorname{sen}(cx+d) dx \\ & \int \cos(ax+b) \cos(cx+d) dx \\ & \int \operatorname{sen}(ax+b) \operatorname{sen}(cx+d) dx \end{aligned}$$

Para resolver Integrales de este tipo se utilizan las siguientes identidades trigonométricas [1, 11, 16, 2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] \\ \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}(2x) \cos(3x) dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(2x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(2x + 3x) + \operatorname{sen}(2x - 3x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(-x)] dx \end{aligned}$$

Dado que el seno es una función impar; es decir, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(2x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(5x) dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos(5x)}{5} \right) + \frac{1}{2} \cos(x) + c \\ &= -\frac{1}{10} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(x) + c \end{aligned}$$

2. $\int \operatorname{sen}^2(2x + 1) \cos(4x - 3) dx$

Sea

$$I = \int \operatorname{sen}^2(2x + 1) \cos(4x - 3) dx,$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1 - \cos(4x + 2)}{2} \right) \cos(4x - 3) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(4x - 3) dx - \frac{1}{2} \int \cos(4x + 2) \cos(4x - 3) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x - 3)}{4} - \frac{1}{2} \int \left[\frac{\cos(8x - 1) + \cos(5)}{2} \right] dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(4x - 3)}{8} - \frac{1}{4} \int \cos(8x - 1) dx - \frac{\cos(5)}{4} \int dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(4x - 3)}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen}(8x - 1)}{8} - \frac{\cos(5)}{4} x + c \\ &= \frac{\operatorname{sen}(4x - 3)}{8} - \frac{\operatorname{sen}(8x - 1)}{32} - \frac{\cos(5)}{4} x + c \end{aligned}$$

$$3. \int 2^x \operatorname{sen}(2^{x+1} - 4) \operatorname{sen}(2^x + 9) dx$$

Llamando I a la integral y haciendo el cambio de variable:

$$p = 2^x \Rightarrow dp = 2^x \ln(2) dx$$

Se tiene que:

$$I = \int 2^x \operatorname{sen}(2^{x+1} - 4) \operatorname{sen}(2^x + 9) dx = \frac{1}{\ln(2)} \int \operatorname{sen}(2p - 4) \operatorname{sen}(p + 9) dp$$

Ahora bien, resolviendo esta integral, se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\ln(2)} \int -\frac{1}{2} [\cos(3p + 5) - \cos(p - 13)] dp \\ &= -\frac{1}{2 \ln(2)} \int \cos(3p + 5) dp + \frac{1}{2 \ln(2)} \int \cos(p - 13) dp \\ &= -\frac{1}{2 \ln(2)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3p + 5)}{3} + \frac{1}{2 \ln(2)} \cdot \operatorname{sen}(p - 13) + c \\ &= \frac{\operatorname{sen}(p - 13)}{2 \ln(2)} - \frac{\operatorname{sen}(3p + 5)}{6 \ln(2)} + c \end{aligned}$$

De ahí que

$$I = \frac{\operatorname{sen}(2^x - 13)}{2 \ln(2)} - \frac{\operatorname{sen}(3 \cdot 2^x + 5)}{6 \ln(2)} + c$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \cos(7x) \cos(11x) dx$
2. $\int \cos(4x + 1) \operatorname{sen}(x) dx$
3. $\int \operatorname{sen}(12x + 13) \operatorname{sen}(13x - 4) dx$
4. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos(3x + 2) dx$
5. $\int \operatorname{sen}(6x + 5) \cos^2(2 - 3x) dx$
6. $\int \operatorname{sen}^2(3x + 7) \cos(2x - 7) dx$
7. $\int \operatorname{sen}^2\left(\frac{5u}{2}\right) \cos^2\left(\frac{3u}{2}\right) du$

$$8. \int \operatorname{sen}^2(4x+3) \operatorname{sen}^2(x-7) dx$$

$$9. \int [\cos(8x) + \cos(x)]^2 dx$$

$$10. \int [3 \operatorname{sen}(2w) + 2 \operatorname{sen}(5w)]^2 dw$$

$$11. \int e^x \cos(9e^x) \operatorname{sen}(3e^x) dx$$

$$12. \int \frac{\operatorname{sen}(\ln(x)) \operatorname{sen}^2(\ln(x)+1)}{x} dx$$

Integración por completación de trinomios

Se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Cuando el numerador es un número Real y el denominador contiene un término cuadrático de la forma $Ax^2 + Bx + C$ [11, 7, 5, 10].

Si el integrando contiene una expresión de la forma $Ax^2 + Bx + C$, se puede completar el trinomio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A \left[x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} \right] \\ &= A \left[\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} \right) + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) \right] \\ &= A \left[\left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) \right] \end{aligned}$$

para a continuación hacer la sustitución:

$$u = x + \frac{B}{2A} \Rightarrow du = dx$$

Ejercicios Resueltos caso 1

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} &= \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 9) + (25 - 9)} \\ &= \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 16}\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = x - 3 \Rightarrow du = dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} &= \int \frac{du}{u^2 + 4^2} \\ &= \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{u}{4}\right) + c \\ &= \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x - 3}{4}\right) + c\end{aligned}$$

$$2. \int \frac{2}{\sqrt{3x^2 - x - 7}} dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt{3x^2 - x - 7}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{7}{3}\right)}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) + \left(-\frac{7}{3} - \frac{1}{36}\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{85}{36}}}\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = x - \frac{1}{6} \Rightarrow du = dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt{3x^2 - x - 7}} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{85}{36}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - \frac{85}{36}} \right| + c\end{aligned}$$

Regresando a la variable original, se obtiene

$$\int \frac{2}{\sqrt{3x^2 - x - 7}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \left(x - \frac{1}{6} \right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{85}{36}} \right| + c$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{3x^2 - x - 7}} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \left(x - \frac{1}{6} \right) + \sqrt{x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36} - \frac{85}{36}} \right| + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln \left| x - \frac{1}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{3} - \frac{7}{3}} \right| + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln \left| x - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3x^2 - x - 7}}{\sqrt{3}} \right| + c \end{aligned}$$

NOTA: Este método también se puede utilizar para resolver una integral que tenga la raíz cuadrada del trinomio en el numerador.

Ejemplo:

Resolver: $\int \sqrt{2 - 5x - 3x^2} dx$

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{2 - 5x - 3x^2} dx &= \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - x^2} dx \\ &= \sqrt{3} \int \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{25}{36} \right) - \left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} \right)} dx \\ &= \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{49}{36} - \left(x + \frac{5}{6} \right)^2} dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = x + \frac{5}{6} \Rightarrow du = dx$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3} \int \sqrt{\frac{49}{36} - u^2} du \\ &= \sqrt{3} \left[\frac{u}{2} \sqrt{\frac{49}{36} - u^2} + \frac{49}{72} \arcsen \left(\frac{6u}{7} \right) \right] + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable original, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{5}{6} \right) \sqrt{\frac{49}{36} - \left(x + \frac{5}{6} \right)^2} + \frac{49\sqrt{3}}{72} \operatorname{arcsen} \left(\frac{6x+5}{7} \right) + c \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{12} (6x+5) \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - x^2} + \frac{49\sqrt{3}}{72} \operatorname{arcsen} \left(\frac{6x+5}{7} \right) + c \\
 &= \left(\frac{6x+5}{12} \right) \sqrt{2-5x-3x^2} + \frac{49\sqrt{3}}{72} \operatorname{arcsen} \left(\frac{6x+5}{7} \right) + c
 \end{aligned}$$

Caso 2. Cuando el numerador es un término lineal y el denominador contiene un término cuadrático de la forma $Ax^2 + Bx + C$.

Si el numerador es un término lineal, a la integral dada se le separa en dos integrales, la primera que contiene en el numerador la derivada del término cuadrático y la segunda que tiene en el numerador un número real para resolverla por el método del caso 1 [11, 16, 2].

Ejercicios Resueltos caso 2

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{3x-7}{5x^2-3x+6} dx$$

Debemos empezar buscando el diferencial del término cuadrático, esto es, si:

$$z = 5x^2 - 3x + 6 \Rightarrow dz = (10x - 3)dx$$

A continuación, separamos la integral en dos: una que contenga en el numerador la derivada del término cuadrático y la otra que tenga en el numerador un número real, es decir:

$$\begin{aligned}
 I = \int \frac{3x-7}{5x^2-3x+6} dx &= \frac{3}{10} \int \frac{10x - \frac{70}{3}}{5x^2-3x+6} dx \\
 &= \frac{3}{10} \int \frac{10x - 3 + 3 - \frac{70}{3}}{5x^2-3x+6} dx \\
 &= \frac{3}{10} \int \frac{10x-3}{5x^2-3x+6} dx - \frac{61}{10} \int \frac{dx}{5x^2-3x+6}
 \end{aligned}$$

Ya tenemos dos integrales, la primera la resolvemos por sustitución y la segunda completando el trinomio, de ahí que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{10} \int \frac{dz}{z} - \frac{61}{50} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}} \\ &= \frac{3}{10} \ln|z| - \frac{61}{50} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{111}{100}} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = x - \frac{3}{10} \Rightarrow du = dx$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 6| - \frac{61}{50} \int \frac{du}{u^2 + \frac{111}{100}} \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 6| - \frac{61}{50} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{111}}{10}} \arctan \left(\frac{u}{\frac{\sqrt{111}}{10}} \right) + c \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 6| - \frac{61\sqrt{111}}{555} \arctan \left(\frac{10u}{\sqrt{111}} \right) + c \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2 - 3x + 6| - \frac{61\sqrt{111}}{555} \arctan \left(\frac{10x - 3}{\sqrt{111}} \right) + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{\ln(x)}{x \sqrt{1 - 4\ln(x) - 4\ln^2(x)}} dx$$

Dado que el diferencial del $\ln(x)$ se encuentra en la integral, empezamos haciendo la sustitución:

$$p = \ln(x) \Rightarrow dp = \frac{dx}{x}$$

Por lo tanto:

$$I = \int \frac{\ln(x)}{x \sqrt{1 - 4\ln(x) - 4\ln^2(x)}} dx = \int \frac{p}{\sqrt{1 - 4p - 4p^2}} dp$$

Buscando el diferencial del término cuadrático, éste es:

$$z = 1 - 4p - 4p^2 \Rightarrow dz = (-4 - 8p) dp$$

y separando la integral en dos; una que contenga en el numerador la derivada del término cuadrático y la otra que tenga en el numerador un número real, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{p}{\sqrt{1-4p-4p^2}} dp \\
 &= -\frac{1}{8} \int \frac{-8p-4+4}{\sqrt{1-4p-4p^2}} dp \\
 &= -\frac{1}{8} \int \frac{-8p-4}{\sqrt{1-4p-4p^2}} dp - \frac{1}{2} \int \frac{dp}{\sqrt{1-4p-4p^2}}
 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la primera integral por sustitución y la segunda completando el trinomio, de ahí que:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} - \frac{1}{4} \int \frac{dp}{\sqrt{\frac{1}{4}-p-p^2}} \\
 &= -\frac{1}{8} \int z^{-\frac{1}{2}} dz - \frac{1}{4} \int \frac{dp}{\sqrt{\frac{1}{2}-\left(p+\frac{1}{2}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = p + \frac{1}{2} \Rightarrow du = dp$$

en la segunda integral, se sigue que:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\sqrt{z}}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}} \\
 &= -\frac{\sqrt{1-4p-4p^2}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} \left(\frac{u}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) + c \\
 &= -\frac{\sqrt{1-4\ln(x)-4\ln^2(x)}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} (\sqrt{2} u) + c \\
 &= -\frac{\sqrt{1-4\ln(x)-4\ln^2(x)}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} \left(\sqrt{2} \left(p + \frac{1}{2} \right) \right) + c \\
 &= -\frac{\sqrt{1-4\ln(x)-4\ln^2(x)}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2p+1}{\sqrt{2}} \right) + c \\
 &= -\frac{\sqrt{1-4\ln(x)-4\ln^2(x)}}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2\ln(x)+1}{\sqrt{2}} \right) + c
 \end{aligned}$$

Caso 3. Cuando el numerador es un Polinomio de grado mayor o igual a 2 y el denominador contiene un término cuadrático de la forma $Ax^2 + Bx + C$.

Si el numerador es un polinomio de grado mayor o igual a dos, se empieza dividiendo el numerador para el denominador del integrando, esto da como resultado una parte entera y una fracción propia la cual se resuelve utilizando el método del caso 2 [4, 9, 5].

Ejercicio Resuelto caso 3

Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^3 - 3x + 5}{2 - 5x - x^2} dx$$

Dividiendo el numerador para el denominador, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrr} 2x^3 & -3x & +5 \\ -2x^3 & -10x^2 & +4x \\ \hline & -10x^2 & +x & +5 \\ & 10x^2 & +50x & -20 \\ \hline & & +51x & -15 \end{array} & \begin{array}{l} -x^2 - 5x + 2 \\ -2x + 10 \end{array} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2x^3 - 3x + 5}{2 - 5x - x^2} = (-2x + 10) + \frac{51x - 15}{2 - 5x - x^2}$$

Ahora bien, llamando I a la integral, se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^3 - 3x + 5}{2 - 5x - x^2} dx \\ &= \int \left[(-2x + 10) + \frac{51x - 15}{2 - 5x - x^2} \right] dx \\ &= \int \left[-2x + 10 - \frac{51x - 15}{x^2 + 5x - 2} \right] dx \\ &= -2 \int x dx + 10 \int dx - \int \frac{51x - 15}{x^2 + 5x - 2} dx \\ &= -2 \cdot \frac{x^2}{2} + 10x - 51 \int \frac{x - \frac{15}{51}}{x^2 + 5x - 2} dx \\ &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \int \frac{2x + 5 - 5 - \frac{30}{51}}{x^2 + 5x - 2} dx \end{aligned}$$

Separando en dos integrales

$$\begin{aligned} I &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx + \frac{285}{2} \int \frac{dx}{x^2+5x-2} \\ &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx + \frac{285}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}} \end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable:

$$z = x^2 + 5x - 2 \Rightarrow dz = (2x + 5) dx$$

y

$$u = x + \frac{5}{2} \Rightarrow du = dx$$

en la segunda y tercera integral, respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \int \frac{dz}{z} + \frac{285}{2} \int \frac{du}{u^2 - \frac{33}{4}} \\ &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \ln|z| + \frac{285}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}} \ln \left| \frac{u - \frac{\sqrt{33}}{2}}{u + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + c \\ &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \ln|x^2 + 5x - 2| + \frac{285\sqrt{33}}{66} \ln \left| \frac{2u - \sqrt{33}}{2u + \sqrt{33}} \right| + c \\ &= -x^2 + 10x - \frac{51}{2} \ln|x^2 + 5x - 2| + \frac{95\sqrt{33}}{22} \ln \left| \frac{2x + 5 - \sqrt{33}}{2x + 5 + \sqrt{33}} \right| + c \end{aligned}$$

NOTA: Las integrales del tipo $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Ax^2 + Bx + c}} dx$ ó $\int P_n(x) \sqrt{Ax^2 + Bx + c} dx$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual a dos serán estudiadas en el Capítulo 4.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 5}$
2. $\int \frac{2x+1}{x^2-x-1} dx$
3. $\int \frac{6x^2+3x-2}{3x^2-6x+4} dx$
4. $\int \sqrt{4-4x-x^2} dx$

$$5. \int (3x - 7) \sqrt{16 + 6x - x^2} \, dx$$

$$6. \int \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 + x + 3}} \, dx$$

$$7. \int \frac{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4}{z^2 - 2z + 4} \, dz$$

$$8. \int \frac{4}{\sqrt{7 - 8x + 3x^2}} \, dx$$

$$9. \int \sqrt{3x^4 - 6x^3 - 2x^2} \, dx$$

$$10. \int \frac{10e^{2x}}{2e^{2x} - 3e^x - 7} \, dx$$

$$11. \int \frac{\ln(x) - 7}{x(3\ln^2(x) - 2\ln(x) - 8)} \, dx$$

$$12. \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{4 + 3\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^2(x)}} \, dx$$

Integración por partes

La técnica de integración por partes es la aplicación de la integración de la derivada de un producto.

Para obtener la fórmula que se utiliza para resolver los ejercicios mediante esta técnica de integración partimos de la propiedad 3 de las propiedades de la integral indefinida revisada en el capítulo I, esto es

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \, dx = f(x) \cdot g(x) + c$$

Aplicando la propiedad de la integral de la suma de dos funciones, se tiene

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x)$$

De ahí que,

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx \quad (*)$$

Ahora bien, sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$ dos funciones diferenciables en la variable x , tal

que:

$$\text{Si } u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x) dx \quad (1)$$

$$\text{si } v = g(x) \quad \Rightarrow \quad dv = g'(x) dx \quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en (*), se obtiene

$$\boxed{\int u dv = u \cdot v - \int v du}$$

Esta fórmula se utiliza para resolver las integrales mediante la técnica de integración por partes [1, 11, 16, 10, 3].

Observaciones:

1. El cálculo de $\int u dv$ es reemplazado por el cálculo de $\int v du$, razón por la cual hemos de procurar que esta última integral sea más fácil de resolver que la inicial.
2. Esta técnica de integración se utiliza normalmente para integrar funciones trascendentes, productos de funciones trascendentes e integrales de la forma $\int \sec^m(ax + b) dx$ ó $\int \csc^m(ax + b) dx$, donde m es un número impar; sin embargo, también se puede utilizar para integrar otro tipo de funciones que no sean de estos tipos [11, 10, 2, 13].

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int x e^x dx$

Empecemos escogiendo u y dv de la siguiente manera, sea

$$\begin{aligned} u = x & \quad \Rightarrow \quad du = dx; \\ dv = e^x dx & \quad \Rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c \\ &= (x - 1) e^x + c\end{aligned}$$

$$2. \int x^2 \ln(x) dx$$

Para resolver esta integral empleamos integración por partes. Sea:

$$\begin{aligned}u = \ln(x) &\Rightarrow du = \frac{dx}{x}; \\ dv = x^2 dx &\Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln(x) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + c\end{aligned}$$

$$3. \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

Empleamos integración por partes. Sea:

$$\begin{aligned}u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) &\Rightarrow du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = \int dx = x\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (*)$$

Ahora bien, resolvemos la integral:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Sea: $m = 1 + x^2 \Rightarrow dm = 2x dx$, de ahí que $dx = \frac{dm}{2x}$. Reemplazando en la integral anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dm}{\sqrt{m}} \\ &= \frac{1}{2} \int m^{-\frac{1}{2}} dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c \\ &= \sqrt{m} + c \\ &= \sqrt{1+x^2} + c \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) se obtiene:

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

$$4. \int \operatorname{sen}(2z+3) \operatorname{senh}(2z+3) dz$$

Llamemos I a la integral, esto es

$$I = \int \operatorname{sen}(2z+3) \operatorname{senh}(2z+3) dz$$

Al ser un producto de funciones trascendentes, empleamos la técnica de integración por partes para resolverla. Sea

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen}(2z+3) &\Rightarrow du = 2 \cos(2z+3) dz; \\ dv = \operatorname{senh}(2z+3) dz &\Rightarrow v = \int \operatorname{senh}(2z+3) dz = \frac{\cosh(2z+3)}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2z+3) \cosh(2z+3) - \int \cos(2z+3) \cosh(2z+3) dz \quad (*)$$

Ahora bien, llamemos I_1 a la integral $\int \cos(2z+3) \cosh(2z+3) dz$, y resolvámosla

por partes. Sea

$$\begin{aligned} u = \cos(2z + 3) &\Rightarrow du = -2 \operatorname{sen}(2z + 3) dz; \\ dv = \cosh(2z + 3) dz &\Rightarrow v = \int \cosh(2z + 3) dz = \frac{\operatorname{senh}(2z + 3)}{2} \end{aligned}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \cos(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) + \int \operatorname{sen}(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) dz \\ I_1 &= \frac{1}{2} \cos(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) + I \end{aligned}$$

Reemplazando el resultado anterior en (*), se sigue que

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2z + 3) \cosh(2z + 3) - \frac{1}{2} \cos(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) - I + c$$

Pasando a sumar I al lado izquierdo, se tiene que

$$2I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2z + 3) \cosh(2z + 3) - \frac{1}{2} \cos(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) + c$$

Despejando I se obtiene

$$I = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2z + 3) \cosh(2z + 3) - \frac{1}{4} \cos(2z + 3) \operatorname{senh}(2z + 3) + c_1$$

5. $\int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} dx$

Llamemos I a la integral, y escribámosla de la siguiente manera

$$I = \int x \cdot \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx$$

Empleamos la técnica de integración por partes para resolverla. Sea

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx; \\ dv = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx &\Rightarrow v = \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $p = x^2 - 1 \Rightarrow dp = 2x dx$ y reemplazando en la integral anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \int \frac{dp}{p^2} \\ v &= -\frac{1}{2p} \\ v &= -\frac{1}{2(x^2 - 1)} \end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando la fórmula de integración por partes, se sigue que

$$I = x \left(-\frac{1}{2(x^2 - 1)} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Simplificando y aplicando la fórmula 28 de las fórmulas de integración inmediata, se obtiene

$$I = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c$$

6. $\int \sec^5(x) dx$

Escribamos la integral de la siguiente manera

$$\int \sec^5(x) dx = \int \sec^3(x) \cdot \sec^2(x) dx$$

Ahora bien, sean

$$\begin{aligned} u = \sec^3(x) &\Rightarrow du = 3\sec^3(x)\tan(x) dx; \\ dv = \sec^2(x) dx &\Rightarrow v = \int \sec^2(x) dx = \tan(x) \end{aligned}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} \int \sec^5(x) dx &= \sec^3(x)\tan(x) - 3 \int \sec^3(x)\tan^2(x) dx \\ &= \sec^3(x)\tan(x) - 3 \int \sec^3(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \sec^3(x)\tan(x) - 3 \int \sec^5(x) dx + 3 \int \sec^3(x) dx \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y despejando, se obtiene

$$\begin{aligned} 4 \int \sec^5(x) dx &= \sec^3(x)\tan(x) + 3 \int \sec^3(x) dx \\ \int \sec^5(x) dx &= \frac{1}{4} \sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{4} \int \sec^3(x) dx \quad (*) \end{aligned}$$

Ahora, resolvamos la integral de la $\sec^3(x)$ aplicando nuevamente la técnica de integración por partes. Empecemos escribiendo la integral de la siguiente manera

$$\int \sec^3(x) dx = \int \sec(x) \cdot \sec^2(x) dx$$

Ahora bien, sean

$$\begin{aligned} u = \sec(x) &\Rightarrow du = \sec(x)\tan(x) dx; \\ dv = \sec^2(x) dx &\Rightarrow v = \tan(x) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \sec^3(x) dx &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec(x)\tan^2(x) dx \\ &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y despejando, se sigue que

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3(x) dx &= \sec(x)\tan(x) + \int \sec(x) dx \\ \int \sec^3(x) dx &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2} \int \sec(x) dx \\ &= \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln |\sec(x) + \tan(x)| + c \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en (*), se obtiene

$$\begin{aligned} \int \sec^5(x) dx &= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln |\sec(x) + \tan(x)| + c \right) \\ &= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\sec(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\ln |\sec(x) + \tan(x)| + c \end{aligned}$$

7. Resolver la siguiente integral mediante el método tabular:

$$\int (4x^2 - 2x - 3)e^x dx$$

Este tipo de integral se puede resolver utilizando el **método tabular de integración por partes**, ideal para integrandos del tipo $P(x)e^{ax}$, donde $P(x)$ es un polinomio.

A continuación, se identifican las partes

- $u = 4x^2 - 2x - 3$
- $dv = e^x dx$

Ahora bien, derivamos u de forma consecutiva hasta llegar a obtener el valor de 0, mientras que integramos consecutivamente dv , hasta llegar a la misma altura del 0, con lo cual, se construye la siguiente tabla

Derivadas de u	Integrales de $dv = e^x dx$
$4x^2 - 2x - 3$	e^x
$8x - 2$	e^x
8	e^x
0	e^x

Los productos se realizan en diagonal, con signos alternados [10, 11, 16]:

$$+, -, +, -, \dots$$

De este modo se obtiene el siguiente resultado

$$\int (4x^2 - 2x - 3)e^x dx = +(4x^2 - 2x - 3)e^x - (8x - 2)e^x + (8)e^x + c$$

Simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 2x - 3)e^x dx &= (4x^2 - 2x - 3 - 8x + 2 + 8)e^x + c \\ &= (4x^2 - 10x + 7)e^x + c \end{aligned}$$

8. Resolver la siguiente integral mediante el método tabular:

$$\int (x^3 - 2x + 1)\text{sen}(2x) dx$$

Empecemos llamando I a la integral, esto es

$$I = \int (x^3 - 2x + 1)\text{sen}(2x) dx$$

Este tipo de integral se puede resolver utilizando el **método tabular de integración por partes**, útil para integrandos del tipo $P(x)\text{sen}(ax)$ o $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es un polinomio.

Sea:

- Derivamos: $u = x^3 - 2x + 1$
- Integramos: $dv = \text{sen}(2x) dx$

Se construye la tabla:

Derivadas de u	Integrales de $dv = \text{sen}(2x) dx$
$x^3 - 2x + 1$	$\text{sen}(2x)$
$3x^2 - 2$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
$6x$	$-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)$
6	$\frac{1}{8}\cos(2x)$
0	$\frac{1}{16}\text{sen}(2x)$

Los productos se realizan en diagonal, con signos alternados:

$+, -, +, -, \dots$

De este modo se obtiene el siguiente resultado

$$I = -\frac{1}{2}(x^3 - 2x + 1)\cos(2x) + \frac{1}{4}(3x^2 - 2)\text{sen}(2x) + \frac{3}{4}x\cos(2x) - \frac{3}{8}\text{sen}(2x) + c$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{x^3}{2} + x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x\right)\cos(2x) + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)\text{sen}(2x) + c \\ &= \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}\right)\cos(2x) + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{8}\right)\text{sen}(2x) + c \\ &= -\frac{1}{4}(2x^3 - 7x + 2)\cos(2x) + \frac{1}{8}(6x^2 - 7)\text{sen}(2x) + c \end{aligned}$$

En conclusión, el método tabular de integración por partes se utiliza cuando se tiene un producto de funciones donde una de ellas es un polinomio y la otra es una función del tipo a^x , $\text{sen}(ax + b)$, $\cos(ax + b)$, $\text{senh}(ax + b)$ o $\cosh(ax + b)$.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int (2x^3 - 3x^2 + 6) \cos(3x) dx$

2. $\int \frac{dz}{\operatorname{sen}^7(3z - 5)}$

3. $\int x(x + 3) \arctan(x) dx$

4. $\int (3x^2 - 4) \ln(\sqrt{1 - 2x}) dx$

5. $\int \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{t})}{\sqrt{1 - t}} dt$

6. $\int \cosh(9x) \operatorname{sen}(9x) dx$

7. $\int \frac{4x^2 - 8x - 5}{2^{4x}} dx$

8. $\int \operatorname{sen}(2\theta) \ln(\tan(\theta)) d\theta$

9. $\int \frac{\operatorname{sen}^2(u)}{e^u} du$

10. $\int \frac{\ln^2(x) - 1}{x^3} dx$

11. $\int \frac{3x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

12. $\int x \sqrt{x} \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx$

Integración de funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas son análogas a las funciones trigonométricas, pero se definen en términos de exponenciales. Suelen aparecer en problemas de geometría, física y ecuaciones diferenciales [1, 11, 16, 4].

Definiciones.- Las funciones hiperbólicas básicas se definen como [1, 11, 10]:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{csch}(x) &= \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Identidades hiperbólicas [1, 11, 2]

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) &= 1 \\ \coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) &= 1 \\ \sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x) \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ \sinh\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{2}} \\ \cosh\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh(x) + 1}{2}} \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} \end{aligned}$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh(x) &= \cosh(x) \\ \frac{d}{dx} \cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx} \tanh(x) &= \operatorname{sech}^2(x) \\ \frac{d}{dx} \coth(x) &= -\operatorname{csch}^2(x) \\ \frac{d}{dx} \operatorname{sech}(x) &= -\operatorname{sech}(x) \tanh(x) \\ \frac{d}{dx} \operatorname{csch}(x) &= -\operatorname{csch}(x) \coth(x) \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Calcule la derivada de $\sinh(3x)$.

$$\frac{d}{dx} \sinh(3x) = 3 \cosh(3x).$$

2. Calcule la integral de $\cosh(4x)$.

$$\int \cosh(4x) dx = \frac{1}{4} \sinh(4x) + c.$$

3. Verifique que $\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} + \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\sinh^2(x) + 1}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

Dado que $\sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= \frac{\cosh^2(x) - 1 + 1}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int x \sinh(x) dx$

Sean

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx; \\ dv = \sinh(x) dx &\Rightarrow v = \cosh(x) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int x \sinh(x) dx &= x \cosh(x) - \int \cosh(x) dx \\ &= x \cosh(x) - \sinh(x) + c \end{aligned}$$

2. $\int \cosh^4(x) dx$

Para resolver esta integral usamos la identidad de argumento doble

$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} I = \int \cosh^4(x) dx &= \int (\cosh^2(x))^2 dx \\ &= \int \left(\frac{\cosh(2x) + 1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\cosh^2(2x) + 2\cosh(2x) + 1) dx \end{aligned}$$

Reaplicamos la identidad a $\cosh^2(2x)$: $\cosh^2(2x) = \frac{\cosh(4x) + 1}{2}$. Sustituyendo y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\cosh(4x) + 1}{2} + 2\cosh(2x) + 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \cosh(4x) dx + \frac{1}{2} \int \cosh(2x) dx + \frac{3}{8} \int dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sinh(4x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sinh(2x) + \frac{3}{8} x + c \\ &= \frac{1}{32} \sinh(4x) + \frac{1}{4} \sinh(2x) + \frac{3}{8} x + c \end{aligned}$$

3. $\int (5x^2 + 3x - 7) \cosh(2x) dx$

Sean

$$\begin{aligned} u = 5x^2 + 3x - 7 &\Rightarrow du = (10x + 3) dx; \\ dv = \cosh(2x) dx &\Rightarrow v = \frac{1}{2} \sinh(2x) \end{aligned}$$

Llamando I a la integral y aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int (5x^2 + 3x - 7) \cosh(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} (5x^2 + 3x - 7) \sinh(2x) - \frac{1}{2} \int (10x + 3) \sinh(2x) dx \end{aligned}$$

Ahora bien, resolviendo la integral que nos queda otra vez por partes, esto es

Sean

$$\begin{aligned} u = 10x + 3 & \Rightarrow du = 10 dx; \\ dv = \sinh(2x) dx & \Rightarrow v = \frac{1}{2} \cosh(2x) \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(5x^2 + 3x - 7) \sinh(2x) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(10x + 3) \cosh(2x) - 5 \int \cosh(2x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2}(5x^2 + 3x - 7) \sinh(2x) - \frac{1}{4}(10x + 3) \cosh(2x) + \frac{5}{4} \sinh(2x) + c \\ &= \frac{1}{4}(10x^2 + 6x - 14) \sinh(2x) - \frac{1}{4}(10x + 3) \cosh(2x) + \frac{5}{4} \sinh(2x) + c \\ &= \frac{1}{4}(10x^2 + 6x - 9) \sinh(2x) - \frac{1}{4}(10x + 3) \cosh(2x) + c \\ &= \frac{1}{4}[(10x^2 + 6x - 9) \sinh(2x) - (10x + 3) \cosh(2x)] + c \end{aligned}$$

$$4. \int \tanh^8(x) \operatorname{sech}^6(x) dx$$

LLamando I a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I = \int \tanh^8(x) \operatorname{sech}^6(x) dx &= \int \tanh^8(x) (\operatorname{sech}^2(x))^3 dx \\ &= \int \tanh^8(x) (\operatorname{sech}^2(x))^2 \operatorname{sech}^2(x) dx \end{aligned}$$

Utilizando la identidad fundamental $\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x)$, se sigue que

$$I = \int \tanh^8(x) (1 - \tanh^2(x))^2 \operatorname{sech}^2(x) dx$$

Haciendo la sustitución

$$u = \tanh(x) \quad \Rightarrow \quad du = \operatorname{sech}^2(x) dx$$

se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int u^8 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int u^8 (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= \int (u^8 - 2u^{10} + u^{12}) du \end{aligned}$$

Integrando término a término, se tiene que

$$I = \frac{u^9}{9} - \frac{2u^{11}}{11} + \frac{u^{13}}{13} + c$$

Regresando a la variable original x usando $u = \tanh(x)$, obtenemos

$$\int \tanh^8(x) \operatorname{sech}^6(x) dx = \frac{\tanh^9(x)}{9} - \frac{2 \tanh^{11}(x)}{11} + \frac{\tanh^{13}(x)}{13} + c$$

5. $\int e^x \coth(x) dx$

Llamando I a la integral, y reemplazando la identidad $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, se tiene que

$$I = \int e^x \coth(x) dx = \int e^x \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

Haciendo la sustitución

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} dt \\ &= \int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} dt \\ &= \int \left(1 + \frac{2}{t^2 - 1} \right) dt \\ &= \int dt + 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1}. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula 28 de las fórmulas de integración inmediata, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= t + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \\ &= t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable original x usando $t = e^x$, se tiene que

$$I = e^x + \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + c.$$

Dado que $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, la solución también puede escribirse como

$$I = \int e^x \coth(x) dx = e^x + \ln \left| \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\operatorname{sech}(x) \tanh(x)}{1 + \operatorname{sech}(x)} dx$

2. $\int \frac{dz}{\sinh^2(z) + \cosh^2(z)}$

3. $\int \tanh^5(x) \operatorname{sech}^3(x) dx$

4. $\int \frac{\sinh(2x)}{1 + \cosh(2x)} dx$

5. $\int \frac{dx}{(1 + \cosh(x))^2}$

6. $\int \operatorname{csch}^4(x) \coth^6(x) dx$

7. $\int \frac{dx}{\sinh(x) \cosh^2(x)}$

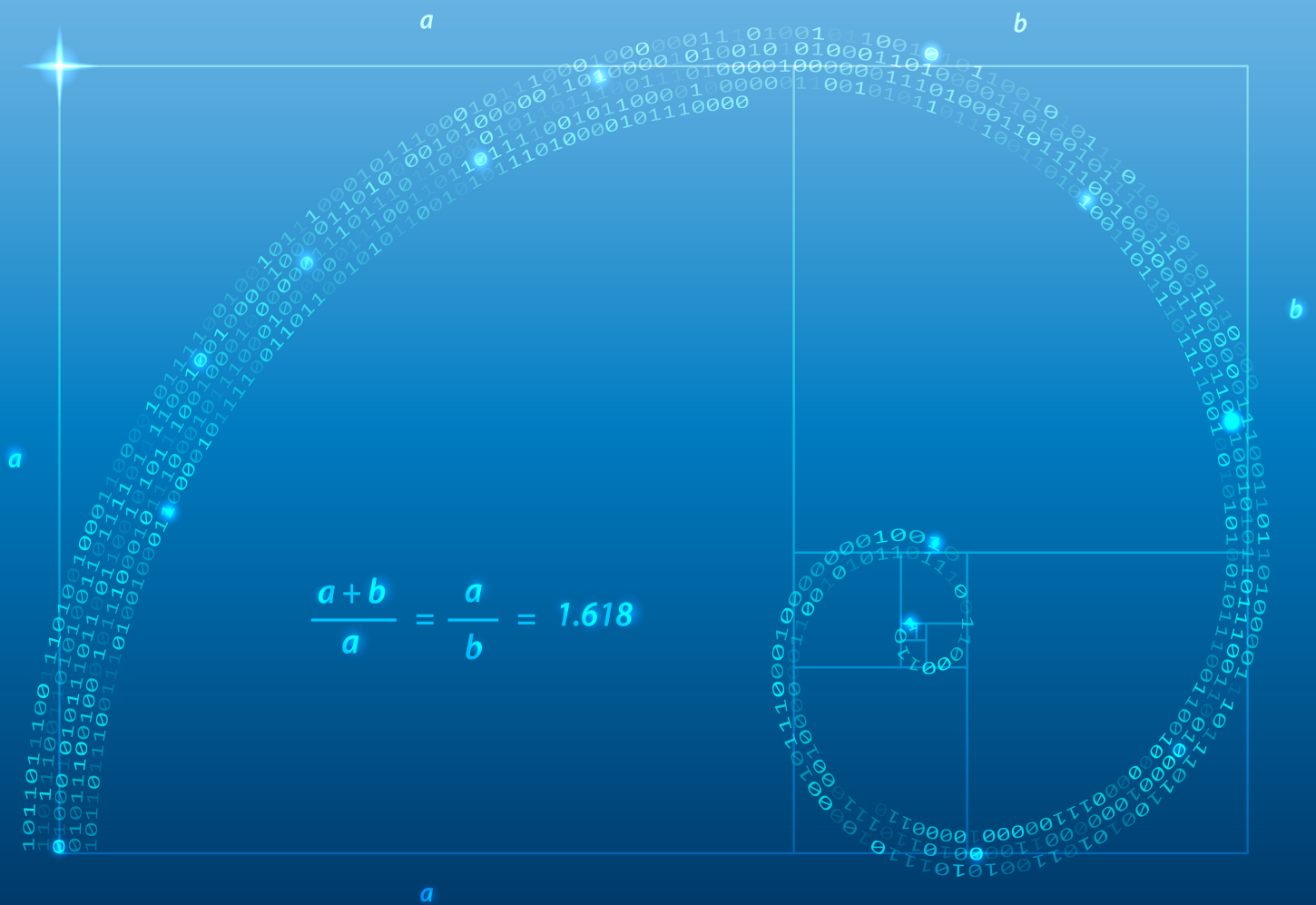
8. $\int e^{2x} \tanh(x) dx$

9. $\int \operatorname{csch}^3(u) du$

10. $\int \frac{\cosh(2x)}{\cosh^4(x)} dx$

11. $\int \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{1 - 3\tanh(x) + \tanh^2(x)} dx$

12. $\int \frac{\tanh^2(x)}{1 + \tanh(x)} dx$



<https://tinyurl.com/2d43gzmj>

CAPÍTULO III

Integración de funciones racionales

Una función racional es aquella que se presenta como una fracción, donde el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ son polinomios que no tienen factores comunes; o sea que no admiten simplificación, por lo tanto en esta sección vamos a estudiar las integrales del tipo [11]:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Ahora bien,

1. Si la fracción es propia, esto es, si el grado del numerador $P(x)$ es menor que el grado del denominador $Q(x)$, se puede descomponer en una suma de fracciones elementales (fracciones parciales) [16, 1, 3].
2. Si la fracción es impropia, esto es, si el grado del numerador $P(x)$ es mayor o igual al grado del denominador $Q(x)$, se debe empezar dividiendo el numerador para el denominador [16, 1, 3].

Por el algoritmo de la división la fracción impropia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer como la suma de una parte entera y una fracción propia, esto es

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(Z(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx$$

en donde la parte entera $Z(x)$ es el cociente que se obtiene al realizar la división y $\frac{R(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia. Cabe señalar que $R(x)$ es el residuo de la división.

Integración por fracciones parciales

El método de Fracciones Parciales se aplica a la integración de funciones racionales propias, es decir:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

cuando el grado del numerador $P(x)$, es menor que el grado del denominador $Q(x)$, caso contrario se debe primero realizar la división polinómica.

Para resolver este tipo de integrales el polinomio $Q(x)$ que se encuentra en el denominador de la fracción se debe poder descomponer en factores, es decir, debe ser factorizable [1, 16, 11, 2].

Dependiendo de los tipos de factores que se tengan, se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Factores lineales distintos

Si $Q(x)$ tiene factores lineales distintos, de la forma $(ax + b)$, es decir si $Q(x)$ tiene raíces reales y distintas, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma: $\frac{A}{ax + b}$, en donde A es una constante [1, 11, 16, 4, 9, 10].

Con esta factorización se puede expresar la integral de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \cdots (a_nx + b_n)} dx$$

A su vez esta integral puede ser expresada como una suma de fracciones de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{a_1x + b_1} dx + \int \frac{A_2}{a_2x + b_2} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{a_nx + b_n} dx$$

Para resolver cada una de las integrales del segundo miembro se debe tener en cuenta que:

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} dx$$

Empezar factorizando el denominador, esto es:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

En este caso el denominador tiene dos factores lineales distintos, entonces:

$$\frac{x - 2}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

con A y B constantes a determinarse. Ahora bien, obteniendo el m.c.m. en el lado derecho se tiene que

$$\frac{x - 2}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$x - 2 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

Resolviendo por el método del valor numérico, es decir, dando los valores de 1 y -2 a la variable x , de tal forma que los factores lineales $x - 1$ y $x + 2$ se hagan cero respectivamente, y reemplazando en la ecuación anterior, esto es

$$\text{Si } x = 1 : \quad -1 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x = -2 : \quad -4 = -3B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{4}{3}$$

Se obtiene,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + c \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{x-1} \right| + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{2x-1}{x^3-9x} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x^3-9x} &= \frac{2x-1}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x^2-9) + Bx(x+3) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$2x - 1 = A(x^2 - 9) + Bx(x + 3) + Cx(x - 3)$$

Resolviendo por el método del valor numérico

$$\text{Si } x = 0 : \quad -1 = -9A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{9}$$

$$\text{Si } x = 3 : \quad 5 = 18B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{18}$$

$$\text{Si } x = -3 : \quad -7 = 18C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{7}{18}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x(x-3)(x+3)} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{18} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{7}{18} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{9} \ln|x| + \frac{5}{18} \ln|x-3| - \frac{7}{18} \ln|x+3| + c \\ &= \frac{1}{18} [2\ln|x| + 5\ln|x-3| - 7\ln|x+3|] + c \\ &= \frac{1}{18} \ln \left| \frac{x^2(x-3)^5}{(x+3)^7} \right| + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} dx$$

Dividiendo el numerador para el denominador, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrr} x^3 & -2x^2 & +x & -1 \\ -x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & \end{array} & \begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{2}x & -1 \\ & \frac{1}{2}x^2 & -\frac{3}{4}x & +\frac{1}{4} \\ \hline & & -\frac{1}{4}x & -\frac{3}{4} \end{array} & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}}{2x^2 - 3x + 1}$$

De ahí que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} dx &= \int \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}}{2x^2 - 3x + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \frac{x+3}{2x^2 - 3x + 1} dx \end{aligned}$$

Ahora bien, resolviendo las dos primeras integrales y factorizando el denominador de la tercera integral, se tiene que

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{x+3}{(x-1)(2x-1)} dx \quad (1)$$

Resolviendo las Fracciones Parciales, se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-1)(2x-1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1} \\ &= \frac{A(2x-1) + B(x-1)}{(x-1)(2x-1)} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores, se tiene que

$$x+3 = A(2x-1) + B(x-1)$$

Resolviendo por el método del valor numérico

$$\text{Si } x=1: \quad 4=A \quad \Rightarrow \quad A=4$$

$$\text{Si } x=\frac{1}{2}: \quad \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}B \quad \Rightarrow \quad B=-7$$

Regresando a (1), se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} dx &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \left[\frac{4}{x-1} - \frac{7}{2x-1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{2x-1} \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \ln|x-1| + \frac{7}{8} \ln|2x-1| + c \end{aligned}$$

Caso 2. Factores lineales repetidos

Si $Q(x)$ tiene factores lineales de la forma $ax+b$, repetidos k veces, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma [1, 11, 2, 10]:

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, \quad A_i = cte \ (\forall i=1, \dots, k)$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{12x^2 - 52x + 81}{3x^3 - 16x^2 + 15x + 18} dx$$

Factorizando el denominador, se tiene que

$$3x^3 - 16x^2 + 15x + 18 = (3x + 2)(x - 3)^2$$

De ahí que

$$\frac{12x^2 - 52x + 81}{3x^3 - 16x^2 + 15x + 18} = \frac{12x^2 - 52x + 81}{(3x + 2)(x - 3)^2}$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\frac{12x^2 - 52x + 81}{(3x + 2)(x - 3)^2} = \frac{A}{3x + 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

$$\frac{12x^2 - 52x + 81}{(3x + 2)(x - 3)^2} = \frac{A(x - 3)^2 + B(3x + 2)(x - 3) + C(3x + 2)}{(3x + 2)(x - 3)^2}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$12x^2 - 52x + 81 = A(x - 3)^2 + B(3x + 2)(x - 3) + C(3x + 2)$$

Resolviendo por el método del valor numérico

$$\text{Si } x = 3 : \quad 33 = 11C \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

$$\text{Si } x = -\frac{2}{3} : \quad \frac{363}{3} = \frac{121}{9}A \quad \Rightarrow \quad A = 9$$

$$\text{Si } x = 0 : \quad 81 = 9A - 6B + 2C \quad \Rightarrow \quad 81 = 81 - 6B + 6 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

De ahí que,

$$\int \frac{12x^2 - 52x + 81}{3x^3 - 16x^2 + 15x + 18} dx = \int \left[\frac{9}{3x + 2} + \frac{1}{x - 3} + \frac{3}{(x - 3)^2} \right] dx$$

$$\int \frac{12x^2 - 52x + 81}{3x^3 - 16x^2 + 15x + 18} dx = 9 \int \frac{dx}{3x + 2} + \int \frac{dx}{x - 3} + 3 \int \frac{dx}{(x - 3)^2}$$

Haciendo los cambios de variable

$$v = 3x + 2 \Rightarrow dv = 3 dx$$

$$u = x - 3 \Rightarrow du = dx$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{12x^2 - 52x + 81}{3x^3 - 16x^2 + 15x + 18} dx &= 3 \int \frac{dv}{v} + \int \frac{du}{u} + 3 \int \frac{du}{u^2} \\ &= 3 \ln|v| + \ln|u| - \frac{3}{u} + c \\ &= 3 \ln|3x + 2| + \ln|x - 3| - \frac{3}{x - 3} + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{3x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2(x + 1)^2} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2(x + 1)^2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2} \\ \frac{3x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2(x + 1)^2} &= \frac{A(x - 1)(x + 1)^2 + B(x + 1)^2 + C(x + 1)(x - 1)^2 + D(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$3x^2 - 2x + 7 = A(x - 1)(x + 1)^2 + B(x + 1)^2 + C(x + 1)(x - 1)^2 + D(x - 1)^2$$

Resolviendo por el método del valor numérico

$$\text{Si } x = -1 : \quad 12 = 4D \Rightarrow D = 3$$

$$\text{Si } x = 1 : \quad 8 = 4B \Rightarrow B = 2$$

$$\text{Si } x = 0 : \quad 7 = -A + B + C + D \Rightarrow -A + C = 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 2 : \quad 15 &= 9A + 9B + 3C + D \Rightarrow 9A + 3C = -6 \\ &3A + C = -2 \quad (2) \end{aligned}$$

Despejando C en la ecuación (1), se tiene

$$C = 2 + A$$

Reemplazando en (2), se obtiene

$$3A + 2 + A = -2$$

$$4A = -4$$

$$A = -1$$

Por lo tanto, $C = 1$.

De ahí que,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 2x + 7}{(x-1)^2(x+1)^2} dx &= -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx \\ &= -\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + c \\ &= \ln|x+1| - \ln|x-1| - \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} \right) + c \\ &= \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{5x-1}{x^2-1} + c \end{aligned}$$

Caso 3. Factores cuadráticos distintos irreducibles

Si $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles distintos, que tienen la forma: $ax^2 + bx + c$, es decir, si el denominador tiene raíces complejas, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma [1, 11, 16, 3]:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

donde A y B son constantes.

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{(Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$4x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

es decir,

$$4x = Ax^3 + 2Ax^2 + 3Ax + Bx^2 + 2Bx + 3B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

Agrupando coeficientes de potencias semejantes, se tiene que:

$$4x = (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D)$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + D = 0 \\ 3A + 2B + C = 4 \\ 3B + D = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema mediante el método de Gauss:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} & = & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{matrix} F_3 - 2F_2 \\ F_4 - 3F_2 \end{matrix} & = \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{array} \right) & \begin{matrix} F_3/2 \\ F_4/2 \end{matrix} & = & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) & F_4 - 3F_3 & = \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} 2D &= -6 \implies D = -3 \\ C - D &= 2 \implies C = -1 \\ B - 2C + D &= 0 \implies B = 1 \\ A + C &= 0 \implies A = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3}$$

Luego,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx = \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$\text{Sean } I_1 = \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx$$

Resolviendo I_1 , se tiene que

$$I_1 = \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

si $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$, y por lo tanto

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln|u| + \arctan(x) + c_1$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \arctan(x) + c_1$$

Resolviendo I_2 , se sigue que

$$I_2 = \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{x + 3}{(x^2 + 2x + 1) + 2} dx = \int \frac{(x + 1) + 2}{(x + 1)^2 + 2} dx$$

$$I_2 = \int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 2} dx + 2 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2}$$

Sean:

$$u = (x + 1)^2 + 2 \Rightarrow du = 2(x + 1)dx,$$

$$v = x + 1 \Rightarrow dv = dx,$$

por lo tanto

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + 2 \int \frac{dv}{v^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln|u| + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + c_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln|(x + 1)^2 + 2| + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + c_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 3| + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c_2$$

Dado que,

$$I = \int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx = I_1 - I_2$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \arctan(x) + c_1 - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 3| - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - c_2 \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}\right| + \arctan(x) - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 47x^2 + 26x + 39}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9} dx$$

$$\text{Sea } I = \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 47x^2 + 26x + 39}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9} dx$$

Dividiendo el numerador para el denominador, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrrr} 4x^4 & 4x^3 & +47x^2 & +26x & +39 \\ -4x^4 & -8x^3 & -40x^2 & -72x & -36 \\ \hline & -4x^3 & +7x^2 & -46x & +3 \end{array} & \frac{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9}{4} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 47x^2 + 26x + 39}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9} = 4 - \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9}$$

De ahí que:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[4 - \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9} \right] dx \\ &= 4 \int dx - \int \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9} dx \end{aligned}$$

Ahora bien, resolviendo la primera integral y factorando el denominador de la segunda integral, se tiene que

$$I = 4x - \int \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{(x+1)^2(x^2+9)} dx \quad (*)$$

Aplicando Fracciones Parciales en la segunda integral, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{(x+1)^2(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9} \\ \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{(x+1)^2(x^2+9)} &= \frac{A(x+1)(x^2+9) + B(x^2+9) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+9)} \\ \frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{(x+1)^2(x^2+9)} &= \frac{(Ax+A+B)(x^2+9) + (Cx+D)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+9)}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$4x^3 - 7x^2 + 46x - 3 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + 9Ax + 9A + 9B + Cx^3 + Dx^2 + 2Cx^2 + 2Dx + Cx + D$$

Agrupando coeficientes de potencias semejantes, se tiene que:

$$4x^3 - 7x^2 + 46x - 3 = (A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (9A+C+2D)x + (9A+9B+D)$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ A + B + 2C + D = -7 \\ 9A + C + 2D = 46 \\ 9A + 9B + D = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema mediante el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 46 \\ 9 & 9 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - 9F_1 \\ F_4 - 9F_1 \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 10 \\ 0 & 9 & -9 & 1 & -39 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ F_4 - 9F_2 \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -18 & -8 & 60 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -F_3/8 \\ -F_4/2 \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -30 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 - F_3 \\ F_2 - F_3 \\ F_4 - 9F_3 \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{4} & -\frac{75}{4} \end{array} \right) 4F_4/25 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 - \frac{1}{4}F_4 \\ F_2 - \frac{5}{4}F_4 \\ F_3 + \frac{1}{4}F_4 \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} A &= 6 \\ B &= -6 \\ C &= -2 \\ D &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{4x^3 - 7x^2 + 46x - 3}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{6}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{2x+3}{x^2+9}$$

Regresando a (*), se tiene que

$$\begin{aligned} I &= 4x - \int \frac{6}{x+1} dx + \int \frac{6}{(x+1)^2} dx + \int \frac{2x+3}{x^2+9} dx \\ &= 4x - 6 \int \frac{dx}{x+1} + 6 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{2x}{x^2+9} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2+9} \\ &= 4x - 6 \ln|x+1| - \frac{6}{x+1} + \ln|x^2+9| + \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \end{aligned}$$

Caso 4. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Si $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles que se repiten k veces, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma [1, 11, 16, 5]:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}, \quad A_i, B_i = \text{ctes} (\forall i = 1, \dots, k)$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{2x^4 + 17x^2 - 4x + 36}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$$

Dividiendo el numerador para el denominador, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrr} 2x^4 & +17x^2 & -4x & +36 \\ -2x^4 & -16x^2 & & -32 \\ \hline & +x^2 & -4x & +4 \end{array} & \begin{array}{l} x^4 + 8x^2 + 16 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\frac{2x^4 + 17x^2 - 4x + 36}{x^4 + 8x^2 + 16} = 2 + \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + 17x^2 - 4x + 36}{x^4 + 8x^2 + 16} dx &= \int \left[2 + \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 + 8x^2 + 16} \right] dx \\ &= 2 \int dx + \int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 + 8x^2 + 16} dx\end{aligned}\quad (1)$$

Ahora bien, resolviendo la primera integral y factorando el denominador de la segunda integral, se tiene que

$$\int \frac{2x^4 + 17x^2 - 4x + 36}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = 2x + \int \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales en la segunda integral, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2} \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{(Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)}{(x^2 + 4)^2} \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + Cx + D}{(x^2 + 4)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores, se sigue que

$$x^2 - 4x + 4 = Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + Cx + D$$

Agrupando coeficientes de potencias semejantes, se tiene que:

$$x^2 - 4x + 4 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ 4A + C = -4 \\ 4B + D = 4 \end{cases}$$

Reemplazando los valores de A y B en la tercera y cuarta ecuación respectivamente, se tiene

$$C = -4, \quad D = 0$$

De ahí que,

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4x}{(x^2 + 4)^2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx &= \int \frac{dx}{x^2 + 4} - 4 \int \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \int \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx \end{aligned}$$

Ahora bien, para resolver la segunda integral, hacemos la sustitución :

$$p = x^2 + 4 \Rightarrow dp = 2x dx$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \int \frac{dp}{p^2}$$

Integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{p} + c \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{x^2 + 4} + c \end{aligned}$$

Regresando a (1), se tiene que

$$\int \frac{2x^4 + 17x^2 - 4x + 36}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = 2x + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{x^2 + 4} + c$$

$$2. \int \frac{3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8}{x(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8}{x(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8}{x(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{A(x^2 - 2x + 2)^2 + (Bx + C)x(x^2 - 2x + 2) + (Dx + E)x}{x(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8}{x(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{A(x^2 - 2x + 2)^2 + (Bx^2 + Cx)(x^2 - 2x + 2) + Dx^2 + Ex}{x(x^2 - 2x + 2)^2}$$

Igualando los numeradores, y desarrollando los términos, se sigue que

$$\begin{aligned}
 3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8 &= A(x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 8x + 4x^2) + B(x^4 - 2x^3 + 2x^2) + \\
 &\quad + C(x^3 - 2x^2 + 2x) + Dx^2 + Ex \\
 3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8 &= A(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4) + B(x^4 - 2x^3 + 2x^2) + \\
 &\quad + C(x^3 - 2x^2 + 2x) + Dx^2 + Ex
 \end{aligned}$$

Agrupando coeficientes de potencias semejantes, se tiene que

$$\begin{aligned}
 3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8 &= (A + B)x^4 + (-4A - 2B + C)x^3 + (8A + 2B - 2C + D)x^2 + \\
 &\quad + (-8A + 2C + E)x + 4A
 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -4A - 2B + C = -9 \\ 8A + 2B - 2C + D = 15 \\ -8A + 2C + E = -13 \\ 4A = 8 \end{cases}$$

Despejando A de la última ecuación, se obtiene $A = 2$. Reemplazando este valor en la primera ecuación, se obtiene $B = 1$. Reemplazando los valores de A y B en la segunda ecuación, se obtiene $C = 1$. Reemplazando los valores de A , B y C en la tercera ecuación, se obtiene $D = -1$. Por último, reemplazando los valores de A y C en la cuarta ecuación, se obtiene $E = 1$.

Ahora bien, si llamamos I a la integral $\int \frac{3x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 13x + 8}{x(x^2 - 2x + 2)^2} dx$, se tiene

$$I = 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx + \int \frac{1 - x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

Completando el trinomio en la segunda y tercera integrales, se sigue que:

$$I = 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x + 1}{(x - 1)^2 + 1} dx - \int \frac{x - 1}{((x - 1)^2 + 1)^2} dx$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = x - 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u+2}{u^2+1} du - \int \frac{u}{(u^2+1)^2} du \\ &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u}{u^2+1} du + 2 \int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{u}{(u^2+1)^2} du \end{aligned}$$

Luego, haciendo la sustitución:

$$v = u^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad dv = 2u du$$

se sigue que

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} + 2 \int \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2} \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|v| + 2 \arctan(u) + \frac{1}{2v} + c \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|u^2+1| + 2 \arctan(u) + \frac{1}{2(u^2+1)} + c \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|(x-1)^2+1| + 2 \arctan(x-1) + \frac{1}{2((x-1)^2+1)} + c \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| + 2 \arctan(x-1) + \frac{1}{2(x^2-2x+2)} + c \\ &= \ln|x^2 \sqrt{x^2-2x+2}| + 2 \arctan(x-1) + \frac{1}{2(x^2-2x+2)} + c \end{aligned}$$

NOTA:

En los dos ejemplos anteriores, la integral que tiene el término cuadrático elevado al cuadrado, contiene la derivada del término cuadrático en el numerador, por lo que se resuelve con una simple sustitución.

Cuando esto no sucede, este tipo de integrales se resuelven aplicando otras técnicas de integración como: "El método de Ostrogradski" que se estudiará a continuación o "sustitución trigonométrica", la cual será estudiada en el Capítulo IV.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{2x-15}{2-x-6x^2} dx$$

$$2. \int \frac{6x^3 + 21x^2 + 17x + 13}{2x^3 + 7x^2 + 7x + 2} dx$$

$$3. \int \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6} dx$$

$$4. \int \frac{z^5 - 3z^3 + z - 7}{z^4 + 5z^2 + 4} dz$$

$$5. \int \frac{2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x - 4}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4} dz$$

$$6. \int \frac{2x^3 - 3x + 10}{x^5 - x^2} dx$$

$$7. \int \frac{81}{(p-3)^2(2p+3)^2} dp$$

$$8. \int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2} dx$$

$$9. \int \frac{u+9}{u^5 - u^4 + 18u^3 - 18u^2 + 81u - 81} du$$

$$10. \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^5 - 6t^3 + t} dt$$

$$11. \int \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$12. \int \frac{x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 16x + 26}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx$$

Método de Hermite-Ostrogradski

Cuando en una integral racional el denominador presenta raíces múltiples, es posible calcular la integral utilizando un método ideado por el propio Ostrogradski, evitando así la necesidad de descomponer la fracción en múltiples fracciones parciales [4, 9, 2].

Este enfoque se basa en la resolución de integrales de la forma:

$$I = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

donde $x^2 + bx + c$ es irreducible (es decir, no se puede factorizar en números reales). Para resolver integrales de este tipo, se descompone la fracción en dos partes:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx = \frac{P(x)}{(x^2 + bx + c)^{n-1}} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + bx + c} dx$$

donde:

- $P(x)$ es un polinomio de un grado menor que $2(n-1)$.
- C y D son constantes que se determinan derivando ambos miembros o comparando coeficientes.

En general, el método de Hermite–Ostrogradski se utiliza para resolver integrales de funciones racionales propias de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, cuando el polinomio $Q(x)$ tiene factores con multiplicidad.

La integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

puede expresarse como:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx \quad (1)$$

donde:

- $Q_1(x)$ es el máximo común divisor entre $Q(x)$ y su derivada.
- $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$.
- $X(x)$ y $Y(x)$ son polinomios un grado menor a los de $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, respectivamente.

Los coeficientes de $X(x)$ y $Y(x)$ se determinan derivando ambos miembros de la ecuación (1) y comparando los numeradores [4, 2].

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{5}{(x^2 + 9)^2} dx$$

Utilizando el método de Hermite–Ostrogradski en donde el factor del denominador es: $Q(x) = (x^2 + 9)^2$. se tiene que

- $Q'(x) = 2(x^2 + 9)(2x) = 4x(x^2 + 9)$
- $Q_1(x) = MCD(Q(x), Q'(x)) = x^2 + 9$
- $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = x^2 + 9$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera

$$\int \frac{5}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 9} dx$$

Derivando la expresión anterior

$$\frac{5}{(x^2 + 9)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 9} \right) + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}$$

Se calcula la derivada usando la regla del cociente

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 9} \right) = \frac{A(x^2 + 9) - (Ax + B)(2x)}{(x^2 + 9)^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{5}{(x^2 + 9)^2} &= \frac{A(x^2 + 9) - (Ax + B)(2x)}{(x^2 + 9)^2} + \frac{(Cx + D)(x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2} \\ \frac{5}{(x^2 + 9)^2} &= \frac{A(x^2 + 9) - 2x(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2} \end{aligned}$$

Desarrollando el numerador e igualando, se tiene que

$$\begin{aligned} 5 &= A(x^2 + 9) - 2x(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + 9) \\ 5 &= Ax^2 + 9A - 2Ax^2 - 2Bx + Cx^3 + 9Cx + Dx^2 + 9D \\ 5 &= Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B + 9C)x + (9A + 9D) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 : \quad C &= 0 \\ x^2 : \quad -A + D &= 0 \quad \Rightarrow \quad D = A \\ x : \quad -2B + 9C &= 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ \text{término independiente :} \quad 9A + 9D &= 5 \Rightarrow 18A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Entonces

$$A = D = \frac{5}{18}, \quad B = C = 0$$

Sustituyendo en la expresión original

$$\int \frac{5}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{5x}{18(x^2 + 9)} + \frac{5}{18} \int \frac{1}{x^2 + 9} dx$$

Usando la identidad

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

Con $a = 3$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{(x^2 + 9)^2} dx &= \frac{5x}{18(x^2 + 9)} + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \\ &= \frac{5x}{18(x^2 + 9)} + \frac{5}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c\end{aligned}$$

2. $\int \frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^3 - 1)^2} dx$

Como la fracción es impropia debemos empezar dividiendo, para ello abramos el denominador, esto es

$$(x^3 - 1)^2 = x^6 - 2x^3 + 1$$

Dividiendo el numerador para el denominador, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} x^6 & +x^2 \quad +1 \\ -x^6 & +2x^3 \quad -1 \\ \hline & +2x^3 \quad +x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^6 - 2x^3 + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^3 - 1)^2} = 1 + \frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

Entonces podemos escribir la integral así

$$\int \frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^3 - 1)^2} dx = \int dx + \int \frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} dx \quad (*)$$

A continuación se procede a desarrollar la segunda integral de la expresión anterior mediante el método propuesto. Llamando I_1 a esta integral, se sigue que

$$I_1 = \int \frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} dx$$

Utilizando el método de Hermite-Ostrogradski en donde el factor del denominador es: $Q(x) = (x^3 - 1)^2$, se tiene

- $Q'(x) = 6x^2(x^3 - 1)$
- $Q_1(x) = MCD(Q(x), Q'(x)) = x^3 - 1$
- $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = x^3 - 1$

Entonces:

$$I_1 = \int \frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x^3 - 1)} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{(x^3 - 1)} dx$$

Al derivar la expresión anterior, se tiene que

$$\frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{(2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C)}{(x^3 - 1)^2} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{(x^3 - 1)}$$

Al sumar las fracciones del lado de derecho de la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{(2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C) + (Dx^2 + Ex + F)(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^2}$$

Igualando los numeradores y realizando las operaciones del lado derecho, se sigue que

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 &= 2Ax^4 + Bx^3 - 2Ax - B - 3Ax^4 - 3Bx^3 - 3Cx^2 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 - \\ &\quad - Dx^2 - Ex - F \\ 2x^3 + x^2 &= Dx^5 + (2A - 3A + E)x^4 + (B - 3B + F)x^3 + (-3C - D)x^2 + (-2A - E)x + \\ &\quad + (-2A - E)x + (-B - F) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} D = 0 & (1) \\ -A + E = 0 & (2) \\ -2B + F = 2 & (3) \\ -3C - D = 1 & (4) \\ -2A - E = 0 & (5) \\ -B - F = 0 & (6) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (4) se obtiene $C = -\frac{1}{3}$. Sumando las ecuaciones (2) y (5), se obtiene $A = 0$ y por lo tanto $E = 0$. Por último, sumando las ecuaciones (3) y (6) se obtiene $B = -\frac{2}{3}$ y por lo tanto $F = \frac{2}{3}$.

De ahí que,

$$I_1 = \int \frac{2x^3 + x^2}{(x^3 - 1)^2} dx = \frac{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^3 - 1} + \int \frac{\frac{2}{3}}{x^3 - 1} dx$$

Reemplazando I_1 en (*), se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^3 - 1)^2} dx &= x + \frac{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^3 - 1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3 - 1} \\ &= x - \frac{2x + 1}{3(x^3 - 1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3 - 1} \quad (**) \end{aligned}$$

Finalmente resolvemos:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^3 - 1}$$

Para ello utilizamos el método de fracciones parciales. Empecemos factorizando el denominador, esto es

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)}{x^3 - 1}$$

Igualando numeradores, se sigue que

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Resolviendo por el método del valor numérico

$$\text{Si } x = 1 : \quad 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x = 0 : \quad 1 = \frac{1}{3} - C \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Si } x = -1 : \quad 1 = \frac{1}{3} + 2B + \frac{4}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Entonces:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)}$$

De ahí que:

$$I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

Resolviendo la primera integral y multiplicando por dos el numerador y denominador de la segunda integral

$$I_2 = \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x + 4}{x^2 + x + 1} dx$$

Abriendo la segunda integral en dos integrales

$$I_2 = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

En la segunda integral la derivada del denominador se encuentra en el numerador, por lo que su solución es el logaritmo natural del denominador, mientras que completamos el cuadrado en la tercera integral, por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_1 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo I_2 en (**) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6+x^2+1}{(x^3-1)^2} dx &= x - \frac{2x+1}{3(x^3-1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \ln|x^2+x+1| - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \\ &= x - \frac{2x+1}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \right| - \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{x^3+11}{(x^2-2x+5)^3} dx$$

Utilizando el método de Hermite-Ostrogradski en donde el factor del denominador es: $Q(x) = (x^2-2x+5)^3$, se tiene

- $Q'(x) = 3(x^2-2x+5)^2(2x-2) = 3(2x-2)(x^2-2x+5)^2$
- $Q_1(x) = MCD(Q(x), Q'(x)) = (x^2-2x+5)^2$
- $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = x^2-2x+5$

Entonces:

$$\int \frac{x^3+11}{(x^2-2x+5)^3} dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2-2x+5)^2} + \int \frac{Ex+F}{x^2-2x+5} dx$$

Al derivar la expresión anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{x^3+11}{(x^2-2x+5)^3} &= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2-2x+5)^2}{(x^2-2x+5)^4} - \\ &\quad - \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)2(x^2-2x+5)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^4} + \frac{Ex+F}{x^2-2x+5} \end{aligned}$$

Simplificando e igualando denominadores, se obtiene

$$\frac{x^3 + 11}{(x^2 - 2x + 5)^3} = \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2 - 2x + 5)}{(x^2 - 2x + 5)^3} - \frac{(4x - 4)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{(x^2 - 2x + 5)^3} + \frac{(Ex + F)(x^2 - 2x + 5)^2}{(x^2 - 2x + 5)^3}$$

Multiplicando e igualando numeradores, se tiene que

$$\begin{aligned} x^3 + 11 = & 3Ax^4 - 6Ax^3 + 15Ax^2 + 2Bx^3 - 4Bx^2 + 10Bx + Cx^2 - 2Cx + 5C - \\ & -4Ax^4 - 4Bx^3 - 4Cx^2 - 4Dx + 4Ax^3 + 4Bx^2 + 4Cx + 4D + Ex^5 - \\ & -4Ex^4 + 14Ex^3 - 20Ex^2 + 25Ex + Fx^4 - 4Fx^3 + 14Fx^2 - 20Fx + 25F \end{aligned}$$

Simplificando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} E = 0 \\ -A - 4E + F = 0 \\ -2A - 2B + 14E - 4F = 1 \\ 15A - 3C - 20E + 14F = 0 \\ 10B + 2C - 4D + 25E - 20F = 0 \\ 5C + 4D + 25F = 11 \end{cases}$$

Reemplazando $E = 0$ en la segunda ecuación se obtiene $A = F$. Ahora bien, reemplazando $E = 0$ y $A = F$ en las otras cuatro ecuaciones, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -2B - 6F = 1 \\ -3C + 29F = 0 \\ 10B + 2C - 4D - 20F = 0 \\ 5C + 4D + 25F = 11 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema mediante el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 29 & 0 \\ 10 & 2 & -4 & -20 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 25 & 11 \end{array} \right) -F_1/2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & 29 & 0 \\ 10 & 2 & -4 & -20 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 25 & 11 \end{array} \right) F_3 - 10F_1 =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -50 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 25 & 11 \end{array} \right) -F_2/3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -50 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 25 & 11 \end{array} \right) F_3 - 2F_2 =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{92}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{220}{3} & 11 \end{array} \right) - F_3/4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{3} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{220}{3} & 11 \end{array} \right) =$$

 $F_4 - 4F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{3} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{128}{3} & 16 \end{array} \right) \frac{3}{128} F_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{3} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 - 3F_4 \\ F_2 + \frac{29}{3}F_4 \\ F_3 - \frac{23}{3}F_4 \\ \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{33}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array} \right)$$

De ahí que, la solución del sistema anterior es

$$B = -\frac{13}{8}, \quad C = \frac{29}{8}, \quad D = -\frac{33}{8}, \quad F = \frac{3}{8},$$

y por lo tanto, la solución del sistema original es

$$A = F = \frac{3}{8}, \quad B = -\frac{13}{8}, \quad C = \frac{29}{8}, \quad D = -\frac{33}{8}, \quad E = 0,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 11}{(x^2 - 2x + 5)^3} dx &= \frac{\frac{3}{8}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{29}{8}x - \frac{33}{8}}{(x^2 - 2x + 5)^2} + \int \frac{\frac{3}{8}}{x^2 - 2x + 5} dx \\ &= \frac{3x^3 - 13x^2 + 29x - 33}{8(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} \\ &= \frac{3x^3 - 13x^2 + 29x - 33}{8(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} \\ &= \frac{3x^3 - 13x^2 + 29x - 33}{8(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c \\ &= \frac{3x^3 - 13x^2 + 29x - 33}{8(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{3}{16} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{2x}{(x^2 + x + 1)^2} dx$$

$$2. \int \frac{x^4 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

$$3. \int \frac{2x - 1}{(x^2 + 1)^3} dx$$

$$4. \int \frac{24}{(x^3 + 8)^2} dx$$

$$5. \int \frac{2x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$$

$$6. \int \frac{x - 1}{(x^2 + 4x + 5)^3} dx$$

$$7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x^2 + x + 2)^2} dx$$

$$8. \int \frac{2x + 1}{(x^2 - 3x + 5)^3} dx$$

$$9. \int \frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^3 + 1)^2} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$$

$$11. \int \frac{e^x}{(e^{2x} - e^x + 1)^3} dx$$

$$12. \int \frac{dx}{x(2\ln^2(x) + 2\ln(x) + 1)^3}$$

Integración de Funciones Racionales con senos y cosenos (Sustitución de Weierstrass)

Una función racional con senos y cosenos es aquella función que tiene en el numerador y/o en el denominador funciones trigonométricas. Para su estudio a este tipo de integrales las vamos a notar como:

$$\int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$$

Para resolver este tipo de integrales se pueden tener los siguientes casos:

Caso 1. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx \neq \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$

Si al cambiar el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la integral original, la integral cambia, para resolverla se utiliza la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ [2, 4].

Ahora bien, si

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

despejando dx , se obtiene

$$dx = \frac{2 dt}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

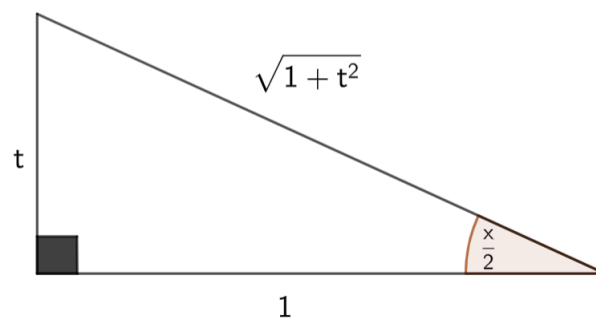
reemplazando $\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que

$$dx = \frac{2 dt}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

es decir,

$$dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

Para determinar las fórmulas para el $\sen(x)$ y el $\cos(x)$, se utiliza el triángulo trigonométrico, conociendo que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, esto es



$$\sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\sen(x) = 2 \sen\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ y $\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que:

$$\sen(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

En resumen, las fórmulas que se deben utilizar son

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad \sen(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) + 7}$$

Empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso. Reemplazando el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3(-\operatorname{sen}(x)) - 2(-\cos(x)) + 7} &= \int \frac{dx}{-3\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + 7} \\ &= - \int \frac{dx}{3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) - 7} \end{aligned}$$

Como se puede observar, la función cambia y por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, llamando I a la integral que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) + 7} \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) - 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 7} \\ &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 7} \\ &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{6t - 2 + 2t^2 + 7 + 7t^2}{1+t^2}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{9t^2 + 6t + 5} \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{9}} \end{aligned}$$

Completando el trinomio

$$I = \frac{2}{9} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}}$$

Realizando la sustitución $u = t + \frac{1}{3} \Rightarrow du = dt$, se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{9} \int \frac{du}{u^2 + \frac{4}{9}} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{3u}{2}\right) + c \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3t+1}{2}\right) + c \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{(2 + \cos(x))(3 + \cos(x))}$$

Esta integral también pertenece a este caso, pues al cambiar $\cos(x)$ por $-\cos(x)$, la integral cambia.

Ahora bien, llamando I a la integral que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2 + \cos(x))(3 + \cos(x))} \\ &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\ &= \int \frac{2}{\left(\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)} dt \\ &= \int \frac{2(1+t^2)}{(3+t^2)(4+2t^2)} dt \\ &= \int \frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} = \frac{At+B}{3+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2}$$

Entonces,

$$1+t^2 = At(2+t^2) + B(2+t^2) + Ct(3+t^2) + D(3+t^2)$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$1+t^2 = (A+C)t^3 + (B+D)t^2 + (2A+3C)t + (2B+3D)$$

$$\begin{cases} A+C=0 & (1) \\ B+D=1 & (2) \\ 2A+3C=0 & (3) \\ 2B+3D=1 & (4) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (1) por (-3) y sumando la ecuación (3), se obtiene como resultado $A=0$ y por lo tanto $C=0$. Ahora bien, multiplicando la ecuación (2) por (-3) y sumando la ecuación (4), se obtiene como resultado $B=2$ y por lo tanto $D=-1$.

De ahí que,

$$\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} = \frac{2}{3+t^2} - \frac{1}{2+t^2}$$

Regresando a la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2}{3+t^2} - \frac{1}{2+t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{2}} \right) + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{\csc(x) + \cot(x) - 1}{\csc(x) - \cot(x) + 1} dx$$

Llamemos I a la integral y empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello expresamos la integral en senos y cosenos, esto es:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\csc(x) + \cot(x) - 1}{\csc(x) - \cot(x) + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - 1}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} + 1} dx \\
&= \int \frac{1 + \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)} dx
\end{aligned}$$

Reemplazando el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la última expresión, se tiene

$$\int \frac{1 + (-\cos(x)) - (-\operatorname{sen}(x))}{1 - (-\cos(x)) + (-\operatorname{sen}(x))} dx = \int \frac{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x) - \operatorname{sen}(x)} dx$$

Como se puede observar, la función cambia y por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, llamando I a la integral original que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1 + \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)} dx \\
&= \int \frac{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{\frac{1+t^2+1-t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-1+t^2+2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= 2 \int \frac{2-2t}{(2t^2+2t)(1+t^2)} dt \\
&= \int \frac{2-2t}{t(t+1)(1+t^2)} dt
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{2-2t}{t(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

Entonces,

$$2 - 2t = A(t+1)(1+t^2) + Bt(1+t^2) + (Ct+D)t(t+1)$$

Desarrollando los productos del lado derecho, se tiene que

$$2 - 2t = At + At^3 + A + At^2 + Bt + Bt^3 + Ct^3 + Ct^2 + Dt^2 + Dt$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$2 - 2t = (A + B + C)t^3 + (A + C + D)t^2 + (A + B + D)t + A$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & (1) \\ A + C + D = 0 & (2) \\ A + B + D = -2 & (3) \\ A = 2 & (4) \end{cases}$$

Reemplazando (4) en las otras ecuaciones, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} B + C = -2 & (1) \\ C + D = -2 & (2) \\ B + D = -4 & (3) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema mediante el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ F_3/2 \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 + F_3 \\ F_2 - F_3 \\ \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Se obtiene

$$B = -2 \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad D = -2.$$

De ahí que,

$$\frac{2 - 2t}{t(t+1)(1+t^2)} = \frac{2}{t} - \frac{2}{t+1} - \frac{2}{1+t^2}$$

Regresando a la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}
I &= 2 \int \frac{dt}{t} - 2 \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 2\ln|t| - 2\ln|t+1| - 2 \arctan(t) + c \\
&= 2\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| - 2 \arctan(t) + c \\
&= 2\ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} \right| - 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \\
&= \ln \left| \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)^2} \right| - x + c \\
&= \ln \left| \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \right| - x + c \\
&= \ln \left| \frac{\frac{1 - \cos(x)}{2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| - x + c \\
&= \ln \left| \frac{1 - \cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)} \right| - x + c_1
\end{aligned}$$

Caso 2. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx = - \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$

Si al cambiar el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ en la integral original, la integral cambia por el negativo de la integral original, se hace la sustitución: $t = \cos(x)$ [2, 4, 5, 10, 9].

Dado que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, se obtiene

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - t^2}.$$

Ahora bien, si

$$t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\operatorname{sen}(x) dx,$$

despejando dx , se tiene que

$$dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen}(x)},$$

reemplazando $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - t^2}$, se obtiene

$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \tan(x)}$$

Llamemos I a la integral y empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello expresamos la integral en senos y cosenos, esto es:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \tan(x)} &= \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}} \\ &= \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \operatorname{sen}(x)} dx \\ &= \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)[\cos(x) + 1]} dx \end{aligned}$$

Reemplazando el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ en la última integral, se tiene que

$$\int \frac{\cos(x)}{(-\operatorname{sen}(x))(\cos(x) + 1)} dx = - \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)(\cos(x) + 1)} dx.$$

Por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, haciendo la sustitución $t = \cos(x) \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ en la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)[\cos(x) + 1]} dx &= - \int \frac{t \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}(t+1)} \\ &= - \int \frac{t}{(1-t^2)(t+1)} dt \\ &= - \int \frac{t}{(1-t)(t+1)^2} dt \\ &= \int \frac{t}{(t-1)(t+1)^2} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$

Entonces,

$$t = A(t+1)^2 + B(t-1)(t+1) + C(t-1)$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } t = 1 : \quad 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4},$$

$$\text{si } t = -1 : \quad -1 = -2C \Rightarrow C = \frac{1}{2},$$

$$\text{si } t = 0 : \quad 0 = A - B - C \Rightarrow B = -\frac{1}{4}.$$

De ahí que,

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t+1)^2}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{4(t-1)} - \int \frac{dt}{4(t+1)} + \int \frac{dt}{2(t+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{2(t+1)} + c \end{aligned}$$

Ahora bien, regresando a la variable original, se obtiene

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1} \right| - \frac{1}{2(\cos(x)+1)} + c$$

$$2. \int \frac{\cot^3(x)}{\cot^2(x) - 4\csc^2(x)} dx$$

Llamemos I a la integral y empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello expresamos la integral en senos y cosenos, esto es:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cot^3(x)}{\cot^2(x) - 4\csc^2(x)} dx &= \int \frac{\frac{\cos^3(x)}{\sin^3(x)}}{\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} - \frac{4}{\sin^2(x)}} dx \\ &= \int \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)(\cos^2(x) - 4)} dx \end{aligned}$$

Reemplazando el $\sin(x)$ por $-\sin(x)$ se tiene que

$$\int \frac{\cos^3(x)}{(-\sin(x))(\cos^2(x) - 4)} dx = - \int \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)(\cos^2(x) - 4)} dx.$$

Por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, haciendo la sustitución $t = \cos(x) \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ en la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)(\cos^2(x)-4)} dx = \int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}(t^2-4)} \left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\ &= -\int \frac{t^3}{(1-t^2)(t^2-4)} dt \\ &= \int \frac{t^3}{(1-t^2)(4-t^2)} dt \\ &= \int \frac{t^3}{(1+t)(1-t)(2+t)(2-t)} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{t^3}{(1+t)(1-t)(2+t)(2-t)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{2-t}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} t^3 &= A(t+1)(1-t)(2-t) + B(t+2)(1-t)(2-t) + C(t+2)(t+1)(2-t) \\ &\quad + D(t+2)(t+1)(1-t) \end{aligned}$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } t = -2 : \quad -8 = -12A \Rightarrow A = \frac{2}{3},$$

$$\text{si } t = -1 : \quad -1 = 6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6},$$

$$\text{si } t = 1 : \quad 1 = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{6},$$

$$\text{si } t = 2 : \quad 8 = -12D \Rightarrow D = -\frac{2}{3}.$$

De ahí que,

$$\frac{t^3}{(1+t)(1-t)(2+t)(2-t)} = \frac{2}{3(t+2)} - \frac{1}{6(t+1)} + \frac{1}{6(1-t)} - \frac{2}{3(2-t)}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t+2} - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{2-t} \\ &= \frac{2}{3} \ln|t+2| - \frac{1}{6} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln|1-t| + \frac{2}{3} \ln|2-t| + c \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de los logaritmos, se sigue que

$$I = \frac{2}{3} \ln|4 - t^2| - \frac{1}{6} \ln|1 - t^2| + c$$

Ahora bien, regresando a la variable original, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \ln|4 - \cos^2(x)| - \frac{1}{6} \ln|1 - \cos^2(x)| + c \\ &= \frac{2}{3} \ln|4 - (1 - \operatorname{sen}^2(x))| - \frac{1}{6} \ln|\operatorname{sen}^2(x)| + c \\ &= \frac{2}{3} \ln|3 + \operatorname{sen}^2(x)| - \frac{1}{3} \ln|\operatorname{sen}(x)| + c \end{aligned}$$

Caso 3. Si $\int Q(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx = - \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$

Si al cambiar el $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la integral original, la integral cambia por el negativo de la integral original, se hace la sustitución: $t = \operatorname{sen}(x)$ [2, 4, 5, 10, 9].

Dado que $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, se obtiene

$$\cos(x) = \sqrt{1 - t^2}.$$

Ahora bien, si

$$t = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx,$$

despejando dx , se tiene que

$$dx = \frac{dt}{\cos(x)},$$

reemplazando $\cos(x) = \sqrt{1 - t^2}$, se obtiene

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{\cos(x)(3 + \operatorname{sen}(x))}$$

Reemplazando el $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ se tiene que

$$\int \frac{dx}{(-\cos(x))(3 + \operatorname{sen}(x))} = - \int \frac{dx}{\cos(x)(3 + \operatorname{sen}(x))}.$$

Por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, haciendo la sustitución $t = \text{sen}(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ y llamando I a la integral que se desea resolver, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos(x)(3 + \text{sen}(x))} = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}(3+t)} \\ &= \int \frac{dt}{(1-t^2)(3+t)} \\ &= \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)(3+t)} \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)(3+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{3+t}$$

Entonces,

$$1 = A(1+t)(3+t) + B(1-t)(3+t) + C(1-t)(1+t)$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } t = 1 : \quad 1 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{8},$$

$$\text{si } t = -1 : \quad 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4},$$

$$\text{si } t = -3 : \quad 1 = -8C \Rightarrow C = -\frac{1}{8}.$$

De ahí que,

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)(3+t)} = \frac{1}{8(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{8(3+t)}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{8} \int \frac{dt}{3+t} \\ &= -\frac{1}{8} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{1}{8} \ln|3+t| + c \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(1+t)^2}{(1-t)(3+t)} \right| + c \end{aligned}$$

Ahora bien, regresando a la variable original, se obtiene

$$I = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{sen}(x))^2}{(1 - \operatorname{sen}(x))(3 + \operatorname{sen}(x))} \right| + c$$

$$2. \int \frac{3 \tan^3(x) + 2 \sec(x)}{9 \sec^2(x) + \tan^2(x)} dx$$

Llamemos I a la integral y empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello expresamos la integral en senos y cosenos, esto es:

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \tan^3(x) + 2 \sec(x)}{9 \sec^2(x) + \tan^2(x)} dx &= \int \frac{3 \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^3(x)} + 2 \frac{1}{\cos(x)}}{9 \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}} dx \\ &= \int \frac{3 \operatorname{sen}^3(x) + 2 \cos^2(x)}{\cos(x)(9 + \operatorname{sen}^2(x))} dx \end{aligned}$$

Reemplazando el $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ se tiene que

$$\int \frac{3 \operatorname{sen}^3(x) + 2 (-\cos(x))^2}{(-\cos(x))(9 + \operatorname{sen}^2(x))} dx = - \int \frac{3 \operatorname{sen}^3(x) + 2 \cos^2(x)}{\cos(x)(9 + \operatorname{sen}^2(x))} dx.$$

Por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, haciendo la sustitución $t = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, se tiene que

$$I = \int \frac{3 \operatorname{sen}^3(x) + 2 \cos^2(x)}{\cos(x)(9 + \operatorname{sen}^2(x))} dx = \int \frac{3t^3 + 2(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2} (9+t^2)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^3 + 2 - 2t^2}{(1-t^2)(9+t^2)} dt \\ &= \int \frac{3t^3 - 2t^2 + 2}{(1-t)(1+t)(9+t^2)} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{3t^3 - 2t^2 + 2}{(1-t)(1+t)(9+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{9+t^2}$$

Entonces,

$$3t^3 - 2t^2 + 2 = A(1+t)(9+t^2) + B(1-t)(9+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)$$

Desarrollando los productos del lado derecho, se tiene que

$$3t^3 - 2t^2 + 2 = 9A + At^2 + 9At + At^3 + 9B + Bt^2 - 9Bt - Bt^3 + Ct - Ct^3 + D - Dt^2$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$3t^3 - 2t^2 + 2 = (A - B - C)t^3 + (A + B - D)t^2 + (9A - 9B + C)t + (9A + 9B + D)$$

$$\begin{cases} A - B - C = 3 & (1) \\ A + B - D = -2 & (2) \\ 9A - 9B + C = 0 & (3) \\ 9A + 9B + D = 2 & (4) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema mediante el método de Gauss - Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 9 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_3 - 9F_1 \\ F_4 - 9F_1 \end{matrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3/10 \\ F_4/10 \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2/2 \end{matrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 + F_2 \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 + \frac{F_3}{2} \\ F_2 - \frac{F_3}{2} \end{matrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{23}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 + \frac{F_4}{2} \\ F_2 + \frac{F_4}{2} \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

De ahí que,

$$A = \frac{3}{20}, B = -\frac{3}{20}, C = -\frac{27}{10}, D = 2$$

Por lo tanto,

$$\frac{3t^3 - 2t^2 + 2}{(1-t)(1+t)(9+t^2)} = \frac{3}{20(1-t)} - \frac{3}{20(1+t)} - \frac{27t-20}{10(9+t^2)}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{20} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{3}{20} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{10} \int \frac{27t-20}{9+t^2} dt \\ &= -\frac{3}{20} \ln|1-t| - \frac{3}{20} \ln|1+t| - \frac{27}{20} \int \frac{2t}{9+t^2} dt + 2 \int \frac{dt}{9+t^2} \\ &= -\frac{3}{20} \ln|1-t^2| - \frac{27}{20} \ln|9+t^2| + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{t}{3}\right) + c \\ &= -\frac{3}{20} \ln|1-\operatorname{sen}^2(x)| - \frac{27}{20} \ln|9+\operatorname{sen}^2(x)| + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{3}\right) + c \\ &= -\frac{3}{20} \ln|\cos^2(x)| - \frac{27}{20} \ln|9+\operatorname{sen}^2(x)| + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{3}\right) + c \\ &= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{3}\right) - \frac{3}{10} \ln|\cos(x)| - \frac{27}{20} \ln|9+\operatorname{sen}^2(x)| + c \end{aligned}$$

NOTA: los ejercicios de los casos II y III, también pueden abordarse mediante la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. No obstante, al aplicar esta sustitución los cálculos suelen volverse más extensos y complejos; por esta razón, resulta más conveniente resolverlos empleando las sustituciones específicas correspondientes a cada caso.

Caso 4. Si $\int Q(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) dx = \int Q(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) dx$

Si al cambiar el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la integral original, la integral no cambia, para resolverla se utiliza la sustitución $t = \tan(x)$ [2, 4, 5, 10, 9].

Ahora bien, si

$$t = \tan(x) \Rightarrow dt = \sec^2(x) dx,$$

despejando dx , se obtiene

$$dx = \frac{dt}{\sec^2(x)},$$

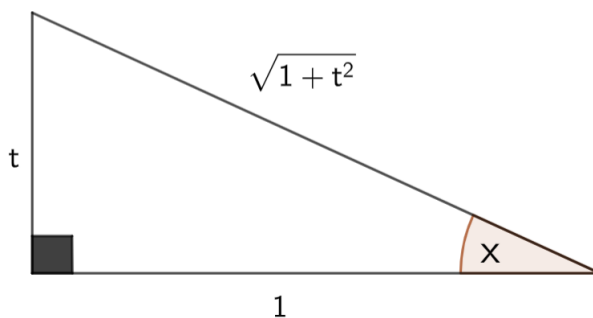
reemplazando $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, se tiene que

$$dx = \frac{dt}{1 + \tan^2(x)},$$

es decir,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Para determinar las fórmulas para el $\text{sen}(x)$ y el $\text{cos}(x)$, se utiliza el triángulo trigonométrico, conociendo que $t = \tan(x)$, esto es



$$\text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

En resumen, las fórmulas que se deben utilizar son

$$t = \tan(x) \quad ; \quad \text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{4\text{sen}^2(x) - 25\text{cos}^2(x)}$$

Empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello reemplazamos $-\text{sen}(x)$ por $\text{sen}(x)$ y $-\text{cos}(x)$ por $\text{cos}(x)$ en la integral anterior, esto es

$$\int \frac{dx}{4(-\text{sen}(x))^2 - 25(-\text{cos}(x))^2} = \int \frac{dx}{4\text{sen}^2(x) - 25\text{cos}^2(x)}$$

Como se puede observar, la integral no cambia y por lo tanto pertenece a este caso.

Ahora bien, llamando I a la integral que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan(x)$, se sigue que

$$\text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{4\operatorname{sen}^2(x) - 25\cos^2(x)} \\
 &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 25\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} \\
 &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{1+t^2} - \frac{25}{1+t^2}} \\
 &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2 - 25}{1+t^2}} \\
 &= \int \frac{dt}{4t^2 - 25} \\
 &= \int \frac{dt}{(2t-5)(2t+5)}
 \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{1}{(2t-5)(2t+5)} = \frac{A}{2t-5} + \frac{B}{2t+5}$$

Entonces,

$$1 = A(2t+5) + B(2t-5)$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } t = \frac{5}{2} : \quad 1 = 10A \Rightarrow A = \frac{1}{10},$$

$$\text{si } t = -\frac{5}{2} : \quad 1 = -10B \Rightarrow B = -\frac{1}{10}.$$

De ahí que,

$$\frac{1}{(2t-5)(2t+5)} = \frac{1}{10(2t-5)} - \frac{1}{10(2t+5)}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{10} \int \frac{dt}{2t-5} - \frac{1}{10} \int \frac{dt}{2t+5} \\ &= \frac{1}{20} \ln|2t-5| - \frac{1}{20} \ln|2t+5| + c \\ &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2t-5}{2t+5} \right| + c \end{aligned}$$

Ahora bien, regresando a la variable original, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2\tan(x)-5}{2\tan(x)+5} \right| + c \\ &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2\operatorname{sen}(x)-5\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)+5\cos(x)} \right| + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{18\tan^2(x)-1}{3+6\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)} dx$$

Empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello expresamos la integral en senos y cosenos, esto es:

$$\int \frac{18\tan^2(x)-1}{3+6\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)} dx = \int \frac{18\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}-1}{3+6\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)} dx$$

Reemplazando el $\operatorname{sen}(x)$ por $-\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la integral anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{18\frac{(-\operatorname{sen}(x))^2}{(-\cos(x))^2}-1}{3+6(-\operatorname{sen}(x))^2-2(-\cos(x))^2} dx &= \int \frac{18\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}-1}{3+6\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)} dx \\ &= \int \frac{18\tan^2(x)-1}{3+6\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

Como se puede observar, la integral no cambia y por lo tanto pertenece a este caso.

Ahora bien, llamando I a la integral que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan(x)$, se sigue que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{18\tan^2(x) - 1}{3 + 6\sec^2(x) - 2\cos^2(x)} dx \\
 &= \int \frac{18t^2 - 1}{3 + 6\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{18t^2 - 1}{3 + \frac{6t^2}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{18t^2 - 1}{\frac{3 + 3t^2 + 6t^2 - 2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{18t^2 - 1}{9t^2 + 1} dt
 \end{aligned}$$

Dado que la fracción es impropia, se divide el numerador para el denominador, obteniéndose

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(2 - \frac{3}{9t^2 + 1}\right) dt \\
 &= 2 \int dt - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{9}} \\
 &= 2t - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \arctan\left(\frac{t}{\frac{1}{3}}\right) + c \\
 &= 2t - \arctan(3t) + c
 \end{aligned}$$

Regresando a la variable original, se obtiene

$$I = 2\tan(x) - \arctan(3\tan(x)) + c$$

$$3. \int \frac{\cos^2(x)}{4 + \sec(2x)} dx$$

Empecemos demostrando que la integral pertenece a este caso, para ello utilizando la identidad trigonométrica $\sec(2x) = 2\sec(x)\cos(x)$ expresamos la integral en senos y cosenos del ángulo simple, esto es:

$$\int \frac{\cos^2(x)}{4 + \sec(2x)} dx = \int \frac{\cos^2(x)}{4 + 2\sec(x)\cos(x)} dx$$

Reemplazando el $\text{sen}(x)$ por $-\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ en la integral anterior, se tiene

$$\int \frac{(-\cos(x))^2}{4 + 2(-\text{sen}(x))(-\cos(x))} dx = \int \frac{\cos^2(x)}{4 + 2\text{sen}(x)\cos(x)} dx$$

Como se puede observar, la integral no cambia y por lo tanto pertenece a este caso.

Ahora bien, llamando I a la integral que vamos a resolver y haciendo la sustitución $t = \tan(x)$, se sigue que

$$\text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^2(x)}{4 + 2\text{sen}(x)\cos(x)} dx \\ &= \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{4 + 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{4 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{4 + 4t^2 + 2t}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(2t^2 + t + 2)(1+t^2)} \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{1}{(2t^2 + t + 2)(1+t^2)} = \frac{At + B}{1+t^2} + \frac{Ct + D}{2t^2 + t + 2}$$

Entonces,

$$1 = (At + B)(2t^2 + t + 2) + (Ct + D)(1+t^2)$$

Desarrollando los productos del lado derecho, se tiene que

$$1 = 2At^3 + At^2 + 2At + 2Bt^2 + Bt + 2B + Ct + Ct^3 + D + Dt^2$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$1 = (2A + C)t^3 + (A + 2B + D)t^2 + (2A + B + C)t + (2B + D)$$

$$\begin{cases} 2A + C = 0 & (1) \\ A + 2B + D = 0 & (2) \\ 2A + B + C = 0 & (3) \\ 2B + D = 1 & (4) \end{cases}$$

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (3), se obtiene como resultado $B = 0$ y por lo tanto $D = 1$. Ahora bien, sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (2), se obtiene como resultado $A = -1$ y por lo tanto $C = 2$.

De ahí que,

$$\frac{1}{(2t^2 + t + 2)(1 + t^2)} = -\frac{t}{1 + t^2} + \frac{2t + 1}{2t^2 + t + 2}$$

Regresando a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int \frac{t}{1 + t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{2t + 1}{2t^2 + t + 2} dt \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{2t}{1 + t^2} dt + \frac{1}{4} \int \frac{4t + 2 + 1 - 1}{2t^2 + t + 2} dt \\ &= -\frac{1}{4} \ln|1 + t^2| + \frac{1}{4} \int \frac{4t + 1}{2t^2 + t + 2} dt + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{2t^2 + t + 2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|1 + t^2| + \frac{1}{4} \ln|2t^2 + t + 2| + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{t}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2t^2 + t + 2}{1 + t^2} \right| + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2t^2 + t + 2}{1 + t^2} \right| + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \arctan \left(\frac{t + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2t^2 + t + 2}{1 + t^2} \right| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4t + 1}{\sqrt{15}} \right) + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable original, se sigue que

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 \tan^2(x) + \tan(x) + 2}{1 + \tan^2(x)} \right| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4 \tan(x) + 1}{\sqrt{15}} \right) + c$$

Utilizando identidades trigonométricas para simplificar la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + 2}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}} \right| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4 \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + 1}{\sqrt{15}} \right) + c \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) \cos(x) + 2 \cos^2(x)}{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)} \right| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4 \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\sqrt{15} \cos(x)} \right) + c \\
 &= \frac{1}{4} \ln |2 + \operatorname{sen}(x) \cos(x)| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4 \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\sqrt{15} \cos(x)} \right) + c \\
 &= \frac{1}{4} \ln |4 + \operatorname{sen}(2x)| + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \left(\frac{4 \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\sqrt{15} \cos(x)} \right) + c_1
 \end{aligned}$$

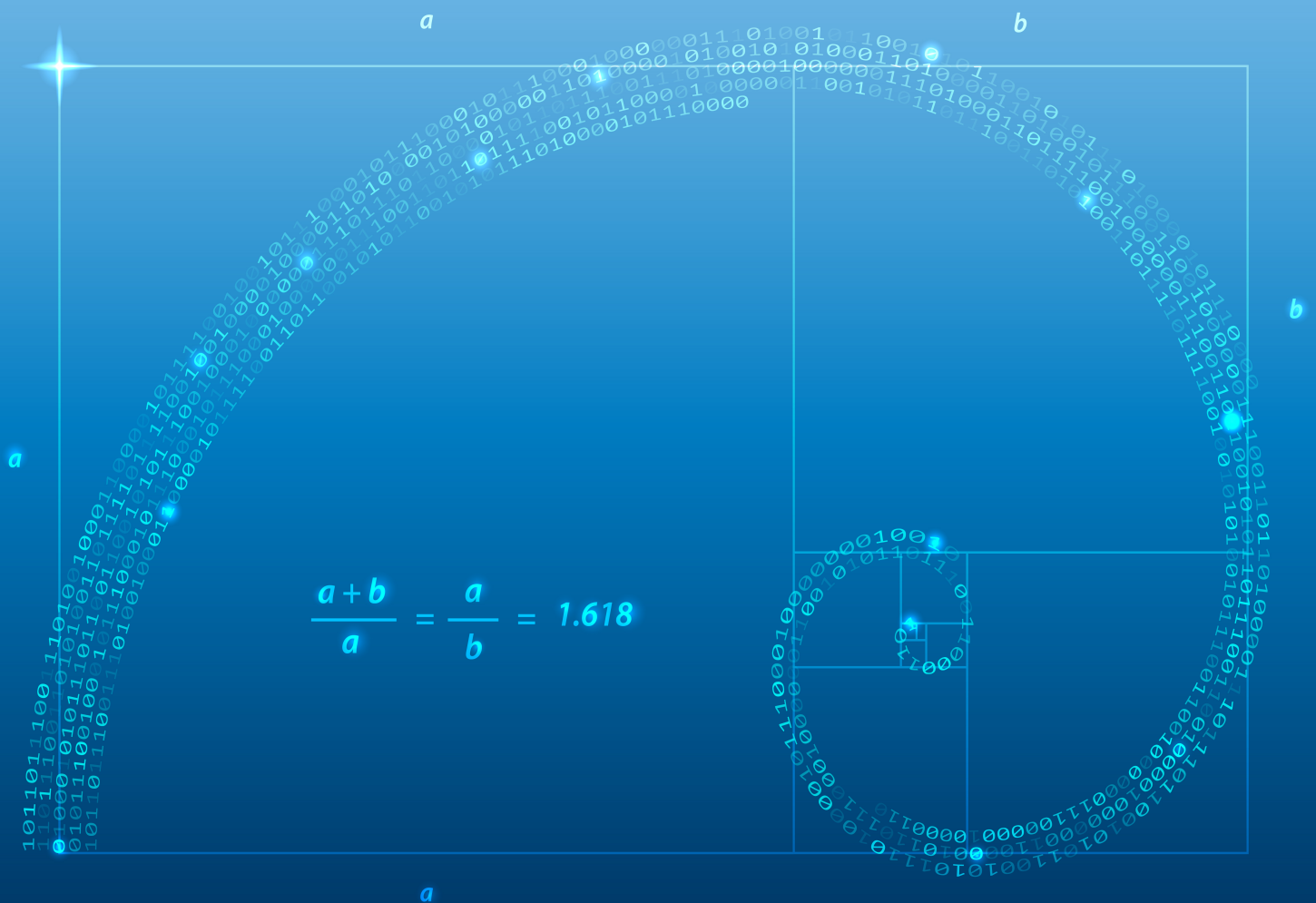
Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\cos^3(x)}{5 + \operatorname{sen}(x)} dx$
2. $\int \frac{dp}{(\operatorname{sen}(p) + 4)(\operatorname{sen}(p) - 1)}$
3. $\int \frac{\tan(x)}{\cos(2x) - 7} dx$
4. $\int \frac{2 \cot(x) + 3 \csc(x)}{3 \cot(x) - 2 \csc(x)} dx$
5. $\int \frac{\tan(x)}{\tan^2(x) + \tan(x) + 1} dx$
6. $\int \frac{\csc^3(x)}{3 \csc^2(x) - 2 \cot^2(x) - 4} dx$
7. $\int \frac{\cos(2z)}{\operatorname{sen}^2(z) - \operatorname{sen}(2z)} dz$
8. $\int \frac{7 - 3 \cos^2(x) + \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}^2(x)} dx$
9. $\int \frac{5 \tan(x) - 3 \sec(x) - 2}{2 \tan(x) + 2 \sec(x) + 5} dx$
10. $\int \frac{\cos(x)(\tan^2(x) + 2)}{4 \operatorname{sen}^2(x) + 5 \cos^2(x)} dx$

11. $\int \frac{e^t \cos(e^t)}{8 + 7\operatorname{sen}(e^t) - 4\cos(e^t)} dt$

12. $\int \frac{3\cot^2(x) + 11\csc^2(x) + 9}{\tan^2(x)(3\csc^2(x) + 2)} dx$



<https://tinyurl.com/2d43gzmj>

CAPÍTULO IV

Integración de funciones irracionales

Integración por sustitución trigonométrica o hiperbólica

Este método se utiliza cuando existen integrales que contienen radicales de la forma:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{a^2 + u^2}, \sqrt{u^2 - a^2},$$

donde $u = g(x)$. El objetivo de estas técnicas es eliminar el radical, transformándolo en una expresión trigonométrica o hiperbólica que sea más fácil de integrar [16, 11, 1, 4, 10].

Para el caso de sustituciones trigonométricas, dependiendo del radical, se realizan los siguientes cambios de variable:

Expresión	Sustitución	Diferencial	Identidad utilizada
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \operatorname{sen}(\theta)$	$du = a \cos(\theta) d\theta$	$1 - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a \tan(\theta)$	$du = a \sec^2(\theta) d\theta$	$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \sec(\theta)$	$du = a \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$	$\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$

Para el caso de sustituciones hiperbólicas, para algunos radicales, las funciones hiperbólicas permiten simplificar los cálculos:

Expresión	Sustitución	Diferencial	Identidad utilizada
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a \operatorname{senh}(t)$	$du = a \cosh(t) dt$	$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \cosh(t)$	$du = a \operatorname{senh}(t) dt$	$\cosh^2(t) - 1 = \operatorname{senh}^2(t)$
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \tanh(t)$	$du = a \operatorname{sech}^2(t) dt$	$1 - \tanh^2(t) = \operatorname{sech}^2(t)$

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$

Para integrales del tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, usamos la sustitución:

$$x = 3 \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dx = 3 \cos(\theta) d\theta.$$

Entonces

$$9 - x^2 = 9 - 9 \operatorname{sen}^2(\theta) = 9 \cos^2(\theta)$$

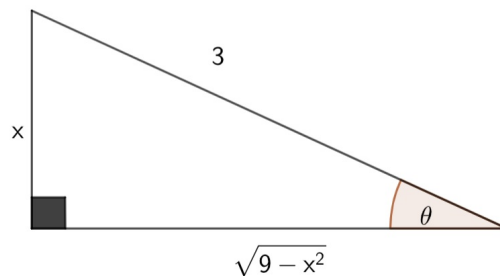
De ahí que

$$(9 - x^2)^{3/2} = 27 \cos^3(\theta).$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} &= \int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}} = \int \frac{3\cos(\theta)}{27\cos^3(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{9} \tan(\theta) + c \quad (*)\end{aligned}$$

Para volver a la variable original x recordemos que $x = 3\sin(\theta)$, de donde $\sin(\theta) = \frac{x}{3}$, con lo cual se puede armar el siguiente triángulo trigonométrico, donde además el cateto faltante tiene el valor de $\sqrt{9-x^2}$



A partir del cual sabemos que $\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. Reemplazando en (*), se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} &= \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + c \\ &= \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + c\end{aligned}$$

2. $\int \frac{2x^2 - 3x + 5}{\sqrt{2 - 2x - x^2}} dx$

Reescribimos el radical:

$$2 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 2)$$

Completamos el cuadrado:

$$x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 2x + 1) - 3 = (x + 1)^2 - 3$$

Entonces:

$$\sqrt{2 - 2x - x^2} = \sqrt{3 - (x + 1)^2}$$

Ahora bien, llamando I a la integral se tiene que

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x + 5}{\sqrt{2 - 2x - x^2}} dx = \int \frac{2x^2 - 3x + 5}{\sqrt{3 - (x+1)^2}} dx$$

Para integrales del tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, donde $a = \sqrt{3}$ y $u = x + 1$, usamos la sustitución:

$$x + 1 = \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow x = \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta) - 1,$$

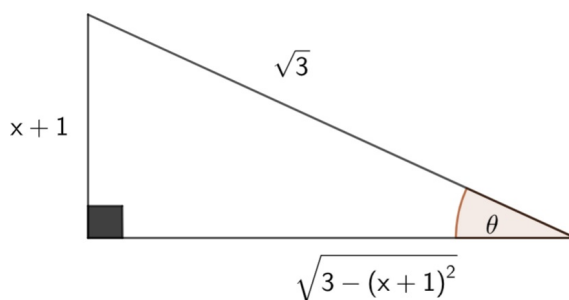
de ahí que

$$dx = \sqrt{3} \cos(\theta) d\theta$$

Reemplazando en la integral, se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta) - 1)^2 - 3(\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta) - 1) + 5}{\sqrt{3 - 3\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cdot \sqrt{3}\cos(\theta)d\theta \\ &= \int \frac{2(3\operatorname{sen}^2(\theta) - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta) + 1) - 3\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta) + 3 + 5}{\sqrt{3}\cos(\theta)} \cdot \sqrt{3}\cos(\theta)d\theta \\ &= \int (6\operatorname{sen}^2(\theta) - 7\sqrt{3}\operatorname{sen}(\theta) + 10) d\theta \\ &= 3 \int (1 - \cos(2\theta)) d\theta - 7\sqrt{3} \int \operatorname{sen}(\theta) d\theta + 10 \int d\theta \\ &= 3\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + 7\sqrt{3}\cos(\theta) + 10\theta + c \\ &= 13\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + 7\sqrt{3}\cos(\theta) + c \quad (*) \end{aligned}$$

Para volver a la variable original x , utilizando $x + 1 = \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta)$, tenemos que: $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ con lo cual se puede armar el siguiente triángulo, donde además el cateto faltante tiene el valor de $\sqrt{3 - (x+1)^2}$.



A partir del cual sabemos que:

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3 - (x+1)^2}}{\sqrt{3}} \text{ y } \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{2(x+1)\sqrt{3 - (x+1)^2}}{3}$$

Reemplazando en (*), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= 13 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) - (x+1) \sqrt{3 - (x+1)^2} + 7 \sqrt{3 - (x+1)^2} + c \\ &= 13 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) - (x-6) \sqrt{2 - 2x - x^2} + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{\ln^3(t)}{t \sqrt{\ln^2(t) - 4}} dt$$

Llamando I a la integral y realizando el cambio de variable

$$u = \ln(t) \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$$

se tiene que

$$I = \int \frac{\ln^3(t)}{t \sqrt{\ln^2(t) - 4}} dt = \int \frac{u^3}{\sqrt{u^2 - 2^2}} du$$

Para resolver esta integral se utiliza la sustitución trigonométrica

$$u = 2 \sec(\theta) \Rightarrow du = 2 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$

Reemplazando en la integral se sigue que

$$\begin{aligned} I = \int \frac{u^3}{\sqrt{u^2 - 2^2}} du &= \int \frac{8 \sec^3(\theta)}{\sqrt{4 \sec^2(\theta) - 4}} \cdot 2 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{16 \sec^4(\theta) \tan(\theta)}{2 \sqrt{\sec^2(\theta) - 1}} d\theta \\ &= \int \frac{8 \sec^4(\theta) \tan(\theta)}{\tan(\theta)} d\theta \\ &= 8 \int \sec^4(\theta) d\theta \\ &= 8 \int \sec^2(\theta) \sec^2(\theta) d\theta \\ &= 8 \int (1 + \tan^2(\theta)) \sec^2(\theta) d\theta \\ &= 8 \int \sec^2(\theta) d\theta + 8 \int \tan^2(\theta) \sec^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, hacemos el cambio de variable

$$w = \tan(\theta) \Rightarrow dw = \sec^2(\theta) d\theta$$

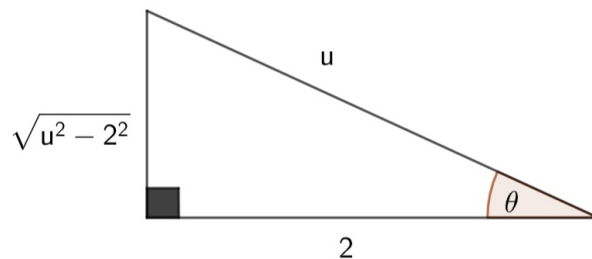
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= 8 \tan(\theta) + 8 \int w^2 dw \\ &= 8 \tan(\theta) + 8 \cdot \frac{w^3}{3} + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable θ , se obtiene

$$I = 8 \tan(\theta) + \frac{8}{3} \tan^3(\theta) + c \quad (*)$$

Para regresar a la variable u , partimos de $u = 2 \sec(\theta)$, de donde se obtiene $\sec(\theta) = \frac{u}{2}$. En un triángulo auxiliar resulta



$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{u^2 - 2^2}}{2}.$$

Sustituyendo en (*), se tiene

$$\begin{aligned} I &= 8 \cdot \frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2} + \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2} \right)^3 + c \\ &= 4\sqrt{u^2 - 4} + \frac{1}{3} \sqrt{(u^2 - 4)^3} + c. \end{aligned}$$

Finalmente, al regresar a la variable original $u = \ln(t)$, se concluye que:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\ln^3(t)}{t\sqrt{\ln^2(t) - 4}} dt &= 4\sqrt{\ln^2(t) - 4} + \frac{1}{3} \sqrt{(\ln^2(t) - 4)^3} + c \\ &= \frac{\sqrt{\ln^2(t) - 4}}{3} \cdot (12 + \ln^2(t) - 4) + c \\ &= \frac{1}{3} (8 + \ln^2(t)) \sqrt{\ln^2(t) - 4} + c \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} dx$$

Aplicando Fracciones Parciales, se tiene que:

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A(x^2-4x+5)^2 + (Bx+C)x(x^2-4x+5) + (Dx+E)x}{x(x^2-4x+5)^2}$$

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A(x^2-4x+5)^2 + (Bx^2+Cx)(x^2-4x+5) + Dx^2 + Ex}{x(x^2-4x+5)^2}$$

Igualando los numeradores, y desarrollando los términos, se sigue que

$$x-2 = A(x^4+16x^2+25-8x^3-40x+10x^2) + B(x^4-4x^3+5x^2) + C(x^3-4x^2+5x) + Dx^2 + Ex$$

$$x-2 = A(x^4-8x^3+26x^2-40x+25) + B(x^4-4x^3+5x^2) + C(x^3-4x^2+5x) + Dx^2 + Ex$$

Agrupando coeficientes de potencias semejantes, se tiene que

$$x-2 = (A+B)x^4 + (-8A-4B+C)x^3 + (26A+5B-4C+D)x^2 + (-40A+5C+E)x + 25A$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -8A-4B+C=0 \\ 26A+5B-4C+D=0 \\ -40A+5C+E=1 \\ 25A=-2 \end{cases}$$

Despejando A de la última ecuación, se obtiene $A = -\frac{2}{25}$. Reemplazando este valor en la primera ecuación, se obtiene $B = \frac{2}{25}$. Reemplazando los valores de A y B en la segunda ecuación, se obtiene $C = -\frac{8}{25}$. Reemplazando los valores de A , B y C en la tercera ecuación, se obtiene $D = \frac{2}{5}$. Por último, reemplazando los valores de A y C en la cuarta ecuación, se obtiene $E = -\frac{3}{5}$.

Ahora bien, si llamamos I a la integral $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} dx$, se tiene

$$I = -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{25} \int \frac{x-4}{x^2-4x+5} dx + \frac{1}{5} \int \frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2} dx$$

Completando el trinomio en la segunda y tercera integrales, se sigue que:

$$I = -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{25} \int \frac{x-4}{(x-2)^2+1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{2x-3}{((x-2)^2+1)^2} dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$, se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{25} \int \frac{u-2}{u^2+1} du + \frac{1}{5} \int \frac{2u+1}{(u^2+1)^2} du \\ &= -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{25} \int \frac{2udu}{u^2+1} - \frac{4}{25} \int \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{5} \int \frac{2udu}{(u^2+1)^2} + \frac{1}{5} \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \end{aligned}$$

Luego, para la segunda y cuarta integral, hacemos la sustitución:

$$v = u^2 + 1 \Rightarrow dv = 2udu,$$

y para la última integral, utilizamos la sustitución trigonométrica:

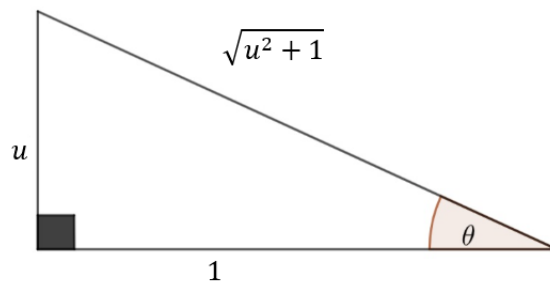
$$u = \tan(\theta) \Rightarrow du = \sec^2(\theta)d\theta$$

de ahí que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{25} \int \frac{dv}{v} - \frac{4}{25} \int \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{5} \int \frac{dv}{v^2} + \frac{1}{5} \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{(\tan^2(\theta)+1)^2} \\ &= -\frac{2}{25} \ln|x| + \frac{1}{25} \ln|v| - \frac{4}{25} \arctan(u) - \frac{1}{5v} + \frac{1}{5} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^4(\theta)} d\theta \\ &= -\frac{2}{25} \ln|x| + \frac{1}{25} \ln|v| - \frac{4}{25} \arctan(u) - \frac{1}{5v} + \frac{1}{5} \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= -\frac{2}{25} \ln|x| + \frac{1}{25} \ln|v| - \frac{4}{25} \arctan(u) - \frac{1}{5v} + \frac{1}{5} \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= -\frac{2\ln|x|}{25} + \frac{\ln|u^2+1|}{25} - \frac{4 \arctan(u)}{25} - \frac{1}{5(u^2+1)} + \frac{1}{10} \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + c \\ &= -\frac{2\ln|x|}{25} + \frac{\ln|u^2+1|}{25} - \frac{4 \arctan(u)}{25} - \frac{1}{5(u^2+1)} + \frac{\theta}{10} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{10} + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable u en los dos últimos términos, como $u = \tan(\theta)$, utili-

zando un triángulo auxiliar, entonces:



$$\tan(\theta) = u, \quad \sin(\theta) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}, \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}.$$

De ahí que:

$$\begin{aligned} I = & -\frac{2\ln|x|}{25} + \frac{\ln|u^2 + 1|}{25} - \frac{4 \arctan(u)}{25} - \frac{1}{5(u^2 + 1)} + \frac{\arctan(u)}{10} + \\ & + \frac{1}{10} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} + c \end{aligned}$$

Regresando a la variable original, dado que $u = x - 2$, se obtiene

$$\begin{aligned} I = & -\frac{2\ln|x|}{25} + \frac{\ln|(x-2)^2 + 1|}{25} - \frac{3 \arctan(x-2)}{50} - \frac{1}{5((x-2)^2 + 1)} + \\ & + \frac{x-2}{10((x-2)^2 + 1)} + c \\ = & -\frac{\ln|x^2|}{25} + \frac{\ln|x^2 - 4x + 5|}{25} - \frac{3 \arctan(x-2)}{50} - \frac{1}{5(x^2 - 4x + 5)} + \\ & + \frac{x-2}{10(x^2 - 4x + 5)} + c \\ = & \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right| - \frac{3 \arctan(x-2)}{50} + \frac{x-4}{10(x^2 - 4x + 5)} + c \end{aligned}$$

5. $\int \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

Empecemos llamando I a la integral, esto es

$$I = \int \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

Como el radical del denominador es del tipo $\sqrt{u^2 + a^2}$ con $a = 3$. Usamos la

sustitución trigonométrica:

$$x = 3 \tan(\theta) \Rightarrow dx = 3 \sec^2(\theta) d\theta$$

Reemplazando en la integral se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(3 \tan(\theta))^2 + 4}{\sqrt{9 \tan^2(\theta) + 9}} \cdot 3 \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{9 \tan^2(\theta) + 4}{3 \sec(\theta)} \cdot 3 \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int (9 \tan^2(\theta) + 4) \sec(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Separando términos:

$$I = 9 \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) d\theta + 4 \int \sec(\theta) d\theta$$

Recordemos que $\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$, entonces:

$$\begin{aligned} I &= 9 \int (\sec^2(\theta) - 1) \sec(\theta) d\theta + 4 \int \sec(\theta) d\theta \\ &= 9 \int (\sec^3(\theta) - \sec(\theta)) d\theta + 4 \int \sec(\theta) d\theta \\ &= 9 \int \sec^3(\theta) d\theta - 9 \int \sec(\theta) d\theta + 4 \int \sec(\theta) d\theta \\ &= 9 \int \sec^3(\theta) d\theta - 5 \int \sec(\theta) d\theta \quad (*) \end{aligned}$$

Llamemos I_1 a la $\int \sec^3(\theta) d\theta$ y resolvámosla utilizando el método de integración por partes, esto es:

$$I_1 = \int \sec^3(\theta) d\theta = \int \sec(\theta) \cdot \sec^2(\theta) d\theta$$

Ahora bien, sean

$$\begin{aligned} u &= \sec(\theta) & \Rightarrow & du = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta; \\ dv &= \sec^2(\theta) d\theta & \Rightarrow & v = \tan(\theta) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \sec(\theta) \tan(\theta) - \int \sec(\theta) \tan^2(\theta) d\theta \\ &= \sec(\theta) \tan(\theta) - \int \sec(\theta) (\sec^2(\theta) - 1) d\theta \\ &= \sec(\theta) \tan(\theta) - \int \sec^3(\theta) d\theta + \int \sec(\theta) d\theta \end{aligned}$$

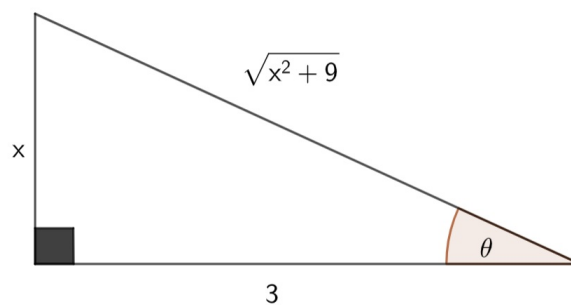
Reduciendo términos semejantes y despejando, se sigue que

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta) d\theta \\ I_1 &= \frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2} \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*), se tiene que

$$\begin{aligned} I &= 9 \left[\frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| \right] - 5\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \\ &= \frac{9}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{9}{2}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| - 5\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \\ &= \frac{9}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) - \frac{1}{2}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \end{aligned}$$

Para volver a la variable original, como $x = 3\tan(\theta)$, entonces $\tan(\theta) = \frac{x}{3}$ utilizando un triángulo auxiliar, entonces:



$$\tan(\theta) = \frac{x}{3}, \quad \sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} \cdot \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{x}{3} \right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \frac{1}{2}\ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{3} \right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + 9}| + \frac{1}{2}\ln(3) + c \end{aligned}$$

El término $\frac{1}{2}\ln(3)$ se absorbe en la constante de integración. Finalmente:

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + 9}| + c_1$$

6. Resuelva el ejercicio anterior utilizando sustitución hiperbólica.

Queremos resolver la integral

$$I = \int \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

Como el radical del denominador es del tipo $\sqrt{u^2 + a^2}$ con $a = 3$. Usamos la sustitución hiperbólica:

$$x = 3 \sinh(u) \Rightarrow dx = 3 \cosh(u) du$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9\sinh^2(u) + 4}{\sqrt{9\sinh^2(u) + 9}} \cdot 3\cosh(u) du \\ &= \int \frac{9\sinh^2(u) + 4}{3\cosh(u)} \cdot 3\cosh(u) du \\ &= \int (9\sinh^2(u) + 4) du \\ &= 9 \int \sinh^2(u) du + 4 \int du \end{aligned}$$

Usamos $\sinh^2(u) = \frac{\cosh(2u) - 1}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{9}{2} \int (\cosh(2u) - 1) du + 4u \\ &= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh(2u) - u \right) + 4u + c \\ &= \frac{9}{4} \sinh(2u) - \frac{1}{2} u + c. \end{aligned}$$

Par volver a la variable x , recordemos que:

$$\sinh(2u) = 2\sinh(u)\cosh(u), \quad \sinh(u) = \frac{x}{3}, \quad \cosh(u) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$$

De ahí que,

$$\sinh(2u) = \frac{2x\sqrt{x^2 + 9}}{9}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{9}{4} \cdot \frac{2x\sqrt{x^2 + 9}}{9} - \frac{1}{2} u + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c. \end{aligned}$$

Además, usando:

$$\sinh^{-1}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} + 1}\right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2+9}}{3}\right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+9}| + \frac{1}{2}\ln(3) + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+9}| + c_1 \end{aligned}$$

Que es la misma solución obtenida mediante el uso de sustitución trigonométrica.

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$
2. $\int x^2\sqrt{x^2-9} dx$
3. $\int \frac{x^3-4}{\sqrt{9x^2+16}} dx$
4. $\int \frac{7x+1}{\sqrt{36-49x^2}} dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
7. $\int \frac{2x^2+2x+3}{\sqrt{5-x-x^2}} dx$
8. $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$
9. $\int \frac{\ln^4(x)}{x\sqrt{25+\ln^2(x)}} dx$

$$10. \int (4-x)\sqrt{x^2+6x+10} \, dx$$

$$11. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-4e^x-4e^{2x}}} \, dx$$

$$12. \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\cos^3(2x)}} \, dx$$

Sustitución por el recíproco

Consideremos la integral de una función irracional de la forma:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n \sqrt{cx^2+dx+e}},$$

donde $ax+b$ es un término lineal y la raíz cuadrada contiene un término cuadrático [2, 9, 5, 4].

Estas integrales son generalmente difíciles de calcularlas directamente, por ello se emplean técnicas como la sustitución por el recíproco.

La sustitución por el recíproco consiste en realizar el cambio de variable:

$$ax+b = \frac{1}{t} \quad \text{o también} \quad t = \frac{1}{ax+b}$$

Esto produce:

$$dx = -\frac{1}{at^2} \, dt$$

y toda expresión en x se convierte en una función de t . La clave de esta técnica es que algunas expresiones irracionales que son complicadas en x se simplifican en t , permitiendo reescribir la integral como una integral racional o más sencilla. Veamos la solución de algunos ejercicios.

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Empleamos sustitución por el recíproco de la siguiente manera:

Sea

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} \, dt$$

Reescribimos la integral en función de la variable t :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \\ &= -\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= -\int \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

La última integral es inmediata, esto es

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln|t + \sqrt{t^2+1}| = -\operatorname{senh}^{-1}(t) + c$$

Regresamos a la variable original

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\operatorname{senh}^{-1}(t) + c = -\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

Empleamos sustitución por el recíproco de la siguiente manera:

Sea

$$x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$$

Además:

$$x^2 = \frac{1}{t^2},$$

y por lo tanto

$$x^2 - 4 = \frac{1-4t^2}{t^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2-4} = \frac{\sqrt{1-4t^2}}{t}$$

Reescribimos la integral en términos de t

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{1-4t^2}}{t}} \\ &= -\int \frac{t dt}{\sqrt{1-4t^2}}\end{aligned}$$

Empleamos integración por cambio de variable

Sea

$$\begin{aligned} u = 1 - 4t^2 &\Rightarrow du = -8t dt \\ t dt &= -\frac{du}{8} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= - \int \frac{-\frac{du}{8}}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{8} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{u} + c \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{u} + c \end{aligned}$$

Regresamos a la variable original

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4t^2} + c \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + c \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{x+5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+x}} dx$$

Empleamos sustitución por el recíproco de la siguiente manera:

Sea

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1, \\ dx &= -\frac{1}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Reemplazando en la integral se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+x}} dx &= \int \frac{\frac{1}{t} - 1 + 5}{\left(\frac{1}{t}\right)^3 \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{t} - 1\right)}} \left(-\frac{1}{t^2} dt\right) \\ &= - \int \frac{\frac{1}{t} + 4}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 + \frac{1}{t} - 1}} \cdot \frac{1}{t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{\frac{1+4t}{t}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}}} dt \\
&= - \int \frac{1+4t}{\sqrt{\frac{1-t}{t^2}}} dt \\
&= - \int \frac{t(1+4t)}{\sqrt{1-t}} dt
\end{aligned}$$

Resolvemos la integral por cambio de variable. Sea

$$\begin{aligned}
u = 1 - t &\Rightarrow du = -dt \\
dt &= -du.
\end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y reemplazando la sustitución en la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+x}} dx &= - \int \frac{t+4t^2}{\sqrt{1-t}} dt \\
&= - \int \frac{(1-u)+4(1-u)^2}{\sqrt{u}} (-du) \\
&= \int \frac{(1-u)+4(1-2u+u^2)}{\sqrt{u}} du \\
&= \int \frac{1-u+4-8u+4u^2}{\sqrt{u}} du \\
&= \int \frac{4u^2-9u+5}{\sqrt{u}} du \\
&= 4 \int u^{3/2} du - 9 \int u^{1/2} du + 5 \int u^{-1/2} du \\
&= \frac{8}{5} u^{5/2} - 6u^{3/2} + 10u^{1/2} + c
\end{aligned}$$

Regresamos a la variable original. Como:

$$u = 1 - t \quad \text{y} \quad t = \frac{1}{x+1}$$

Entonces

$$u = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

El resultado de la integral es:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+x}} dx = \frac{8}{5} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{5/2} - 6 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{3/2} + 10 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} + c$$

Sacando factor común y simplificando

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+x}} dx &= \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} \left[\frac{8}{5} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 - 6 \left(\frac{x}{x+1} \right) + 10 \right] + c \\
&= \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} \left[\frac{8x^2 - 30x(x+1) + 50(x+1)^2}{5(x+1)^2} \right] + c \\
&= \frac{x^{1/2}}{(x+1)^{1/2}} \left[\frac{8x^2 - 30x^2 - 30x + 50x^2 + 100x + 50}{5(x+1)^2} \right] + c \\
&= \frac{x^{1/2} (28x^2 + 70x + 50)}{5(x+1)^{5/2}} + c \\
&= \frac{2\sqrt{x} (14x^2 + 35x + 25)}{5\sqrt{(x+1)^5}} + c
\end{aligned}$$

$$4. \int \frac{\sqrt{3}}{(3x-2)^4 \sqrt{6x^2-8x+3}} dx$$

Empleamos sustitución por el recíproco de la siguiente manera:

Sea

$$\begin{aligned}
3x-2 &= \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1+2t}{3t} \\
3dx &= -\frac{1}{t^2} dt \\
dx &= -\frac{1}{3t^2} dt
\end{aligned}$$

LLamando I a la integral y reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{t}\right)^4 \sqrt{6\left(\frac{1+2t}{3t}\right)^2 - 8\left(\frac{1+2t}{3t}\right) + 3}} \left(-\frac{1}{3t^2} dt\right) \\
&= \int \frac{\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3t^2}\right)}{\frac{1}{t^4} \sqrt{6\left(\frac{1+4t+4t^2}{9t^2}\right) - \left(\frac{8+16t}{3t}\right) + 3}} dt \\
&= -\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{3t^2}}{\frac{1}{t^4} \sqrt{\frac{2+8t+8t^2}{3t^2} - \frac{8+16t}{3t} + 3}} dt \\
&= -\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{3t^2}}{\frac{1}{t^4} \sqrt{\frac{2+8t+8t^2-8t-16t^2+9t^2}{3t^2}}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{3t^2}}{\frac{1}{t^4} \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{t^2+2}}} dt \\
&= - \int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+2}} dt
\end{aligned}$$

Para resolver esta última integral separamos el numerador de la siguiente manera

$$I = - \int \frac{t^2 \cdot t}{\sqrt{t^2+2}} dt$$

Resolvemos la integral por cambio de variable. Sea

$$\begin{aligned}
p &= t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = p - 2 \\
dp &= 2t dt \\
\frac{dp}{2} &= t dt
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2} \int \frac{p-2}{\sqrt{p}} dp \\
&= -\frac{1}{2} \int p^{1/2} dp + \int p^{-1/2} dp \\
&= -\frac{1}{3} p^{3/2} + 2p^{1/2} + c \\
&= \frac{p^{1/2}}{3} (6-p) + c \\
&= (6-p) \cdot \frac{p^{1/2}}{3} + c
\end{aligned}$$

Como $p = t^2 + 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
I &= (6-t^2-2) \cdot \frac{(t^2+2)^{1/2}}{3} + c \\
&= (4-t^2) \cdot \frac{\sqrt{t^2+2}}{3} + c
\end{aligned}$$

Ahora bien, regresando a la variable original, puesto que $t = \frac{1}{3x-2}$, se obtiene

$$I = \left(4 - \frac{1}{(3x-2)^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3x-2}\right)^2 + 2}}{3} + c$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{4(3x-2)^2 - 1}{(3x-2)^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{1+2(3x-2)^2}}{3(3x-2)} + c \\
&= \left(\frac{36x^2 - 48x + 16 - 1}{(3x-2)^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{1+18x^2 - 24x + 8}}{3(3x-2)} + c \\
&= \frac{(36x^2 - 48x + 15)\sqrt{18x^2 - 24x + 9}}{3(3x-2)^3} + c \\
&= \frac{3(12x^2 - 16x + 5) \cdot \sqrt{3} \sqrt{6x^2 - 8x + 3}}{3(3x-2)^3} + c \\
&= \frac{\sqrt{3} (2x-1) (6x-5) \sqrt{6x^2 - 8x + 3}}{(3x-2)^3} + c
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{(2x-3)^2 \sqrt{x^2+5}}$
2. $\int \frac{8}{x\sqrt{1-4x-12x^2}} dx$
3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}}$
4. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x}}$
5. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-x+1}}$
6. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2-2x}}$
7. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{4x^2-4x-3}}$
8. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} \sqrt{e^{2x}+4}}$
9. $\int \frac{\text{sen}(x) dx}{\cos(x) \sqrt{\cos^2(x)-16}}$
10. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3 \sqrt{(\ln x)^2-1}}$

$$11. \int \frac{x+1}{(2x-1)^2 \sqrt{2x^2+x-2}} dx$$

$$12. \int \frac{\sec^2(x) dx}{\tan(x) \sqrt{\tan^2(x) + 4\tan(x)}}$$

Sustitución por racionalización

Una función irracional incluye raíces que involucran la variable de integración. El método de sustitución por racionalización, busca transformar una función con raíces en una forma racional para poder integrar mediante métodos directos o técnicas de integración de funciones racionales. Las integrales que vamos a trabajar son de la forma [11, 3, 2]:

$$I = \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}}, \dots \right) dx$$

donde R es una función racional de sus argumentos, y $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \dots$ son exponentes racionales.

Idea clave del método de racionalización:

Para racionalizar una integral de esta forma, se realiza el cambio de variable:

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad (1)$$

donde m es el *mínimo común múltiplo* de los denominadores de los exponentes racionales $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \dots$.

Así, cada potencia fraccionaria se transforma en una potencia entera de t :

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p}{q}} = t^k, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, despejando x en la expresión (1), se tiene

$$\begin{aligned} t^m(cx+d) &= ax+b \\ cxt^m + dt^m &= ax+b \\ cxt^m - ax &= b - dt^m \\ (ct^m - a)x &= b - dt^m \\ x &= \frac{b - dt^m}{ct^m - a} \end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$dx = \left(\frac{b - dt^m}{ct^m - a} \right)' dt$$

Realizando las sustituciones correspondientes la integral original se convierte en una integral racional en t , la cual puede ser integrada por métodos algebraicos clásicos.

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$$

Determinamos el mcm de los índices de los radicales.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}, \quad \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$$

$$\text{mcm}(2, 3) = 6$$

Realizamos el cambio de variable y encontramos la diferencial.

$$t^6 = 1+x \quad \Rightarrow \quad dx = 6t^5 dt$$

Además, $x = t^6 - 1$ y por lo tanto

$$\sqrt{1+x} = t^3, \quad \sqrt[3]{1+x} = t^2$$

Reemplazamos en la integral, simplificamos e integramos.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \int \frac{(t^6 - 1)^2 + t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt \\ &= 6 \int \frac{t^{12} - 2t^6 + 1 + t^3}{t^2} \cdot t^5 dt \\ &= 6 \int (t^{12} - 2t^6 + t^3 + 1) t^3 dt \\ &= 6 \int (t^{15} - 2t^9 + t^6 + t^3) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^{16}}{16} - \frac{2t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + c \\ &= \frac{3t^{16}}{8} - \frac{6t^{10}}{5} + \frac{6t^7}{7} + \frac{3t^4}{2} + c \end{aligned}$$

Como: $t = (1+x)^{1/6}$ el resultado de la integral es:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx &= \frac{3(1+x)^{8/3}}{8} - \frac{6(1+x)^{5/3}}{5} + \frac{6(1+x)^{7/6}}{7} + \frac{3(1+x)^{2/3}}{2} + c \\ &= \frac{3\sqrt[3]{(1+x)^8}}{8} - \frac{6\sqrt[3]{(1+x)^5}}{5} + \frac{6\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7} + \frac{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}{2} + c\end{aligned}$$

$$2. \int \frac{\sqrt[4]{3x-5} - 1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{3x-5}} dx$$

Determinamos el mcm de los índices de los radicales.

$$\sqrt[4]{3x-5} = (3x-5)^{1/4}, \quad \sqrt{3x-5} = (3x-5)^{1/2}, \quad \sqrt[3]{3x-5} = (3x-5)^{1/3}$$

$$\text{mcm}(2, 3, 4) = 12$$

Realizamos el cambio de variable y encontramos la diferencial.

$$\begin{aligned}z^{12} &= 3x-5 \\ x &= \frac{z^{12}+5}{3} \Rightarrow dx = 4z^{11}dz\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt[4]{3x-5} = z^3, \quad \sqrt{3x-5} = z^6, \quad \sqrt[3]{3x-5} = z^4$$

Reemplazamos en la integral y simplificamos.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\sqrt[4]{3x-5} - 1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{3x-5}} dx = \int \frac{z^3 - 1}{z^6 + z^4} \cdot 4z^{11} dz \\ &= \int \frac{4z^{11}(z^3 - 1)}{z^4(z^2 + 1)} dz \\ &= 4 \int \frac{z^{10} - z^7}{z^2 + 1} dz\end{aligned}$$

Dividimos, se obtiene:

$$\frac{z^{10} - z^7}{z^2 + 1} = z^8 - z^6 - z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 + \frac{z-1}{z^2+1}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}I &= 4 \int \left(z^8 - z^6 - z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 + \frac{z-1}{z^2+1} \right) dz \\ &= 4 \int z^8 dz - 4 \int z^6 dz - 4 \int z^5 dz + 4 \int z^4 dz + 4 \int z^3 dz - 4 \int z^2 dz - \\ &\quad - 4 \int z dz + 4 \int dz + 4 \int \frac{z}{z^2+1} dz - 4 \int \frac{dz}{z^2+1}\end{aligned}$$

Resolvamos la integral $\int \frac{z}{z^2+1} dz$, para ello realizamos el cambio de variable.

$$u = z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2z dz$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{z}{z^2+1} dz = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c_1 = \frac{1}{2} \ln|z^2+1| + c_1$$

y dado que

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \arctan(z) + c_2$$

Regresando a la integral se tiene que

$$I = \frac{4}{9}z^9 - \frac{4}{7}z^7 - \frac{2}{3}z^6 + \frac{4}{5}z^5 + z^4 - \frac{4}{3}z^3 - 2z^2 + 4z + 2 \ln|z^2+1| - 4 \arctan(z) + c$$

Como: $z = (3x-5)^{1/12}$ el resultado de la integral es:

$$\begin{aligned} I = & \frac{4}{9}(3x-5)^{9/12} - \frac{4}{7}(3x-5)^{7/12} - \frac{2}{3}(3x-5)^{6/12} + \frac{4}{5}(3x-5)^{5/12} + (3x-5)^{4/12} - \\ & - \frac{4}{3}(3x-5)^{3/12} - 2(3x-5)^{2/12} + 4(3x-5)^{1/12} + 2 \ln|(3x-5)^{2/12}+1| - \\ & - 4 \arctan\left((3x-5)^{1/12}\right) + c \end{aligned}$$

Escribiendo las potencias como radicales, obtenemos la solución de la integral

$$\begin{aligned} I = & \frac{4}{9}\sqrt[4]{(3x-5)^3} - \frac{4}{7}\sqrt[12]{(3x-5)^7} - \frac{2}{3}\sqrt{3x-5} + \frac{4}{5}\sqrt[12]{(3x-5)^5} + \sqrt[3]{3x-5} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{3x-5} - \\ & - 2\sqrt[6]{3x-5} + 4\sqrt[12]{3x-5} + 2 \ln|\sqrt[6]{3x-5}+1| - 4 \arctan\left(\sqrt[12]{3x-5}\right) + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

La integral contiene raíces con exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}, \quad \sqrt{x} = x^{1/2}$$

Buscamos el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces 2 y 3:

$$\text{mcm}(2, 3) = 6$$

Por lo tanto $m = 6$. Planteamos el cambio:

$$t^6 = x$$

Calculamos la diferencial

$$dx = \frac{d}{dt}(t^6) = 6t^5 dt$$

Reemplazamos en la integral original:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1} dx &= \int \frac{t^2}{t^3+1} \cdot 6t^5 dt \\ &= \int \frac{6t^7}{t^3+1} dt \end{aligned}$$

Esta integral es racional, se puede resolver por fracciones parciales. Dividimos, se obtiene:

$$\frac{t^7}{t^3+1} = t^4 - t + \frac{t}{t^3+1}$$

Descomponemos en fracciones parciales la fracción propia.

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

Entonces

$$t = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)$$

Desarrollando los productos del lado derecho, se tiene que

$$\begin{aligned} t &= At^2 - At + A + Bt^2 + Bt + Ct + C \\ t &= (A+B)t^2 + (-A+B+C)t + (A+C) \end{aligned}$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ -A+B+C=1 & (2) \\ A+C=0 & (3) \end{cases}$$

Restando la ecuación (2) de la ecuación (1), se obtiene $2A - C = -1$. Sumando esta ecuación con la ecuación (3) se obtiene $A = -\frac{1}{3}$. Ahora bien, sustituyendo este resultado en las ecuaciones (1) y (3) respectivamente se obtiene como resultado $B = \frac{1}{3}$ y $C = \frac{1}{3}$.

Por lo tanto,

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{t+1}{3(t^2-t+1)} - \frac{1}{3(t+1)}$$

Regresando a la integral se sigue que

$$I = 6 \int \left(t^4 - t - \frac{1}{3(t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2-t+1)} \right) dt$$

Integrando término a término:

$$I = 6 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \ln|t+1| + \frac{1}{6} \int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{6} \int \frac{3}{t^2-t+1} dt \right)$$

Completando el cuadrado en la última integral se obtiene

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

De ahí que

$$\begin{aligned} I &= \frac{6}{5}t^5 - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \ln|t^2-t+1| + 3 \int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{6}{5}t^5 - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \ln|t^2-t+1| + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

La solución de la integral en la variable t es:

$$I = \frac{6}{5}t^5 - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \ln|t^2-t+1| + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Como $t = x^{1/6}$, el resultado final es:

$$\begin{aligned} I &= 6 \frac{x^{5/6}}{5} - 3x^{1/3} - 2\ln|x^{1/6}+1| + \ln|x^{1/3}-x^{1/6}+1| + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x^{1/6}-1}{\sqrt{3}}\right) + c \\ &= \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 3\sqrt[3]{x} - 2\ln|\sqrt[6]{x}+1| + \ln|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1| + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

4. $\int \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx$

La integral se puede escribir de la siguiente manera:

$$I = \int \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx$$

Dado que solo se tiene la raíz cuadrada $m = 2$. Por lo tanto, realizamos la sustitución

$$t^2 = \frac{x+2}{x}.$$

Despejamos x y encontramos la diferencial

$$\begin{aligned}t^2x &= x + 2 \\x(t^2 - 1) &= 2 \\x &= \frac{2}{t^2 - 1} \\dx &= -\frac{4t}{(t^2 - 1)^2}dt\end{aligned}$$

Cambiamos la integral original en función de la variable t .

$$I = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{(t - 1)^2(t + 1)^2} dt$$

Para la resolución, empleamos fracciones parciales con factores lineales que se repiten.

$$\frac{t^2}{(t - 1)^2(t + 1)^2} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{(t - 1)^2} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{(t + 1)^2}$$

Entonces

$$t^2 = A(t - 1)(t + 1)^2 + B(t + 1)^2 + C(t + 1)(t - 1)^2 + D(t - 1)^2$$

Resolviendo por valor numérico, se tiene que

$$\begin{cases} Si \quad t = -1 : & 1 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\ Si \quad t = 1 : & 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4} \\ Si \quad t = 0 : & 0 = -A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} \Rightarrow -A + C = -\frac{1}{2} \quad (1) \\ Si \quad t = 2 : & 4 = 9A + \frac{9}{4} + 3C + \frac{1}{4} \Rightarrow 9A + 3C = \frac{3}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Multiplicando por 9 la ecuación (1) y sumando con la ecuación (2), se obtiene $C = -\frac{1}{4}$ y por lo tanto $A = \frac{1}{4}$. De ahí que

$$\frac{t^2}{(t - 1)^2(t + 1)^2} = \frac{1}{4(t - 1)} + \frac{1}{4(t - 1)^2} - \frac{1}{4(t + 1)} + \frac{1}{4(t + 1)^2}$$

Regresamos a la integral:

$$\begin{aligned}I &= -4 \int \left(\frac{1}{4(t - 1)} + \frac{1}{4(t - 1)^2} - \frac{1}{4(t + 1)} + \frac{1}{4(t + 1)^2} \right) dt \\&= - \int \frac{1}{t - 1} dt - \int \frac{1}{(t - 1)^2} dt + \int \frac{1}{t + 1} dt - \int \frac{1}{(t + 1)^2} dt \\&= -\ln|t - 1| + \frac{1}{t - 1} + \ln|t + 1| + \frac{1}{t + 1} + c\end{aligned}$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos y simplificamos

$$\begin{aligned} I &= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{t+1+t-1}{(t-1)(t+1)} + c \\ &= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{2t}{t^2-1} + c \end{aligned}$$

Ahora bien, como: $t = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$, el resultado de la integral original es:

$$I = \int \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{x+2}{x}} - 1} \right| + \frac{2\sqrt{\frac{x+2}{x}}}{\frac{x+2}{x} - 1} + c$$

Simplificamos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx &= \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \right| + \frac{2\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}}{\frac{x+2-x}{x}} + c \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} \right| + \frac{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}}{2} + c \\ &= \ln |(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})^2| + \frac{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}}{2} + c_1 \\ &= 2 \ln |\sqrt{x+2} + \sqrt{x}| + \sqrt{x^2 + 2x} + c_1 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x} + x}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

3. $\int \frac{\sqrt{4z-1} + z}{\sqrt[4]{4z-1} - 2} dz$

4. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^2} + x + 3} dx$

$$5. \int \frac{\sqrt[6]{2x+1}}{2x - \sqrt[3]{2x+1} + 1} dx$$

$$6. \int \frac{\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[3]{x-3} - \sqrt{x-3}} dx$$

$$7. \int \frac{\sqrt[4]{u}}{\sqrt[3]{u} + 1} du$$

$$8. \int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x} + 1} dx$$

$$9. \int \sqrt{\frac{x}{x-5}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$$

$$11. \int \frac{p}{\sqrt{p+2} + 2\sqrt[4]{p+2} - 3} dp$$

$$12. \int \frac{x+3}{x^3 \sqrt{3x+4}} dx$$

Método Alemán

El Método Alemán se aplica a integrales de la forma:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n [2, 4, 13].

Se plantea la identidad:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (1),$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y λ es un número real.

A continuación, se deriva la expresión (1) para determinar los valores de los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y de λ .

Se reemplazan estos valores en la expresión (1) y finalmente se resuelve la integral del segundo miembro de la ecuación (1).

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$

Se propone:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Derivamos:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = A\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{(Ax + B)(2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Multiplicamos por $2\sqrt{x^2 - x + 1}$:

$$2x^2 = 2A(x^2 - x + 1) + (Ax + B)(2x - 1) + 2\lambda.$$

Desarrollando:

$$2x^2 = 2Ax^2 - 2Ax + 2A + 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + 2\lambda$$

$$2x^2 = 4Ax^2 + (-3A + 2B)x + (2A - B + 2\lambda).$$

Agrupando e igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$\begin{cases} 4A = 2 & (1) \\ -3A + 2B = 0 & (2) \\ 2A - B + 2\lambda = 0 & (3) \end{cases}$$

Despejando A de la ecuación (1), se obtiene $A = \frac{1}{2}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) se obtiene $B = \frac{3}{4}$. Ahora bien, sustituyendo los valores de A y B en (3) se obtiene como resultado $\lambda = -\frac{1}{8}$.

Sustituimos en la expresión inicial:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Para resolver la integral, hacemos la sustitución trigonométrica

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{\frac{3}{4} \tan^2(\theta) + \frac{3}{4}}} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \end{aligned}$$

Como $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta)$, entonces $\tan(\theta) = \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$. Ahora bien, dado que $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta) &= 1 + \frac{(2x - 1)^2}{3} \\ \sec^2(\theta) &= \frac{3 + 4x^2 - 4x + 1}{3} \\ \sec(\theta) &= \sqrt{\frac{4x^2 - 4x + 4}{3}} \\ \sec(\theta) &= \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Reemplazamos en la integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \left(\frac{2x + 3}{4} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{3}} + \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right| + c$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \frac{1}{4} (2x + 3) \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| + c_1.$$

$$2. \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

Se propone:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Derivamos la identidad:

$$\frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{(Ax^2 + Bx + C)(2x + 2)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Multiplicamos por $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$:

$$x^3 - x + 1 = (Ax^2 + Bx + C)(x + 1) + (2Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + \lambda.$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + 2Ax^3 + 4Ax^2 + 4Ax + \\ &\quad + Bx^2 + 2Bx + 2B + \lambda \\ &= 3Ax^3 + (5A + 2B)x^2 + (4A + 3B + C)x + (2B + C + \lambda). \end{aligned}$$

Igualamos coeficientes de potencias semejantes

$$\begin{cases} 3A = 1 & (1) \\ 5A + 2B = 0 & (2) \\ 4A + 3B + C = -1 & (3) \\ 2B + C + \lambda = 1 & (4) \end{cases}$$

Despejando A de la ecuación (1), se obtiene $A = \frac{1}{3}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) se obtiene $B = -\frac{5}{6}$. Ahora bien, sustituyendo los valores de A y B en (3) se obtiene $C = \frac{1}{6}$. Finalmente, sustituyendo los valores de B y C en (4) se obtiene como resultado $\lambda = \frac{5}{2}$.

De ahí que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} \end{aligned}$$

Para resolver la integral, hacemos la sustitución trigonométrica

$$x + 1 = \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = \sec^2(\theta)d\theta$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{\tan^2(\theta) + 1}} \\
 &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \sec(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c
 \end{aligned}$$

Como $x + 1 = \tan(\theta)$ y dado que $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sec^2(\theta) &= 1 + (x + 1)^2 \\
 \sec^2(\theta) &= 1 + x^2 + 2x + 1 \\
 \sec(\theta) &= \sqrt{x^2 + 2x + 2}
 \end{aligned}$$

Reemplazamos en la integral

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c.$$

$$3. \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}} dx$$

Aplicamos el método Alemán:

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}} dx = (Ax + B) \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}}.$$

Derivamos la expresión:

$$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}} = A \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \frac{(Ax + B)(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}}.$$

Multiplicamos por $\sqrt{(x - 3)^2 + 2}$:

$$x^2 + 1 = A((x - 3)^2 + 2) + (Ax + B)(x - 3) + \lambda.$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 1 &= A(x^2 - 6x + 9) + 2A + Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + \lambda \\
 &= Ax^2 - 6Ax + 9A + 2A + Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + \lambda.
 \end{aligned}$$

Agrupando:

$$x^2 + 1 = 2Ax^2 + (-9A + B)x + (11A - 3B + \lambda).$$

Iguamos coeficientes de potencias semejantes

$$\begin{cases} 2A = 1 & (1) \\ -9A + B = 0 & (2) \\ 11A - 3B + \lambda = 1 & (3) \end{cases}$$

Despejando A de la ecuación (1), se obtiene $A = \frac{1}{2}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) se obtiene $B = \frac{9}{2}$. Ahora bien, sustituyendo los valores de A y B en (3) se obtiene $\lambda = 9$.

De ahí que:

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}}$$

Para resolver la integral, hacemos la sustitución trigonométrica

$$x - 3 = \sqrt{2} \tan(\theta) \Rightarrow dx = \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}} dx &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \int \frac{\sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{2 \tan^2(\theta) + 2}} \\ &= \frac{1}{2} (x + 9) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (x + 9) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \end{aligned}$$

Como $x - 3 = \sqrt{2} \tan(\theta)$ y dado que $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta) &= 1 + \frac{(x-3)^2}{2} \\ \sec^2(\theta) &= \frac{2 + (x-3)^2}{2} \\ \sec(\theta) &= \sqrt{\frac{2 + (x-3)^2}{2}} \\ \sec(\theta) &= \frac{\sqrt{2 + (x-3)^2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Reemplazamos en la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}} dx &= \frac{1}{2} (x+9) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \ln \left| \frac{\sqrt{2 + (x-3)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{\sqrt{2}} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} (x+9) \sqrt{(x-3)^2 + 2} + 9 \ln |x-3 + \sqrt{(x-3)^2 + 2}| + c_1\end{aligned}$$

4. $\int (x^2 - 2)\sqrt{1-x-x^2} dx$

Racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}I = \int (x^2 - 2)\sqrt{1-x-x^2} dx &= \int \frac{(x^2 - 2)(1-x-x^2)}{\sqrt{1-x-x^2}} dx \\ &= \int \frac{x^2 - x^3 - x^4 - 2 + 2x + 2x^2}{\sqrt{1-x-x^2}} dx \\ &= \int \frac{-(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2)}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.\end{aligned}$$

Aplicamos el método Alemán, esto es

$$\int \frac{-(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2)}{\sqrt{1-x-x^2}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{1-x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$$

Derivamos esta identidad

$$\begin{aligned}\frac{-(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2)}{\sqrt{1-x-x^2}} &= \frac{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(-1-2x)}{2\sqrt{1-x-x^2}} + \\ &\quad + (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{1-x-x^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x-x^2}}.\end{aligned}$$

Multiplicamos por $2\sqrt{1-x-x^2}$:

$$-2(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2) = -(2x+1)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + 2(3Ax^2 + 2Bx + C)(1-x-x^2) + 2\lambda.$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 4x - 4 &= -2Ax^4 - 2Bx^3 - 2Cx^2 - 2Dx - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D + \\ &\quad + 6Ax^2 + 4Bx + 2C - 6Ax^3 - 4Bx^2 - 2Cx - 6Ax^4 - \\ &\quad - 4Bx^3 - 2Cx^2 + 2\lambda \\ &= -8Ax^4 + (-6B - 7A)x^3 + (-4C - 5B + 6A)x^2 + \\ &\quad + (-2D - 3C + 4B)x + (-D + 2C + 2\lambda).\end{aligned}$$

Igualamos coeficientes de potencias semejantes

$$\begin{cases} -8A = -2 & (1) \\ -7A - 6B = -2 & (2) \\ 6A - 5B - 4C = 6 & (3) \\ 4B - 3C - 2D = 4 & (4) \\ 2C - D + 2\lambda = -4 & (5) \end{cases}$$

Despejando A de la ecuación (1), se obtiene $A = \frac{1}{4}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) se obtiene $B = \frac{1}{24}$. Sustituyendo los valores de A y B en (3) se obtiene $C = -\frac{113}{96}$. Ahora bien, sustituyendo los valores de B y C en (4) se obtiene $D = -\frac{29}{192}$. Finalmente, sustituyendo los valores de C y D en (5) se obtiene como resultado $\lambda = -\frac{115}{128}$. De ahí que:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{113}{96}x - \frac{29}{192} \right) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} \\ &= \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

Para resolver la integral, hacemos la sustitución trigonométrica

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\theta) d\theta$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\theta) d\theta}{\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{5}{4} \operatorname{sen}^2(\theta)}} \\ &= \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\theta)}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \int d\theta \\ &= \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{115}{128} \theta + c \end{aligned}$$

$$\text{Como } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}} \right)$$

Reemplazando en la integral

$$I = \frac{1}{192} (48x^3 + 8x^2 - 226x - 29) \sqrt{1 - x - x^2} - \frac{115}{128} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{5}} \right) + c$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}} dx$

2. $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x + 9}} dx$

3. $\int (x^3 - 4x) \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$

4. $\int \frac{5x^3 + 2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 4x + 7}} dx$

5. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x - 3)^2 + 2}} dx$

6. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 4}{\sqrt{5 + (x + 2)^2}} dx$

7. $\int (2x^2 - 3) \sqrt{6 - 3x - x^2} dx$

8. $\int \frac{x^3 - 6x + 9}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}} dx$

9. $\int \frac{3x^4 - 2x^2 + 7}{\sqrt{x^2 + 3x + 6}} dx$

10. $\int \frac{(x^2 + 4x - 5)}{\sqrt{2x^2 - x + 4}} dx$

11. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 10}} dx$

12. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$

Integración del Binomio Diferencial

Estas integrales son de la forma

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

donde $a \wedge b$ son números reales distintos de cero y $m, n \wedge p$ son números racionales [1, 11, 2, 4, 9].

Para resolver este tipo de integrales se utilizan las condiciones de Chebyshev, las cuales nos pueden llevar a uno de los siguientes casos:

Caso 1. Si p es un número entero.

Si p es un número entero positivo para resolver la integral se utiliza el Binomio de Newton y si p es un número entero negativo se utiliza la técnica de integración por racionalización obteniéndose la integral de una función racional [1, 11, 2].

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{(1 + \sqrt[4]{x^3})^6}{\sqrt{x^3}} dx$$

Empecemos llamando I a la integral y expresando las raíces como potencias, esto es

$$I = \int x^{-\frac{3}{2}} (1 + x^{\frac{3}{4}})^6 dx$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = -\frac{3}{2}, \quad n = \frac{3}{4}, \quad p = 6.$$

Dado que p es un número entero positivo, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, aplicando el Binomio de Newton, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-\frac{3}{2}} \left(1 + 6x^{\frac{3}{4}} + 15x^{\frac{3}{2}} + 20x^{\frac{9}{4}} + 15x^3 + 6x^{\frac{15}{4}} + x^{\frac{9}{2}} \right) dx \\ &= \int \left(x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-\frac{3}{4}} + 15 + 20x^{\frac{3}{4}} + 15x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{9}{4}} + x^3 \right) dx \end{aligned}$$

Integrando término a término

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-\frac{3}{4}} dx + 15 \int dx + 20 \int x^{\frac{3}{4}} dx + 15 \int x^{\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{\frac{9}{4}} dx + \\
 &\quad + \int x^3 dx \\
 &= -2x^{-\frac{1}{2}} + 24x^{\frac{1}{4}} + 15x + \frac{80}{7}x^{\frac{7}{4}} + 6x^{\frac{5}{2}} + \frac{24}{13}x^{\frac{13}{4}} + \frac{x^4}{4} + c \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{x}} + 24\sqrt[4]{x} + 15x + \frac{80}{7}\sqrt[4]{x^7} + 6\sqrt{x^5} + \frac{24}{13}\sqrt[4]{x^{13}} + \frac{x^4}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{x \left(1 - \sqrt[5]{x^2}\right)^3}$$

Empecemos llamando I a la integral y expresando las raíces como potencias, esto es

$$I = \int x^{-1} \left(1 - x^{\frac{2}{5}}\right)^{-3} dx$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = -1, \quad n = \frac{2}{5}, \quad p = -3.$$

Dado que p es un número entero negativo, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, haciendo la sustitución $z^5 = x^2$, es decir $x = z^{\frac{5}{2}}$ y por lo tanto $dx = \frac{5}{2} z^{\frac{3}{2}} dz$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 I &= \int z^{-\frac{5}{2}} (1 - z)^{-3} \frac{5}{2} z^{\frac{3}{2}} dz \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{dz}{z (1 - z)^3}
 \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución $u = 1 - z \Rightarrow du = -dz$ en la integral anterior, se tiene que

$$I = -\frac{5}{2} \int \frac{du}{u^3 (1 - u)}$$

Para resolver esta integral se emplea Fracciones Parciales, esto es:

$$\frac{1}{u^3 (1 - u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u^3} + \frac{D}{1 - u}$$

Entonces,

$$1 = Au^2(1 - u) + Bu(1 - u) + C(1 - u) + Du^3$$

Desarrollando los productos del lado derecho, se tiene que

$$1 = Au^2 - Au^3 + Bu - Bu^2 + C - Cu + Du^3$$

Agrupando

$$1 = (-A + D)u^3 + (A - B)u^2 + (B - C)u + C$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes, se sigue que:

$$\begin{cases} -A + D = 0 & (1) \\ A - B = 0 & (2) \\ B - C = 0 & (3) \\ C = 1 & (4) \end{cases}$$

Reemplazando $C = 1$ en la ecuación (3), se obtiene como resultado $B = 1$.

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), se obtiene como resultado $A = 1$ y

sustituyendo este valor en la ecuación (1), se obtiene $D = 1$.

De ahí que,

$$\frac{1}{u^3(1-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \frac{1}{1-u}$$

Regresando a la integral, se tiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{5}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^2} - \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^3} - \frac{5}{2} \int \frac{du}{1-u} \\ &= -\frac{5}{2} \ln|u| + \frac{5}{2u} + \frac{5}{4u^2} + \frac{5}{2} \ln|1-u| + c \end{aligned}$$

Dado que $u = 1 - z$, se sigue que

$$I = -\frac{5}{2} \ln|1-z| + \frac{5}{2(1-z)} + \frac{5}{4(1-z)^2} + \frac{5}{2} \ln|z| + c$$

Y puesto que $z = x^{\frac{2}{5}}$, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{5}{2} \ln \left| 1 - x^{\frac{2}{5}} \right| + \frac{5}{2 \left(1 - x^{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{5}{4 \left(1 - x^{\frac{2}{5}} \right)^2} + \frac{5}{2} \ln \left| x^{\frac{2}{5}} \right| + c \\ &= \frac{5}{2} \ln \left| \sqrt[5]{x^2} \right| - \frac{5}{2} \ln \left| 1 - \sqrt[5]{x^2} \right| + \frac{5 \left(2 - 2\sqrt[5]{x^2} + 1 \right)}{4 \left(1 - \sqrt[5]{x^2} \right)^2} + c \\ &= \ln|x| - \frac{5}{2} \ln \left| 1 - \sqrt[5]{x^2} \right| - \frac{5 \left(2\sqrt[5]{x^2} - 3 \right)}{4 \left(1 - \sqrt[5]{x^2} \right)^2} + c \end{aligned}$$

Caso 2. Si p es un número fraccionario $\left(p = \frac{r}{s}\right)$ y $\frac{m+1}{n}$ es un número entero.

En este caso para resolver la integral se utiliza la sustitución $z^s = a + bx^n$ [2, 4, 9].

Ahora bien, despejemos x , esto es

$$\begin{aligned}x^n &= \frac{z^s - a}{b} \\x &= \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \\x &= \frac{(z^s - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

Tomando la diferencial a ambos lados de la última expresión se sigue que

$$\begin{aligned}dx &= \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \cdot (z^s - a)^{\frac{1}{n}-1} \cdot s \cdot z^{s-1} dz \\dx &= \frac{s z^{s-1}}{n b^{\frac{1}{n}}} \cdot (z^s - a)^{\frac{1}{n}-1} dz\end{aligned}$$

A continuación, se reemplazan x y dx en la integral original obteniéndose la integral de una función racional.

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 8}}{x^3} dx$$

Empecemos llamando I a la integral y expresando las raíces como potencias, esto es

$$I = \int x^{-3} (3x^2 - 8)^{\frac{1}{3}} dx \quad (*)$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = -3, \quad n = 2, \quad p = \frac{1}{3}.$$

Dado que p es un número fraccionario, determinemos el valor de $\frac{m+1}{n}$, esto es

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \in \mathbb{Z},$$

por lo tanto la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, puesto que $s = 3$, haciendo la sustitución $z^3 = 3x^2 - 8$, se sigue que

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{z^3 + 8}{3} \\x &= \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}(z^3 + 8)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (1)$$

Obteniendo la diferencial de la última expresión, se tiene que

$$\begin{aligned}dx &= \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (z^3 + 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 z^2 dz \\dx &= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} z^2 (z^3 + 8)^{-\frac{1}{2}} dz\end{aligned}\quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en (*) se obtiene

$$I = \int \frac{1}{3^{-\frac{3}{2}}} (z^3 + 8)^{-\frac{3}{2}} (z^3)^{\frac{1}{3}} \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} z^2 (z^3 + 8)^{-\frac{1}{2}} dz$$

Simplificando

$$\begin{aligned}I &= \frac{9}{2} \int z \cdot z^2 (z^3 + 8)^{-2} dz \\&= \frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(z^3 + 8)^2} dz\end{aligned}$$

Para resolver esta integral utilizamos la técnica de integración por partes, escribamos esta última integral como

$$I = \int \frac{3}{2} z \cdot \frac{3z^2}{(z^3 + 8)^2} dz$$

Ahora bien, sean

$$\begin{aligned}u &= \frac{3}{2} z & \Rightarrow & du = \frac{3}{2} dz \\dv &= \frac{3z^2}{(z^3 + 8)^2} dz & \Rightarrow & v = \int \frac{3z^2}{(z^3 + 8)^2} dz\end{aligned}$$

Para determinar el valor de v hacemos la sustitución

$$p = z^3 + 8 \Rightarrow dp = 3z^2 dz$$

por lo tanto

$$v = \int \frac{dp}{p^2} = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{z^3 + 8}$$

Ahora bien, mediante la integración por partes, se obtiene:

$$I = -\frac{3z}{2(z^3 + 8)} + \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^3 + 8} \quad (**)$$

Llamando I_1 a la integral $\int \frac{dz}{z^3 + 8}$, se sigue que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dz}{z^3 + 8} \\ &= \int \frac{dz}{(z + 2)(z^2 - 2z + 4)} \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea fracciones parciales, esto es:

$$\frac{1}{(z + 2)(z^2 - 2z + 4)} = \frac{A}{z + 2} + \frac{Bz + C}{z^2 - 2z + 4}$$

Entonces,

$$1 = A(z^2 - 2z + 4) + (Bz + C)(z + 2)$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } z = -2 : \quad 1 = 12A \Rightarrow A = \frac{1}{12},$$

$$\text{si } z = 0 : \quad 1 = \frac{1}{3} + 2C \Rightarrow C = \frac{1}{3},$$

$$\text{si } z = 1 : \quad 1 = \frac{1}{4} + 3B + 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{12}.$$

De ahí que,

$$\frac{1}{(z + 2)(z^2 - 2z + 4)} = \frac{1}{12(z + 2)} - \frac{z - 4}{12(z^2 - 2z + 4)}$$

Regresando a la integral I_1 , se tiene que

$$I_1 = \frac{1}{12} \int \frac{dz}{z + 2} - \frac{1}{12} \int \frac{z - 4}{z^2 - 2z + 4} dz$$

Reemplazando I_1 en (**), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3z}{2(z^3 + 8)} + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{12} \int \frac{dz}{z + 2} - \frac{1}{12} \int \frac{z - 4}{z^2 - 2z + 4} dz \right] \\ &= -\frac{3z}{2(z^3 + 8)} + \frac{1}{8} \int \frac{dz}{z + 2} - \frac{1}{8} \int \frac{z - 4}{z^2 - 2z + 4} dz \\ &= -\frac{3z}{2(z^3 + 8)} + \frac{1}{8} \ln|z + 2| - \frac{1}{16} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z + 4} dz + \frac{3}{8} \int \frac{dz}{z^2 - 2z + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3z}{2(z^3+8)} + \frac{1}{8}\ln|z+2| - \frac{1}{16}\ln|z^2-2z+4| + \frac{3}{8} \int \frac{dz}{(z-1)^2+3} \\
 &= -\frac{3z}{2(z^3+8)} + \frac{3}{16}\ln|z+2| - \frac{1}{16}\ln|z+2| - \frac{1}{16}\ln|z^2-2z+4| + \\
 &\quad + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{z-1}{\sqrt{3}}\right) + c \\
 &= -\frac{3z}{2(z^3+8)} + \frac{3}{16}\ln|z+2| - \frac{1}{16}\ln|z^3+8| + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{z-1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (3)
 \end{aligned}$$

La sustitución realizada fue $z^3 = 3x^2 - 8$, despejando z en esta expresión, se tiene

$$z = (3x^2 - 8)^{\frac{1}{3}}$$

Reemplazando en (3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{3(3x^2-8)^{\frac{1}{3}}}{2(3x^2)} + \frac{3}{16}\ln\left|(3x^2-8)^{\frac{1}{3}}+2\right| - \frac{1}{16}\ln|3x^2| + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{(3x^2-8)^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{3}}\right) + c \\
 &= -\frac{\sqrt[3]{3x^2-8}}{2x^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\sqrt[3]{3x^2-8}+2\right| - \frac{1}{16}\ln|3| - \frac{1}{8}\ln|x| + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3x^2-8}-1}{\sqrt{3}}\right) + c \\
 &= \frac{3}{16}\ln\left|\sqrt[3]{3x^2-8}+2\right| - \frac{3}{16}\ln\left|x^{\frac{2}{3}}\right| - \frac{\sqrt[3]{3x^2-8}}{2x^2} + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3x^2-8}-1}{\sqrt{3}}\right) + c_1
 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene

$$I = \frac{3}{16}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{3x^2-8}+2}{\sqrt[3]{x^2}}\right| - \frac{\sqrt[3]{3x^2-8}}{2x^2} + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3x^2-8}-1}{\sqrt{3}}\right) + c_1$$

2. $\int \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt[5]{\ln(x)}}{x^5 \ln^2(x)}} dx$

Esta integral se puede escribir como

$$\int \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt[5]{\ln(x)}}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{dx}{x}$$

Haciendo la sustitución $t = \ln(x)$, $dt = \frac{dx}{x}$, la integral anterior se puede escribir

$$\int \sqrt[5]{\frac{1 + \sqrt[5]{t}}{t^2}} \cdot dt$$

Llamando I a la integral y escribiendo las raíces como potencias, se tiene

$$I = \int t^{-\frac{2}{5}} \left(1 + t^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}} dt \quad (*)$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = -\frac{2}{5}, \quad n = \frac{1}{5}, \quad p = \frac{1}{5}.$$

Dado que p es un número fraccionario, determinemos el valor de $\frac{m+1}{n}$, esto es

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} = 3 \in \mathbb{Z},$$

por lo tanto, la integral pertenece a este caso.

Ahora bien, puesto que $s = 5$, haciendo la sustitución $z^5 = 1 + t^{\frac{1}{5}}$, se sigue que

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{5}} &= z^5 - 1 \\ t &= (z^5 - 1)^5 \end{aligned} \quad (1)$$

Obteniendo la diferencial de la última expresión, se tiene que

$$\begin{aligned} dt &= 5(z^5 - 1)^4 \cdot 5z^4 dz \\ dt &= 25z^4(z^5 - 1)^4 dz \end{aligned} \quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en (*), se sigue que

$$\begin{aligned} I &= \int [(z^5 - 1)^5]^{-\frac{2}{5}} (z^5)^{\frac{1}{5}} 25z^4(z^5 - 1)^4 dz \\ &= 25 \int (z^5 - 1)^{-2} z z^4(z^5 - 1)^4 dz \\ &= 25 \int z^5 (z^5 - 1)^2 dz \\ &= 25 \int z^5 (z^{10} - 2z^5 + 1) dz \\ &= 25 \int z^{15} dz - 50 \int z^{10} dz + 25 \int z^5 dz \end{aligned}$$

Integrando cada término, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{25}{16} z^{16} - \frac{50}{11} z^{11} + \frac{25}{6} z^6 + c \\ &= \frac{25}{528} z^6 (33z^{10} - 96z^5 + 88) + c \end{aligned} \quad (3)$$

La sustitución realizada fue $z^5 = 1 + t^{\frac{1}{5}}$, despejando z en esta expresión, se tiene

$$z = \left(1 + t^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Reemplazando en (3), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{25}{528} \left(1 + t^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{6}{5}} \left[33 \left(1 + t^{\frac{1}{5}}\right)^2 - 96 \left(1 + t^{\frac{1}{5}}\right) + 88\right] + c \\ &= \frac{25}{528} \sqrt[5]{\left(1 + \sqrt[5]{t}\right)^6} \left(33 + 66\sqrt[5]{t} + 33\sqrt[5]{t^2} - 96 - 96\sqrt[5]{t} + 88\right) + c \\ &= \frac{25}{528} \sqrt[5]{\left(1 + \sqrt[5]{t}\right)^6} \left(33\sqrt[5]{t^2} - 30\sqrt[5]{t} + 25\right) + c \end{aligned}$$

Dado que $t = \ln(x)$, el resultado de la integral es

$$I = \frac{25}{528} \sqrt[5]{\left(1 + \sqrt[5]{\ln(x)}\right)^6} \left(33\sqrt[5]{\ln^2(x)} - 30\sqrt[5]{\ln(x)} + 25\right) + c$$

Caso 3. Si p es un número fraccionario $\left(p = \frac{r}{s}\right)$ y $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero.

En este caso para resolver la integral se utiliza la sustitución $z^s = \frac{a + bx^n}{x^n}$ [2, 4, 11].

Ahora bien, despejemos x , esto es

$$\begin{aligned} z^s x^n &= a + bx^n \\ x^n &= \frac{a}{z^s - b} \\ x &= \left(\frac{a}{z^s - b}\right)^{\frac{1}{n}} \\ x &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^s - b)^{\frac{1}{n}}} \\ x &= a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Tomando la diferencial a ambos lados de la última expresión se sigue que

$$dx = a^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{n} \right) \cdot (z^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} \cdot s \cdot z^{s-1} dz$$

$$dx = -\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n} s z^{s-1} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} dz$$

A continuación, se reemplazan x y dx en la integral original obteniéndose la integral de una función racional.

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(4-7x^3)^5}}$$

Empecemos llamando I a la integral y expresando las raíces como potencias, esto es

$$I = \int x^{-2} (4-7x^3)^{-\frac{5}{3}} dx \quad (*)$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = -2, \quad n = 3, \quad p = -\frac{5}{3}.$$

Dado que p es un número fraccionario, determinemos el valor de $\frac{m+1}{n}$, esto es

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},$$

por lo tanto la integral no pertenece al caso 2. Ahora encontremos el valor de $\frac{m+1}{n} + p$, esto es

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -2 \in \mathbb{Z},$$

de ahí que, esta integral pertenece al caso 3.

Ahora bien, puesto que $s = 3$, haciendo la sustitución $z^3 x^3 = 4 - 7x^3$, se sigue que

$$x^3 = \frac{4}{z^3 + 7} \quad (1)$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} (z^3 + 7)^{-\frac{1}{3}} \quad (2)$$

Obteniendo la diferencial de la última expresión, se tiene que

$$\begin{aligned} dx &= 4^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (z^3 + 7)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3 z^2 dz \\ dx &= -4^{\frac{1}{3}} z^2 (z^3 + 7)^{-\frac{4}{3}} dz \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (*) se obtiene

$$I = \int 4^{-\frac{2}{3}} (z^3 + 7)^{\frac{2}{3}} \left(4 - \frac{28}{z^3 + 7}\right)^{-\frac{5}{3}} \left(-4^{\frac{1}{3}}\right) \cdot z^2 (z^3 + 7)^{-\frac{4}{3}} dz$$

Simplificando

$$\begin{aligned} I &= - \int 4^{-\frac{1}{3}} z^2 (z^3 + 7)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{4z^3}{z^3 + 7}\right)^{-\frac{5}{3}} dz \\ &= - \int 4^{-\frac{1}{3}} z^2 (z^3 + 7)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{(z^3 + 7)^{\frac{5}{3}}}{4^{\frac{5}{3}} z^5}\right) dz \\ &= -\frac{1}{16} \int \frac{z^3 + 7}{z^3} dz \\ &= -\frac{1}{16} \int dz - \frac{7}{16} \int \frac{dz}{z^3} \\ &= -\frac{z}{16} + \frac{7}{32 z^2} + c \\ &= \frac{-2z^3 + 7}{32 z^2} + c \end{aligned} \quad (4)$$

La sustitución realizada fue $z^3 x^3 = 4 - 7x^3$, es decir

$$z^3 = \frac{4 - 7x^3}{x^3} \Rightarrow z = \frac{(4 - 7x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

Reemplazando en (4), se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2 \left(\frac{4 - 7x^3}{x^3}\right) + 7}{32 \left(\frac{(4 - 7x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2}\right)} + c \\ &= \frac{-8 + 14x^3 + 7x^3}{\frac{x^3}{32(4 - 7x^3)^{\frac{2}{3}}}} + c \\ &= \frac{21x^3 - 8}{32x(4 - 7x^3)^{\frac{2}{3}}} + c \\ &= \frac{21x^3 - 8}{32x \sqrt[3]{(4 - 7x^3)^2}} + c \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{\cos^2(x) \sqrt[4]{1 + \tan^4(x)}}$$

Esta integral se puede escribir como

$$\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt[4]{1 + \tan^4(x)}} dx$$

Haciendo la sustitución $u = \tan(x)$, $du = \sec^2(x) dx$, la integral anterior se puede escribir

$$\int \frac{du}{\sqrt[4]{1 + u^4}}$$

Llamando I a la integral y expresando las raíces como potencias, se tiene

$$I = \int u^0 (1 + u^4)^{-\frac{1}{4}} du \quad (*)$$

Esta integral tiene la forma de la Integral del binomio diferencial, donde:

$$m = 0, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{4}.$$

Dado que p es un número fraccionario, determinemos el valor de $\frac{m+1}{n}$, esto es

$$\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z},$$

por lo tanto la integral no pertenece al caso 2. Ahora encontremos el valor de $\frac{m+1}{n} + p$, esto es

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z},$$

de ahí que, esta integral pertenece al caso 3.

Ahora bien, puesto que $s = 4$, haciendo la sustitución $z^4 u^4 = 1 + u^4$, se sigue que

$$\begin{aligned} u^4 &= \frac{1}{z^4 - 1} \\ u &= (z^4 - 1)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (1)$$

Diferenciando la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} du &= -\frac{1}{4} (z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} \cdot 4 z^3 dz \\ du &= -z^3 (z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dz \end{aligned} \quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en (*) se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(1 + \frac{1}{z^4 - 1}\right)^{-\frac{1}{4}} (-z^3) (z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dz \\
 &= - \int z^3 \left(\frac{z^4}{z^4 - 1}\right)^{-\frac{1}{4}} (z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dz \\
 &= - \int z^3 \frac{(z^4 - 1)^{\frac{1}{4}}}{z} (z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dz \\
 &= - \int \frac{z^2}{z^4 - 1} dz \\
 &= \int \frac{-z^2}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} dz
 \end{aligned}$$

Para resolver esta integral se emplea fracciones parciales, esto es:

$$\frac{-z^2}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}$$

Entonces,

$$-z^2 = A(z-1)(z^2+1) + B(z+1)(z^2+1) + (Cz+D)(z+1)(z-1)$$

Resolviendo por valor numérico,

$$\text{si } z = -1 : \quad -1 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4},$$

$$\text{si } z = 1 : \quad -1 = 4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4},$$

$$\text{si } z = 0 : \quad 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - D \Rightarrow D = -\frac{1}{2},$$

$$\text{si } z = 2 : \quad -4 = \frac{5}{4} - \frac{15}{4} + 6C - \frac{3}{2} \Rightarrow C = 0.$$

De ahí que,

$$\frac{-z^2}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z^2+1)}$$

Regresando a la integral, se tiene

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+1} \\
 &= \frac{1}{4} \ln|z+1| - \frac{1}{4} \ln|z-1| - \frac{1}{2} \arctan(z) + c \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan(z) + c \quad (3)
 \end{aligned}$$

La sustitución realizada fue $z^4 u^4 = 1 + u^4$, es decir

$$z^4 = \frac{1 + u^4}{u^4}$$

$$z = \frac{(1 + u^4)^{\frac{1}{4}}}{u}$$

Reemplazando en (3), se obtiene

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\frac{(1 + u^4)^{\frac{1}{4}}}{u} + 1}{\frac{(1 + u^4)^{\frac{1}{4}}}{u} - 1} \right| - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{(1 + u^4)^{\frac{1}{4}}}{u} \right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1 + u^4} + u}{\sqrt[4]{1 + u^4} - u} \right| - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt[4]{1 + u^4}}{u} \right) + c$$

Puesto que $u = \tan(x)$, regresando a la variable original, se tiene

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1 + \tan^4(x)} + \tan(x)}{\sqrt[4]{1 + \tan^4(x)} - \tan(x)} \right| - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt[4]{1 + \tan^4(x)}}{\tan(x)} \right) + c$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1 + \sqrt{x})^3}} dx$
2. $\int \sqrt[5]{p^4} \left(\sqrt[10]{p^3} + 2 \right)^4 dp$
3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt[4]{x^3} + 2 \right)^2} dx$
4. $\int \frac{dx}{x^6 \sqrt[4]{(2 - 9x^4)^3}}$
5. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{u}}}{\sqrt{u}} du$
6. $\int \frac{\sqrt{(2x)^4 - 1}}{(2x)^3} dx$
7. $\int \frac{(3 + x^4 \sqrt{x})^5}{x \sqrt[8]{x^3}} dx$

$$8. \int \frac{dv}{\sqrt[3]{1+v^3}}$$

$$9. \int \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{\left(1+2\sqrt[5]{x^2}\right)^{17}}}$$

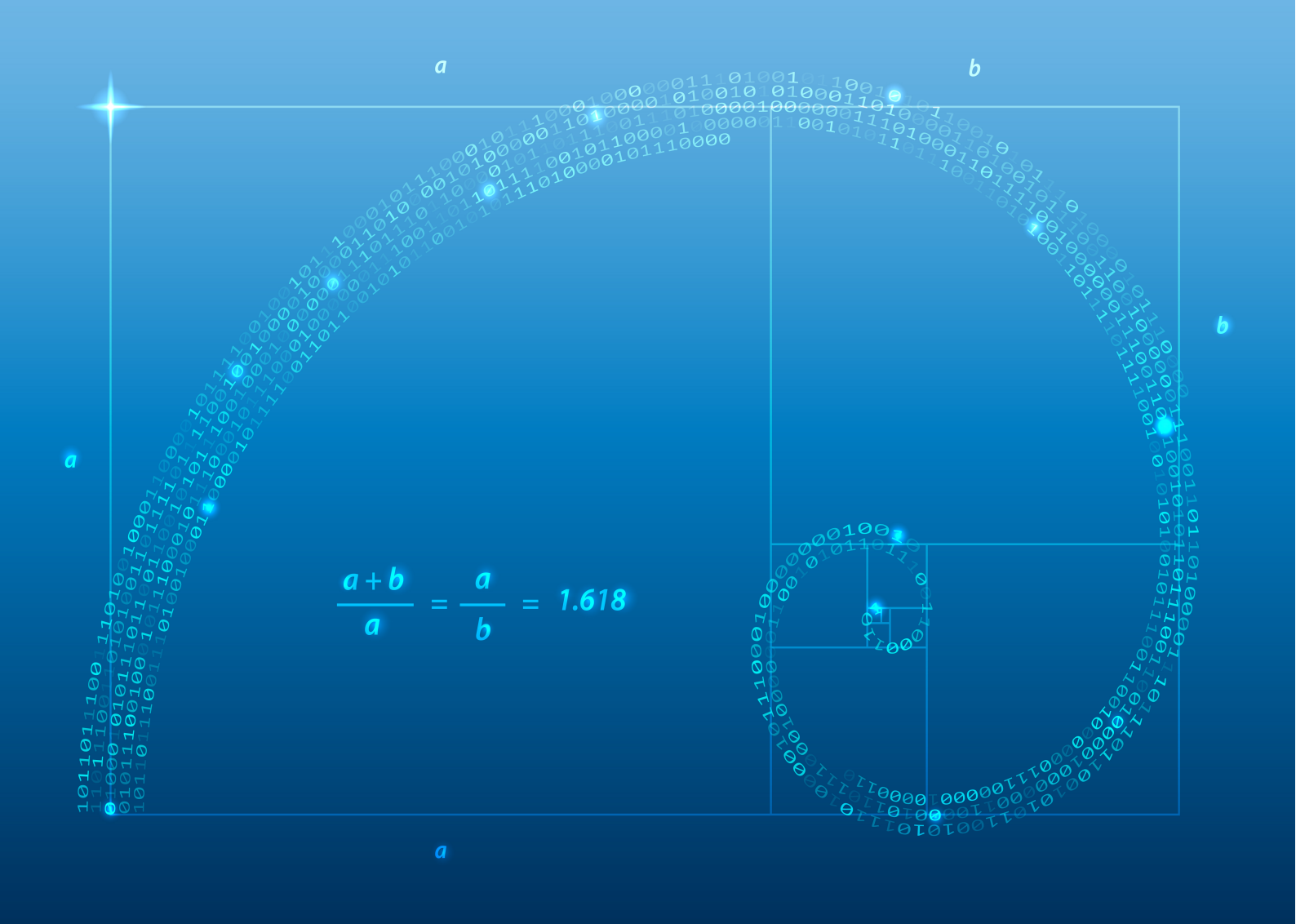
$$11. \int \frac{\sqrt[5]{\left(\sqrt[7]{\ln^2(x)}+4\right)^2}}{x \sqrt[7]{\ln^3(x)}} dx$$

$$12. \int \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt[3]{\cos^2(\theta)} \left(1+\sqrt[3]{\cos^2(\theta)}\right)} d\theta$$

Miscelánea

1. $\int \frac{4x^4 - 11x + 3}{4x^4 + 12x^3 + 9x^2} dx$
2. $\int \operatorname{sen}^4(x) \cos^2(x) dx$
3. $\int \frac{\sqrt{3u-4} - \sqrt{3u+4}}{\sqrt{3u-4} + \sqrt{3u+4}} du$
4. $\int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^3} dx$
5. $\int \frac{e^{3x}}{9 + 4e^{6x}} dx$
6. $\int \frac{2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) + 5}{4\cos^2(x) + 3\operatorname{sen}^2(x) - 1} dx$
7. $\int \frac{x^4 - 2x^3 - 3x + 12}{x^3 + x^2 + 3x - 5} dx$
8. $\int \cot^9(x) dx$
9. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$
10. $\int \frac{4x^3 + x^2 - 1}{\sqrt{9 + (x-1)^2}} dx$
11. $\int \frac{\sec^4(\ln(x))}{x} dx$
12. $\int \frac{\cos^7(x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4(x)}} dx$
13. $\int \frac{5t - 2}{\sqrt{2t^2 + 3t + 2}} dt$
14. $\int \frac{3\operatorname{sen}(y) - 2\cos(y) - 7}{3\operatorname{sen}(y) + 2\cos(y) + 7} dy$
15. $\int \frac{dx}{6x^2 + 7x + 2}$
16. $\int \sqrt{\frac{p^3}{\sqrt{p} - 1}} dp$
17. $\int \frac{x}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} dx$
18. $\int \frac{\operatorname{sech}(9w)}{1 + \cosh(9w)} dw$
19. $\int \frac{4x^3 + 43x^2 - 74x + 22}{(2x-1)^2(x^2 - 3x + 5)} dx$
20. $\int x^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 5} dx$
21. $\int \frac{\ln(1 + \cos(x))}{\operatorname{sen}^2(x)} dx$
22. $\int (x^3 - 4)\cos^2(4x) dx$
23. $\int \frac{\cos(4 + 5\sqrt{t}) \cos(4\sqrt{t} + 5)}{\sqrt{t}} dt$
24. $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^3} dx$
25. $\int \frac{dx}{x \sqrt{3x^2 + x + 4}}$
26. $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{25 - 9\cos^2(x)}} dx$
27. $\int \frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 8}{e^{3x}} dx$
28. $\int \tan^{12}(x) dx$
29. $\int \frac{du}{u[4 + \tan(\ln(u)) + 4\cot(\ln(u))]}$
30. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 2)^2}$
31. $\int \frac{2\cos^3(x)}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2(x) - 1}} dx$
32. $\int \frac{\operatorname{sech}^3(x)}{1 + \tanh(x)} dx$
33. $\int \frac{x + 2}{\sqrt[3]{3 - x}} dx$
34. $\int \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$
35. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$

36. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-9}{x+9}} dx$
37. $\int \operatorname{sen}(z+1) \operatorname{sen}(1-z) dz$
38. $\int \cos^8(1-x) dx$
39. $\int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)\sqrt{e^{2x} + 2e^x + 10}}$
40. $\int \frac{\left(1 - \sqrt[4]{t^3}\right)^7}{\sqrt[6]{t^5}} dt$
41. $\int \frac{17}{5x^4 + 23x^2 + 12} dx$
42. $\int \tan^4(2x) \sec^6(2x) dx$
43. $\int \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[4]{t} + 1} dt$
44. $\int \operatorname{sen}^{10}(2x-1) \cos^{11}(2x-1) dx$
45. $\int \sqrt[5]{\csc^4(v)} \cot^5(v) dv$
46. $\int \frac{\cos^3(x)}{\cos^4(x) + 5\operatorname{sen}^2(x) - 5} dx$
47. $\int \operatorname{sen}^{15}(4-3w) dw$
48. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{e^{3x}}}}$
49. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$
50. $\int \frac{\sec(x)}{3\sec(x) + \tan(x) + 2} dx$
51. $\int x \operatorname{sech}^2(ax) dx \quad (a \neq 0)$
52. $\int [2 \operatorname{sen}(3x) - \cos(4x)]^2 dx$
53. $\int \frac{\operatorname{sen}^4(4x+3)}{\cos^7(4x+3)} dx$
54. $\int \frac{1 - \ln(x) + \ln^2(x)}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}} dx$
55. $\int \cos(2\ln(x)) dx$
56. $\int \operatorname{sen}^2(3x+2) \cos(7-4x) dx$
57. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 2)^2} dx$
58. $\int (x^3 + 2x)\sqrt{4 - x - x^2} dx$
59. $\int \frac{81}{(2x-1)^6 \sqrt{2x^2 - 2x + 5}} dx$
60. $\int \frac{9x^2 - 5x - 10}{x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 25x - 70} dx$



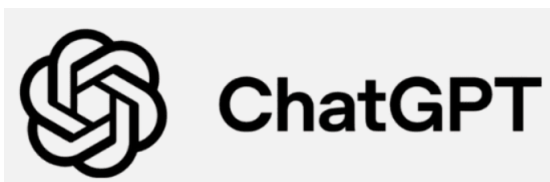
<https://tinyurl.com/2d43gzmj>

CAPÍTULO V

IA como Facilitador en el
Aprendizaje de Integrales
Indefinidas

Uso de ChatGPT

Introducción



Es un modelo de inteligencia artificial desarrollado por OpenAI. La inteligencia artificial (IA) se basa en algoritmos, modelos matemáticos y redes neuronales que permiten a los sistemas procesar datos, reconocer patrones, mejorar su rendimiento y generar respuestas coherentes y contextualizadas en conversaciones con el usuario [14].

Característica de esta IA

Los prompts son mensajes para ChatGPT. Deben ser claros, específicos, bien estructurados. De esa manera, se obtendrán respuestas precisas y útiles [14].



Ejercicios resueltos con ChatGPT

Vamos a resolver algunos ejercicios propuestos en este texto, empleando esta IA. Comenzamos resolviendo **integrales directas**.

Escribe en la entrada de ChatGPT el siguiente prompt y agrega la foto de cada ejercicio:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas empleando las reglas de integración inmediatas. Explica paso a paso la resolución del ejercicio de la imagen, considera la explicación para estudiantes universitarios. Las cuatro integrales deben ser resueltas mediante fórmulas de integración inmediata. En la tercera integral aplica la fórmula con el término de x^2 positivo. Muestra la información organizada. Entrega la solución simplificada lo más posible".

Claro. La integral de la imagen es

$$\int \left(\sqrt[7]{x^{13}} - \cos(x) + \frac{7}{4-3x^2} + 9 \tan(x) \right) dx$$

La resolveremos usando **linealidad de la integral**, es decir, separando en cuatro integrales inmediatas:

$$\int \sqrt[7]{x^{13}} dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{7}{4-3x^2} dx + \int 9 \tan(x) dx$$

1) Primera integral

$$\int \sqrt[7]{x^{13}} dx$$

Paso 1: escribir la raíz como potencia

$$\sqrt[7]{x^{13}} = x^{13/7}$$

Entonces:

$$\int x^{13/7} dx$$

Paso 2: aplicar la fórmula de potencia

Usamos:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Aquí $n = \frac{13}{7}$, por tanto:

$$n+1 = \frac{13}{7} + \frac{7}{7} = \frac{20}{7}$$

Así,

$$\int x^{13/7} dx = \frac{x^{20/7}}{20/7}$$

Dividir por $\frac{20}{7}$ es multiplicar por $\frac{7}{20}$:

$$\int x^{13/7} dx = \frac{7}{20} x^{20/7}$$

2) Segunda integral

$$- \int \cos(x) dx$$

Usamos la fórmula inmediata:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Entonces:

$$- \int \cos(x) dx = -\sin(x)$$

3) Tercera integral

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx$$

Como pediste, aquí aplicaremos la fórmula con el **término x^2 positivo**.

Paso 1: transformar el denominador

Factorizamos -1 para que quede de la forma $x^2 - a^2$:

$$4 - 3x^2 = -(3x^2 - 4)$$

Entonces:

$$\frac{7}{4-3x^2} = -\frac{7}{3x^2-4}$$

Ahora factorizamos el 3:

$$3x^2 - 4 = 3 \left(x^2 - \frac{4}{3} \right)$$

Por tanto,

$$-\frac{7}{3x^2-4} = -\frac{7}{3 \left(x^2 - \frac{4}{3} \right)} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^2 - \frac{4}{3}}$$

Así, la integral queda:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = -\frac{7}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{3}}$$

Paso 2: identificar la fórmula inmediata

Usamos la fórmula:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Aquí:

$$a^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Simplificamos el coeficiente:

$$2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Así,

$$\int \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Paso 3: multiplicar por la constante

$$-\frac{7}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

Por tanto:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = -\frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Una forma equivalente, más cómoda y positiva, es invertir la fracción dentro del logaritmo:

$$-\ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$$

Entonces también se puede escribir como:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \frac{2}{\sqrt{3}}}{x - \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Y multiplicando numerador y denominador internos por $\sqrt{3}$:

$$\frac{x + \frac{2}{\sqrt{3}}}{x - \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2}$$

Así queda más simplificada:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2} \right|$$

4) Cuarta integral

$$\int 9 \tan(x) dx$$

Sacamos la constante:

$$9 \int \tan(x) dx$$

Usamos la fórmula inmediata:

$$\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C$$

Entonces:

$$9 \int \tan(x) dx = -9 \ln |\cos(x)|$$

También podría escribirse como $9 \ln |\sec(x)|$, pero la forma con $\cos(x)$ es muy usual.

Paso 3: multiplicar por la constante

$$-\frac{7}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

Por tanto:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = -\frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{x + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Una forma equivalente, más cómoda y positiva, es invertir la fracción dentro del logaritmo:

$$-\ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$$

Entonces también se puede escribir como:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \frac{2}{\sqrt{3}}}{x - \frac{2}{\sqrt{3}}} \right|$$

Y multiplicando numerador y denominador internos por $\sqrt{3}$:

$$\frac{x + \frac{2}{\sqrt{3}}}{x - \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2}$$

Así queda más simplificada:

$$\int \frac{7}{4-3x^2} dx = \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2} \right|$$

5) Resultado final

Sumamos los cuatro resultados:

$$\begin{aligned} & \int \left(\sqrt[7]{x^{13}} - \cos(x) + \frac{7}{4-3x^2} + 9 \tan(x) \right) dx \\ &= \frac{7}{20} x^{20/7} - \sin(x) + \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2} \right| - 9 \ln |\cos(x)| + C \end{aligned}$$

Respuesta final simplificada

$$\int \left(\sqrt[7]{x^{13}} - \cos(x) + \frac{7}{4-3x^2} + 9 \tan(x) \right) dx = \frac{7}{20} x^{20/7} - \sin(x) + \frac{7\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2} \right| - 9 \ln |\cos(x)| + C$$

Si deseas, también te la puedo presentar en formato de “procedimiento para cuaderno”, más limpio y listo para copiar.

Como podemos observar esta IA nos arroja el mismo resultado.

Ahora vamos a realizar una **integral por cambio de variable**, la resolveremos con esta inteligencia artificial. Escribimos en la entrada de ChatGPT el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas, emplea la técnica de cambio de variable o sustitución y explica paso a paso la resolución, considera que esta explicación es para estudiantes universitarios de ingeniería. Muestra la información organizada de forma detallada".

✦ Integral dada

$$\int 2^{(\cos^3(x)-3\cos(x))} \operatorname{sen}^3(x) dx$$

🗨 Paso 1: Cambio de variable

Observamos que aparece $\cos(x)$ en el exponente y $\operatorname{sen}(x)$ en el diferencial. Tomamos:

$$u = \cos(x)$$

Derivando:

$$du = -\operatorname{sen}(x) dx$$

🗨 Paso 2: Reescribir la integral

Primero descomponemos:

$$\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(x)$$

Usamos la identidad:

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

Entonces:

$$\operatorname{sen}^3(x) = (1 - \cos^2(x)) \operatorname{sen}(x)$$

Sustituyendo $u = \cos(x)$:

- $\cos(x) = u$
- $\operatorname{sen}(x) dx = -du$

La integral queda:

$$\begin{aligned} & \int 2^{(u^3-3u)}(1-u^2)(-du) \\ &= - \int 2^{(u^3-3u)}(1-u^2) du \end{aligned}$$

 Paso 3: Segunda sustitución

Definimos:

$$v = u^3 - 3u$$

Derivando:

$$dv = (3u^2 - 3) du = 3(u^2 - 1) du$$

Despejamos:

$$(1 - u^2) du = -\frac{1}{3} dv$$

 Paso 4: Sustitución completa

$$\begin{aligned} - \int 2^v (1 - u^2) du &= - \int 2^v \left(-\frac{1}{3} dv \right) \\ &= \frac{1}{3} \int 2^v dv \end{aligned}$$

 Paso 5: Integración

$$\int 2^v dv = \frac{2^v}{\ln(2)}$$

Entonces:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^v}{\ln(2)} = \frac{2^v}{3 \ln(2)}$$

 Paso 6: Volver a la variable original

$$v = \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

 Resultado final

$$\boxed{\frac{2^{\cos^3(x) - 3 \cos(x)}}{3 \ln(2)} + C}$$

Como podemos observar esta IA nos arroja el mismo resultado.

Además, esta IA verifica si es correcta la resolución por derivación y entrega una sugerencia didáctica que puede ayudarte al momento de resolver este tipo de integrales, tal como se muestra en la imagen.

Verificación rápida por derivación

Sea $F(x) = \frac{1}{3 \ln 2} 2^{\cos^3 x - 3 \cos x}$. Entonces

$$F'(x) = \frac{1}{3 \ln 2} 2^{g(x)} \ln 2 \cdot g'(x) = \frac{1}{3} 2^{g(x)} g'(x),$$

con $g(x) = \cos^3 x - 3 \cos x$. Ahora

$$g'(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) - 3(-\sin x) = 3 \sin x (1 - \cos^2 x) = 3 \sin^3 x.$$

Así,

$$F'(x) = \frac{1}{3} 2^{g(x)} \cdot 3 \sin^3 x = 2^{\cos^3 x - 3 \cos x} \sin^3 x,$$

que coincide con el integrando. ✓

Comentario didáctico

El truco clave fue elegir $u = \cos x$ para convertir $\sin^3 x$ en $-(1 - u^2)du$ y notar que $-(1 - u^2)du = \frac{1}{3}dt$ con $t = u^3 - 3u$, que es exactamente el exponente de la potencia de base 2. Con esto, la integral se reduce a una forma elemental $\int 2^t dt$.

Continuamos con esta IA para resolver **integrales de potencias naturales de funciones trigonométricas**.

Escribimos el siguiente prompt:

"Tú eres un experto en cálculo y en la resolución de integrales indefinidas de funciones trigonométricas elevadas a potencias naturales. Explica paso a paso la resolución del ejercicio que se muestra en la imagen, de manera que un estudiante universitario de ingeniería pueda entender no solo el procedimiento, sino también el razonamiento detrás de cada paso. Presenta la información de forma organizada y clara, incluyendo:

- 1. La identificación del tipo de integral y la estrategia más adecuada.*
- 2. Cada paso de la resolución con explicaciones detalladas de las fórmulas y reglas aplicadas.*
- 3. Justificación de simplificaciones o transformaciones utilizadas.*
- 4. Posibles alternativas de resolución o consejos para evitar errores comunes.*
- 5. Un resumen final con la integral resuelta y la interpretación de los resultados si aplica.*
- 6. Asegúrate de que el contenido sea comprensible, visualmente ordenado y útil para el aprendizaje."*

La inteligencia artificial, arroja la siguiente imagen:

Integral

$$\int \cos^4(2x - 5) dx$$

1) Identificación y estrategia

- **Tipo:** potencia par de una función trigonométrica $\cos^n(\cdot)$ con argumento lineal.
 - **Estrategia óptima:** usar **fórmulas de reducción de potencia** (identidades de ángulo doble) para escribir $\cos^4$ como combinación lineal de cosenos de múltiplos del ángulo, y luego integrar término a término.
- Recordatorio clave:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow \cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2$$

2) Desarrollo paso a paso

Paso 1: Reducir la potencia.

Sea $\theta = 2x - 5$. Entonces

$$\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta).$$

Aplicamos de nuevo $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ con $\alpha = 2\theta$:

$$\cos^2 2\theta = \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}.$$

Sustituyendo:

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right] = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta.$$

Paso 2: Reemplazar $\theta = 2x - 5$.

$$\cos^4(2x - 5) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2(2x - 5)) + \frac{1}{8} \cos(4(2x - 5)) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(4x - 10) + \frac{1}{8} \cos(8x - 20).$$

Paso 3: Integrar término a término.

Usamos $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$:

$$\begin{aligned} \int \cos^4(2x - 5) dx &= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(4x - 10) + \frac{1}{8} \cos(8x - 20) \right] dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin(4x - 10) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \sin(8x - 20) + C. \end{aligned}$$

Resultado:

$$\boxed{\int \cos^4(2x - 5) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \sin(4x - 10) + \frac{1}{64} \sin(8x - 20) + C}$$

También presenta la justificación de las transformaciones, consejos para evitar errores comunes, un resumen final y la verificación rápida por derivación. Observa la imagen.

3) Justificación de las transformaciones

- Las identidades de potencia transforman una potencia par en una **suma de cosenos**, que es integrable de forma inmediata.
- El argumento es lineal ($2x - 5$): al integrar $\cos(ax + b)$ aparece el factor $\frac{1}{a}$ por la **regla de la cadena**.

4) Alternativas y consejos para evitar errores

- **Alternativa equivalente:** primero hacer $u = 2x - 5$ (de modo que $du = 2 dx$, $dx = \frac{1}{2} du$) y resolver $\int \cos^4 u \frac{du}{2}$ aplicando la misma reducción de potencia. El resultado coincide.
- **Otra vía (más pesada):** expandir $\cos^4 \theta$ con fórmula de De Moivre/identidades de suma (llega a la misma combinación $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$).
- **Errores comunes:**
 - Olvidar que $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ (se suele perder el factor $1/a$).
 - Confundir la identidad: $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ (no $\frac{1+\cos \theta}{2}$).
 - Omitir la constante de integración $+C$.

5) Resumen final

- **Estrategia:** reducción de potencia con $\cos^2$ repetida y luego integrar $\cos(kx + c)$.
- **Solución:**

$$\int \cos^4(2x - 5) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \sin(4x - 10) + \frac{1}{64} \sin(8x - 20) + C$$

- **Comprobación rápida:** derivando, reaparece $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(4x - 10) + \frac{1}{8} \cos(8x - 20)$, que es $\cos^4(2x - 5)$ por la reducción de potencia, así que la primitiva es correcta.

Uso de Perplexity

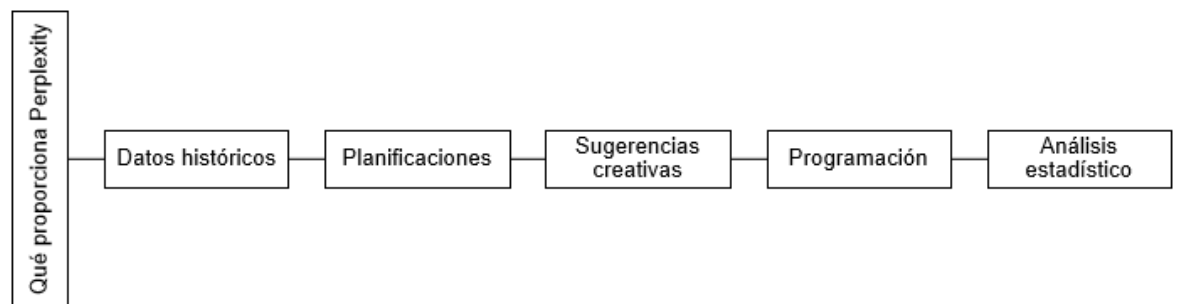
Introducción



Es un motor de búsqueda impulsado por IA, diseñado para transformar la manera en que encuentras la información. Al actuar como un asistente de investigación inteligente, Perplexity te permite ahorrar tiempo valioso en la obtención de respuestas precisas [15].

Característica de esta IA

Perplexity busca en internet y luego proporciona una respuesta conversacional, verificable y basada en fuentes. Además de proporcionar información sugiere documentos, videos, libros y otros enlaces, donde puedes seguir investigando rápidamente [15].



Ejercicios resueltos con Perplexity

Vamos a resolver algunos ejercicios propuestos en este texto, empleando esta IA. Comenzamos con **integrales por completación de trinomios**, desarrollaremos un ejercicio propuesto en el texto.

Escribimos en la entrada de Perplexity el siguiente prompt:

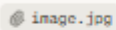
"Actúa como un experto en resolución de integrales indefinidas utilizando la técnica de completación de trinomios. Explica detalladamente cada paso del proceso, asegurándote de que la explicación sea clara y accesible para estudiantes universitarios de ingeniería. Presenta la información de manera organizada y estructurada, destacando los fundamentos matemáticos, el procedimiento completo y los resultados finales".

Perplexity, arroja la siguiente información:

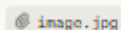
Si observas la imagen, en la parte superior aparece la palabra Perplexity. Esta herramienta ofrece enlaces a videos explicativos que profundizan en el tema, así como referencias a páginas web confiables donde se puede consultar información adicional y ampliar los conocimientos sobre el material. De esta manera, no solo se facilita la comprensión, sino que también se proporciona acceso a recursos verificados para un aprendizaje más completo y detallado.

1 paso completado >

La integral indefinida dada es $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$. Esta se resuelve completando el cuadrado en el denominador para transformarla en una forma estándar que involucre arctangente.



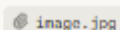
Fundamentos matemáticos

El denominador $x^2 - 6x + 25$ es un trinomio cuadrático con discriminante negativo: $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64 < 0$, por lo que no tiene raíces reales y se completa el cuadrado para expresarlo como $(x - h)^2 + k$ con $k > 0$. Esto permite usar la fórmula estándar $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$, donde $a = \sqrt{k}$. 

Procedimiento paso a paso

1. Completa el cuadrado en el denominador:

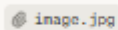
$$x^2 - 6x + 25 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 25 = (x - 3)^2 + 16.$$

Aquí, $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$, y se ajusta la constante: $25 - 9 = 16$. 

2. Sustituye en la integral:

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16}.$$

Haz la sustitución $u = x - 3$, entonces $du = dx$, y la integral se convierte en $\int \frac{du}{u^2 + 4^2}$.



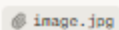
3. Integra usando la fórmula estándar:

$$\int \frac{du}{u^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{u}{4}\right) + C.$$

Sustituyendo de vuelta $u = x - 3$: $\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$. Esto equivale a

$$\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) + C. \quad \text{image.jpg}$$

Resultado final

La integral indefinida es $\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$. Puedes verificar diferenciándola: la derivada del resultado da exactamente $\frac{1}{x^2-6x+25}$. 

Uso de M365 Copilot

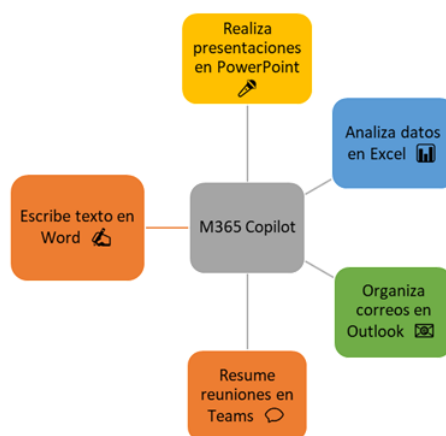
Introducción



Es una herramienta de inteligencia artificial (IA) integrada en las aplicaciones de Microsoft 365, como Word, Excel, PowerPoint, Outlook y Teams. Está diseñada para ayudar a las personas a trabajar de manera más rápida, eficiente y creativa [12].

Característica de esta IA

M365 Copilot usa una tecnología llamada modelo de lenguaje de inteligencia artificial, que ha sido entrenada con muchísima información para entender lo que escribes y responder de forma útil. Funciona como una conversación: tú escribes lo que necesitas y Copilot te responde con sugerencias o directamente hace el trabajo por ti [12].



Ejercicios resueltos con Copilot

Vamos a resolver algunos ejercicios propuestos en este texto, empleando esta IA. Comenzamos con **integrales por partes**, desarrollaremos un ejercicio propuesto en el texto.

Escribimos en la entrada de Copilot el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas utilizando la técnica de integración por partes. Resuelve el siguiente ejercicio, explica cada paso del proceso de manera

detallada, clara y accesible, enfocándote en estudiantes universitarios de ingeniería. Organiza la explicación de forma lógica y progresiva, asegurando una comprensión completa hasta llegar al resultado final”.

Esta inteligencia artificial arroja la siguiente información con la integral propuesta:

¡Perfecto, Lucía! Vamos a resolver la integral:

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

Esta integral involucra el producto de una función algebraica x^2 y una función logarítmica $\ln(x)$, lo que la convierte en una candidata ideal para **integración por partes**. Vamos paso a paso como lo haría un profesor de cálculo para estudiantes de ingeniería 🧑🏫.

🧠 Paso 1: Recordar la fórmula de integración por partes

La fórmula es:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Debemos elegir:

- u : la función que se **deriva fácilmente**
- dv : la función que se **integra fácilmente**

🍷 Paso 2: Elegir u y dv

Vamos a tomar:

- $u = \ln(x) \rightarrow$ porque su derivada es sencilla
- $dv = x^2 dx \rightarrow$ porque se puede integrar fácilmente

Ahora derivamos e integramos:

- $du = \frac{1}{x} dx$
- $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

🔧 Paso 3: Aplicar la fórmula

Sustituimos en la fórmula:

$$\int x^2 \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Simplificamos la integral:

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx$$

 Paso 4: Resolver la integral restante

$$\int \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}$$

 Paso 5: Escribir la solución final

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

Donde C es la constante de integración.

 Conclusión

Este tipo de integral es común en ingeniería, especialmente cuando se trabaja con funciones que modelan fenómenos físicos. La clave está en elegir bien u y dv , y aplicar la fórmula con cuidado. Si te interesa, puedo mostrarte cómo esta técnica se extiende a integrales más complejas o cómo se aplica en problemas reales de ingeniería.

¿Quieres practicar otra integral o ver cómo se usa esto en contextos como energía, estructuras o señales?

Este tipo de inteligencia, coadyuva con el aprendizaje de la técnica de integración por partes, lo importante es elegir adecuadamente las funciones para simplificar el proceso.

Uso de KIMI

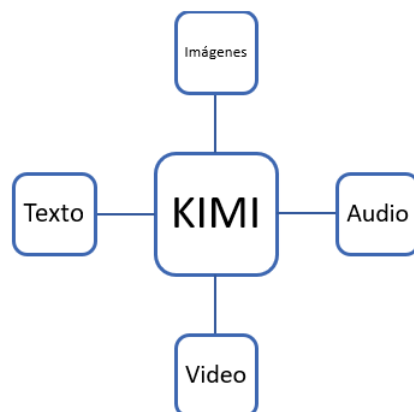
Introducción



Es un sistema de inteligencia artificial (IA) avanzado desarrollado por Moonshot AI, una empresa con sede en China. Este modelo se destaca por su capacidad para gestionar múltiples tareas simultáneamente, y por soportar hilos de conversación extremadamente largos, esto le permite mantener contextos complejos durante interacciones prolongadas [8].

Característica de esta IA

Una de sus características más notables es su habilidad para procesar y generar contenido en diversos formatos, incluyendo texto, imágenes, audio y video, que lo convierte en una herramienta muy versátil. Abre el link <https://www.kimi.com/>, su entorno es muy parecido al chat GPT. En la parte izquierda se visualizan las consultas que vas realizando, para que accedas cuando lo necesites. En la parte derecha, se ubica el cuadro de diálogo para realizar las consultas. Se pueden adjuntar archivos desde tu computador, haciendo clic en el ícono de clip o copiando una imagen y pegándola en el cuadro de diálogo [8].



Ejercicios resueltos con KIMI

Vamos a resolver algunos ejercicios propuestos en este texto, empleando esta IA. Co-

menzamos con **integrales racionales por fracciones parciales**.

Escribimos en la entrada de KIMI el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas utilizando la técnica de integración por fracciones parciales. Explica cada paso del proceso de manera detallada, clara y accesible, enfocándote en estudiantes universitarios de ingeniería. Organiza la explicación de forma lógica y progresiva, asegurando una comprensión completa hasta llegar al resultado final".

Obtenemos la siguiente información:



Voy a resolver esta integral paso a paso usando fracciones parciales. Primero, analizaré la estructura del problema.

Análisis del Problema

Tenemos la integral:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 7}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$$

Observación clave: El denominador tiene factores cuadráticos repetidos: $(x-1)^2$ y $(x+1)^2$. Esto significa que necesitaremos **cuatro términos** en la descomposición de fracciones parciales.

Paso 1: Descomposición en Fracciones Parciales

Para factores lineales repetidos de la forma $(ax+b)^n$, debemos incluir términos con todas las potencias desde 1 hasta n .

$$\frac{3x^2 - 2x + 7}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Paso 2: Encontrar los Coeficientes A, B, C y D

Multiplicamos ambos lados por $(x-1)^2(x+1)^2$:

$$3x^2 - 2x + 7 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Método de valores específicos (sustitución estratégica)

Cuando $x = 1$:

$$3(1)^2 - 2(1) + 7 = A(0) + B(2)^2 + C(0) + D(0)$$

$$3 - 2 + 7 = 4B$$

$$8 = 4B \implies B = 2$$

Cuando $x = -1$:

$$3(-1)^2 - 2(-1) + 7 = A(0) + B(0) + C(0) + D(-2)^2$$

$$3 + 2 + 7 = 4D$$

$$12 = 4D \implies D = 3$$



Para encontrar A y C, usamos otros valores convenientes

Cuando $x = 0$:

$$7 = A(-1)(1)^2 + B(1)^2 + C(1)(-1)^2 + D(-1)^2$$

$$7 = -A + B + C + D$$

$$7 = -A + 2 + C + 3$$

$$7 = -A + C + 5$$

$$2 = -A + C \quad \dots(\text{Ecuación 1})$$

Cuando $x = 2$:

$$3(4) - 2(2) + 7 = A(1)(9) + B(9) + C(3)(1)^2 + D(1)^2$$

$$12 - 4 + 7 = 9A + 9B + 3C + D$$

$$15 = 9A + 9(2) + 3C + 3$$

$$15 = 9A + 18 + 3C + 3$$

$$15 = 9A + 3C + 21$$

$$-6 = 9A + 3C$$

$$-2 = 3A + C \quad \dots(\text{Ecuación 2})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

De la Ecuación 1: $C = 2 + A$

Sustituyendo en la Ecuación 2:

$$-2 = 3A + (2 + A)$$

$$-2 = 4A + 2$$

$$-4 = 4A \implies A = -1$$

Por lo tanto: $C = 2 + (-1) = 1$

Paso 3: Verificación de Coeficientes

Nuestra descomposición es:

$$\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Verificación rápida (combinando los términos):

- Términos con $(x-1)^2(x+1)^2$ en denominador común
- Numerador: $-1(x-1)(x+1)^2 + 2(x+1)^2 + 1(x+1)(x-1)^2 + 3(x-1)^2$

Expandiendo y simplificando se obtiene $3x^2 - 2x + 7$ ✓

Paso 4: Integración Término por Término

$$\int \left[\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$\text{Integral 1: } \int \frac{-1}{x-1} dx = -\ln |x-1|$$

$$\text{Integral 2: } \int \frac{2}{(x-1)^2} dx$$

Usando sustitución $u = x - 1$, $du = dx$:

$$\int 2u^{-2} du = 2 \cdot \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{2}{u} = -\frac{2}{x-1}$$

$$\text{Integral 3: } \int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1|$$

$$\text{Integral 4: } \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$$

Usando sustitución $v = x + 1$, $dv = dx$:

$$\int 3v^{-2} dv = 3 \cdot \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{3}{v} = -\frac{3}{x+1}$$

Paso 5: Resultado Final

Combinando todos los términos:

$$\int \frac{3x^2-2x+7}{(x-1)^2(x+1)^2} dx = -\ln |x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln |x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$

Forma simplificada:

$$\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + C$$

O equivalentemente:

$$\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)} + C = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{5x-1}{x^2-1} + C$$

Resumen de Puntos Clave para Recordar

Table 📄 ⬇	
Aspecto	Importancia
Factores repetidos	Cada factor $(ax+b)^n$ genera n términos con potencias 1, 2, ..., n
Coeficientes	Usar valores que anulen términos para simplificar el álgebra
Integrales de potencias	$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}$ para $n \neq 1$
Valor absoluto	Siempre en logaritmos de expresiones lineales

Uso de Gemini

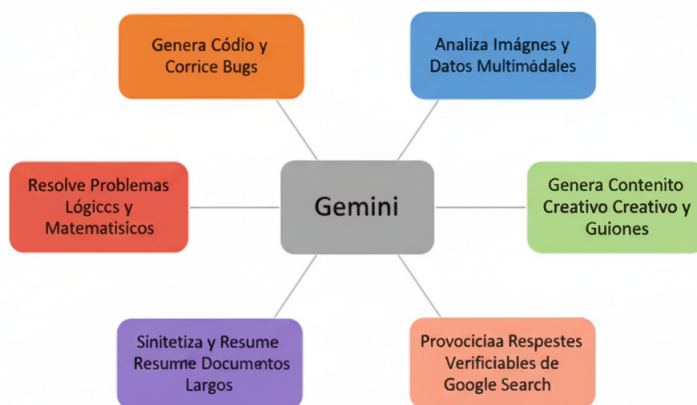
Introducción



Gemini es un modelo de IA multimodal que integra texto, código, imágenes y video. Funciona como un asistente de investigación avanzado con razonamiento lógico para generar código y entregar respuestas verificables [6].

Característica de esta IA

Gemini es un modelo de IA multimodal de Google que procesa texto, código, imágenes y video. Funciona como un asistente de investigación avanzado para comprender instrucciones complejas y generar soluciones o contenido directamente [6].



Ejercicios resueltos con Gemini

Vamos a resolver algunos ejercicios propuestos en este texto, empleando esta IA. Vamos a resolver **integrales de funciones irracionales**.

Escribe en la entrada de Gemini el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas, emplea la técnica de sustitución trigonométrica o hiperbólica. Explica paso a paso la resolución del ejercicio de la imagen, considera la explicación para estudiantes universitarios. Muestra la información organizada".

Obtenemos la siguiente respuesta de la IA.

◆ Análisis ▼

La integral a resolver es $\int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}} dx$. Como experto, utilizaré la **sustitución trigonométrica**, ya que la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ es característica de esta técnica.

🧐 **Análisis e Identificación de la Sustitución**

La integral contiene la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, donde $a^2 = 9$, lo que implica $a = 3$.

Para este patrón, la sustitución trigonométrica ideal es la que involucra la función **seno**.

Sustitución a Aplicar:

- **Sustitución:** $x = a \sin \theta \rightarrow x = 3 \sin \theta$
- **Diferencial:** $dx = \frac{d}{d\theta}(3 \sin \theta) d\theta \rightarrow dx = 3 \cos \theta d\theta$

🔧 **Paso 1: Transformación de la Expresión Subradical**

Sustituimos $x = 3 \sin \theta$ en la base de la potencia, $(9 - x^2)$:

$$\sqrt{(9 - x^2)^3} = (9 - x^2)^{3/2}$$

1. **Dentro del paréntesis:**

$$9 - x^2 = 9 - (3 \sin \theta)^2$$

$$9 - x^2 = 9 - 9 \sin^2 \theta$$

$$9 - x^2 = 9(1 - \sin^2 \theta)$$

Aplicando la identidad pitagórica $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$:

$$9 - x^2 = 9 \cos^2 \theta$$

2. **En el denominador completo:**

$$\sqrt{(9 - x^2)^3} = (9 \cos^2 \theta)^{3/2}$$

$$\sqrt{(9 - x^2)^3} = 9^{3/2} (\cos^2 \theta)^{3/2}$$

$$\sqrt{(9 - x^2)^3} = (\sqrt{9})^3 \cdot |\cos \theta|^3$$

$$\sqrt{(9 - x^2)^3} = 27 \cos^3 \theta$$

(Asumimos $\cos \theta > 0$, lo que corresponde a un rango adecuado para la sustitución, como $-\pi/2 < \theta < \pi/2$).

Paso 2: Reescribir y Simplificar la Integral

Sustituimos la expresión transformada y el diferencial dx en la integral original:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}} dx$$

$$I = \int \frac{1}{27 \cos^3 \theta} (3 \cos \theta d\theta)$$

Simplificamos la constante y las potencias de $\cos \theta$:

$$I = \int \frac{3 \cos \theta}{27 \cos^3 \theta} d\theta$$

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Utilizando la identidad $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$:

$$I = \frac{1}{9} \int \sec^2 \theta d\theta$$

Paso 3: Resolver la Integral de θ

La integral de $\sec^2 \theta$ es una integral fundamental:

$$I = \frac{1}{9} (\tan \theta) + C$$

$$I = \frac{1}{9} \tan \theta + C$$

Paso 4: Retornar a la Variable Original (x)

Debemos expresar $\tan \theta$ en términos de x a partir de la sustitución inicial $x = 3 \sin \theta$.

De la sustitución, $\sin \theta = \frac{x}{3}$.

Construimos un **triángulo rectángulo** donde θ es un ángulo agudo.

- $\sin \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{3}$
- **Cateto Opuesto:** x
- **Hipotenusa:** 3
- **Cateto Adyacente** (por Pitágoras): $\sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$

Ahora encontramos $\tan \theta$ en términos de x :

$$\tan \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Sustituimos esta expresión en la solución de I :

$$I = \frac{1}{9} \tan \theta + C$$

$$I = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right) + C$$

✓ Solución Final

La solución de la integral indefinida es:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}} dx = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$$

Como podemos observar esta IA nos arroja el mismo resultado.

Continuamos con esta IA para resolver integrales mediante la sustitución por el recíproco.

Escribe en la entrada de Gemini el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas, emplea la técnica de sustitución por el recíproco. Explica paso a paso la resolución del ejercicio de la imagen, considera la explicación para estudiantes universitarios. Muestra la información organizada".

Obtenemos la siguiente respuesta de la IA.



¡Por supuesto! La integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ es un ejemplo clásico donde la **sustitución por el recíproco** simplifica drásticamente el problema, transformándolo en una integral fundamental.

🧐 Análisis de la Integral

La presencia de un factor x fuera de la raíz y la forma $\sqrt{x^2+a^2}$ (donde $a=1$) en el denominador, hacen de la sustitución recíproca un método muy eficiente.

🦋 Paso 1: Establecer la Sustitución Recíproca

La sustitución que aplicaremos es:

$$x = \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x}$$

A partir de esto, necesitamos reescribir todos los componentes de la integral en términos de u :

1. Diferencial (dx):

Derivamos la sustitución $x = u^{-1}$:

$$dx = \frac{d}{du} (u^{-1}) du = -1u^{-2} du$$

$$dx = -\frac{1}{u^2} du$$

2. Raíz ($\sqrt{x^2 + 1}$):

Sustituimos $x = 1/u$ en la raíz:

$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}$ Homogenizamos la fracción dentro de la raíz: $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{1 + u^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}$
 Asumiendo $x > 0$ (o $u > 0$) para simplificar la integral, nos queda: $\mathbf{\sqrt{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}}$

📌 Paso 2: Reescribir y Simplificar la Integral

Sustituimos x , dx , y $\sqrt{x^2 + 1}$ en la integral original I :

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{u^2} du}{\left(\frac{1}{u}\right) \left(\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}\right)}$$

Simplificación del Denominador:

$$\text{Denominador} = \left(\frac{1}{u}\right) \left(\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}\right) = \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u^2}$$

Sustitución y Cancelación:

$$I = \int \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u^2}} du$$

Multiplicamos por el recíproco del denominador:

$$I = \int \left(-\frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 1}}\right) du$$

Los términos u^2 se cancelan por completo:

$$I = \int \frac{-1}{\sqrt{u^2 + 1}} du$$

$$I = - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

💡 Paso 3: Resolver la Integral de u

La integral resultante es una **integral fundamental** que se resuelve directamente usando la función **seno hiperbólico inverso** ($\sinh^{-1}$ o arsinh):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right)$$

Con $a = 1$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \sinh^{-1}(u)$$

Sustituimos esto en la expresión de I :

$$I = - \sinh^{-1}(u) + C$$

📐 Paso 4: Retornar a la Variable Original (x)

Finalmente, volvemos a la variable original x usando la relación $u = 1/x$:

$$I = - \sinh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) + C$$

Como podemos observar esta IA nos arroja el mismo resultado. Adicionalmente nos proporciona una forma alternativa de expresión mediante Logaritmos.

Forma Alternativa (Logarítmica)

Recordando que $\sinh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$, podemos expresar la solución en términos de logaritmos:

$$\begin{aligned} I &= - \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \right| + C \\ I &= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right| + C \\ I &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right| + C \end{aligned}$$

✅ Solución Final

La solución, en la forma concisa utilizando el seno hiperbólico inverso, es:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = - \sinh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) + C$$

Continuamos con esta IA para resolver integrales mediante la sustitución por ra-

cionalización.

Escribe en la entrada de Gemini el siguiente prompt:

"Actúa como un experto en la resolución de integrales indefinidas, emplea la técnica de sustitución por racionalización. Explica paso a paso la resolución del ejercicio de la imagen, considera la explicación para estudiantes universitarios. Muestra la información organizada".

Obtenemos la siguiente respuesta de la IA.

◆ Análisis ▼

Como experto en el cálculo integral, procederé a resolver la integral indefinida mostrada utilizando la **sustitución por racionalización**. Esta técnica es ideal cuando el integrando contiene raíces de un mismo argumento lineal.

La integral a resolver es:

$$I = \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$$

1. Identificación y Sustitución por Racionalización

Observamos que la expresión contiene $\sqrt{1+x}$ y $\sqrt[3]{1+x}$. Para eliminar ambas raíces simultáneamente, debemos sustituir la cantidad sub-radical $(1+x)$ por una nueva variable elevada a un exponente que sea el **mínimo común múltiplo (MCM)** de los índices de las raíces (que son 2 y 3).

El **MCM(2, 3)** es 6.

Sustitución:

Sea $u^6 = 1+x$.

Cálculo de x y dx :

1. Despejamos x :

$$x = u^6 - 1$$

2. Diferenciamos para encontrar dx :

$$dx = \frac{d}{du}(u^6 - 1)du$$

$$dx = 6u^5 du$$

Expresión de las Raíces en Términos de u :

1. Raíz cuadrada:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{u^6} = u^{6/2} = u^3$$

2. Raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{u^6} = u^{6/3} = u^2$$

2. Transformación de la Integral

Sustituimos x , $\sqrt{1+x}$, $\sqrt[3]{1+x}$ y dx en la integral original I :

$$I = \int \frac{(u^6 - 1)^2 + u^3}{u^2} (6u^5 du)$$

3. Simplificación y Expansión del Integrand

El objetivo ahora es simplificar la expresión antes de integrar.

$$I = 6 \int \frac{(u^6 - 1)^2 + u^3}{u^2} u^5 du$$

Simplificación de u en el cociente:

$$I = 6 \int ((u^6 - 1)^2 + u^3) \frac{u^5}{u^2} du$$

$$I = 6 \int ((u^6 - 1)^2 + u^3) u^3 du$$

$$I = 6 \int ((u^6 - 1)^2 + u^3) u^3 du$$

Expansión del Binomio Cuadrado:

$$(u^6 - 1)^2 = (u^6)^2 - 2(u^6)(1) + 1^2 = u^{12} - 2u^6 + 1$$

Sustitución de la Expansión:

$$I = 6 \int ((u^{12} - 2u^6 + 1) + u^3) u^3 du$$

$$I = 6 \int (u^{12} - 2u^6 + u^3 + 1) u^3 du$$

Distribución de u^3 :

$$I = 6 \int (u^{12} \cdot u^3 - 2u^6 \cdot u^3 + u^3 \cdot u^3 + 1 \cdot u^3) du$$

$$I = 6 \int (u^{15} - 2u^9 + u^6 + u^3) du$$

4. Integración

Ahora integramos término a término usando la regla de la potencia $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$:

$$I = 6 \left[\int u^{15} du - 2 \int u^9 du + \int u^6 du + \int u^3 du \right]$$

$$I = 6 \left[\frac{u^{15+1}}{15+1} - 2 \frac{u^{9+1}}{9+1} + \frac{u^{6+1}}{6+1} + \frac{u^{3+1}}{3+1} \right] + C$$

$$I = 6 \left[\frac{u^{16}}{16} - 2 \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^4}{4} \right] + C$$

Simplificación de Coeficientes:

$$I = 6 \left[\frac{u^{16}}{16} - \frac{u^{10}}{5} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^4}{4} \right] + C$$

Distribuimos el 6:

$$I = \frac{6}{16}u^{16} - \frac{6}{5}u^{10} + \frac{6}{7}u^7 + \frac{6}{4}u^4 + C$$

$$I = \frac{3}{8}u^{16} - \frac{6}{5}u^{10} + \frac{6}{7}u^7 + \frac{3}{2}u^4 + C$$

5. Retorno a la Variable Original

Regresamos a la variable original x . De la sustitución $u^6 = 1 + x$, tenemos que $u = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{1/6}$.

Sustituimos $u = (1+x)^{1/6}$ en la expresión final para I :

$$u^{16} = ((1+x)^{1/6})^{16} = (1+x)^{16/6} = (1+x)^{8/3}$$

$$u^{10} = ((1+x)^{1/6})^{10} = (1+x)^{10/6} = (1+x)^{5/3}$$

$$u^7 = ((1+x)^{1/6})^7 = (1+x)^{7/6}$$

$$u^4 = ((1+x)^{1/6})^4 = (1+x)^{4/6} = (1+x)^{2/3}$$

Solución Final:

$$I = \frac{3}{8}(1+x)^{8/3} - \frac{6}{5}(1+x)^{5/3} + \frac{6}{7}(1+x)^{7/6} + \frac{3}{2}(1+x)^{2/3} + C$$

También se puede expresar en términos de radicales:

$$I = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x)^8} - \frac{6}{5}\sqrt[3]{(1+x)^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(1+x)^7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + C$$

Como podemos observar esta IA nos arroja el mismo resultado.

La ética de la IA en el aprendizaje de integrales indefinidas

El uso ético de la inteligencia artificial en el estudio del cálculo integral requiere que estas herramientas se empleen de manera responsable y transparente, funcionando como un soporte para potenciar la comprensión lógica y no como un sustituto del pensamiento crítico [14, 12, 6, 15, 8]. En la resolución de integrales complejas, es fundamental que el estudiante utilice la IA para verificar procedimientos y explorar visualizaciones dinámicas, garantizando siempre la privacidad de sus datos y la rendición de cuentas sobre sus propios resultados [14, 12].

Un enfoque ético asegura que la tecnología sea un puente hacia el conocimiento

profundo, evitando que los sesgos algorítmicos o la automatización irreflexiva reemplacen el esfuerzo intelectual necesario para dominar las reglas fundamentales del cálculo [14, 6, 12].

Bajo esta premisa, la implementación de la IA en este texto se concibe como un recurso para promover una educación inclusiva y socialmente responsable. Al enfrentarse a problemas de aplicación en ingeniería o física, tanto educadores como alumnos deben comprometerse a utilizar la IA para validar modelos matemáticos de forma informada, respetando la integridad académica y los valores humanos. Al final del día, el cálculo integral es una herramienta para entender el cambio y la acumulación en nuestro mundo; utilizar la IA con ética significa asegurar que este avance tecnológico contribuya al desarrollo sostenible y al fortalecimiento de las capacidades analíticas que definen a un profesional íntegro.

La IA es excelente para procesar datos, pero tú eres el responsable de interpretar los resultados. En el desarrollo de los ejercicios propuestos en este texto, puedes corroborar las soluciones empleando cualquier recurso digital, sin embargo, será tu criterio técnico y de conocimiento, mas no un algoritmo, el que valide la solución de la integral propuesta [14, 12, 15, 6, 8].

Referencias

- [1] Tom M. Apostol. *Cálculus: Volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté, Barcelona, 2 edition, 1990.
- [2] B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Mir, Moscú, segunda edition, 1967.
- [3] C. H. Edwards and David E. Penney. *Cálculo Diferencial e Integral*. Pearson Educación, México, 4 edition, 1997.
- [4] E. Espinoza Ramos. *Análisis Matemático II, para estudiantes de Ciencia e Ingeniería*. Impreso en el Perú, Lima, 2002.
- [5] J. García. *Cálculo en una variable*. Desconocido, 2019.
- [6] Google. Gemini (Familia de modelos de IA). <https://gemini.google.com/>, 2024. Utilizado para demostración de Integrales Irracionales y Sustitución por Racionalización.
- [7] Ernest F. Haeussler. *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1997.
- [8] KIMI.AI. KIMI (Asistente de IA para productividad). <https://kimi.ai/>, 2024. Utilizado para demostración de Integración por Fracciones Parciales.
- [9] J. Lara P. and J. Arroba R. *Análisis Matemático*. Centro Matemático UCE, Quito, 4 edition, 2001.
- [10] R. Larson and B. Edwards. *Cálculo 1 de una variable*. Mc-Graw-Hill, México, 9 edition, 2010.
- [11] Louis Leithold. *El Cálculo*. Oxford University Press, México D.F., 7 edition, 1998.
- [12] Microsoft. Microsoft 365 Copilot (Asistente de productividad de IA). <https://www.microsoft.com/es-es/microsoft-365/copilot>, 2023. Utilizado para demostración de Integración por Partes.

- [13] Nelson A. Núñez. Poligrafiado. la integral indefinida. Apuntes de Clase/Poligrafiado; Material no publicado oficialmente, Sin Fecha.
- [14] OpenAI. ChatGPT (Modelo de lenguaje grande). <https://openai.com/chatgpt/>, 2023. Utilizado para demostración de Integrales Directas, Sustitución y Funciones Trigonométricas.
- [15] Perplexity AI. Perplexity (Motor de búsqueda conversacional de IA). <https://www.perplexity.ai/>, 2023. Utilizado para demostración de Integración por Completación de Trinomios.
- [16] James Stewart. *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*. Cengage Learning, México, 7 edition, 2012.

Integral indefinida

Técnicas de integración paso a paso

Este texto es una obra académica diseñada para acompañar a los estudiantes de ingeniería en el estudio y dominio de la integral indefinida. El libro presenta un enfoque claro, progresivo y sistemático que permite comprender la integral indefinida como la operación inversa de la derivación y el desarrollo de las diversas técnicas tratadas con rigurosidad científica y paso a paso.

La obra desarrolla de manera estructurada los conceptos fundamentales de la primitiva y de la integral indefinida, introduciendo primero sus definiciones, propiedades y principios básicos. Posteriormente, se abordan las principales técnicas de integración mediante explicaciones detalladas y procedimientos resueltos de manera clara y didáctica que facilitan la comprensión del método y fortalecen el razonamiento matemático del lector.

A lo largo del texto se estudian las técnicas clásicas del cálculo integral, entre ellas la integración por sustitución, la integración por partes, la integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas, la integración de funciones racionales mediante fracciones parciales y el método de Ostrogradski, así como diversos métodos para integrar funciones irracionales, incluyendo la sustitución trigonométrica, la sustitución por el recíproco, la sustitución por racionalización y el binomio diferencial. Cada tema se acompaña de numerosos ejercicios resueltos y propuestos que permiten consolidar las habilidades analíticas necesarias para el estudio avanzado del cálculo.

Además, el libro incorpora una perspectiva contemporánea al analizar el papel de la inteligencia artificial como herramienta de apoyo en el aprendizaje y verificación de procedimientos matemáticos, promoviendo un uso ético y crítico de estas tecnologías dentro del proceso formativo.

Esperamos que esta obra se convierta en un valioso recurso académico para estudiantes y docentes en el aprendizaje y la enseñanza de la integral indefinida en las carreras de ingeniería.

Finalmente, queremos extender un especial reconocimiento a los profesionales que colaboraron con la revisión y evaluación de este libro, posibilitando su publicación:

Dr. Paul Esteban Méndez Silva

Matemático aplicado, doctor en Ingeniería Matemática y docente de la Escuela Politécnica Nacional, con experiencia en modelado, simulación numérica y Scientific Machine Learning. Agradecemos profundamente su rigurosa revisión y sus valiosos aportes, que contribuyeron a fortalecer la calidad matemática de esta obra.

Mgs. Raúl Enríquez

Ingeniero con maestrías en Matemáticas Aplicadas y Física, y en Gestión Educativa. Cuenta con una amplia trayectoria en docencia y formación académica, y es examinador de Matemáticas del Bachillerato Internacional. Agradecemos sus acertadas observaciones y recomendaciones pedagógicas, que permitieron mejorar la claridad y pertinencia didáctica de este libro.

ISBN: 978-9942-652-49-2



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA