

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}}{Q(x)}$$

$$y^{1/n} = x$$

$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sim \forall x \forall y [p(x,y) \equiv \exists x \exists y [\sim p(x,y)]]$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$



$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA



Apuntes de Álgebra Lineal

Jorge Saúl Sánchez Mosquera, Carlos Rafael Sánchez Mosquera,
Iván Bladimir Collantes Vásconez, Rolando Xavier Salazar Paredes

Apuntes de Álgebra Lineal

Jorge Saúl Sánchez Mosquera, Carlos Rafael Sánchez Mosquera,
Iván Bladimir Collantes Vásconez y Rolando Xavier Salazar Paredes

Primera edición electrónica: noviembre, 2025

ISBN: 978-9942-652-36-2

Revisión científica:

Mgtr. Martha Elizabeth Salazar Jácome - Universidad Tecnológica Israel

Mgtr. Nancy de Lourdes Jordán Buenaño - Universidad Tecnológica Indoamérica

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Crnl. de C.S.M. Víctor Villavicencio A., Ph. D.

Rector

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE

Cpfg. Joseph Alexander Guamán Seis, Ph.D. - Vicerrector de Investigación

Presidente

Corrección de estilo y diseño

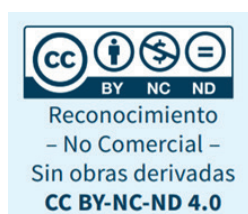
Mtr. Xavier Chinga

Imagen de cubierta: <https://acortar.link/kDGHkH>

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico. El contenido, uso de fotografía, gráficos, cuadros, tablas, y referencias es de exclusiva responsabilidad de los autores.

Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE
Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador
www.espe.edu.ec

Los derechos de esta edición electrónica son de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en www.repositorio.espe.edu.ec.



Departamento de
Ciencias Exactas

Apuntes de Álgebra Lineal

Jorge Sánchez M.

Carlos Sánchez M.

Iván Collantes

Rolando Salazar

EDITORIAL



UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

Introducción

El Álgebra Lineal es una rama fundamental de las matemáticas que se ocupa del estudio de espacios vectoriales, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Su importancia se extiende a una amplia gama de campos, desde la física y la ingeniería hasta la informática y las ciencias sociales. Este libro tiene como objetivo proporcionar una introducción sólida a los conceptos básicos del álgebra lineal y su aplicación en diversos contextos.

En los primeros capítulos se profundiza en los fundamentos del álgebra lineal, explorando temas como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales. A medida que se avanza, se aborda conceptos más avanzados, como diagonalización, espacios vectoriales con producto interno, y aplicaciones a problemas del mundo real.

Este libro está diseñado para ser accesible, tanto para aquellos que se están introduciendo por primera vez en el campo del álgebra lineal, como para aquellos que desean profundizar en sus conocimientos. Cada capítulo incluye una variedad de ejemplos, ejercicios y aplicaciones para ayudar a los lectores a consolidar su comprensión y desarrollar habilidades prácticas.

Ya sea que estés estudiando álgebra lineal como parte de tu formación académica o como una herramienta para tu carrera profesional, esperamos que este libro te proporcione una base sólida en este campo fascinante y útil de las matemáticas.

Jorge Sánchez

jssanchez@espe.edu.e



Jorge Saúl Sánchez Mosquera, MSc.

Profesor Titular, Departamento de Ciencias Exactas

Coordinador de Investigación del Departamento de Ciencias Exactas

<https://scholar.google.com/citations?user=wQPymIsAAAAJ&hl=es>

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Jorge Saúl Sánchez es Ingeniero en Electrónica e Instrumentación de la Universidad de las Fuerzas Armadas, posee dos maestrías: una en Docencia Matemática de la Universidad Técnica de Ambato y la segunda en Ingeniería Matemática y Computación; docente investigador del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga.

Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador del Área de Matemática, Coordinador de Vinculación, Coordinador de Investigación y Director del Departamento. Dentro de las actividades de vinculación ha participado como director de un proyecto de Vinculación, en el año 2015; en investigación ha participado en diferentes proyectos de investigación en conjunto con otras Instituciones de Educación Superior del centro del país y posee más de 20 artículos científicos en SCOPUS y ha participado como revisor en revistas indexadas.

Carlos Sánchez

crsanchez9@espe.edu.e



Carlos Sánchez Mosquera, Mgtr.

Profesor Ocasional, Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica

<https://scholar.google.com/citations?user=lo5ZNCAAAAAAJ&hl=es&oi=ao>

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga.

Carlos Rafael Sánchez es Ingeniero Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Máster Universitario en Energías Renovables y Sostenibilidad Energética en la Universidad de Barcelona, Especialización en Docencia Matemática por el Centro de Altos Estudios Universitarios; docente investigador del área de Energía y Termofluidos del Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga.

Dentro de las actividades de investigación y vinculación ha participado como docente de apoyo en diferentes proyectos de Vinculación; en investigación ha participado en el proyectos de investigación: "TECNOLOGÍAS INMERSIVAS MULTI-USUARIO ORIENTADAS A SISTEMAS SINÉRGICOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE" en conjunto con otras Instituciones de Educación Superior del centro del país y posee 7 artículos científicos en SCOPUS y ha dirigido trabajos de titulación en Tecnología e Ingeniería Automotriz .

Rolando Salazar

xrsalazar@espe.edu.e



Rolando Salazar Paredes, MSc.

Profesor Ocasional, Departamento de Ciencias Exactas

<https://scholar.google.com/citations?user=nBPlcCoAAAAJ&hl=es>

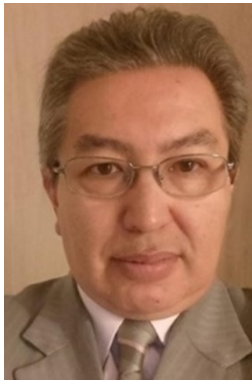
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Rolando Salazar Paredes es Ingeniero Automotriz de la Universidad de las Fuerzas Armadas, posee dos maestrías: una en Seguridad y Prevención de Riesgos del Trabajo de la Universidad Técnica de Cotopaxi y la segunda en Ingeniería Matemática y Computación; docente del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas Sede Latacunga.

Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador del Área de Física, Coordinador de Capacitación, Encargado de Laboratorio de Modelado y Simulación. Dentro de las actividades de vinculación ha participado como colaborador del proyecto de Vinculación: Fortalecimiento y desarrollo de los conocimientos aplicados para el examen nacional “Ser Bachiller” dirigido a los estudiantes del tercer año de bachillerato de la parroquia Zumbahua de la unidad educativa del milenio Cacique Tumbalá y el sector rural del cantón Pujilí, provincia de Cotopaxi, en los años 2018 y 2019

Iván Collantes

ibcollantes@espe.edu.e



Iván Collantes Vasconez, Mgs.

Profesor Titular, Departamento de Ciencias Exactas

Docente del área de Análisis Matemático

<https://scholar.google.es/citations?user=pPRIMuUAAAAJ&hl=es>

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga

Iván Collantes Vásconez es Ingeniero Civil de la Universidad Técnica de Ambato, posee un diplomado superior en Gestión para el Aprendizaje Universitario de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE y una maestría en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docente de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador; docente del área de Análisis Matemático del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Sede Latacunga.

Cargos que ha desempeñado en el Departamento de Ciencias Exactas: Coordinador de Álgebra y docente a tiempo parcial de diferentes asignaturas del área de Análisis Matemático.

Índice

Capítulo I - Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones	19
Matrices	21
Orden de una matriz	22
Matrices en Scilab	23
Igualdad de Matrices	24
Transpuesta de una matriz	24
Propiedades de la transpuesta	24
Álgebra de Matrices	25
Suma de Matrices	25
Propiedades de la Suma de Matrices	26
Multiplicación de un Escalar por una Matriz	27
Propiedades del Producto por un Escalar	27
Producto Matricial	28
Propiedades del producto Matricial	28
Álgebra de Matrices Utilizando Scilab	29
Operaciones elementales en una matriz	33
Matrices equivalentes	33
Matriz Escalonada	34
Matriz escalonada reducida	34
Rango de una matriz	34
Operaciones elementales con Scilab	35
Instrucciones específicas para las operaciones en-	
tre filas de una matriz:	36
Tipos de Matrices	37
Matrices Cuadradas	37
Matriz Simétrica	38
Matriz Antisimétrica	38
Matriz Triangular superior	39
Matriz Triangular Inferior	39

Matriz Diagonal	40
Matriz Escalar	40
Matriz Identidad (I_n)	40
Matrices Elementales	40
Matriz Nula	41
Potencia de una Matriz Cuadrada	41
Matrices Cuadradas II Tipo	42
Matriz Nilpotente	42
Matriz Idempotente	42
Matriz Involutiva	43
Matriz Ortogonal	43
Formas de encontrar la potencia n-ésima de una matriz cuadrada	43
Tipos de Matrices en el campo de los Complejos	46
Matriz Conjugada	46
Propiedades de la conjugada:	47
Matriz transpuesta conjugada	47
Propiedades de la transpuesta conjugada	48
Matriz Hermítica	48
Matriz Antihermítica	49
Inversa de una matriz	50
Propiedades de la matriz inversa	50
Métodos para obtener la inversa de una matriz	51
Mediante operaciones elementales de fila	51
Mediante Determinantes	51
EJERCICIOS PROPUESTOS	52
Capítulo II - Determinantes	55
DETERMINANTES	57
Métodos de para obtener el determinante de una matriz	58
Determinante de una matriz de orden dos.	58
Determinante de una matriz de orden tres	58
Método por menores para encontrar el determinante de una ma- triz	60
Determinantes con Scilab	61
Propiedades de los determinantes	62
Adjunta de una Matriz	62
Propiedades de la Adjunta	63

Inversa de una matriz aplicando determinantes	64
Ejercicios Resueltos	65
EJERCICIOS PROPUESTOS	66
Capítulo III - Sistemas de Ecuaciones Lineales	69
Sistemas de Ecuaciones Lineales	71
Ecuación Lineal	72
Sistemas de ecuaciones lineales	72
Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales .	73
Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales	73
Sistemas Lineales Homogéneos	74
Tipos de sistemas de Ecuaciones Lineales	74
Sistemas de ecuaciones de dos incógnitas	74
Sistemas de ecuaciones de tres incógnitas	75
Eliminación Gaussiana	75
Método de Cramer	79
Análisis del Método de Cramer	79
Método Gráfico	80
EJERCICIOS PROPUESTOS	84
Capítulo IV - Espacios y Subespacios Vectoriales	87
Espacios y Subespacios Vectoriales	89
Espacios Vectoriales	90
Subespacios Vectoriales	92
EJERCICIOS PROPUESTOS	95
Combinaciones Lineales	96
Conjunto Generador	98
Cápsula de un Conjunto	98
Dependencia e Independencia lineal	100
Wronskiano	102
Base y Dimensión	103
Base:	103
Dimensión:	104
Bases Canónicas	104
Suma e Intersección de Subespacios Vectoriales	114
Intersección de Subespacios Vectoriales:	114
Suma de Subespacios Vectoriales:	114

Suma Directa:	115
Teorema de la Dimensión:	120
Vectores Coordinados	123
Vector de Coordenadas y R^m	124
EJERCICIOS PROPUESTOS	125
Capítulo V - Espacios Euclídeos	129
Espacios Euclídeos	131
Producto interno	132
Espacio Euclídeo	134
Métricas en un Espacio Euclídeo	135
Norma (módulo)	135
Propiedades de la Norma	136
Distancia entre Vectores	136
Paralelismo	137
Perpendicularidad	137
Proyección de vectores	139
Ángulo entre vectores	140
Proceso de Ortogonalización	141
Proceso de Gram – Schmith	141
EJERCICIOS PROPUESTOS	144
Capítulo VI - Transformaciones Lineales	149
Transformaciones Lineales	151
Transformaciones Lineales	152
Definición	152
Propiedades de las Transformaciones Lineales	158
Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal	160
Núcleo	160
Imagen	161
Matriz asociada a una Aplicación Lineal	165
Matriz Asociada a una Transformación Lineal en función a otra	
Base	166
Matriz de Rotación	169
Rotación de un Vector con respecto al origen	169
Rotación de un vector con respecto a un punto cualquiera $P(h, k)$	172

Implementación de rotación de una imagen en Scilab . . .	176
Matriz cambio de base	179
Propiedades de las matrices de cambio de base	180
Álgebra de Transformaciones Lineales	181
Suma de Transformaciones Lineales	181
Producto de un escalar por una Transformación Lineal .	182
Composición de Transformaciones Lineales	182
Tipos de Transformaciones Lineales	183
Transformación Lineal Inyectiva	183
Transformación Lineal Sobreyectiva	183
Transformación Lineal Biyectiva	184
Isomorfismo	184
Inversa de una Transformación Lineal	184
EJERCICIOS PROPUESTOS	186
Capítulo VII - Valores y Vectores Propios	191
Valores y Vectores Propios	193
Definición:	193
Polinomio característico	194
Valores Propios	195
Vectores Propios	195
Utilización de Scilab para la obtención de los valores y los vectores propios:	197
Multiplicidad algebraica y geométrica	198
Diagonalización	199
Matrices similares:	200
Matrices Diagonalizables	200
Aplicación para la resolución de Ecuaciones Diferenciales	204
Teorema de Cayley-Hamilton	205
EJERCICIOS PROPUESTOS	206



CAPÍTULO I

Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones

Matrices

Las matrices se entrelazan con numerosas disciplinas y han evolucionado a lo largo de los siglos para convertirse en una herramienta fundamental en una amplia gama de campos.

En la antigüedad, los chinos, egipcios y babilonios utilizaron métodos matriciales rudimentarios para resolver problemas de cálculo y llevar registros de datos. Sin embargo, no fue hasta tiempos más recientes que la teoría de las matrices empiezan a formalizarse. Durante el Renacimiento, matemáticos como Gottfried Wilhelm Leibniz y Seki Kowa comenzaron a explorar conceptos relacionados con matrices y determinantes. Leibniz, en particular, contribuyó significativamente al desarrollo de la teoría matricial.

En el siglo XIX, matemáticos como Arthur Cayley y James Joseph Sylvester realizaron avances significativos en la teoría de matrices, definiendo formalmente las propiedades y operaciones fundamentales de las mismas. Las matrices se convirtieron en una herramienta fundamental en el Álgebra Lineal, siendo utilizadas para resolver sistemas de ecuaciones lineales, estudiar transformaciones lineales y caracterizar espacios vectoriales.

En el siglo XX, las matrices encontraron aplicaciones importantes en la física teórica, especialmente en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Las matrices se utilizan para representar operadores lineales que describen observables físicos y evolución temporal en sistemas cuánticos.

Con el avance de la tecnología y la evolución de los computadores en el procesamiento de datos, las matrices se convirtieron en una herramienta esencial en áreas como el procesamiento de señales, la inteligencia artificial, el procesamiento de imágenes y el aprendizaje automático. En informática, las matrices se utilizan para representar datos estructurados, realizar operaciones de transformación y resolver problemas de optimización.

En resumen, la evolución y aplicación de las matrices en diversas disciplinas, desde las matemáticas puras hasta las ciencias aplicadas y la informática, ha demostrado su versatilidad y poder para representar y resolver problemas en diferentes áreas.

Definición de Matrices:

Una matriz es un arreglo rectangular de filas y columnas, que agrupa sus elementos dentro de un paréntesis, estos elementos se los puede definir sobre el campo de los Reales ($\mathbf{R}$) o sobre el campo de los Complejos (C).

Para la identificación de las matrices se utilizan letras mayúsculas del alfabeto, y los elementos, de las matrices, se identifican con la misma letra, pero en minúsculas. Una matriz en el campo de los reales se la identifica como: $\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbf{R})_{m \times n}$, y se la representa de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

En la matriz $\mathbf{A}$, la m representa las filas y la n representa las columnas.

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Donde:

a_{ij} : representa el elemento.

ij : representa la posición del elemento.

i : la fila ; j : la columna.

m : indica el número de filas que tiene la matriz.

n : indica el número de columnas que tiene la matriz.

Orden de una matriz

Si una matriz tiene m filas y n columnas se dice que tiene un orden $m \times n$. El orden de la matriz es el número de filas y columnas que tiene la matriz.

Ejemplo 1 Indique el orden de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 & -6 \\ -4 & -1 & 5 & 23 & 12 \\ 11 & -7 & 0 & 18 & 20 \\ -21 & 3 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{A}$, tiene orden 4×5 , 4 filas y 5 columnas.

Ejemplo 2 Sea la matriz **A** definida sobre el campo de los reales.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 & -6 \\ -4 & -1 & 5 & 23 & 12 \\ 11 & -7 & 0 & 18 & 20 \\ -21 & 3 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Cuál es el orden de la matriz?:

Su orden es: $m_x n = 4 \times 5$

Cuáles son los elementos a_{13} y a_{34}

El elemento a_{13} es 4

El elemento a_{34} es 18

Matrices en Scilab

De la misma manera, para crear un vector o una matriz. El delimitador que se usa para filas es ";" y para columnas se puede dejar un espacio o también podemos utilizar ",".

Creación de un vector x que va desde -1 a 1 con intervalos de 0.2:

```
->x=-1:.2:1
```

```
x = - 1. - 0.8 - 0.6 - 0.4 - 0.2 0. 0.2 0.4 0.6 0.8 1.
```

Creación de una matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

```
->A=[0 1 1 2;1 2 3 4;2 0 2 0]
```

A =

```
0.  1.  1.  2.
1.  2.  3.  4.
2.  0.  2.  0.
```

Igualdad de Matrices

Sean $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, matrices definidas sobre el campo de los Reales R , se dice que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, son iguales ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), si y solamente si sus elementos son iguales en su respectiva posición $a_{ij} = b_{ij}$.

Ejemplo 3 *Matrices Iguales.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 12 \\ 14 & 7 & 20 \\ -21 & 3 & 8 \end{pmatrix}_{4 \times 3}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 + 2 & -6 \\ -3 & -1 & 9 + 3 \\ 7 + 7 & 9 - 2 & 20 \\ -21 & 3 & 8 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

$$a_{12} = b_{12}$$

$$-2 = -4 + 2$$

Transpuesta de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, tal que $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, su transpuesta $\mathbf{A}^t$, es la matriz $\mathbf{A}^t \in \text{Mat}(R)_{n \times m}$, que se obtiene a partir de la matriz $\mathbf{A}$ al intercambiar las filas por las columnas.

Ejemplo 4 *Determinar la transpuesta de la siguiente matriz* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Su Transpuestas es: $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Propiedades de la transpuesta

Dada una matriz, siempre existe la transpuesta y esta es única.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, y $\alpha \in R$

1. $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$
3. $(\alpha \mathbf{A})^t = \alpha \mathbf{A}^t$
4. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$

$$5. (\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{A}^t)^{-1}$$

En Scilab, para obtener la transpuesta de una matriz, se utilizará el apóstrofo “ ’ ” tal como se indica en el siguiente ejemplo.

Matriz Original

->A=[1 -2 4 6 -6;-4 -1 5 23 12;11 -7 0 18 20;-21 3 13 -3 8]

A =

$$\begin{array}{rrrrr} 1. & -2. & 4. & 6. & -6. \\ -4. & -1. & 5. & 23. & 12. \\ 11. & -7. & 0. & 18. & 20. \\ -21. & 3. & 13. & -3. & 8. \end{array}$$

Matriz Transpuesta

->A=[1 -2 4 6 -6;-4 -1 5 23 12;11 -7 0 18 20;-21 3 13 -3 8]'

A =

$$\begin{array}{rrrr} 1. & -4. & 11. & -21. \\ -2. & -1. & -7. & 3. \\ 4. & 5. & 0. & 13. \\ 6. & 23. & 18. & -3. \\ -6. & 12. & 20. & 8. \end{array}$$

Álgebra de Matrices

Suma de Matrices

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, tal que $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$. La suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, se define como:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$$

Ejemplo 5 Dadas las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Determinar: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} + \mathbf{M}$

Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son de orden 3×2 , mientras que la matriz $\mathbf{M}$ es cuadrada de orden 3×3 . Por lo tanto, no se puede calcular la suma de $\mathbf{B} + \mathbf{M}$.

Si se puede sumar $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ya que tienen el mismo orden.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+7 & 0-1 \\ 3+5 & 2-4 \\ -6+8 & -2+9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la suma de matrices se puede realizar únicamente si las matrices tienen el mismo orden.

Propiedades de la Suma de Matrices

Sean: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C} \in \text{Mat}(R)_{n \times m}$

i. Cerradura $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \in \text{Mat}(R)_{n \times m}$

ii. Conmutativa $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{B} + \mathbf{A})$

iii. Asociativa $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

iv. Existencia del Elemento Neutro

$$\exists \phi \in \text{Mat}(R)_{m \times n}; \forall \mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_{n \times m} : \mathbf{A} + \phi = \phi + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

ϕ = Matriz Nula

v. Elemento Opuesto (Inverso Aditivo)

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}; \exists (-\mathbf{A}) \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}: \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \phi$$

Multiplicación de un Escalar por una Matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}$ y $\alpha \in R$, la multiplicación de un escalar por una matriz se define de la siguiente manera:

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha (a_{ij})$$

$$\alpha \mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$$

Ejemplo 6 Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 3$, encontrar $\alpha \mathbf{A}$

$$\alpha \mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-6) & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\alpha \mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}$$

Propiedades del Producto por un Escalar

Sea $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}$ y $\alpha, \beta \in R$

1. Cerradura: $(\alpha \mathbf{A}) \in \mathbf{Mat}(R)_{m \times n}$
2. Distributiva respecto a la suma de matrices: $\alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$
3. Distributiva del producto de la suma de escalares por una matriz: $(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$
4. Asociativa. $(\alpha \beta) \mathbf{A} = \alpha (\beta \mathbf{A})$
5. Elemento neutro $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Producto Matricial

Se denomina matriz producto de la matriz $A = (a_{ij})_{m \times p}$ por la matriz $B = (b_{jk})_{p \times n}$ a una matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ cuyos elementos son de la forma:

$$AB = C$$

$$(a_{ij})_{m \times p} (b_{jk})_{p \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

Donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo 7 Sean, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, determinar AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C_{23} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} b_{k3}$$

$$C_{23} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} b_{k3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 = 7$$

**Dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columna de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Propiedades del producto Matricial

i. Asociativa

$$A(BC) = (AB)C; \forall A, B, C : A \in M_{n \times m}; B \in M_{m \times k}, A \wedge C \in M_{k \times p}$$

ii. Elemento neutro (Es la matriz unidad)

$$\exists I \in \text{Mat}(R)_n, \forall A \in \text{Mat}(R)_{m \times n} : AI = IA$$

iii. Distributiva mixta

Sean:

$$A \in \text{Mat}(R)_{m \times n}, B \wedge C \in \text{Mat}(R)_{n \times p}$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Álgebra de Matrices Utilizando Scilab

Hay que recordar que para realizar las operaciones entre matrices existen restricciones, estas hay que tener en cuenta cuando se definen las matrices.

Suma de Matrices:

```
->A=[1 -2 4 6;-4 -1 5 23;11 -7 18 20;-21 3 13 -5]
```

A=

```
1.  - 2.  4.  6.
- 4.  - 1.  5.  23.
11.  - 7.  18.  20.
- 21.  3.  13.  - 5.
```

```
->B=[0 2 -3 7;4 9 8 -8;-1 -3 -5 8; 1 0 3 -7]
```

B=

```
0.  2.  - 3.  7.
4.  9.  8.  - 8.
- 1.  - 3.  - 5.  8.
1.  0.  3.  - 7.
```

```
->A+B
```

ans=

```
1.  0.  1.  13.
0.  8.  13.  15.
10.  - 10.  13.  28.
- 20.  3.  16.  - 12.
```

Si el resultado se quiere guardar en una nueva matriz basta con poner:

```
->C=A+B C =
```

```
1.  0.  1.  13.
0.  8.  13.  15.
10.  - 10.  13.  28.
- 20.  3.  16.  - 12.
```

Para la multiplicación se utiliza el comando *:

```
->A*B
```

```
ans =
```

```
    - 6.    - 28.    - 21.     13.  
    14.    - 32.     48.    - 141.  
   - 26.    - 95.   - 119.     137.  
    - 6.    - 54.     7.     - 32.
```

Si no se cumple con la condición de multiplicación nos dará un error en la operación:

```
->A=[1 -2 4 6;-4 -1 5 23;11 -7 18 20;-21 3 13 -5]
```

```
A =
```

```
    1.    - 2.     4.     6.  
   - 4.    - 1.     5.    23.  
   11.    - 7.    18.    20.  
  - 21.     3.   13.    - 5.
```

```
->B=[0 2 -3 7;4 9 8 -8;-1 -3 -5 8]
```

```
B =
```

```
    0.     2.    - 3.     7.  
    4.     9.     8.    - 8.  
   - 1.    - 3.    - 5.     8.
```

```
->A*B
```

```
!-error 10
```

Multiplicación inconsistente.

En este caso el número de columnas de la matriz A es diferente al número de filas de la matriz B .

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 8 Realizar las siguientes demostraciones:

1. La propiedad conmutativa de la suma de matrices en el campo de los reales.
2. La propiedad clausurativa (cerradura) del producto por escalar, en el campo de los reales.

Desarrollo:

a. La propiedad conmutativa de la suma de matrices en el campo de los reales

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, P.D $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ | Axioma Reflexivo |
| 2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}$ | Definición de Matrices |
| 3. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ | Definición Suma de Matrices |
| 4. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (b_{ij} + a_{ij})_{m \times n}$ | Axioma Conmutativo |
| 5. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n} + (a_{ij})_{m \times n}$ | Def. Suma de Matrices |
| 6. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ | |

b. La propiedad clausurativa del producto por escalar, en el campo de los reales

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$ y $\alpha \in \mathbf{R}$, P.D $\alpha \mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$

- | | |
|---|---------------------------------|
| I. $\alpha \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}$ | Axioma Reflexivo |
| II. $\alpha \mathbf{A} = \alpha (a_{ij})_{m \times n}$ | Definición de Matrices |
| III. $\alpha \mathbf{A} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$ | Definición Producto por Escalar |
| IV. $(\alpha a_{ij}) \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$ | |

Ejemplo 9 Sean las siguientes matrices, definidas en el campo de los complejos, (Cuevas 2009):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & i & 3 \\ -2 & 0 & 4-i \\ 1+3i & -i & i \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1-i \\ -i & 0 & 1-3i \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 4 & 6 \\ -3 & i \end{pmatrix}$$

Determinar: $(-2\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t \mathbf{C}^t)^t$

Desarrollo:

Aplicando las propiedades de la transpuesta se tiene:

$$(-2\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t \mathbf{C}^t)^t = (-2\mathbf{A}^t)^t + (\mathbf{B}^t \mathbf{C}^t)^t$$

$$(-2\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t \mathbf{C}^t)^t = -2(\mathbf{A}^t)^t + (\mathbf{C}^t)^t (\mathbf{B}^t)^t$$

$$(-2\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t \mathbf{C}^t)^t = -2\mathbf{A} + \mathbf{CB}$$

Por lo tanto las operaciones se reduce a: $-2\mathbf{A} + \mathbf{CB}$

$$-2 \begin{pmatrix} -1 & i & 3 \\ -2 & 0 & 4-i \\ 1+3i & -i & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 4 & 6 \\ -3 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1-i \\ -i & 0 & 1-3i \end{pmatrix}$$

$$-2 \begin{pmatrix} -1 & i & 3 \\ -2 & 0 & 4-i \\ 1+3i & -i & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i \cdot 3 + 2 \cdot -i & -i \cdot -3 + 2 \cdot 0 & -i \cdot (1-i) + 2 \cdot (1-3i) \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot -i & 4 \cdot -3 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (1-i) + 6 \cdot (1-3i) \\ -3 \cdot 3 + i \cdot -i & -3 \cdot -3 + i \cdot 0 & -3 \cdot (1-i) + i \cdot (1-3i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2i & -6 \\ 4 & 0 & -8+2i \\ -2-6i & 2i & -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5i & 3i & 1-7i \\ 12-6i & -12 & 10-22i \\ -8 & 9 & 4i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-5i & i & -5-7i \\ 16-6i & -12 & 2-20i \\ -10-6i & 9+2i & 2i \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales en una matriz

Se pondrán atención en tres operaciones entre filas de una matriz:

1. Intercambio de filas de una matriz $f_s \leftrightarrow f_t, s \wedge t \in \mathbb{Z}^+, s \wedge t \neq 0$
2. Multiplicación de un escalar diferente de cero a una fila de una matriz. αf_s .
3. Sumar a una fila de una matriz otra fila de la misma matriz multiplicada por un escalar, $f_s + \alpha f_t, s, t \wedge \alpha \in R, s, t \wedge \alpha \neq 0$. En la operación $f_s + \alpha f_t$, la respuesta de la operación se pondrá en la fila f_s

Matrices equivalentes

Sean A y $B \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$. La matriz B es equivalente por filas a la matriz A , $(A \stackrel{F}{\sim} B)$, si la matriz B se obtiene de A al aplicar una o más operaciones elementales de fila (Del Valle, 2011).

Ejemplo 10 Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 12 \\ 14 & 7 & 20 \end{pmatrix}$, realice las siguientes operaciones elementales: $f_1 \leftrightarrow f_2, 2f_2, f_3 - 3f_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 12 \\ 14 & 7 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 12 \\ 1 & -2 & -6 \\ 14 & 7 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & -12 \\ 14 & 7 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 3f_2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & -12 \\ 8 & 19 & 56 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz B , es equivalente a la matriz A por filas.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & -12 \\ 8 & 19 & 56 \end{pmatrix}$$

Las operaciones anteriormente indicadas también se pueden aplicar entre columnas.

Matriz Escalonada

Una matriz $A \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, se dice que es escalonada si cumple las siguientes características:

- El número de ceros iniciales de izquierda a derecha aumentan al pasar de una fila a otra.
- Los primeros elementos diferentes de cero de izquierda a derecha en cada fila son iguales a uno.
- Si existen filas completas de cero (nulas), estas se encuentran en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo 11 *Matriz escalonada*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Una matriz $A \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, es escalonada reducida si los '1' iniciales de cada fila son los únicos elementos diferentes de '0' en su columna. Así, por Ejemplo:

Ejemplo 12 *Matriz escalonada reducida*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

El rango de una matriz, **rang0**, es el número de filas no nulas (diferentes de cero) de una matriz reducida por filas equivalentes a la matriz original.

Ejemplo 13 Rango de una Matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$$

Para obtener el rango de una matriz se utilizan las operaciones elementales de fila de una matriz.

Teorema 1 Toda matriz $\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbb{R})_{m \times n}$, es equivalente por filas a una matriz $\mathbf{B} \in \text{Mat}(\mathbb{R})_{m \times n}$, escalonada por filas.

Operaciones elementales con Scilab

Con el Software Scilab se pueden realizar estas operaciones utilizando los siguientes comandos: Se crea una matriz aleatoria:

```
->A=rand(4,4)
```

A =

```
0.2113249  0.6653811  0.8782165  0.7263507
0.7560439  0.6283918  0.0683740  0.1985144
0.0002211  0.8497452  0.5608486  0.5442573
0.3303271  0.6857310  0.6623569  0.2320748
```

```
->A(2,2)=0    Se modifica el segundo elem. diagonal de A
```

A =

```
0.2113249  0.6653811  0.8782165  0.7263507
0.7560439           0.  0.0683740  0.1985144
0.0002211  0.8497452  0.5608486  0.5442573
0.3303271  0.6857310  0.6623569  0.2320748
```

```
->A(2:3,1:2)=1    La submatriz A(2:3,1:2) se llena con unos
```

A =

```
0.2113249  0.6653811  0.8782165  0.7263507
1.          1.  0.0683740  0.1985144
1.          1.  0.5608486  0.5442573
0.3303271  0.6857310  0.6623569  0.2320748
```

Instrucciones específicas para las operaciones entre filas de una matriz:

Se define la siguiente matriz:

->A=[1 -2 4 6 -6;-4 -1 5 23 12;11 -7 0 18 20;-21 3 13 -3
8]
A =

1.	- 2.	4.	6.	- 6.
-4.	- 1.	5.	23.	12.
11.	- 7.	0.	18.	20.
- 21.	3.	13.	- 3.	8.

La operación $f_2 + 4f_1$, en Scilab, se lo implementa de la siguiente manera:

->A(2,:) = A(2,:) + 4*A(1,:)

A =

1.	- 2.	4.	6.	- 6.
0.	- 9.	21.	47.	- 12.
11.	- 7.	0.	18.	20.
- 21.	3.	13.	- 3.	8.

Donde:

A(2, :), Indica que el resultado se pondrá en la fila 2.

A(2, :)+4*A(1, :) Indica que a los elementos de la fila 2 se les sumará cuatro veces los elementos de la fila 1.

Se puede observar que en la operación anterior se está utilizando la operación de multiplicar un escalar por toda una fila $4*A(1, :)$. El objetivo de esta operación es introducir "0" en la posición a_{21} .

Para seguir introduciendo ceros en la primera columna de la matriz dada, es suficiente seguir realizando operaciones elementales así: si se quiere introducir un cero en la posición a_{31} basta con poner:

->A(3,:) = A(3,:) - 11*A(1,:)

$A =$

$$\begin{array}{cccccc} 1. & - & 2. & & 4. & & 6. & - & 6. \\ 0. & - & 9. & & 21. & & 47. & - & 12. \\ 0. & & 15. & - & 44. & - & 48. & & 86. \\ - & 21. & & 3. & & 13. & - & 3. & & 8. \end{array}$$

Tipos de Matrices

Matrices Cuadradas

Sea $A \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$, A es una matriz cuadrada, si el número de filas es iguala al número de columnas ($m=n$).

Ejemplo 14 *Matriz cuadrada de orden 3*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & 12 \\ 14 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

A una matriz cuadrada de la representa de la siguiente manera, $A = (a_{ij})_n$, donde n representa el orden de la matriz.

En este tipo de matrices, al conjunto de elementos formados por los a_{ii} , se les conoce como la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n$$

En la matriz A , la diagonal principal estará formada por los siguientes elementos:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

Matriz Simétrica

Sea $A = (a_{ij})_n$, la matriz A se dice que es simétrica si:

$$A = A^t$$

Ejemplo 15 Matriz Simétrica

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 12 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 12 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 16 Sean A y B dos matrices simétricas del mismo orden. Pruebe que $AB + BA$ es una matriz simétrica.

H: Se conoce que A y B son matrices simétricas, por lo tanto: $A = A^t$ y $B = B^t$

$$P:D: (AB + BA) = (AB + BA)$$

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $(AB + BA)^t = (AB + BA)^t$ | Axioma Reflexivo |
| 2. $(AB + BA)^t = (AB)^t + (BA)^t$ | Propiedad de la Transpuesta |
| 3. $(AB + BA)^t = B^t A^t + A^t B^t$ | Propiedad de la Transpuesta |
| 4. $(AB + BA)^t = BA + AB$ | Por hipótesis |
| 5. $(AB + BA)^t = AB + BA$ | Pro. Conmutativa suma de Matrices |

Matriz Antisimétrica

Sea $A = (a_{ij})_n$, la matriz A se dice que es antisimétrica si: $A^t = -A$ ó $A = -A^t$

Ejemplo 17 *Matriz Antisimétrica*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$$

Matriz Triangular superior

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es triangular superior ssi: $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Ejemplo 18 *Matriz triangular Superior*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es triangular inferior ssi: $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Ejemplo 19 *Matriz triangular inferior*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es diagonal si: $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Ejemplo 20 Matriz Diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Escalar

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es escalar, si es diagonal, en los cuales los elementos de la matriz diagonal son los mismos. $a_{ij} = k \forall i = j \wedge a_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

Ejemplo 21 Matriz Escalar

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, k = -3$$

Matriz Identidad ($\mathbf{I}_n$)

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ se denomina identidad si cumple las siguientes condiciones: $\mathbf{A}$ es una matriz escalar, con $k = 1$. A la matriz identidad se le identifica con la letra $\mathbf{I}$.

Ejemplo 22 Matriz Identidad de orden 3

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Elementales

Se dice que una matriz $\mathbf{E} \in \text{Mat}(R)_n$ es una matriz elemental si se obtiene de la matriz identidad $\mathbf{I}_n \in \text{Mat}(R)_n$ por medio de solo una operación elemental de fila.

Las matrices siguientes son matrices elementales porque todas ellas se obtuvieron a partir de la matriz identidad I_3 por medio de la única operación elemental de fila:

$$f_2 \leftrightarrow f_3, f_1 - 2f_3 \quad y \quad 3f_2$$

respectivamente.

Ejemplo 23 Matrices elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

Se dice que una matriz es nula, si todos sus elementos son cero.

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Ejemplo 24 Matriz Nula

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potencia de una Matriz Cuadrada

En este apartado se exponen distintas técnicas para hallar las potencias naturales de matrices cuadradas.

Esta cuestión es de gran importancia y tiene muchas aplicaciones prácticas. En algunos casos se podrá encontrar una expresión que represente la potencia n -ésima de una matriz.

La potencia de una matriz cuadrada se define de la siguiente manera:

$$\text{Sea } \mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbf{R})_n, \text{ tal que } \mathbf{A} = (a_{ij})_n \text{ y } r \in \mathbf{N}, \mathbf{A}^r = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{r \text{ veces}}$$

Ejemplo 25 Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, tal que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar $\mathbf{A}^3$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrices Cuadradas II Tipo

Matriz Nilpotente

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es nilpotente de orden r , si existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{A}^r = \phi$, ϕ (matriz nula), donde r es el menor entero positivo que cumple con la condición.

Ejemplo 26 Matriz Nilpotente de orden 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Idempotente

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es Idempotente si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Ejemplo 27 Matriz Idempotente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Involutiva

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es Involutiva si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

Ejemplo 28 *Matriz Involutiva*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Ortogonal

Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, es Ortogonal si $\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Ejemplo 29 *Matriz Ortogonal*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Las matrices ortogonales de orden 2 son de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

Formas de encontrar la potencia n-ésima de una matriz cuadrada

Es conveniente encontrar estrategias adecuadas que permitan calcular de modo eficiente las potencias naturales de matrices cuadradas, específicamente si se pide potencias muy grandes.

Ejemplo 30 *Determinar la potencia n-ésima de la matriz dada.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollo:

Se conoce que, $\mathbf{A}^r = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{r \text{ veces}}$ por lo tanto:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede identificar un patrón en la posición a_{21} , es el mismo valor de n , pero con signo negativo.

Por lo que se concluye: $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$. Esta expresión debe cumplir para cualquier valor de n , por lo que se procederá a demostrar mediante la inducción que la expresión anterior cumple para cualquier valor de n .

Para $n = 1$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $n = k$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

Para $n = k + 1$,

$$\mathbf{A}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k+1) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Para determinar $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k+1) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Esta última expresión I.3 deberá ser igual a la I.2. Como se puede observar se cumple con la igualdad, por lo tanto, la expresión encontrada, representa la n -ésima potencia de la matriz $\mathbf{A}$.

El segundo método para encontrar la potencia n -ésima de una matriz está condicionado a encontrar una matriz $\mathbf{B}$ Nilpotente, ya que esta matriz a cierta potencia da como resultado la matriz nula.

Esta matriz se la encuentra de la siguiente manera: $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha = 1$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

***La matriz $\mathbf{A}$ deberá tener los mismos elementos en su diagonal principal caso contrario no se podrá encontrar la matriz nilpotente, para este caso los elementos de su diagonal principal son $\alpha = 1$.

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para este caso, la matriz $\mathbf{B}$ es nilpotente de orden de nilpotencia igual a 2, ($r = 2$). Por lo tanto, la matriz $\mathbf{A}$ se le puede reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})^n$$

Para desarrollar la potencia de ese binomio, se utiliza el binomio de Newton:

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{B})^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (\alpha \mathbf{I})^{n-r} \mathbf{B}^r$$

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{B})^n = \binom{n}{0} (\alpha \mathbf{I})^n \mathbf{B}^0 + \binom{n}{1} (\alpha \mathbf{I})^{n-1} \mathbf{B} + \binom{n}{2} (\alpha \mathbf{I})^{n-2} \mathbf{B}^2 + \dots + \binom{n}{n} (\alpha \mathbf{I})^0 \mathbf{B}^n$$

Como $\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces desde $\mathbf{B}^2$, todos los siguientes términos se pueden considerar como cero.

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{B})^n = \binom{n}{0} (\alpha \mathbf{I})^n \mathbf{B}^0 + \binom{n}{1} (\alpha \mathbf{I})^{n-1} \mathbf{B} + \binom{n}{2} (\alpha \mathbf{I})^{n-2} \mathbf{B}^2 + \dots + \binom{n}{n} (\alpha \mathbf{I})^0 \mathbf{B}^n$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}^n = \binom{n}{0} (\alpha \mathbf{I})^n \mathbf{B}^0 + \binom{n}{1} (\alpha \mathbf{I})^{n-1} \mathbf{B}, \text{ recuerde que } \mathbf{B}^0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} \alpha^n \mathbf{I}^{n+1} + \frac{n!}{1!(n-1)!} \alpha^{n-1} \mathbf{B}, \text{ recuerde que: } \mathbf{I}^n = \mathbf{I} \text{ y } 0! = 1$$

$$\mathbf{A}^n = \frac{n!}{n!} \alpha^n \mathbf{I} + \frac{n!}{(n-1)!} \alpha^{n-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^n = \alpha^n \mathbf{I} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} \alpha^{n-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^n = \alpha^n \mathbf{I} + n\alpha^{n-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^n = \alpha^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\alpha^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n\alpha^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ -n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices en el campo de los Complejos

Matriz Conjugada

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(C)_{m \times n}$, la conjugada de $\mathbf{A}$, es otra matriz del mismo orden, pero con sus elementos conjugados.

$$\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a_{ij}})_{m \times n}$$

Ejemplo 31 Matriz Conjugada

$$\overline{\mathbf{A}} = \overline{\begin{pmatrix} 1-i & 2+3i \\ 4 & 5-2i \\ 0 & 4-i \end{pmatrix}}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i \\ 4 & 5+2i \\ 0 & 4+i \end{pmatrix}$$

Propiedades de la conjugada:

Sea $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(C)_{m \times n}$:

- i. $\overline{(\overline{\mathbf{A}})} = \mathbf{A}$
- ii. $\overline{(\mathbf{A} + \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$
- iii. $\overline{(\alpha \mathbf{A})} = \overline{\alpha} \overline{\mathbf{A}}; \alpha \in \mathbb{C}$
- iv. $\overline{(\mathbf{A} \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$

Ejemplo 32 Sean: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ comprobar que $\overline{(\mathbf{A} \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \rightarrow \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+i & 11-4i \\ 1+3i & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 4-i & 11+4i \\ 1-3i & 3+i \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-3i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-i & 11+4i \\ 1-3i & 3+i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se comprueba que, $\overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$

Matriz transpuesta conjugada

Sea $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(C)_{m \times n}$, la matriz transpuesta conjugada se la representa $(\overline{\mathbf{A}})^t = \mathbf{A}^+$

Propiedades de la transpuesta conjugada

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(C)_{m \times n}$:

- i. $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$
- ii. $(\alpha \mathbf{A})^+ = \bar{\alpha} \mathbf{A}^+; \alpha \in \mathbb{C}$
- iii. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ + \mathbf{B}^+$
- iv. $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+$

Ejemplo 33 Demostrar la cuarta propiedad.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(C)_{m \times n}$, por demostrar que $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+$

- i. $(\mathbf{AB})^+ = (\mathbf{AB})^+$ Axioma Reflexivo
- ii. $(\mathbf{AB})^+ = (\overline{\mathbf{A} \mathbf{B}})^t$ Definición de transpuesta conjugada
- iii. $(\mathbf{AB})^+ = (\overline{\mathbf{AB}})^t$ Propiedades de la Conjugada
- iv. $(\mathbf{AB})^+ = (\overline{\mathbf{A}})^t (\overline{\mathbf{B}})^t$ Propiedades de la transpuesta
- v. $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+$ Definición de transpuesta conjugada

Matriz Hermítica

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(C)_n$, se dice que $\mathbf{A}$ es Hermítica si cumple: $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$

Ejemplo 34 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix}$, comprobar que $\mathbf{A}$ es hermítica:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{\mathbf{A}})^t = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$$

Matriz Antihermítica

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(C)_n$, $\mathbf{A}$ es antihermítica, si $\mathbf{A}^+ = -\mathbf{A}$

Ejemplo 35 Dada la siguiente matriz, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & 2-i \\ -2-i & i \end{pmatrix}$, determinar si la matriz es antihermítica.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} i & 2+i \\ -2+i & -i \end{pmatrix} \\ (\overline{\mathbf{A}})^t &= \begin{pmatrix} i & -2+i \\ 2+i & -i \end{pmatrix} \\ (\overline{\mathbf{A}})^t &= - \begin{pmatrix} -i & 2-i \\ -2-i & i \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^+ &= -\mathbf{A}\end{aligned}$$

Ejemplo 36 Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(C)_n$. Determinar cuál de las siguientes expresiones da como resultado una matriz hermítica.

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

Por demostrar que: $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

i. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+$

ii. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^+ + (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^+$

iii. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}^+)^+ \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^+$

iv. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^+\mathbf{A}$, Matriz hermítica

2. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

Por demostrar que: $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

i. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+$

ii. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^+ - (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^+$

iii. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}^+)^+ \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^+$

iv. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

Ejemplo 37 Demostrar que $\mathbf{A} \in \text{Mat}(C)_n$ es una matriz hermítica si $\mathbf{A}$ se forma de la siguiente manera, $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$, donde: $\mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_n$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^t$, $\mathbf{C} \in \text{Mat}(R)_n$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^t$.

i. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$

ii. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$

iii. $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{B} + i\mathbf{C})^+$

iv. $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{B})^+ + (i\mathbf{C})^+$

v. $\mathbf{A}^+ = (\overline{\mathbf{B}})^t + (i\overline{\mathbf{C}})^t$

vi. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}^t + (\bar{i})(\overline{\mathbf{C}})^t$

vii. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{B} + (-i)(-\mathbf{C})$

viii. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{B} + (i)(\mathbf{C})$

ix. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$

Inversa de una matriz

En Álgebra Lineal, una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n se dice que es invertible o inversible (invertible o no singular), si existe otra matriz cuadrada $\mathbf{B}$ del mismo orden tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, si se cumple la igualdad, la matriz $\mathbf{B}$, es la inversa de $\mathbf{A}$ y se representa como $\mathbf{A}^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Una matriz no invertible se dice que es singular o degenerada.

Una matriz es singular si y solo si, su determinante es cero, $|\mathbf{A}| = 0$

Propiedades de la matriz inversa

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_n$ e inversibles, se cumple las siguientes propiedades:

i. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

ii. $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$

iii. $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$

iv. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

La inversa de una matriz, si existe, esta es única.

Métodos para obtener la inversa de una matriz

Se pueden aplicar dos métodos para obtener la inversa de una matriz:

- i. Mediante operaciones elementales de filas
- ii. Aplicando Determinante $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj} A$

Mediante operaciones elementales de fila

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_n$ se cumple que $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n) \sim \dots \sim (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$.

Ejemplo 38 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ encontrar la inversa de $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 - 2f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mediante Determinantes

Este método se verá luego de estudiar el tema de el determinante de una matriz.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj} A$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en cada uno de los tamaños grande, pequeña y mediana. Produce diariamente 400 grandes, 200 pequeñas y 50 medianas del tipo A, 300 grandes, 100 pequeñas y 30 medianas del tipo B, la del tamaño grande gasta 30 horas de taller y 3 horas de administración, la del tamaño pequeño gasta 20 horas de taller y 2 horas de administración, la del tamaño mediano gasta 15 horas de taller y 1 hora de administración, represente la información en matrices.
2. Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estantería: A, B, y C en cada uno de los tamaños grande y pequeño. produce diariamente 2000 estanterías grandes y 4000 pequeñas del tipo A, 5000 grandes y 3000 pequeñas del tipo B, 4000 grandes y 6000 pequeña del tipo C. Cada estantería grande lleva 20 tornillos y 6 soportes y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos, represente esta información en matrices.
3. Ilustrar cada una de las propiedades de las matrices estudiadas con un ejemplo.
4. Bajo qué condiciones se dan las siguientes igualdades.
 - i. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 - ii. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 - iii. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
 - iv. $(AB)^2 = A^2B^2$
5. Demostrar que, si $AB = A$ y $BA = B$ entonces A y B son matrices Idempotentes.
6. Si A y B son matrices conmutativas demostrar que $A^t B^t$ conmutan.
7. Hallar una matriz $A \in \text{Mat}(R)_3$, tal que $a_{ij} = i + j$.
8. Demostrar que si una matriz $A \in \text{Mat}(R)_3$, satisface la ecuación $A^2 - 3A + I = \phi$ entonces $A^{-1} = 3I - A$.
9. Cuáles de los enunciados siguientes es verdadero. Justifique su respuesta desarrollando el ejercicio o poniendo un contraejemplo.

- a. $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- b. $(\mathbf{ABC})^t = \mathbf{C}^t\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$
- c. $\mathbf{AA}^t$ es una matriz simétrica.
- d. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices simétricas entonces $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{BA}$
- e. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices simétricas entonces $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ es simétrica.
- f. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ es una matriz simétrica.
- g. $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ es una matriz antisimétrica.
- h. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, es involutiva para $b \in R$ cualquiera.
- i. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, es una matriz ortogonal.
- j. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.
- k. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- l. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices invertibles entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es una matriz invertible.
- m. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
10. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, hallar $\mathbf{A}^{-1}$.
11. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Calcular:
 $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{A}(3\mathbf{B} - 2\mathbf{C})$
12. Sabiendo que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son conmutables y que además:
- a. $\mathbf{A}$ es idempotente y $\mathbf{B}$ es involutiva, pruebe que
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 + (\mathbf{A} - \mathbf{B})^3 = 8\mathbf{A}$.

- b. $\mathbf{A}$ es Involutiva y $\mathbf{B}$ es Idempotente, pruebe que
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 + (\mathbf{A} - \mathbf{B})^3 = 8\mathbf{B}$

13. Hallar los valores de k , tal que $\mathbf{A}$ es Idempotente:

a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k+4 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 \\ k & k & k \\ k+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ i & p \end{pmatrix}$, donde p es un escalar e i es la unidad imaginaria, verificar que $\mathbf{A}^2 = 2p\mathbf{A} - p^2\mathbf{I}$, obtenga $\mathbf{A}^n$.

15. Demostrar que, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas simétricas conmutativas de un mismo orden, entonces la matriz: $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}\dots\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}$ es simétrica.

16. Demostrar que el producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, si las matrices dadas son conmutativas.

17. Demostrar que el producto de dos matrices antisimétrica es una matriz simétrica si y sólo si, las matrices dadas son conmutativas.

18. Demuestre que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan, sí y solo sí $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ y $\mathbf{B} - k\mathbf{I}$, conmutan para cierto escalar k .

19. Si $\mathbf{A}$ conmuta con $\mathbf{B}$, demuestre que la transpuesta de $\mathbf{A}$ conmuta con la transpuesta de $\mathbf{B}$.

20. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas y $\mathbf{A}$ es no singular, verifique que:
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

21. Hallar todas las matrices que conmuten con la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



CAPÍTULO II

Determinantes

DETERMINANTES

Históricamente la teoría de los determinantes precedió a la teoría de matrices, y muchos resultados familiares de la teoría de matrices fueron originalmente formulados en términos de determinantes.

Los determinantes son una herramienta fundamental en el álgebra lineal que se utilizan para estudiar y resolver sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y propiedades geométricas de espacios vectoriales.

Los antecedentes de los determinantes se remontan a los antiguos matemáticos chinos, que utilizaban métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, la formalización de los determinantes como los conocemos hoy en día comenzó en el siglo XVIII.

Los matemáticos europeos, como Gottfried Wilhelm Leibniz y el japonés Seki Kowa, realizaron contribuciones importantes al estudio de los determinantes en el siglo XVII y XVIII. Leibniz, en particular, introdujo el concepto de determinante y desarrolló algunas de sus propiedades básicas. Gabriel Cramer, un matemático suizo del siglo XVIII, desarrolló el método de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Este método proporciona una forma elegante de encontrar soluciones únicas a sistemas de ecuaciones.

En el siglo XIX, matemáticos como Carl Friedrich Gauss y Augustin-Louis Cauchy contribuyeron a la formalización de la teoría de determinantes. Gauss, en particular, desarrolló métodos para calcular determinantes y estableció muchas de sus propiedades fundamentales. En el siglo XX, los determinantes encontraron una amplia gama de aplicaciones en campos como la física teórica, la ingeniería, la informática y la estadística. Los avances en el álgebra abstracta y la teoría de matrices han ampliado aún más nuestro entendimiento de los determinantes y su papel en el álgebra lineal.

Definición de Determinantes:

El determinante es una función matemática asociada a una matriz cuadrada que proporciona información sobre ciertas propiedades de la matriz.

El determinante de una matriz $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, notado $\det(\mathbf{A})$ o $|\mathbf{A}|$ es la función:

$$\begin{aligned} \det : \quad \text{Mat}(R)_n &\rightarrow R \\ \mathbf{A} &\rightarrow \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Métodos de para obtener el determinante de una matriz

Determinante de una matriz de orden dos.

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_2$, el determinante queda definido de la siguiente manera.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplo 39 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, encontrar su determinante.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3)$$

$$|\mathbf{A}| = 5 + 6$$

$$|\mathbf{A}| = 11$$

Determinante de una matriz de orden tres

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_3$, para obtener el determinante de una matriz de orden 3, se aplica el método de Sarrus, que consiste en aumentar las dos primeras filas al último de la matriz, o las dos primeras columnas en la parte derecha de la matriz, así:

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, su determinante aplicando el método de Sarrus quedará de la siguiente manera:

i. Aumentando las dos primeras filas.

$$|\mathbf{A}| = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & & \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

ii. Aumentando las dos primeras columnas.

$$|\mathbf{A}| = \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo 40 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, encontrar su determinante.

$$|\mathbf{A}| = \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ 2 & 4 & 5 & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ -3 & 0 & -2 & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ 1 & 3 & -1 & & \\ & \nearrow & \nearrow & & \\ 2 & 4 & 5 & & \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = (1)(4)(-2) + (2)(0)(-1) + (-3)(3)(5) - (-1)(4)(-3) - (5)(0)(1) - (-2)(3)(2)$$

$$|\mathbf{A}| = -8 + 0 - 45 - 12 - 0 + 12$$

$$|\mathbf{A}| = -53$$

Método por menores para encontrar el determinante de una matriz

Este método es general, y puede ser utilizado para matrices de cualquier orden. Este método está definido por:

1. Si $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$
2. Si $n > 1$, las siguientes son dos formas equivalentes de definir el $\det(\mathbf{A})$
 - a. El desarrollo del determinante por menores por la r -ésima fila de $\mathbf{A}$.

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{rj} |\mathbf{A}_j^r|,$$

Donde $\mathbf{A}_j^r$ es la matriz $n-1$ que resulta de quitar de la matriz $\mathbf{A}$ la fila r y la columna j para $j = 1, 2, \dots, n$.

- b. El desarrollo del determinante por menores por la s -ésima columna de $\mathbf{A}$.

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+s} a_{is} |\mathbf{A}_s^i|,$$

Donde $\mathbf{A}_s^i$ es la matriz $n - 1$ que resulta de quitar de la matriz $\mathbf{A}$ la fila i y la columna s para $i = 1, 2, \dots, n$.

En este método se puede identificar los siguientes elementos:

- Elemento a_{is}
- Menor de la matriz $|\mathbf{A}_s^i|$
- Cofactor $(-1)^{i+s} |\mathbf{A}_s^i|$

Se llama menor de la matriz del elemento a_{is} de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n , al determinante $|\mathbf{A}_s^i|$ de orden $n - 1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna s de $\mathbf{A}$.

Se llama cofactor del elemento a_{is} del determinante de una matriz $\mathbf{A}$, al menor $|\mathbf{A}_s^i|$ con el signo $(-1)^{i+s}$ y se denota $\mathbf{A}_i^s$, esto es

$$\mathbf{A}_i^s = (-1)^{s+1} |\mathbf{A}_s^i|$$

Ejemplo 41 Determinar el determinante de la matriz $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{rj} |\mathbf{A}_j^r|$$

Para este ejemplo se desarrolla con la fila 2 ($r = 2$)

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} |\mathbf{A}_j^2|$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{2+1} a_{21} |A_1^2| + (-1)^{2+2} a_{22} |A_2^2| + (-1)^{2+3} a_{23} |A_3^2|$$

$$|A_1^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

La columna 1 y la fila 2, que se encuentran en rojo, son las que se eliminan.

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{2+1} 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = -21$$

Para agilizar el cálculo de un determinante, es preferible hacer el desarrollo por menores por la fila o la columna que tenga mayor cantidad de ceros.

Determinantes con Scilab

Definir la matriz y utilizar el comando: `->det (A)`, para obtener el determinante de la matriz dada.

A =

$$\begin{array}{rrrr} 1. & - & 2. & 4. \\ - & 4. & - & 1. & 5. \\ 1. & - & 3. & 8. \end{array}$$

`->det (A)`

ans =

- 15.

Propiedades de los determinantes

Sean A y $B \in \text{Mat}(R)_n$

- i. $|A| = |A^t|$
- ii. Si B se obtiene de A intercambiando dos filas (o columnas) ($f_s \leftrightarrow f_t$) cualquiera entonces: $|B| = -|A|$
- iii. Si B se obtiene de A sumando una fila de A con otra fila de A multiplicada por un escalar ($f_r = f_s + \alpha f_t$), entonces: $|B| = |A|$
- iv. Si la matriz A es triangular (superior o inferior), su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
- v. Si A tiene una fila (o columna) de ceros (nula), entonces: $|A| = 0$
- vi. Si A tiene dos filas (o columnas) que son iguales, entonces: $|A| = 0$
- vii. Si A tiene dos filas (o columnas) que son múltiplos entre sí ($f_s = \alpha f_t$), entonces $|A| = 0$
- viii. Si A es cualquier matriz y α es cualquier escalar, y este escalar se multiplica por una sola fila (o columna) (αf_t), entonces su nuevo determinante será: $\alpha |A|$
- ix. Si A es cualquier matriz y α es cualquier escalar, entonces: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
- x. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de las matrices: $|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n|$
- xi. $|A^n| = |A|^n$, donde $n \in R$

Adjunta de una Matriz

Sea $A \in \text{Mat}(R)_n$, una matriz cuadrada, sobre un campo R . La adjunta de A , denotado por $\text{adj}(A)$, es la transpuesta de la matriz de cofactores de la matriz A .

Se denomina cofactor c_{ij} del elemento a_{ij} al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz menor $|A_j^i|$:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_j^i|$$

La adjunta cumple con:

$$\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \mathbf{I}_n$$

Ejemplo 42 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Los cofactores de los nueve elementos de $\mathbf{A}$ son:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & c_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & c_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ c_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & c_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & c_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ c_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & c_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & c_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= -17 & c_{12} &= 4 & c_{13} &= 6 \\ c_{21} &= -11 & c_{22} &= 7 & c_{23} &= 3 \\ c_{31} &= 1 & c_{32} &= -2 & c_{33} &= -3 \end{aligned}$$

Matriz de Cofactores: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, su adjunta es:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Teorema 2 Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbf{R})_n$, entonces $\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = \text{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}_n$.

Propiedades de la Adjunta

Sean $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_n$

i. $\text{adj}(\mathbf{A}^t) = \text{adj}(\mathbf{A})^t$

- ii. $\text{adj}(\mathbf{AB}) = \text{adj}(\mathbf{B})\text{adj}(\mathbf{A})$
- iii. $\text{adj}(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$
- iv. $\text{adj}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^{n-1}\text{adj}(\mathbf{A}); \alpha \in R$
- v. $\text{adj}(\text{adj}(\mathbf{A})) = |\mathbf{A}|^{n-2} \cdot \mathbf{A}$
- vi. $|\text{adj}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|^{n-1}$

Inversa de una matriz aplicando determinantes

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_n$, con la siguiente expresión, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A})$, se puede obtener la inversa de la matriz dada.

Donde: $\text{adj}(\mathbf{A})$ es la transpuesta de la matriz de cofactores, (Adjunta de la matriz).

Cuando la matriz tiene más de tres filas, esta fórmula no es muy eficiente y conduce a largos cálculos.

Ejemplo 43 Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, encontrar $\mathbf{A}^{-1}$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

Como de la matriz $\mathbf{A}$ ya se encontró su adjunta: $\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

la inversa es;

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{6}{15} & -\frac{3}{15} & \frac{3}{15} \end{pmatrix}$$

Inversa de una Matriz mediante Scilab

Se procede como en el caso de obtener la potencia de una matriz, pero su exponente es -1, de tal forma que se obtiene la inversa. Así, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1. & 0. \\ -1. & 1. \end{pmatrix}$$

->A^-1

ans =

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. \\ 1. & 1. \end{pmatrix}$$

Recuerde que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Ejercicios Resueltos

1. Calcula aplicando propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = a \cdot 0 + 0 = 0$$

2. Desarrolla dando el resultado en forma de producto de factores.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a)(c-b)$$

3. Calcula el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) |\mathbf{A}_2^3| + 1 |\mathbf{A}_2^4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, Hallar:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

2. Si $\mathbf{A}_{3 \times 3}$ y $|\mathbf{A}| = 2$; calcular: a) $|\mathbf{A}|$; b) $|\mathbf{A}^{-1}|$; c) $|2\mathbf{A}^{-1}|$; d) $|(2\mathbf{A})^{-1}|$

3. Demostrar que: $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

5. Demostrar que: $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ 1 & 1 & 1 \\ b+1 & c+1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \end{vmatrix}$

6. Considere que: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, hallar:

a) $\text{adj}(\mathbf{A})$, b) $\text{adj}(\mathbf{A}^{-1})$, c) $\mathbf{A}^{-1} \text{adj}(\mathbf{A}^{-1})$

7. Para que valores de α , la matriz A tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

8. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

9. Calcular $\begin{vmatrix} 3a + b & 3a - b \\ 3a - b & 3a + b \end{vmatrix}$

10. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) \\ \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) & \cos(3\alpha) \\ \cos(2\alpha) & \cos(3\alpha) & \cos(4\alpha) \end{vmatrix}$

11. Calcula $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{bmatrix}$, determinante de Vandermonde.

12. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 5 & x + 3 & 5 & x + 2 & x - 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & x - 1 \\ 3 & 1 & 3 & x + 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verificar que $|A|$ es un polinomio en x y sus raíces son: $-3, -2, -1, 1, 2$.

13. Demostrar que $\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - a - c & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$

14. Sea $A = (a_{ij})$, $A \in \text{Mat}(R)_n$ tal que $a_{ij} = 2^{\max\{ij\}}$. Hallar $|A|$.

15. Sea $A = (a_{ij})$, $A \in \text{Mat}(R)_n$ tal que $a_{ij} = \min\{ij\}$. Hallar $|A|$.

16. Sea $A = (a_{ij})$, $A \in \text{Mat}(R)_n$ tal que $a_{ij} = \max\{ij\}$. Hallar $|A|$

17. Sea $A = (a_{ij})$, $A \in \text{Mat}(R)_n$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & si, i = j = 1 \\ 0 & si, i = j \\ 1 & si, i < j \\ -1 & si, i > j \end{cases}$

Demostrar que $|A| = 1$

18. Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



CAPÍTULO III

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de Ecuaciones Lineales

La historia de los sistemas de ecuaciones lineales se remonta a la antigüedad, donde se encontraron pruebas de su uso en diversas culturas para resolver problemas prácticos, como la distribución de tierras.

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen sus raíces en las civilizaciones antiguas, como la babilónica y la egipcia. Se han descubierto tablillas de arcilla babilónicas que muestran problemas de sistemas de ecuaciones lineales, como la división equitativa de tierras entre agricultores.

Los matemáticos griegos como Euclides y los matemáticos árabes como Al-Khwarizmi contribuyeron al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en la antigüedad y la Edad Media. Al-Khwarizmi, en particular, escribió sobre métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales en su obra "Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala", que fue traducida al latín como "Liber Algebrae et Algorithmi de Numero Indorum" que dio origen al término "álgebra".

Durante el Renacimiento, matemáticos como Cardano y Tartaglia trabajaron en métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, fue durante el siglo XVIII y XIX que se desarrollaron técnicas más avanzadas para el estudio sistemático de sistemas de ecuaciones lineales, como el método de eliminación de Gauss y la teoría de matrices. En el siglo XIX, con el desarrollo del álgebra lineal y la teoría de matrices, los sistemas de ecuaciones lineales fueron formalizados matemáticamente. Los matemáticos establecieron reglas para la manipulación algebraica de sistemas de ecuaciones, lo que permitió un tratamiento más riguroso y sistemático de estos problemas.

A lo largo del siglo XIX y XX, los sistemas de ecuaciones lineales encontraron una amplia gama de aplicaciones en ciencia e ingeniería. Se utilizan en áreas como la física, la ingeniería, la economía y la biología para modelar y resolver problemas que involucran relaciones lineales entre variables.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

El estudio de sistemas de ecuaciones lineales es una parte fundamental de las matemáticas y tiene aplicaciones en diversas disciplinas, incluyendo la física, la ingeniería, la economía, la estadística y la ciencia de la computación, entre otras.

Ecuación Lineal

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado. Las incógnitas no están multiplicadas entre sí, ni se encuentran en el denominador.

Una ecuación lineal tiene la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde:

a_i : constantes, $a_i \in R$

x_i : incógnitas

b : término independiente, $b \in R$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En este caso se tiene m ecuaciones y n incógnitas

Donde:

a_{ij} se denominan coeficientes

x_i se denominan incógnitas (o números a determinar), y

b_i se denominan términos independientes.

Resolver el sistema consiste en calcular el valor de cada una de las incógnitas para que se cumplan TODAS las igualdades del sistema simultáneamente.

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones se la representa de forma matricial de la siguiente manera, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

Donde:

$\mathbf{A}$, es la matriz de los coeficientes. $\mathbf{X}$, es la matriz de las incógnitas $\mathbf{B}$, es la matriz del término independiente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Una representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales que se ocupa en uno de los métodos para encontrar la solución es su representación mediante una matriz aumentada. $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, la misma que consta de la matriz de coeficientes y del término independiente.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de valores que, al reemplazarlos en las ecuaciones, que forman el sistema, satisfacen la igualdad.

El conjunto solución se lo representa de la siguiente manera: $\mathbf{S} = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)^t$

Si el conjunto es solución, se debe cumplir que: $\mathbf{AS} = \mathbf{B}$

Sistemas Lineales Homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se llama homogéneo si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, es decir: $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Si, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ el sistema se llama no homogéneo.

El siguiente sistema, es un sistema homogéneo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Tipos de sistemas de Ecuaciones Lineales

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, no siempre se tendrá una única solución, podría presentarse que el sistema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones.

Dependiendo de las soluciones que tenga un sistema, estos se pueden clasificar en:

$$\begin{cases} \text{INCOMPATIBLES (No tiene solución)} \\ \text{COMPATIBLES (Tiene solución)} \end{cases} \begin{cases} \text{DETERMINADOS (Solución única)} \\ \text{INDETERMINADOS (Infinitas soluciones)} \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones de dos incógnitas

Los sistemas más sencillos son aquellos en los que sólo hay dos incógnitas y dos ecuaciones, éstos son de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Hay varios métodos para resolverlos, los más habituales son:

- i. Reducción
- ii. Igualación
- iii. Sustitución
- iv. Gráfico

Sistemas de ecuaciones de tres incógnitas

En este tipo de sistemas se tiene tres incógnitas, éstos son de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

y los métodos más habituales, para encontrar su solución, son:

- i. Eliminación Gaussiana.
- ii. Método de Cramer.
- iii. Gráfico (Interpretación Geométrica de las ecuaciones.)

Eliminación Gaussiana

Este método consiste en llevar la matriz aumentada del sistema a su forma escalonada o escalonada reducida (Gauss - Jordan).

Ejemplo 44 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = 20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

La representación matricial es:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & 20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Teorema 3 Sea el sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas cuya representación matricial es $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

1. Si $\text{ram } \mathbf{A} < \text{ram}(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, el sistema no tiene solución.
2. Si $\text{ram } \mathbf{A} = \text{ram}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$, el sistema tiene solución, $r \in \mathbf{Z}^+$
 Si $r = n$, la solución es única.
 Si $r < n$, el sistema tiene número infinito de soluciones con $r - n$ parámetros.

El análisis también se puede resumirse a lo siguiente:

- i. Si en el proceso de eliminación Gaussiana, se presenta una fila de la forma: $\left(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid k\right)$, $k \in R$, el sistema no tiene solución.
- ii. Si en el proceso de eliminación Gaussiana, se presenta una fila completamente nula, $\left(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0\right)$, a esta se le ubica en la última fila, y se continua con la eliminación, hasta llegar a la forma escalonada. Esta fila nula indica que existen ecuaciones redundantes.
- iii. Al llegar a la forma escalonada, se escribe el sistema escalonado, y si, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, el sistema tiene única solución; mientras que si el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 45 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}x + y - z &= 5 \\2x - 3y + z &= 0 \\-x - y + z &= -5\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 5 \\2 & -3 & 1 & 0 \\-1 & -1 & 1 & -5\end{array}\right) \xrightarrow[f_3 + f_1]{f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 5 \\0 & -5 & 3 & -10 \\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 5 \\0 & 1 & -\frac{3}{5} & 2 \\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

En este caso se puede observar que el rango de la matriz es 2, por lo tanto, el sistema tendrá infinitas soluciones que se obtienen de la siguiente manera:

- i. Se escribe el sistema escalonado, que se obtiene de la matriz aumentada, sin tomar en cuenta las filas nulas:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 5 \\y - \frac{3}{5}z &= 2\end{aligned}$$

- ii. De la última ecuación se despeja cualquier incógnita, para este caso se ha despejado la incógnita z .

$$y = \frac{3}{5}z + 2$$

- iii. Esta última ecuación queda en función de la incógnita "z", la misma que se reemplaza en la primera ecuación para encontrar la incógnita "x" en función de "z".

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{5}z + 2 - z &= 5 \\x &= 3 - \frac{2}{5}z\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x = 3 - \frac{2}{5}z, \quad y = \frac{3}{5}z + 2, \quad z = z$$

Una de las infinitas soluciones se obtiene dando valores a la variable "z", entonces para $z = 1$, se obtiene:

$$x = \frac{13}{5}, \quad y = \frac{13}{5}, \quad z = 1$$

Esta última expresión, representa una de las soluciones del sistema.

Los sistemas de ecuaciones lineales, se pueden resolver mediante herramientas computacionales, una de esas herramientas es Scilab, a continuación, su aplicación utilizando el método de eliminación Gaussiana:

- i. Para llevarle a su forma escalonada se necesita aplicarle operaciones elementales a esta última matriz:

En este espacio se expone como realizar las operaciones elementales de fila, con el objetivo de escalonar una matriz, la cual es la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\rightarrow A = [2 \ 1 \ -1 \ 11; 1 \ -3 \ 0 \ -20; 4 \ 2 \ 5 \ 8]$$

A =

$$\begin{array}{cccc}2. & 1. & -1. & 11. \\1. & -3. & 0. & -20. \\4. & 2. & 5. & 8.\end{array}$$

$$\rightarrow A(1, :) = 0.5 * A(1, :)$$

A =

$$\begin{array}{cccc}1. & 0.5 & -0.5 & 5.5 \\1. & -3. & 0. & -20. \\4. & 2. & 5. & 8.\end{array}$$

$$\rightarrow A(2, :) = A(2, :) - A(1, :)$$

A =

$$\begin{array}{cccc} 1. & 0.5 & -0.5 & 5.5 \\ 0. & -3.5 & 0.5 & -25.5 \\ 4. & 2. & 5. & 8. \end{array}$$

$$\rightarrow A(3, :) = A(3, :) - 4 * A(1, :)$$

A =

$$\begin{array}{cccc} 1. & 0.5 & -0.5 & 5.5 \\ 0. & -3.5 & 0.5 & -25.5 \\ 0. & 0. & 7. & -14. \end{array}$$

$$\rightarrow A(3, :) = (1/7) * A(3, :)$$

A =

$$\begin{array}{cccc} 1. & 0.5 & -0.5 & 5.5 \\ 0. & -3.5 & 0.5 & -25.5 \\ 0. & 0. & 1. & -2. \end{array}$$

ii. El sistema escalonado queda de la siguiente manera:

$$x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{5}{2}$$

$$-\frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{29}{2}$$

$$z = -2$$

Por lo tanto la variable $z = -2$, para encontrar el valor de la variable y , se deberá remplazar el valor encontrado en la ecuación:

$$-\frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{29}{2},$$

con estos valores de z e y , se puede encontrar el valor de x .

La solución del sistema es $(x, y, z) = (1, 7, -2)$.

Existen instrucciones o comandos específicos en cada una de las herramientas computacionales que permiten resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Método de Cramer

Sea el sistema $AX = B$, el método de Cramer está definido por $X = A^{-1}B$, este método se aplica únicamente en sistemas que tengan el número de ecuaciones igual al número de incógnitas, ($m = n$)

Para el ejemplo anterior,
$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = 20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$
, aplicando el método de

Cramer, se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47}{7} \\ -\frac{31}{7} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Utilizando Scilab:

->A=[2 1 -1;1 -3 0;4 2 5]; Matriz de coeficientes

->B=[11;20;8]; Matriz de términos independientes

->X=(A ^ -1)*B

X =

47/7.

-31/7.

- 2.

Análisis del Método de Cramer

- El método de Cramer se utiliza únicamente en sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de ecuaciones y de incógnitas.
- Si $|A| = 0$, existe la posibilidad que el sistema no tenga solución (Incompatible) o tenga infinitas soluciones (Indeterminado).

Ejemplo 46 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (\alpha + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\alpha + 1)y + z = 1 \\ x + y + (\alpha + 1)z = 1 \end{cases}$$

Determinar el valor del parámetro α para que el sistema tenga:

- Única solución.
- Infinitas Soluciones.
- No tenga solución.

Bastará con analizar una de las incógnitas, para dar contestación a las cuestiones planteadas en el ejercicio. Para este caso se encuentra el valor de la incógnita x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha + 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2}{\alpha^3 + 3\alpha^2}$$

$$x = \frac{\alpha^2}{\alpha^3 + 3\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2(\alpha + 3)}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $x = \frac{0}{0}$, por lo tanto el sistema tendría infinitas soluciones.

Si $\alpha = -3$, entonces $x = \frac{9}{0}$, el sistema no tiene solución.

Si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -3$, el sistema tiene única solución.

***En el análisis de este ejercicio, se recomienda no simplificar los factores que contengan el parámetro en análisis, ya que se pierde el análisis de las infinitas soluciones.*

Método Gráfico

El método gráfico se puede utilizar para obtener la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas.

Una de las mayores complicaciones es graficar en $\mathbb{R}^3$, y aún más su interpretación, debido a que al tratar de graficar a mano, no se puede apreciar los puntos de corte de los planos resultantes. Para lo cual es recomendable utilizar un software que nos ayude con la representación gráfica de cada una de las

ecuaciones, de tal manera, que resulte mucho más fácil la interpretación de los resultados.

Utilizando Scilab

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + y - z = 11$$

$$x - 3y = 20$$

$$4x + 2y + 5z = 8$$

Hay algunas formas de graficar planos en Scilab, una de las más sencillas está expuesta de la siguiente manera:

1. Lo primero que se hace, es despejar la incógnita "y" de cada una de las ecuaciones dadas. Para nuestro caso específico se tiene:

$$y = 11 - 2x + z$$

$$y = \frac{x-20}{3}$$

$$y = \frac{8-4x-5z}{2}$$

No necesariamente se debería despejar la incógnita "y"

2. Los comandos en Scilab, para obtener cada una de las gráficas de las ecuaciones, quedan de esta manera:

```
[x,z]=meshgrid(-10:0.4:10); //Definimos el rango de x y z
y1=11-2*x+z; //definimos la primera ecuación.
mesh(x,y1,z,'Edgecolor','red') //comando utilizado para graficar, 'red'
indica que el plano tomara el color rojo.
y2=(x-20)/3; //segunda ecuación
mesh(x,y2,z,'Edgecolor','yellow') //plano color amarillo
y3=(8-4*x-5*z)/2;
mesh(x,y3,z,'Edgecolor','blue')
xtitle("Solución Gráfica de un S.E.L","x","z","z") //Título del gráfico
xgrid()
```

3. El resultado es la intersección de los planos, en el gráfico se observa que los tres planos se intersecan en un solo punto.

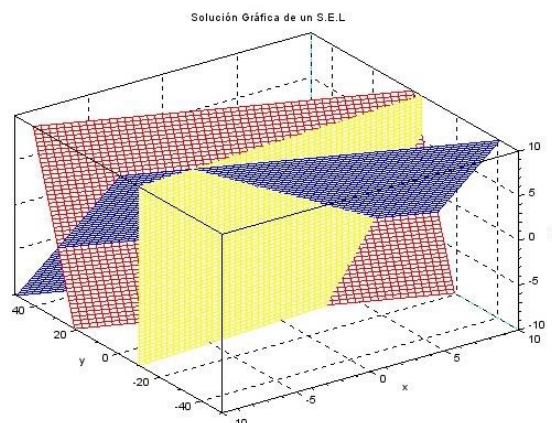


Figura III.1: Interpretación Geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas

4. Se puede rotar la figura con el objetivo de apreciar de mejor manera el resultado del sistema de ecuaciones lineales.

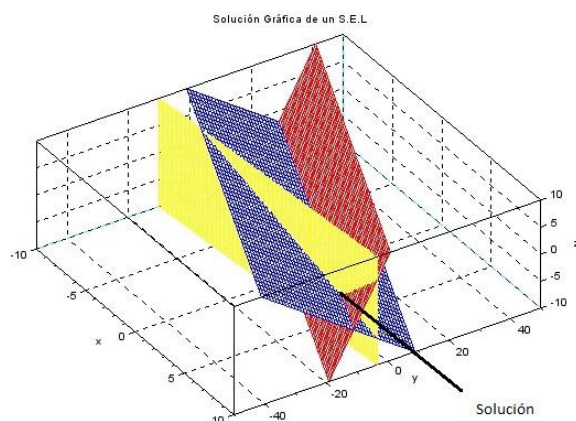


Figura III.2: Interpretación Geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas

En el análisis gráfico se pueden presentar los siguientes casos: *i. Si los planos que representan a cada una de las ecuaciones del sistema no se cortan en un punto común, el sistema no tiene solución.*

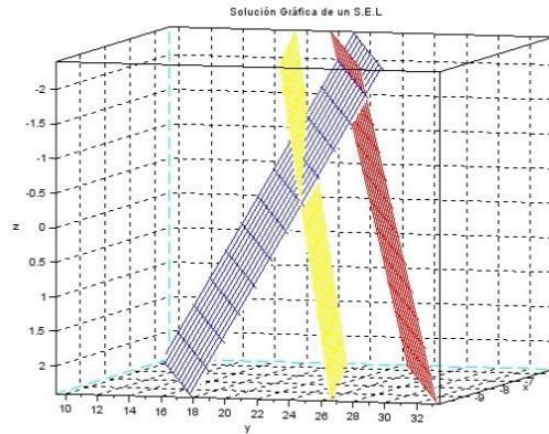


Figura III.3: Interpretación Geométrica un sistema de ecuaciones que no tiene solución

ii. Si los planos se intersectan en un conjunto de puntos comunes, que puede ser una recta en común, o se superpongan los planos entre sí, el sistema tiene infinitas soluciones.

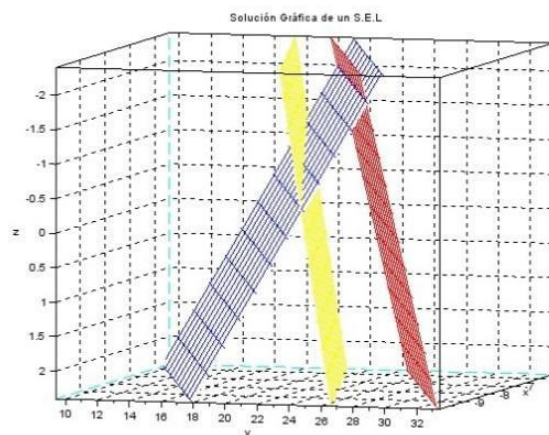


Figura III.4: Interpretación Geométrica un sistema de ecuaciones que no tiene infinitas soluciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{i.} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z - t = 3 \\ x + 2y - z + 2t = 1 \\ 3x - y + 2z - 3t = 4 \\ 3x - y + z - 7t = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{v.} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases}$$

$$\text{vi.} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 17y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\text{vi.} \quad \begin{cases} x + y + z + u + v = 7 \\ 3x + 2y + z + u + 3v = -2 \\ y + 2z + 2u + 6v = 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3u - v = 12 \end{cases}$$

2. Las ecuaciones para hallar las intensidades de corriente i_1 , i_2 e i_3 en un determinado circuito de tres mallas son:

$$3i_1 - 2i_2 + 4i_3 = 2$$

$$i_1 + 3i_2 - 6i_3 = 8$$

$$2i_1 - i_2 - 2i_3 = 0$$

Hallar i_1 , i_2 e i_3

3. Hallar los valores de la constante α para que el sistema:

i. Tenga solución única

ii. No tenga solución

iii. Tenga infinitas soluciones

a.
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 2y + \alpha = 1 \\ 2x + \alpha y + 8z = 3 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + y + (\alpha^2 - 5)z = \alpha \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = \alpha + 1 \\ x + \alpha y - z = -1 \\ 3x + y + z = \alpha \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} (\alpha + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\alpha + 1)y + z = 1 \\ (\alpha + 3)x + (2\alpha + 4)y + (1 - \alpha)z = 2 \end{cases}$$

4. Discuta los valores de α y β del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - \alpha y + z = 1 \\ -3x + (\alpha - 1)y + \beta z = 2\beta \end{cases}$$



CAPÍTULO IV

Espacios y

Subespacios

Vectoriales

Espacios y Subespacios Vectoriales

Los conceptos que eventualmente darían lugar a los espacios vectoriales tienen raíces en la geometría y la física de la antigua Grecia y otras civilizaciones antiguas. Los griegos, por ejemplo, estudiaron relaciones geométricas y magnitudes físicas, que son conceptos relacionados con los vectores.

Durante la Edad Media y el Renacimiento, hubo un resurgimiento del interés en las matemáticas y la física, con matemáticos como Descartes y Fermat desarrollando métodos para representar geoméricamente las cantidades físicas utilizando coordenadas y vectores. Durante el siglo XVIII, matemáticos como Euler y Lagrange hicieron contribuciones significativas al estudio de las transformaciones lineales y los espacios vectoriales. Estos estudios sentaron las bases para la formalización de los espacios vectoriales como una estructura algebraica.

En el siglo XIX, matemáticos como Grassmann, Hamilton y Gibbs desarrollaron formalmente la teoría de los espacios vectoriales. Grassmann, por ejemplo, introdujo conceptos como los espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, mientras que Hamilton desarrolló los cuaterniones, una extensión de los números complejos que se pueden representar como vectores en un espacio de cuatro dimensiones. En el siglo XX, con el advenimiento del álgebra abstracta y la teoría de conjuntos, los espacios vectoriales se estudiaron de manera más generalizada y abstracta. Matemáticos como Hilbert, Banach y von Neumann realizaron contribuciones fundamentales al estudio de los espacios vectoriales normados, los espacios de Hilbert y los espacios topológicos vectoriales.

La historia de los espacios vectoriales es una historia de evolución matemática, desde sus orígenes en la geometría antigua hasta su formalización moderna como una estructura algebraica fundamental. Su estudio y aplicación continúan siendo vitales en muchas áreas de la ciencia y la tecnología modernas.

El estudio de espacios y subespacios vectoriales es fundamental en matemáticas y en una amplia variedad de disciplinas por varias razones importantes como el modelado de fenómenos naturales, muchos fenómenos en la ciencia y la ingeniería pueden ser modelados de manera eficaz utilizando conceptos de Álgebra Lineal y espacios vectoriales. Por ejemplo, el movimiento de partículas en física, la transferencia de calor en ingeniería o la propagación de señales en comunicaciones se pueden describir mediante sistemas de ecuaciones lineales en espacios vectoriales.

Espacios Vectoriales

Sea V un conjunto de elementos (vectores) no vacío, sobre el cual se han definido dos operaciones, la suma $(+)$ de dos elementos del conjunto V y el producto $(\cdot)$ de un escalar $\alpha \in K$, por un elemento de V , se dice que V es un espacio vectorial $\langle V, K, +, \bullet \rangle$ si cumple con las siguientes propiedades (Espinoza, 2006):

En esta sección se trabajará en el campo de los Reales, (R)

Sean $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in R$

- i. $u + v \in V$ *Ley de Composición Interna*
- ii. $u + v = v + u$ *Axioma Conmutativo*
- iii. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *Axioma Asociativo*
- iv. $u + \phi = u$; ϕ vector nulo *Existencia Elemento Neutro*
- v. $u + (-u) = \phi$ *Existencia Inverso Aditivo*
- vi. $\alpha u \in V$ *Ley de Composición Externa*
- vii. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *Axioma Distributivo 1*
- viii. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ *Axioma Distributivo 2*
- ix. $\alpha(\beta)u = (\alpha\beta)u$ *Axioma Asociativo*
- x. $1u = u$

A los elementos de un espacio vectorial se los denomina vectores.

Los Espacios Vectoriales, para los diferentes ejemplos y ejercicios propuestos, son:

- i. Matrices de cualquier orden : $\text{Mat}(R)_{m \times n}$
- ii. Vectores propiamente dichos, n representa la dimensión: R^n
- iii. Polinomios de grado menor igual a n : $P_{\leq n}(x)$
- iv. Funciones Reales: F

Ejemplo 47 Demostrar el axioma conmutativo en el espacio vectorial de las funciones reales $\mathbf{F} \in \mathcal{I}[a, b]$

Por demostrar que:

$$(f + g)(x) = (g + f)(x), \text{ si } f(x), g(x) \wedge h(x) \in \mathbf{F}, \alpha \wedge \beta \in R$$

- i. $(f + g)(x) = (f + g)(x)$ *Axioma Reflexivo*
- ii. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *Def. Suma de funciones*
- iii. $(f + g)(x) = g(x) + f(x)$ *Axioma Conmutativo de Suma de Funciones.*
- iv. $(f + g)(x) = (g + f)(x)$ *Def. Suma de funciones*

Ejemplo 48 Demostrar el axioma asociativo en el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$

Por demostrar que: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$, tal que:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ y } \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

Por demostrar que: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

1. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)$
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)$
5. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

Ejemplo 49 Demostrar el axioma del producto de un escalar por la suma de vectores en el espacio vectorial de los polinomios de grado n con coeficientes reales (García, 2005).

Por demostrar que: $\alpha[\mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{R}_n(x)] = \alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x)$.

Sea $\mathbf{Q}_n(x) \wedge \mathbf{R}_n(x) \in \mathbf{P}_n(x)$, $\alpha \in R$, tal que:

$$\mathbf{Q}_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \mathbf{R}_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

- i. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x)$
- ii. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + \alpha(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)$
- iii. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_nx^n) + (\alpha b_0 + \alpha b_1x + \cdots + \alpha b_nx^n)$
- iv. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha a_0 + \alpha b_0 + \alpha a_1x + \alpha b_1x + \cdots + \alpha a_nx^n + \alpha b_nx^n$
- v. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1)x + \cdots + \alpha(a_n + b_n)x^n$
- vi. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n]$
- vii. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha[(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)]$
- viii. $\alpha\mathbf{Q}_n(x) + \alpha\mathbf{R}_n(x) = \alpha[\mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{R}_n(x)]$

Subespacios Vectoriales

Se llama subespacio vectorial, de un espacio vectorial definido sobre un campo R , $\langle \mathbf{V}, R, +, \bullet \rangle$, a cualquier subconjunto $\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, no vacío, tal que $\mathbf{S}$ es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas sobre $\mathbf{V}$.

i. Si $\mathbf{S}$ es un espacio vectorial, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \neq \phi$, entonces:

$$\text{ii. } \mathbf{S} \text{ es subespacio vectorial de } \mathbf{V} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S} \\ \alpha \mathbf{u} \in \mathbf{S}; \forall \alpha \in K \text{ y } \mathbf{u} \in \mathbf{S} \end{cases}$$

Ejemplo 50 Determinar si el conjunto $\mathbf{W} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y - 2x = 0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^2$

Sean: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, tal que $\mathbf{u} = (x_1, 2x_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, 2x_2)$

Para que sea subespacio vectorial debe cumplir los siguientes axiomas:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$
2. $\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{W}$

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$

i. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ *Axioma reflexivo*

ii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2)$ *Definición de vectores*

iii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ *Def. Suma de Vectores*

iv. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$ *Axioma recolectivo de la suma de $\mathbb{R}$*

v. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x, 2x)$

2. $\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{W}$

i. $\alpha \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$ *Axioma reflexivo*

ii. $\alpha \mathbf{u} = \alpha(x_1, 2x_1)$ *Definición de vector*

iii. $\alpha \mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha 2x_1)$ *Definición de producto por escalar*

iv. $\alpha \mathbf{u} = (\alpha x_1, 2\alpha x_1)$ *Axioma conmutativo del producto de $\mathbb{R}$*

v. $\alpha \mathbf{u} = (x, 2x)$

El espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ se lo puede representar como el conjunto de todos los vectores que se encuentren en el plano x, y , y el subespacio vectorial como el conjunto de vectores que cumplen la condición $y - 2x = 0$. Esto se puede representar en forma gráfica, Figura IV.1, es decir el sub espacio $\mathbf{W}$, se representa por todos los vectores que se encuentran sobre la recta punteada.

Lo que se acaba de probar es que: si se toman dos vectores que se encuentren sobre la recta que representa el conjunto $\mathbf{W}$ y se lo suman, su resultante debe caer en el mismo conjunto $\mathbf{W}$, para este caso en la misma recta (cumplir con $y - 2x = 0$), de igual forma, si se multiplica un escalar por un vector que cumpla la condición dada, el resultado debe seguir cumpliendo la condición.

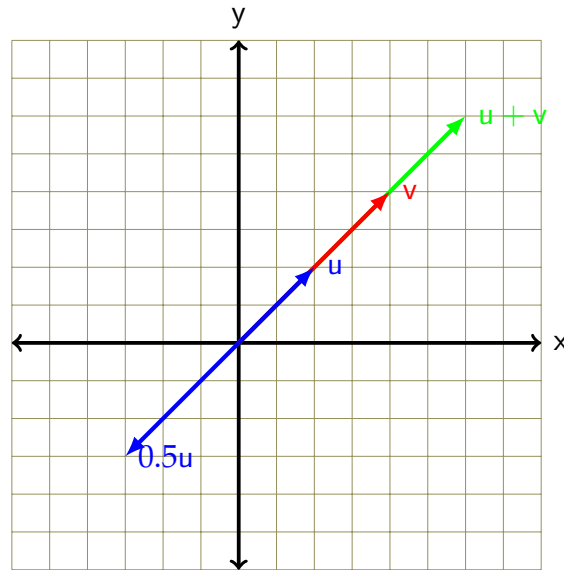


Figura IV.1: Rotación de un vector

Ejemplo 51 Determinar cuál de los Subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

a. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$

Del conjunto dado se puede obtener que: $x = 2y - z$, por lo tanto los vectores para la demostración de las propiedades son:

$$\mathbf{u} = (2y_1 - z_1, y_1, x_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (2y_2 - z_2, y_2, x_2)$$

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_1$

i. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

ii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2y_1 - z_1, y_1, z_1) + (2y_2 - z_2, y_2, z_2)$ Def. de vectores

iii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2y_1 - z_1 + 2y_2 - z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ Def. suma de vectores

iv. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2y_1 + 2y_2 - z_1 - z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ Conmutativo suma de $\mathbb{R}$

v. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2]$ Axioma recolectivo

vi. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2y - z, y, z)$

2. $\alpha \mathbf{u} \in S_1$

i. $\alpha \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$ Axioma reflexivo

ii. $\alpha \mathbf{u} = \alpha(2y_1 - z_1, y_1, z_1)$ Definición de vectores

iii. $\alpha \mathbf{u} = (2\alpha y_1 - \alpha z_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ Definición Producto por escalar

iv. $\alpha \mathbf{u} = (2y - z, y, z)$

Se puede observar que el conjunto S_1 , si cumple con los dos axiomas anteriormente indicados, por lo tanto el conjunto S_1 , es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

b. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = z - 1\}$

El conjunto S_2 no es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, ya que no posee elemento neutro.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el e.v. $\langle \mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \bullet \rangle$:

- Enuncie y compruebe la propiedad conmutativa de la suma.
- Enuncie y compruebe la propiedad asociativa del producto por escalar.

2. En el e.v. $\langle \mathbf{R}^3, \mathbf{R}, +, \bullet \rangle$:

- Enuncie y compruebe la propiedad asociativa de la suma.
- Enuncie y compruebe las propiedades distributivas del producto por escalar.

3. En el e.v. $\langle \text{Mat}(R)_{mn}, \mathbf{R}, +, \bullet \rangle$. Enuncie y compruebe la propiedad del inverso aditivo, asumiendo la existencia del neutro aditivo.

4. En el e.v. $\langle \mathbf{F}, \mathbf{R}, +, \bullet \rangle$, el e.v. de funciones reales sobre el campo de los reales. Enuncie y compruebe las propiedades distributivas.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son s.e.v. del e.v. $\mathbf{R}^3$ sobre el campo de $\mathbf{R}$? (Justifique su respuesta)

a. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y \geq z\}$

b. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| = |y + z|\}$

c. $S_3 = \{|x, y, z| \in \mathbf{R}^3 / |\mathbf{A}| = 0\}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -x \\ -1 & 2 & z \\ -1 & 2 & y \end{pmatrix}$.

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son s.e.v. del e.v. de las matrices $\text{Mat}(R)_n$ sobre el campo de los reales $\mathbf{R}$? (Justifique)

a. $S_1 = \{\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_n : 2|\mathbf{A}| = 0\}$

- b. $S_2 = \{A \in \text{Mat}(R)_n : \text{Tr}(A^t) = 0\}$
 - c. $S_3 = \{A \in \text{Mat}(R)_n : a_{ii} = 0\}$
 - d. $S_4 = \{A \in \text{Mat}(R)_n : A = A^t\}$
 - e. $S_5 = \{A \in \text{Mat}(R)_n : A \text{ matriz diagonal}\}$
 - f. $S_6 = \{A \in \text{Mat}(R)_n : AB = \phi\}$
7. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son s.e.v. del e.v. $\langle F, R, +, \bullet \rangle$? (Justifique)
- a. $S_1 = \{f/f \text{ es par}\}$
 - b. $S_2 = \{f/f \text{ es decreciente}\}$
 - c. $S_3 = \{f/f \text{ es inyectiva}\}$
 - d. $S_4 = \{f/f \text{ es derivable}\}$
 - e. $S_5 = \{f/f(0) = f(1) + 2\}$

Combinaciones Lineales

Sea V un espacio vectorial $\langle V, R, +, \bullet \rangle$, y $U \subset V$, tal que $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$; se llama combinación lineal de los elementos del conjunto U , a todo vector que se pueda formar por la combinación de los elementos del conjunto U :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = v, \text{ donde } \alpha_i \in R \wedge v, u_i \in V$$

Se dice que el vector v es una combinación lineal del conjunto U , si existen los escalares α_i de la siguiente ecuación:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in R$$

Ejemplo 52 Determine si el siguiente polinomio $p_2(x) = 3x^2 - x + 1$, es un combinación lineal del conjunto $A = \{r_2(x), t_2(x), q_2(x)\}$ tal que: $r_2(x) = x^2 - 1$; $t_2(x) = x + 5$ y $q_2(x) = 2x^2 + 3x$.

Lo que se quiere saber es si: $p_2(x) = \alpha r_2(x) + \beta t_2(x) + \delta q_2(x)$

$$3x^2 - x + 1 = \alpha (x^2 - 1) + \beta (x + 5) + \delta (2x^2 + 3x)$$

$$3x^2 - x + 1 = \alpha x^2 - \alpha + \beta x + 5\beta + 2\delta x^2 + 3\delta x$$

$$3x^2 - x + 1 = (\alpha + 2\delta)x^2 + (\beta + 3\delta)x - \alpha + 5\beta$$

El sistema a resolver es:

$$\alpha + 2\delta = 3$$

$$\beta + 3\delta = -1$$

$$-\alpha + 5\beta = 1$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\alpha = \frac{57}{13}; \beta = \frac{14}{13}; \delta = \frac{-9}{13}$$

Como existe solución, el $p_2(x)$, es una combinación lineal del conjunto A

Ejemplo 53 Determinar el valor de "a" para que el vector $\mathbf{v}$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, si: $\mathbf{v} = (a, 0, 0)$; $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$.

$$(a, 0, 0) = \alpha (0, 1, 1) + \beta (1, -1, 1)$$

$$(a, 0, 0) = (0, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, \beta)$$

$$a = 0 + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$0 = \alpha - \beta \Rightarrow 0 = \alpha - \beta$$

$$0 = \alpha + \beta \Rightarrow 0 = \alpha + \beta$$

Resolviendo por eliminación Gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) f_3 - f_2 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \frac{1}{2}f_3 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) f_2 + f_3 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$f_3 - f_1 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{array} \right)$$

Para que el sistema tenga solución $a = 0$. Si $a = 0$ el vector $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Conjunto Generador

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de un espacio vectorial V , toma el nombre de conjunto generador de V , si todo $\mathbf{v} \in V$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

El espacio generado también se lo define como el conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden realizar con un conjunto dado.

Cápsula de un Conjunto

Sea V un espacio vectorial cualquiera y S subconjunto de V ($S \subset V$). $S \neq \phi$ (vacío). La capsula $\langle S \rangle$ el conjunto formado por todos los elementos de V que puedan expresarse como una combinación lineal de S (S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos elementos que pertenecen a S)

$\langle S \rangle$; Cápsula

$$\langle S \rangle = \left\{ \mathbf{v} \in V : \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n; a_i \in R \right\}$$

Ejemplo 54 Determinar la capsula de $S = \{1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$; $S \subset \mathbf{P}_3(x)$

$$\alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \delta(1+x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\alpha + \alpha x + \beta + \beta x^2 + \delta + \delta x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$(\alpha + \beta + \delta) + (\alpha)x + (\beta)x^2 + (\delta)x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = a_0 \\ \alpha = a_1 \\ \beta = a_2 \\ \delta = a_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 + a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{array} \right)$$

$$f_4 + f_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 + a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 + a_2 + a_1 - a_0 \end{array} \right)$$

Para que en el sistema planteado exista solución se debe cumplir:
 $a_3 + a_2 + a_1 - a_0 = 0$, por lo tanto el espacio generado por el conjunto dado,
 son todos los polinomios que cumplan con la condición: $a_3 + a_2 + a_1 - a_0 = 0$;
 donde a_i son los coeficientes reales de los polinomios.

El espacio generado se puede representar como:

$$\mathbf{S} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{P}_3(x) : a_3 + a_2 + a_1 - a_0 = 0\}$$

Ejemplo 55 Encontrar la cápsula del siguiente conjunto: $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & -3\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ -\alpha - 3\beta = b \\ 2\alpha + \beta = c \\ 3\alpha = d \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} f_2 + f_1 \\ f_3 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a \\ b + a \\ c - 2a \\ d - 3a \end{array} \xrightarrow{(-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a \\ -a - b \\ c - 2a \\ d - 3a \end{array} \begin{array}{l} f_3 + f_2 \\ f_4 + 6f_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a \\ -a - b \\ -5a - 3b + c \\ -9a - 6b + d \end{array}$$

Por lo tanto, su cápsula es:
$$\begin{cases} -5a - 3b + c = 0 \\ -9a - 6b + d = 0 \end{cases}$$

El espacio generado se puede representar como:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(R)_{2 \times 2} : \begin{cases} -5a - 3b + c = 0 \\ -9a - 6b + d = 0 \end{cases} \right\}$$

Una forma de comprobar si está bien realizado el ejercicio, es verificar si los vectores del conjunto dado cumplen con las condiciones encontradas.

Del conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ cumple con las condiciones encontradas:

$$-5a - 3b + c = 0 \rightarrow -5(1) - 3(-1) + 2 = 0$$

$$-9a - 6b + d = 0 \rightarrow -9(1) - 6(-1) + 3 = 0$$

De la misma forma, se debería comprobar con el otro vector (matriz) del conjunto S .

Dependencia e Independencia lineal

Sea V un espacio vectorial, $\langle V, K, +, \bullet \rangle$ y $A \subset V$, tal que $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$; se dice que el conjunto A es Linealmente Independiente (L.I) si el siguiente sistema homogéneo:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0,$$

tiene como única solución, la solución trivial es decir $\alpha_i = 0; \forall i \in Z^+$.

Si el sistema tiene **infinitas soluciones**, el conjunto es Linealmente Dependiente (L-D).

Ejemplo 56 Determinar si el siguiente conjunto es linealmente independiente.

$$W = \{1 + 2x - 3x^2, -2 + 3x + x^2, x - 5x^2\} \subset P_2(x)$$

$$\alpha(1 + 2x - 3x^2) + \beta(-2 + 3x + x^2) + \gamma(x - 5x^2) = 0$$

$$\alpha + 2\alpha x - 3\alpha x^2 - 2\beta + 3\beta x + \beta x^2 + \gamma x - 5\gamma x^2 = 0$$

$$(\alpha - 2\beta) + (2\alpha + 3\beta + \gamma)x + (\beta - 3\alpha - 5\gamma)x^2 = 0$$

El sistema homogéneo a resolver es:

$$\alpha - 2\beta = 0$$

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

$$-3\alpha + \beta - 5\gamma = 0$$

Un sistema homogéneo tiene dos posibilidades de solución; única e infinitas soluciones.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \text{ Matriz de los coeficientes.}$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-30} = 0$$

$$\alpha = \frac{0}{-30} = 0$$

$$\beta = \frac{0}{-30} = 0$$

$$\gamma = \frac{0}{-30} = 0$$

El conjunto, $W = \{1 + 2x - 3x^2, -2 + 3x + x^2, x - 5x^2\} \subset P_2(x)$, es Linealmente Independiente.

Al aplicar el método de Cramer en la resolución del sistema se puede observar que, basta con analizar el determinante de la matriz de los coeficientes (matriz A), ya que el determinante del numerador siempre será igual a cero, debido a que siempre tendrá una columna nula. Por lo tanto, se puede concluir que:

Si $|A| = 0$, el conjunto es **Linealmente Independiente**, (L.I)

Si $|A| \neq 0$, el conjunto es **Linealmente Dependiente**, (L.D)

Considerando el ejercicio anterior, se tiene: $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30$, lo que indica que el conjunto es Linealmente Independiente.

Ejemplo 57 Sea $\mathbf{S} \subset \mathbf{P}_2(x)$. Determinar el valor de "a" para que el conjunto $\mathbf{S}$ sea linealmente independiente. $\mathbf{S} = \{1 + ax + x^2; -1 + x^2; (1 + a) + x\}$

$$\alpha (1 + ax + x^2) + \beta (-1 + x^2) + \gamma ((1 + a) + x) = 0$$

$$\alpha - \beta + (1 + a) \gamma = 0$$

$$a \alpha + \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 + a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a(1 + a) - 1 - 1$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a + 2)(a - 1) = 0$$

$$a = -2 \text{ y } a = 1$$

$$\text{L.I. } \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

$$\text{L.D. Si } a = -2 \text{ o } a = 1$$

Wronskiano

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ funciones reales $n-1$ veces diferenciables. El **Wronskiano** de estas funciones es la función con dominio de la intersección de los dominios de todas las f_i definida por:

$$w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \dots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Para determinar si el conjunto dado de funciones es Linealmente Dependiente o Independiente, se analiza el determinante formado por sus diferenciales; es decir si:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \dots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = 0; \text{ El conjunto es L.D.}$$

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \dots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0; \text{ El Conjunto es L.I.}$$

Ejemplo 58 Determinar si el siguiente conjunto $\{e^x, e^{-x}, \cosh(x)\}$ es L.D o L.I.

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh(x) \\ e^x & -e^{-x} & \sinh(x) \\ e^x & e^{-x} & \cosh(x) \end{vmatrix} = 0$$

Como se tiene dos filas iguales ($f_1 = f_3$), eso significa que el determinante es 0; por lo tanto, el conjunto dado es **Linealmente Dependiente**.

Base y Dimensión

Base:

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de un espacio vectorial V , es una base de este espacio, si y solo si, todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar como combinación lineal única de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Sean $\langle V, K, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial y $B \subset V$. El conjunto B es una base del espacio vectorial V , si y solamente si, B es linealmente independiente y B genera a V .

B es una base de V , si y solo si:

1. B es Linealmente Independiente.
2. $\langle B \rangle$ genera el Espacio Vectorial.

Dimensión:

La dimensión de un espacio vectorial $\langle V, K, +, \bullet \rangle$, es el número de vectores que posee la base del espacio vectorial.

Bases Canónicas

La base canónica o base usual del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el conjunto de los n vectores cuya única coordenada distinta de cero vale 1. Es decir, consta en el siguiente orden de los vectores:

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, 0, \dots, 1)\}$$

Dentro de las bases canónicas, de los espacios vectoriales a ser utilizados, se pueden destacar las siguientes:

- i. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 0); (0, 1)\}$
- ii. $\mathbf{B}_{\mathbf{P}_{2(x)}} = \{1, x, x^2\}$
- iii. $\mathbf{B}_{\mathbf{M}(R)_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ejemplo 59 Determinar una base del siguiente subespacio espacio vectorial.

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(R_2) : \begin{array}{l} a - b + 3c = 0 \\ 2a + b + d - c = 0 \end{array} \right\}$$

Los vectores (matrices) que pertenecen al subespacio $\mathbf{W}$, cumplen con las condiciones:

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ 2a + b + d - c = 0 \end{cases}$$

Para encontrar una base, se debe resolver el sistema formado por las condiciones de anteriormente expuestas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) f_2 - 2f_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema Escalonado resultante:

$$\begin{aligned}a - b + 3c &= 0 \\ 3b - 7c + d &= 0\end{aligned}$$

Como el sistema escalonado tiene más incógnitas que ecuaciones, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales, para este caso, quedaran en función de b y c .

$$\begin{aligned}a &= b - 3c \\ d &= -3b + 7c\end{aligned}$$

Al encontrar la solución general se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - 3c & b \\ c & -3b + 7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & -3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3c & 0 \\ c & 7c \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, una base del espacio dado es:

$$\mathbf{B}_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión del subespacio $\mathbf{W}$ es "2", ya que la base tiene 2 vectores (matrices).

Ejemplo 60 Determinar una base del siguiente subespacio dado:

$$\mathbf{W} = \{a + bx + cx^2 \in P_2(x); a - b + 3c = 0\}$$

De la condición: $a - b + 3c = 0$, se puede despejar cualquier variable, para este caso $a + 3c = b$.

Al plantear la solución general, considerando que el subespacio es de polinomios, se obtiene:

$$\begin{aligned}a + bx + cx^2 \\ a + (a + 3c)x + cx^2 \\ a(1 + x) + c(x^2 + 3x)\end{aligned}$$

Si $a = 1$ y $c = 1$, una base del conjunto dado es: $\mathbf{B}_{P_2(x)} = \{1 + x; 3x + x^2\}$

Ejemplo 61 Dado el conjunto $S = \{(1, -2); (-3, 6)\}$, $S \in \mathbb{R}^2$. Hallar:

a. $\langle S \rangle$.

b. El vector $(2, 3)$ pertenece a $\langle S \rangle$?

Para determinar $\langle S \rangle$, se plantea una combinación lineal con los vectores del conjunto S .

a. $\langle S \rangle$.

$$(a, b) = \alpha (1, -2) + \beta (-3, 6)$$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = a \\ -2\alpha + 6\beta = b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a \\ -2 & 6 & b \end{array} \right) f_2 + 2f_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a \\ 0 & 0 & 2a + b \end{array} \right)$$

Para que el sistema tenga solución, $b + 2a = 0$.

$$\langle S \rangle : b + 2a = 0$$

Subespacio generado por el conjunto S :

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 2a + b = 0\}$$

b. El vector $(2, 3)$ pertenece a $\langle S \rangle$?

Para analizar si el vector $(2, 3)$, pertenece a $\langle S \rangle$, se verifica si cumple la condición $b + 2a = 0$

$$3 + 2(2) = 0$$

$$7 \neq 0$$

Como el vector $(2, 3)$, no cumple la igualdad, el vector no pertenece a $\langle S \rangle$

Ejemplo 62 Sea $\mathbf{S} = \{1 + t - t^2, 2 + t - 3t^2, 1 + 3t + t^2, 1 + 2t\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathbf{P}_2(t)$. Hallar el subespacio vectorial generado por $\langle \mathbf{S} \rangle$, además determinar una base.

$$a + bt + ct^2 = \alpha(1 + t - t^2) + \beta(2 + t - 3t^2) + \gamma(1 + 3t + t^2) + \theta(1 + 2t)$$

$$a + bt + ct^2 = (\alpha + 2\beta + \gamma + \theta) + (\alpha + \beta + 3\gamma + 2\theta)t + (-\alpha - 3\beta + \gamma)t^2$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + \theta = a \\ \alpha + \beta + 3\gamma + 2\theta = b \\ -\alpha - 3\beta + \gamma = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3 & 2 & b \\ -1 & -3 & 1 & 0 & c \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 + f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & 1 & b - a \\ 0 & -1 & 2 & 1 & a + c \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a - b + c \end{array} \right)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \{a + bt + ct^2 \in \mathbf{P}_2(t) : 2a - b + c = 0\}$$

$$b = 2a + c$$

$$\mathbf{B}_S = \{a + (2a + c)t + ct^2\}$$

$$\mathbf{B}_S = \{a + 2at, ct + ct^2\}$$

$$\mathbf{B}_S = \{1 + 2t, t + t^2\}$$

Ejemplo 63 Demostrar que el subespacio de $\mathbf{R}^3$ en el que se encuentran los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, -2, 2)$ es el plano $x + y + z = 0$. Y verifique si el vector $(1, 1, -2)$ se encuentra en dicho subespacio.

Se plantea la combinación lineal, igualando al vector más general del espacio $\mathbf{R}^3$

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, -2) + \gamma(0, -2, 2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & -2 & y \\ -1 & -2 & 2 & z \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & -2 & y \\ 0 & -2 & 2 & x + z \end{array} \right)$$

$$f_3 + f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z \end{array} \right)$$

Se verifica que el plano generado por los vectores dados es el, $x + y + z = 0$

El vector $(1, 1, -2)$ pertenece al subespacio generado por los tres vectores, ya que cumple con la ecuación, $x + y + z = 0 \rightarrow 1 + 1 + (-2) = 0$.

Ejemplo 64 Dado el conjunto $S = \{1+x-x^2, 3x-4x^2, 1-2x+3x^2\}$, $S \in P_{\leq 2}(x)$, hallar $\langle S \rangle$ y establecer una base para el subespacio generado.

Se plantea la ecuación lineal:

$$a + bx + cx^2 = \alpha(1 + x - x^2) + \beta(3x - 4x^2) + \gamma(1 - 2x + 3x^2)$$

$$a + bx + cx^2 = (\alpha + \gamma) + (\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-\alpha - 4\beta + 3\gamma)x^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + 3\beta - 2\gamma = b \\ -\alpha - 4\beta + 3\gamma = c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 & b \\ -1 & -4 & 3 & c \end{array} \right) f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & -3 & b-a \\ 0 & -4 & 4 & a+c \end{array} \right) \frac{1}{3}f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{(b-a)}{3} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{(a+c)}{4} \end{array} \right) \\ & f_3 + f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & -3 & b-a \\ 0 & -4 & 4 & a+c \end{array} \right) \frac{1}{4}f_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{(b-a)}{3} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{(a+c)}{4} \end{array} \right) \\ & = f_3 + f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{(b-a)}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-a+4b+3c)}{12} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para que el sistema tenga solución: $-a + 4b + 3c = 0$, $Span\langle S \rangle: -a + 4b + 3c = 0$

$$S = \{a + bx + cx^2 \in P_2(x) : -a + 4b + 3c = 0\}$$

Para determinar una base, se parte de: $a = 4b + 3c$

$$a + bx + cx^2$$

$$\underbrace{4b + 3c}_a + bx + cx^2$$

$$(4b + bx) + (3c + cx^2)$$

Si $b = 1$ y $c = 1$

$$\mathbf{B}_S = \{4 + x; 3 + x^2\}$$

Ejemplo 65 Dada el s.e.v $\mathbf{W} = \{a + bx + cx^2 \in \mathbf{P}_2(x) / p'(0) = p(-1)\}$ del e.v. $\mathbf{P}_2(x)$ sobre R . Determinar un conjunto generador de $\mathbf{W}$.

$$p'(0) = b + 2c(0) = b$$

$$p(-1) = a + b(-1) + c(-1)^2 = a - b + c$$

$$p'(0) = p(-1)$$

$$b = a - b + c$$

$$a - 2b + c = 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$\mathbf{W} = \{a + bx + cx^2 \in \mathbf{P}_2(x) / a - 2b + c = 0\}$$

De la expresión IV.1 se puede despejar una de las variables, en este caso se despeja a y se reemplaza en el vector general $a + bx + cx^2$, quedando la expresión:

$$2b - c + bx + cx^2$$

Para determinar la base se agrupan los términos que tengan las mismas variables:

$$2b + bx - c + cx^2$$

$$(2 + x)b ; (-1 + x^2)c$$

por lo tanto si $b = 1$ y $c = 1$, la base es:

$\mathbf{B}_W = \{2+x, -1+x^2\}$, que puede ser considerado como un conjunto generador de $\mathbf{W}$

Ejemplo 66 Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos. En caso de ser linealmente dependiente, hallar una relación de dependencia a :

a. $S = \{(1, -1, -2, 3), (1, -1, 0, 2), (-2, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 1)\}$

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha(1, -1, -2, 3) + \beta(1, -1, 0, 2) + \gamma(-2, 0, 1, -1) + \delta(0, 1, 0, 1)$$

Aplicando eliminación Gaussiana al sistema aumentado:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 + f_1 \\ f_3 + 2f_1 \\ f_4 - 3f_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + 2f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\frac{1}{7}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 + 2f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema escalonado resultante es:

$$\alpha + \beta - 2\gamma = 0$$

$$-\beta + 5\gamma + \delta = 0$$

$$\gamma + \frac{2}{7}\delta = 0$$

$$\frac{11}{7}\delta = 0$$

El sistema tiene la solución trivial por lo tanto es linealmente independiente.

b. $S = \{-1, 2e^{2x}, x^2e^{2x}\}$

Aplicando el Wronskiano y analizando el determinante.

$$w(x) = \begin{vmatrix} -1 & 2e^{2x} & x^2e^{2x} \\ 0 & 4e^{2x} & 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} \\ 0 & 8e^{2x} & 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4e^{2x} & 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} \\ 8e^{2x} & 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{f_2 - 2f_1} \begin{vmatrix} 4e^{2x} & 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} + 4xe^{2x} \end{vmatrix} = -4e^{2x} (2e^{2x} + 4xe^{2x}) = -8e^{4x} (1 + 2x)$$

El determinante es diferente de 0, $w(x) \neq 0$, por lo tanto, el conjunto $S = \{-1, 2e^{2x}, x^2e^{2x}\}$ es linealmente independiente.

c. Sea $S = \{1 + 2x - x^2, -1 + \alpha x + \beta x^2, -2 - 4x + (\alpha^2 + \alpha)x^2\}$.

i. Para que valores de α y β es l.d. ? Hallar una relación de dependencia en cada caso.

$$0 = \delta(1 + 2x - x^2) + \theta(-1 + \alpha x + \beta x^2) + \phi(-2 - 4x + (\alpha^2 + \alpha)x^2)$$

$$0 = (\delta - \theta - 2\phi) + (2\delta + \alpha\theta - 4\phi)x + (-\delta + \beta\theta + (\alpha^2 + \alpha)\phi)x^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & \alpha & -4 & 0 \\ -1 & \beta & (\alpha^2 + \alpha) & 0 \end{array} \right)$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & \alpha & -4 \\ -1 & \beta & (\alpha^2 + \alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha + 2 & 0 \\ 0 & \beta - 1 & (\alpha^2 + \alpha - 2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha + 2 & 0 \\ \beta - 1 & (\alpha^2 + \alpha - 2) \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha - 2) = (\alpha + 2)(\alpha + 2)(\alpha - 1)$$

$$(\alpha + 2)^2 (\alpha - 1) = 0$$

$\beta \in R$ puede tomar cualquier valor no influye en la relación de dependencia

Cuando $\alpha = -2$ o $\alpha = 1$ el sistema es linealmente dependiente.

ii. Para que los valores de α y β es l.i.?

$\beta \in R$ puede tomar cualquier valor no influye en la relación de independencia. Cuando $\alpha \neq -2, \alpha \neq 1$ el sistema es linealmente dependiente.

iii. Hallar $\langle S \rangle$ en cada caso de la parte (a)

Con $\alpha = -2$ y $\beta = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Aplicando eliminación Guassiana, (Se deja para el lector realizar la eliminación) $\langle S \rangle : b - 2a = 0$

$$S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbf{P}_2(x) : b - 2a = 0\}$$

Con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Aplicando eliminación Guassiana, (Se deja para el lector realizar la eliminación) $\langle S \rangle : c = 0$

$$S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbf{P}_2(x) : c = 0\}$$

Ejemplo 67 Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(R)_2 : p - q - r = 0 \wedge p + q - s = 0 \right\}$. Demostrar que M es un s.e.v. de $\langle \mathbf{Mat}(R)_2, R, +, \bullet \rangle$ Determine una base, diga su dimensión.

Desarrollo

Partiendo de las condiciones dadas en el conjunto M

$$\begin{array}{ll} p - q - r = 0 & p + q - s = 0 \\ r = p - q & s = p + q \end{array}$$

$$U = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_1 - q_1 & p_1 + q_1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ p_2 - q_2 & p_2 + q_2 \end{pmatrix}$$

Por demostrar que: $U + V \in M$ y $\alpha U \in R$

i. $\mathbf{U} + \mathbf{V} \in \mathbf{M}$

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_1 - q_1 & p_1 + q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ p_2 - q_2 & p_2 + q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 + p_2 & q_1 + q_2 \\ p_1 - q_1 + p_2 - q_2 & p_1 + q_1 + p_2 + q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 + p_2 & q_1 + q_2 \\ p_1 + p_2 - (q_1 + q_2) & p_1 + q_1 + p_2 + q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii. $\alpha \mathbf{U} \in R$

$$\alpha \mathbf{U} = \alpha \mathbf{U}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_1 - q_1 & p_1 + q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha q_1 \\ \alpha(p_1 - q_1) & \alpha(p_1 + q_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha q_1 \\ \alpha p_1 - \alpha q_1 & \alpha p_1 + \alpha q_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El conjunto $\mathbf{M}$, es un subespacio vectorial de $\text{Mat}(R)_2$

Para determinar la base se parte de las condiciones dadas: $r = p - q$,

$$s = p + q$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{B}_M = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ p - q & p + q \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B}_M = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ p & p \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & q \end{pmatrix} \right\}, \text{ si } p = 1 \text{ y } q = 1$$

$$\mathbf{B}_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\mathbf{B}_M) = 2$$

Suma e Intersección de Subespacios Vectoriales

Intersección de Subespacios Vectoriales:

Sea $\langle V, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial cualquiera con W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V , la intersección se define como (Cuevas, 2009):

$$W_1 \cap W_2 = \{v \in V : v \in W_1 \wedge W_2\}$$

Se denomina intersección de los subespacios vectoriales W_1 y W_2 , al conjunto de todos los vectores pertenecientes simultáneamente tanto a W_1 como a W_2 .

Teorema 4 Sea $\langle V, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial cualquiera con W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V , la intersección $W_1 \cap W_2$, es otro subespacio vectorial del mismo espacio vectorial

Suma de Subespacios Vectoriales:

Dado un espacio vectorial $\langle V, R, +, \bullet \rangle$, y dos subespacios suyos W_1 y W_2 , se denominan suma de dichos subespacios, y se representa por $W_1 + W_2$, al conjunto de todos los vectores de V que pueden expresarse como suma de un vector de W_1 y otro de W_2 .

$$W_1 + W_2 = \{v \in V : w_1 + w_2 = v, w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$$

Para tomar en cuenta:

- Obsérvese que, tanto la intersección como la suma de subespacios siempre son conjuntos no vacíos, ya que les pertenece a ciencia cierta el vector nulo del espacio vectorial V .
- Para encontrar la intersección de subespacios, se formará un sistema de ecuaciones con las condiciones de los subespacios dados.
- Para encontrar la suma de subespacios vectoriales se necesita las bases de cada uno de los subespacios, con las bases se formará una matriz y mediante la eliminación Gaussiana se eliminan los vectores redundantes. Los vectores que no se anulan forman la base de la suma.

- Si $W_1 \cap W_2 = \phi$ (ϕ elemento neutro), se dice que los conjuntos son disjuntos. Se debe recordar que para que un conjunto sea considerado subespacio vectorial debe contener el elemento neutro, por lo que este elemento va a estar presente en todo subespacio.

Suma Directa:

Dados un espacio vectorial $\langle V, R, +, \bullet \rangle$, y dos subespacios suyos W_1 y W_2 , se denominan suma directa de dos subespacios, y se representa por $W_1 \oplus W_2$, si $v = u + w$ tal que si $\exists! u \in W_1$ y $\exists! w \in W_2$, da como resultado $v = u + w$.

$$W_1 \oplus W_2 = \{v \in V : (\exists! u \in W_1) (\exists! w \in W_2), v = u + w\}$$

- La suma directa se presenta cuando: $W_1 \cap W_2 = \phi$, es decir los subespacios son disjuntos.
- Si W_1 y W_2 son disjuntos, estos subespacios toman el nombre de subespacios suplementarios.

Ejemplo 68 *Dados los siguientes subespacios*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y - 5z = 0\}$$

Determinar:

- i. $S \cap T$
- ii. $S + T$
- iii. $S \oplus T$
- i. $S \cap T$

Para determinar la intersección, se plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones de cada uno de los subespacios, de tal manera que la solución de este sistema forma el conjunto de los vectores comunes para los subespacios dados.

$$x - 2y + z = 0$$

$$x + y - 5z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

Reescribiendo el sistema escalonado:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 3y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, por lo tanto: $y = \frac{6z}{3} = 2z$; $x = 3z$

La solución general del sistema es: $(x, y, z) = (3z, 2z, z)$, si $z = 1$,

$$(x, y, z) = (3, 2, 1)$$

Que representa la base del subespacio intersección.

La intersección presentada como subespacio:

$$\mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{aligned} x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Una base de la intersección: $\mathbf{B}_{\mathbf{S} \cap \mathbf{T}} \{(3, 2, 1)\}$, y su dimensión es uno "1"

ii. $\mathbf{S} + \mathbf{T}$

Para encontrar la suma se necesitan las bases de cada uno de los subespacios:

Base del subespacio $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$x = 2y - z$$

$$(2y - z, y, z)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{S}} = \{(2, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$$

Base del subespacio $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y - 5z = 0\}$$

$$x + y - 5z = 0$$

$$x = -y + 5z$$

$$(-y + 5z, y, z)$$

$$\mathbf{B}_T = \{(-1, 1, 0); (5, 0, 1)\}$$

Para obtener la suma:

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante la eliminación Gaussiana se eliminan los vectores múltiplos o redundantes, dando como resultado los vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_2 \leftrightarrow (-1) f_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - 2f_1 \\ f_3 + f_1 \\ f_4 - 5f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f_3 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} f_4 + 2f_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la base de $\mathbf{S} + \mathbf{T}$, es $\mathbf{B}_{\mathbf{S}+\mathbf{T}} = \{(1, 0, -1); (0, 1, 2); (0, 0, -3)\}$

Esto indica que la suma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$, da como resultado todo $\mathbf{R}^3$

iii. $\mathbf{S} \oplus \mathbf{T}$

La suma no es directa ya que $\mathbf{B}_{\mathbf{S} \cap \mathbf{T}} \{(3, 2, 1)\}$

Ejemplo 69 Se consideran los subespacios:

$$\mathbf{Mat}(R)_2 : \mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} a, b \in R \right\} \text{ y } \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} c, e, d \in R \right\}.$$

Encuentre una base de los espacios $\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2; \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2; \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$.

Base de los espacios $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$

Para hallar una base de los espacios de V_1 y V_2 se realizan los siguientes cálculos: Base para V_1

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$$

Ahora bien, como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Una base para el subespacio } V_1: B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Una base para } V_2: B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} : c, e, d \in R \right\}$$

Como:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base para el subespacio V_2

$$B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para la Intersección, se ocupa las siguientes condiciones que se pueden deducir de los conjuntos dados:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b \in R : \begin{matrix} a - d = 0 \\ b + c = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix} : m, n, p \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} : m, n, p, q \in R : \begin{matrix} m + q = 0 \end{matrix} \right\}$$

Si el conjunto V_2 , se lo escribe en función de las mismas variables del V_1 , se tiene:

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R : a + d = 0 \right\}$$

Para determinar la intersección $V_1 \cap V_2$, se resuelve el sistema formado por las condiciones de los subespacios dados:

$$\begin{cases} a - d = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) f_3 - f_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Escribiendo el sistema escalonado se tiene:

$$\begin{aligned} a - d &= 0 \\ b + c &= 0 \\ -2d &= 0 \end{aligned}$$

$$d = 0 \quad ; \quad b = -c \quad ; \quad a = 0$$

Por lo tanto, el subespacio intersección es:

$$\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(R)_2 : \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{array} \right\}$$

La base de la Intersección es: $\mathbf{B}_{\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, y su dimensión $\dim(\mathbf{B}_{\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2}) = 1$.

Para la obtención de la suma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, se utiliza las bases:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{V}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{V}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se arma una matriz con cada uno de los elementos de las bases de los subespacios $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, se aplica eliminación gaussiana, para eliminar los vectores múltiplos.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) f_3 - f_1 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) f_4 - f_2 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$f_3 \leftrightarrow f_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} f_3 \leftrightarrow f_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} f_5 + 2f_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base de la suma $V_1 + V_2$, es:

$B_{V_1+V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, su dimensión es cuatro, lo que indica que la suma da como resultado el espacio vectorial $\text{Mat}(R)_2$

Teorema de la Dimensión:

Teorema 5 Sean S y T , dos subespacio de un mismo espacio vectorial V , se cumple que:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

$$\dim(S \cap T) = 0, \text{ si } S \cap T = \{\phi\}$$

Considerando el teorema de la dimensión, en el **Ejemplo 69** se puede observar que se cumple:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$4 = 2 + 3 - 1$$

$$4 = 4$$

Ejemplo 70 Dados los s.e.v.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(R)_2 : b = c \wedge b - c = d \right\} y$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ del e.v. } \langle \text{Mat}_2(R), R, +, \bullet \rangle. \text{ Hallar:}$$

a) Una base para el s.e.v. $W_1 \cap W_2$

b) La cápsula de W_2 , y su respectiva base

Desarrollo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 1 & -1 & 2 & d \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & -1 & 3 & d - a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_3 - f_2 \\ f_4 + f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c - b \\ 0 & 0 & 2 & d + b - a \end{array} \right)$$

Para que el sistema tenga solución: $c - b = 0$, por lo tanto el subespacio $\mathbf{W}_2$, queda definido de la siguiente manera: $\mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(R)_2 : c - b = 0 \right\}$, y su base es:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{W}_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{W}_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{W}_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Para determinar la base de la intersección de $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$, se arma el sistema con las condiciones de los subespacios dados.

$$\begin{aligned} b - c - d &= 0 \\ b - c &= 0 \\ -b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Escribiendo el sistema escalonado

$$b - c - d = 0$$

$$d = 0$$

Se observa que: $d = 0$ y $b = c$, por lo que el subespacio intersección, queda representado de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(R)_2 : b = c \wedge d = 0 \right\}$$

Y la base se determina al separar las variables del conjunto dado, $\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}, a = 1 \wedge b = 1$$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión de la intersección es: $\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = 2$

b) Una base B para el s.e.v. $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$

$$\mathbf{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(R)_2 : b = c \wedge b - c = d \right\}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La suma de subespacios vectoriales se obtiene eliminando los vectores que presentan multiplicidad o son combinaciones lineales de otros vectores, para lo cual se arma una matriz con cada una de las bases de los subespacios dados y se procede a realizar la eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 - f_1 \\ f_4 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una forma de comprobar si el ejercicio propuesto está bien realizado, es mediante el Teorema de la Dimensión:

$$\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = \dim(\mathbf{W}_1) + \dim(\mathbf{W}_2) - \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$$

$$3 = 2 + 3 - 2$$

$$3 = 3$$

Vectores Coordinados

Sea $\langle \mathbf{V}, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que: $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. El vector en $\mathbf{R}^n$ cuyas componentes son los coeficientes de $\mathbf{v}$ expresado como $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$, se llama vector de coordenadas o vector coordinado de $\mathbf{v}$ con respecto a $\mathbf{B}$:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Observar que $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ se modifica cuando cambia la base $\mathbf{B}$ (ver figura IV.2). También $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ depende del orden de los elementos de $\mathbf{B}$. Se mantendrá fijo este orden cuando se tenga una base ordenada. Se debe recordar que en la definición matemática de conjunto, el orden de los elementos no afecta al conjunto, sin embargo, en la definición de base ordenada el orden es importante.

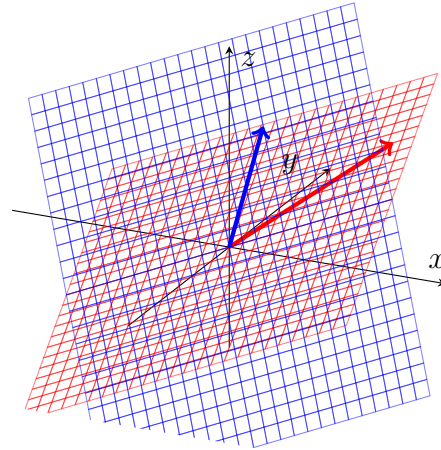


Figura IV.2: Representación de dos sistemas coordenados

Vector de Coordenadas y $\mathbb{R}^m$

Teorema 6 Sea $\mathbf{B}$ una base ordenada de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión finita. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores en $\mathbf{V}$. Entonces, $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ en $\mathbf{V}$, si y sólo si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ es una combinación lineal de $[\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}}, \dots, [\mathbf{v}_n]_{\mathbf{B}}$ en $\mathbb{R}^n$. Además, para los escalares $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

si y sólo si:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \alpha_1 [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}} + \alpha_2 [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}} + \dots + \alpha_n [\mathbf{v}_n]_{\mathbf{B}}$$

Ejemplo 71 Determine el polinomio $p(x)$ sabiendo que su vector de coordenadas respecto a la base: $\mathbf{B} = \{1 - 7x; -5 - 4x\}$, $[p(x)]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Por definición: $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_m \mathbf{u}_m$, se tiene que:

$$\mathbf{u} = -6(1 - 7x) + 2(-5 - 4x)$$

$$\mathbf{u} = -16 + 34x$$

Ejemplo 72 En el espacio vectorial de los polinomios $\mathbf{P}(x)$, determine el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = -2 - 5x$ respecto a la base ordenada $\mathbf{B} = \{2 - 4x; 4 + x\}$.

$$-2 - 5x = \alpha_1(2 - 4x) + \alpha_2(4 + x)$$

Planteando el sistema de ecuaciones:

$$-2 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

$$-5 = -4\alpha_1 + \alpha_2$$

Sus coordenadas serán

$$[p(x)]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expresar $(-2, -8, -6)$ como combinación lineal de $(1, -1, 1)$ y $(2, 3, 4)$.
2. Dado el conjunto $\mathbf{S} = \{(1, -2); (-3, 6)\}$. Hallar $\mathbf{S}$.
3. Dado el conjunto $\mathbf{S} = \{(-1, -1, 1); (-8, 1, -4); (2, -1, 2)\}$. Hallar $\mathbf{S}$.
4. Dado el conjunto $\mathbf{S} = \{(-1, 1); (2, -3)\}$. Hallar $\mathbf{S}$.
5. Dado el conjunto $\mathbf{S} = \{(2, 1, -4)\}$. Hallar $\mathbf{S}$.
6. Dado el conjunto $\mathbf{S} = \{1 + x - x^2, 3x - 4x^2, 1 - 2x + 3x^2\}$. Hallar $\mathbf{S}$.
7. Dado el s.e.v. $\mathbf{T} = \{\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbf{R})_3 / \mathbf{A} \text{ es antisimétrica}\}$ del e.v. $\text{Mat}(R)_3$. Determinar un conjunto generador de $\mathbf{T}$.
8. Dado el s.e.v. $\mathbf{W} = \{p \in \mathbf{P}_2(x) / p'(0) = p(-1)\}$ del e.v. $\mathbf{P}_2(x)$ sobre R . Determinar un conjunto generador de $\mathbf{W}$.
9. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos. En caso de ser linealmente dependiente, hallar una relación de dependencia.
 - i. $\mathbf{S} = \{(1, 1, -2, 3), (1, -1, 0, 2), (-2, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 1)\}$.
 - ii. $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.
 - iii. $\mathbf{S} = \{1, \sqrt{3}\}$ sobre el e.v. $(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+, \bullet)$.
 - iv. $\mathbf{S} = \{1, \sqrt{3}\}$ sobre el e.v. $(\mathbf{R}, \mathbf{Q}_+, \bullet)$.
 - v. $\mathbf{S} = \{1, \sin(2x), \cos(2x)\}$.
 - vi. $\mathbf{S} = \{1, \sin^2(x), \cos^2(x)\}$.
 - vii. $\mathbf{S} = \{-1, 2e^{2x}, x^2e^{2x}\}$.

10. Sea $S = \{1 + 2x - x^2, -1 + \alpha x + \beta x^2, -2 - 4x + (\alpha^2 + \alpha)x^2\}$. El campo es $\mathbf{R}$.

- a) ¿Para qué valores de α y β , S es l.d.? Hallar una relación de dependencia en cada caso.
- b) ¿Para qué valores de α y β , S es l.i.?
- c) Hallar $\langle S \rangle$ en cada caso de la parte (b).

11. Sea $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Demostrar que: $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es l.i. si $\alpha \neq 0$.

12. Sean W_1 y W_2 s.e.v. de un e.v. V sobre K , de dimensión finita, tal que: $V = W_1 \oplus W_2$. Demostrar que:

- i. Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq W_1$ y $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq W_2$ son l.i., entonces $\{u_i, v_j\}$ es l.i.

13. Sean W_1 y W_2 dos s.e.v. de $\mathbf{R}^4$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^4$. Sea $W_1 = \{e_2, e_2 - e_3 + e_4\}$ y $W_2 = \{e_3, e_1 - e_3 - e_4\}$.

- a) Hallar las ecuaciones generadoras de W_1 y de W_2 .
- b) Determinar $W_1 \cap W_2$.

14. Sea $S = \{1 - t - 2t^2; 2 + t - t^2; t + t^2\}$. ¿ S es base de $P_2(t)$?

15. Sea $S = \{(1, 2), (2, 3), (-5, 7)\}$. ¿ S es base de $\mathbf{R}^2$?

16. Sea $W = \{(x, y, z) / x + 2y - z = 0; x - 2z = 0\}$, un s.e.v. del e.v. $\mathbf{R}^3$. Determinar una base de W , diga su dimensión.

17. Sea $W = \{A \in \text{Mat}(\mathbf{R})_2 / AM = 0\}$, un s.e.v. de $\text{Mat}(\mathbf{R})_2$. Determinar una base de W , donde $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

18.

Sea $W = \left\{ p(x) \in P_3(x) / \int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \right\}$, un espacio vectorial de $P_3(x)$.

Calcular una base de W .

19. Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} / \begin{matrix} p - q - r = 0 \\ p + q - s = 0 \end{matrix} \right\}$.

- a) Demostrar que M es un s.e.v. de $\langle \text{Mat}(R)_2, R, +, \bullet \rangle$. Hallar una base de este s.e.v. y diga su dimensión.
- b) Demostrar que $(\forall A \in \text{Mat}(R)_2, A \neq 0)$: A es invertible. Hallar la inversa de A .
- c) ¿La matriz A^{-1} pertenece a M ? En caso de que sea falso, ¿qué condición hay que añadir sobre p y q para que A^{-1} pertenezca a M ?
- d) Sea $N = \{A \in \text{Mat}(R)_2 / A^{-1} \in \text{Mat}(R)_2\} \cup \{\phi_2\}$. ¿ N es un s.e.v. de M ?

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Determinar el s.e.v. de menor dimensión de $\langle \text{Mat}(R)_3, R, +, \bullet \rangle$ que contiene a todas las matrices $I, A, A^2, \dots, A^n$. Dar una base y diga su dimensión.

21. Sea $W = \{p(x) \in P_3(x) / p(x) = a + bx - bx^2 + 2a - bx^3, a, b \in R\}$ un s.e.v. de $P_3(x)$.

- a) Calcular una base B para W y diga la dimensión de W .
- b) Dar una base del e.v. $P_3(x)$ tal que contenga la base B .



CAPÍTULO V

Espacios Euclídeos

Espacios Euclídeos

La historia y la teoría de los espacios euclídeos están estrechamente ligadas al trabajo del matemático griego Euclides y a su obra fundamental "Elementos", escrita alrededor del 300 a.C. Esta obra estableció los fundamentos de la geometría euclidiana, que es el estudio de las propiedades geométricas del espacio euclidiano.

Euclides, un matemático griego que vivió en el siglo III a.C., escribió "Elementos", una obra que sistematizó gran parte del conocimiento matemático de su tiempo. En "Elementos", Euclides presenta los axiomas y postulados que forman la base de la geometría euclidiana, incluida la noción de espacio euclidiano y las propiedades de las figuras geométricas en este espacio.

A lo largo de los siglos, los principios establecidos por Euclides en "Elementos" continuaron siendo fundamentales en el estudio de la geometría y la geometría euclidiana se convirtió en un campo central en las matemáticas.

Los espacios euclidianos tienen una amplia gama de aplicaciones en matemáticas, física, ingeniería y otras disciplinas. Por ejemplo, se utilizan en la geometría analítica para estudiar figuras geométricas y resolver problemas geométricos utilizando coordenadas cartesianas. Además, los espacios euclidianos son la base de la física clásica y se utilizan para modelar el movimiento de objetos en el espacio tridimensional.

Técnicamente un Espacio Euclídeo es un espacio vectorial en el cual se ha definido un producto interno.

Producto interno

Sean $\langle V, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial cualquiera. Un producto interno sobre V es una función: $V \times V \rightarrow R, k, k \in R$, si cumple con los siguientes axiomas (Cuevas, 2009):

Sean $u, v \wedge w \in V; \alpha \in R$

1. **Linealidad:** $\langle (u + v) \cdot w \rangle = \langle u \cdot w \rangle + \langle v \cdot w \rangle$

2. **Homogeneidad:** $\langle \alpha u \cdot v \rangle = \alpha \langle u \cdot v \rangle$

3. **Simetría:** $\langle u \cdot v \rangle = \langle v \cdot u \rangle$

4. **Positividad:** $\langle v \cdot v \rangle > 0, v \neq 0$

A la estructura de espacio vectorial junto con un producto interno se le denomina espacio con producto interior.

Productos Internos definidos, en diferentes espacios vectoriales:

- i. $\langle \mathbb{R}^2, R, +, \bullet \rangle$

Sean: $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2); u \text{ y } v \in \mathbb{R}^2$

$$\langle u \cdot v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- ii. $\langle \mathbb{R}^3, R, +, \bullet \rangle$

Sean: $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3); u \text{ y } v \in \mathbb{R}^3$

$$\langle u \cdot v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

- iii. En general para $\langle \mathbb{R}^n, R, +, \bullet \rangle$

Sean: $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \dots, y_n); u \text{ y } v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u \cdot v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\text{Por lo tanto: } \langle u \cdot v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

- iv. $\langle \text{Mat}(R)_{m \times n}, R, +, \bullet \rangle$

Sean: $A \text{ y } B \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$

$$\langle A \cdot B \rangle = \text{tr}(AB^t)$$

v. $\langle \mathbf{F}, R, +, \bullet \rangle$ (Espacio vectorial de las funciones reales)

Sean $f(x)$ y $g(x) \in \mathbf{F}[a, b]$

$$\langle f \cdot g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

vi. $\langle \mathbf{P}_{\leq n}(x), R, +, \bullet \rangle$ (Espacio vectorial de las funciones reales)

Sean: $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx$

$p(x)$ y $q(x) \in \mathbf{P}_{\leq n}(x)$

$$\langle p \cdot q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

$$\langle p \cdot q \rangle = \sum_{i=0}^n a_ib_i = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

Ejemplo 73 Determinar si la siguiente expresión $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$ puede ser considerada un producto interno, si: $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$. (García, 2024)

Para que la expresión dada sea considerada un producto interno deberá cumplir con los axiomas anteriormente expuestos:

1. Linealidad: $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \rangle &= \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \rangle && A. Reflexivo \\ &= \langle [(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] \cdot (c_1, c_2) \rangle && Def. vectores \\ &= \langle (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \cdot (c_1, c_2) \rangle && Def. Suma vectores \\ &= (a_1 + b_1)c_1 - (a_2 + b_2)c_1 - (a_1 + b_1)c_2 + 2(a_2 + b_2)c_2 \\ &&& Hipótesis \\ &= a_1c_1 + b_1c_1 - a_2c_1 - b_2c_1 - a_1c_2 - b_1c_2 + 2a_2c_2 + 2b_2c_2 \\ &&& A. Distributivo \\ &= (a_1c_1 - a_2c_1 - a_1c_2 + 2a_2c_2) + (b_1c_1 - b_2c_1 - b_1c_2 + 2b_2c_2) \\ &&& A. Asociativo \\ &= \langle (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) \rangle + \langle (b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2) \rangle && Hipótesis \\ &= \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

2. Homogeneidad: $\langle \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle &= \langle \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle && \text{Axio. Reflexivo} \\
 &= \langle \alpha(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \rangle && \text{Def. vectores} \\
 &= \langle (\alpha a_1, \alpha a_2) \cdot (b_1, b_2) \rangle && \text{P. P. Escalar} \\
 &= \alpha a_1 b_1 - \alpha a_2 b_1 - \alpha a_1 b_2 + 2\alpha a_2 b_2 && \text{Hipótesis} \\
 &= \alpha(a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2a_2 b_2) && \text{Axio. Recolectivo} \\
 &= \langle (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \rangle \\
 &= \alpha \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle
 \end{aligned}$$

3. Simetría: $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle && \text{Axio. Reflexivo} \\
 &= \langle (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \rangle && \text{Def. vectores} \\
 &= a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2a_2 b_2 && \text{Hipotesis} \\
 &= b_1 a_1 - b_1 a_2 - b_2 a_1 + 2b_2 a_2 && \text{Axio. Conmutativo} \\
 &= \langle (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) \rangle && \text{Hipótesis} \\
 &= \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \rangle
 \end{aligned}$$

4. Positividad: $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle > 0, \mathbf{v} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle && \text{Axio. Reflexivo} \\
 &= \langle (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) \rangle && \text{Def. vectores} \\
 &= a_1 a_1 - a_2 a_1 - a_1 a_2 + 2a_2 a_2 && \text{Hipotesis} \\
 &= a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 + a_2^2 && \text{Suma de escalares} \\
 &= (a_1 - a_2)^2 + a_2^2 && \text{Def. Producto Notable} \\
 &= (a_1 - a_2)^2 + a_2^2 > 0
 \end{aligned}$$

Espacio Euclídeo

En matemáticas, el Espacio Euclídeo es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría.

Sea V un Espacio Vectorial cualquiera, $\langle V, R, +, \bullet \rangle$ este espacio toma el nombre de Espacio Euclídeo si en este espacio se ha definido un producto interno.

Métricas en un Espacio Euclídeo

Para las métricas que se definen a continuación considere $\langle \mathbf{V}, R, +, \bullet \rangle$

Norma (módulo)

La longitud de un vector $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, a menudo se denomina norma de $\mathbf{u}$ y se denota por $\|\mathbf{v}\|$.

La norma de un vector se define de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle} \quad (\text{V.1})$$

Un vector de norma 1, $\|\mathbf{v}\| = 1$ se denomina vector unitario.

Ejemplo 74 Determinar la norma de los siguientes vectores:

i. Sea $\mathbf{u} = (3, 4)$; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle (3, 4) \cdot (3, 4) \rangle}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{25}$$

$$\|\mathbf{u}\| = 5$$

ii. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbf{R})_2$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \rangle}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right]}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

iii. Sea $f(x) = e^x; F[1, 2]$

$$||f(x)|| = \sqrt{\langle f \cdot f \rangle}$$

$$||f(x)|| = \sqrt{\int_1^2 f(x) f(x) dx}$$

$$||f(x)|| = \sqrt{\int_1^2 e^{2x} dx}$$

$$||f(x)|| = \sqrt{\left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_1^2}$$

$$||f(x)|| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^4 - e^2)}$$

Propiedades de la Norma

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $ \mathbf{u} \geq 0$ | Positividad |
| 2. $ \alpha \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} , \alpha \in \mathbf{R}$ | Homogeneidad |
| 3. $ \mathbf{u} + \mathbf{v} \leq \mathbf{u} + \mathbf{v} $ | Desigualdad Triangular |

Un espacio vectorial $\mathbf{V}$ en el que hay definida una norma se denomina espacio vectorial normado.

Distancia entre Vectores

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, la distancia entre dos vectores, es una métrica que se lo puede calcular de la siguiente manera.

Por motivos de explicación se considerará dos vectores del espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, tal como se muestra en la Figura V.1

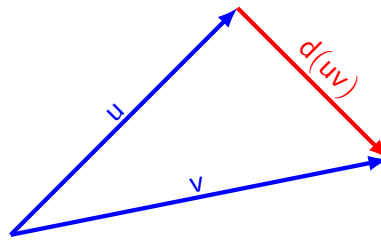


Figura V.1: Representación gráfica de la distancia de vectores

La suma de vectores, gráficamente se puede definir como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \overrightarrow{u\mathbf{v}}$$

Despejando $\overrightarrow{u\mathbf{v}}$, se tiene:

$$\overrightarrow{u\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

Como la distancia es una métrica, se obtiene la norma, por lo tanto:

$$\|\mathbf{uv}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \quad (\text{V.2})$$

Ejemplo 75 Determinar la distancia entre los vectores dados: $\mathbf{u} = (1, 3)$; $\mathbf{v} = (2, 5)$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle}$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle (\mathbf{1} - \mathbf{2}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{2}) \rangle}$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle}$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5}$$

Paralelismo

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\langle \mathbf{V}, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial cualquiera, se dice que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si $\exists \alpha \in R$ tal que: $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{v}$

Perpendicularidad

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\langle \mathbf{V}, R, +, \bullet \rangle$ un espacio vectorial cualquiera, se dice que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle = 0$

Ejemplo 76 Supóngase que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores tales que: $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle = 3$, $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle = -5$, $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle = 6$, $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = -2$, $\|\mathbf{w}\| = 4$. Determine el valor de las siguientes expresiones (García, 2004):

1. $\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\|$
2. $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle$

Solución:

a. $\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\|$

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle (5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}) \cdot (5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}) \rangle}$$

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{25 \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle - 10 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle - 10 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle + 4 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle}$$

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{25 \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle - 20 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle + 4 \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle}$$

Se conoce que:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle};$$

Por lo tanto:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle; \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle = 16$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle; \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle = 4$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle;$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle; \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle = 4$$

Con estos valores reemplazando en la expresión anterior se tiene:

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{25(16) - 20(-5) + 4(4)}$$

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{400 + 100 + 16}$$

$$\|5\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\| = \sqrt{516}$$

b. $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle = 5\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle - 5\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle - 15\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle + \dots$$

$$\dots 2\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle + -2\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle - 6\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle + 3\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle = 6\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle - 5\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle - 17\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \rangle \dots$$

$$\dots - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle - 6\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle = 6(3) - 5(4) - 17(-5) - 4$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \cdot 5\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle = -23$$

Proyección de vectores

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2, \langle \mathbb{R}^2, R, +, \bullet \rangle$, la proyección se lo puede representar gráficamente tal como se muestra en la Figura V.2.

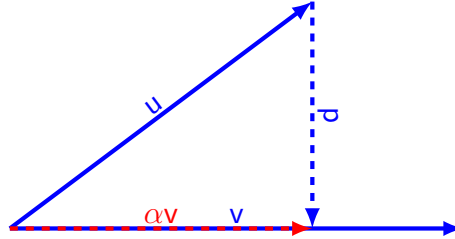


Figura V.2: Proyección de un vector u sobre un vector v

Para determinar la proyección del vector u sobre el vector v , se debe determinar el valor de α y este valor multiplicarlo por v , de tal forma que la proyección queda definido por:

$$\text{Proy}(v_u) = \alpha v$$

Para determinar α se considera la suma de vectores:

$$u + p = \alpha v$$

Al realizar el producto interno en ambos lados, con el vector v , de la igualdad se tiene:

$$\langle v \cdot u + p \rangle = \langle v \cdot \alpha v \rangle$$

$$\langle v \cdot u \rangle + \langle v \cdot p \rangle = \alpha \langle v \cdot v \rangle$$

$\langle v \cdot p \rangle = 0$, ya que v y p son perpendiculares.

Por lo tanto:

$$\langle v \cdot u \rangle = \alpha \langle v \cdot v \rangle$$

$$\alpha = \frac{\langle v \cdot u \rangle}{\langle v \cdot v \rangle}$$

La proyección del vector u sobre el vector v , queda definido:

$$\text{Proy}(v_u) = \frac{\langle v \cdot u \rangle}{\langle v \cdot v \rangle} v \quad (\text{V.3})$$

Ángulo entre vectores

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \langle \mathbb{R}^2, R, +, \bullet \rangle$, el ángulo entre vectores se lo puede representar gráficamente tal como se muestra en la Figura V.3.

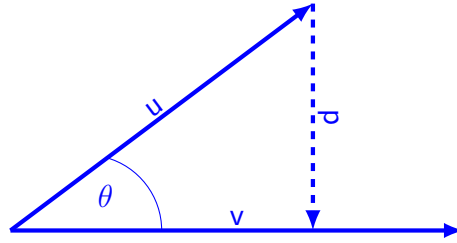


Figura V.3: Proyección de un vector $\mathbf{u}$ sobre un vector $\mathbf{v}$

Considerando un triángulo rectángulo formado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\alpha \mathbf{v}$, como se puede observar en la Figura V.3, se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\|\alpha \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|\alpha| \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Se conoce que: $\alpha = \frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle}$

Por lo tanto se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle} \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Y se conoce que: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle}$, por lo tanto $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle$, reemplazando en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|} \\ \cos \theta &= \frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Por lo tanto, la expresión para calcular el ángulo entre vectores, partiendo de $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|}$, queda definido como:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|} \right) \quad (\text{V.5})$$

Proceso de Ortogonalización

En matemáticas, el término ortogonalidad es una generalización de la noción geométrica de perpendicularidad. En el espacio euclídeo convencional, el término ortogonal y el término perpendicular son sinónimos.

Proceso de Gram – Schmith

Sea B_1 un subconjunto linealmente independiente $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B_1 \in V$, donde V es un espacio vectorial cualquiera; del conjunto B_1 se puede obtener un conjunto ortogonal $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, con el siguiente proceso:

1. $w_1 = u_1$
2. $w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$
3. $w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

Generalizando para n vectores, se tiene:

$$w_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \quad (V.6)$$

Ejemplo 77 Sea B_1 una base del Subespacio $\text{Mat}(R)_2$,

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ obtener una base ortogonal a partir de esta base.

Desarrollo:

De B_1 , se tiene que:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando:

$$w_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

$$w_1 = u_1$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $\mathbf{w}_2$:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

Recordar que para matrices, el producto interno está definido por:

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^t), \text{ para este caso } \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \rangle = \text{tr}(\mathbf{u} \mathbf{w}^t),$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]}{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}}{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{-5}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

Para $\mathbf{w}_3$:

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]}{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{13}{6} \end{pmatrix} \right]}{\text{tr} \left[\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{13}{6} \end{pmatrix} \right]} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}{\text{tr} \begin{pmatrix} \frac{41}{36} & \frac{41}{18} \\ \frac{41}{18} & \frac{205}{36} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{7}{3}}{\frac{246}{36}} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{39}{41} & \frac{27}{41} \\ \frac{18}{41} & -\frac{3}{41} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la base ortogonal es:

$$\mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{39}{41} & \frac{27}{41} \\ \frac{18}{41} & -\frac{3}{41} \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 78 Ortogonalizar el siguiente conjunto: $\mathbf{S} = \{(1, 2, -1); (0, 1, 3); (1, 0, 5)\}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^3$

Para este caso se analiza si el conjunto dado es linealmente independiente:

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(0, 1, 3) + \gamma(1, 0, 5) = (0, 0, 0)$$

Se puede analizar la dependencia e independencia lineal, analizando el determinante formado por los vectores dados, pero para este ejemplo se aplica la eliminación gaussiana

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - 2f_1, f_3 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 - 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

Como el sistema tiene única solución, y esta es la trivial, el conjunto es linealmente independiente; por lo tanto, se puede ortogonalizar.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{w}_1 = (1, 2, -1)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = (0, 1, 3) - \frac{\langle (0, 1, 3), (1, 2, -1) \rangle}{\langle (1, 2, -1), (1, 2, -1) \rangle} (1, 2, -1)$$

$$\mathbf{w}_2 = (0, 1, 3) - \frac{-1}{6} (1, 2, -1)$$

$$\mathbf{w}_2 = (0, 1, 3) + \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \right)$$

$$\mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_3 = (1, 0, 5) - \frac{\langle (1, 0, 5) \cdot (1, 2, -1) \rangle}{\langle (1, 2, -1) \cdot (1, 2, -1) \rangle} (1, 2, -1) - \frac{\langle (1, 0, 5) \cdot \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right) \rangle}{\langle \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right) \cdot \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right) \rangle} \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right)$$

$$\mathbf{w}_3 = (1, 0, 5) + \frac{4}{6} (1, 2, -1) - \frac{\frac{43}{3}}{\frac{59}{6}} \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right)$$

$$\mathbf{w}_3 = (1, 0, 5) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{86}{354}, \frac{344}{177}, \frac{731}{177} \right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \left(\frac{84}{59}, -\frac{36}{59}, \frac{12}{59} \right)$$

El conjunto ortogonal es:

$$\mathbf{S}_t = \left\{ (1, 2, -1); \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6} \right); \left(\frac{84}{59}, -\frac{36}{59}, \frac{12}{59} \right) \right\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Responda verdadero o Falso. Sean: $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, considere si la siguiente expresión puede ser considerada un producto interno:
 $\langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$, justifique su respuesta.

2. Sea el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ con producto interno

$$\langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_2, \text{ y } \mathbf{u} = (1, 1) \text{ y } \mathbf{v} = (5, 2)$$

- a. encuentre la norma del vector $\mathbf{v}$
- b. la distancia entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

3. Averigüe si los vectores $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$ y $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores

$$\{\mathbf{v}_1 = (2, 5, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (5, 9, 2)\}.$$

Además, calcule:

- a. el ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
- b. la proyección de $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$.

4. Conociendo que: los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

Suponiendo que $\|\mathbf{u}\| = 3$ y $\|\mathbf{v}\| = 4$. Calcule:

- $\langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle$
- $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

5. En el espacio vectorial real $C(-1; 1)$, sea $\langle f \cdot g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$. Considerar las tres funciones $f(x) = 1$, $g(x) = x$ y $h(x) = 1 + x$. Demostrar que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo $\pi/3$, y dos forman entre sí un ángulo $\frac{\pi}{6}$.

6. Sea $\langle f \cdot g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$. Demostrar que:

- $\mathbf{S} = \{\sin(x), 3 + \cos(x)\}$ es ortogonal.
- $\mathbf{S} = \{\cos(x), 2 + \sin(x)\}$ es ortogonal

7. Si $\mathbf{u} = (7, 4, 5)$ y $\mathbf{v} = (-3, 2, -1)$, hallar los escalares a y b tales que $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ sea un vector no nulo y que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ sean ortogonales

8. En el e.v. $\langle \mathbf{P}_2(x), R, +, \bullet \rangle$ se define:

$\langle p(x) q(x) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$. Demostrar que $\langle \rangle$ define un producto interno (p.i.) en el e.v. $\langle \mathbf{P}_2(x), R, +, \bullet \rangle$

9. Sean $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ elementos del e.v. $\langle \mathbf{R}^4, R, +, \bullet \rangle$ Se define :

$$\langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $\langle \rangle$ definen un p.i.

10. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e.v. con p.i. $\langle \rangle$ sobre R .

- ¿ Si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle = 0$?
- Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es l.d. $\Rightarrow$ ¿ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$?

11. Sea $\langle V, R, +, \bullet \rangle$ un e.v. con p.i. $\langle \rangle$ y Sean u_1, u_2, v_1 y v_2 elementos del e.v. entonces:

- a. $2\|u_1 + u_2\|^2 + 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 + 2\|u_1\|^2 = \|u_1 + u_2 + v_2\|^2 + \|u_1 + u_2 - v_2\|^2 + \|u_1 + v_1\|^2 + \|u_1 - v_1\|^2$
- b. Si $u_1 = v_1 \Rightarrow u_1 + v_1$ y son ortogonales

12. Sobre $V = \langle P_2(x), R, +, \bullet \rangle$ se define el p.i. $\langle \rangle$ de la siguiente manera:

$$\langle p(x) q(x) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

- a. Sea $r(x) = 1 - 2x + x^2$.

$$\text{Calcular } W = \{p(x) \in P_2(x) : \langle p(x) \setminus r(x) \rangle = 0\}$$

- b. Calcular una base B para W (indique la dimensión de W).
- c. Hallar una base B_1 ortonormal para W .
- d. partir de B_1 construir una base ortonormal para todo el e.v. $P_2(x)$
- e. ¿ $P_2(x) = \langle \{r(x)\} \rangle \otimes W$?

13. Sean $p(x) = 5 - 2x + 3x^3$. Sea $S = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$

- a. ¿ S es una base del e.v. $\langle P_3(x), R, +, \bullet \rangle$?
- b. Halle las coordenadas del polinomio $q(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ en esta base (en el caso de que S sea una base).
- c. Determinar $\langle S \rangle$

14. Sobre $V = \langle P_2(x), R, +, \bullet \rangle$ Se define : $\langle p(x) q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$

- a. Demostrar que: $\langle \rangle$ define un producto interno (p.i.) en $P_2(x)$
- b. Sea $r(x) = x - x^2$. Calcular $W = \{p(x) \in P_2(x) : \langle p(x) \setminus q(x) \rangle = 0\}$
- c. Hallar una base B_1 ortonormal para W .

15. Dados los s.e.v.:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(R)_2 : a + d = b + c \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(R)_2 : x + t = z \wedge x - y = t \right\}$$

$\mathbf{W}_1 \wedge \mathbf{W}_2 \in \langle \text{Mat}(R)_2, R, +, \bullet \rangle$ con el producto interno definido por: $\langle \mathbf{AB} \rangle = \text{Tr}(AB)$?

- a. Determinar $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ y dar una base $\mathbf{B}$ de este s.e.v. ¿Cuál es la dimensión?
- b. Determinar $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ y dar una base $\mathbf{B}_1$ ortogonal de este s.e.v que contenga a $\mathbf{B}$. ¿Cuál es la dimensión?



CAPÍTULO VI

Transformaciones

Lineales

Transformaciones Lineales

La historia de las transformaciones lineales está estrechamente relacionada con el desarrollo del álgebra lineal y la geometría a lo largo de los siglos.

Los antiguos matemáticos exploraron relaciones lineales y transformaciones geométricas, aunque los conceptos modernos de transformaciones lineales no se desarrollaron hasta épocas más recientes.

En la antigüedad, matemáticos como Descartes y Fermat comenzaron a utilizar coordenadas para representar geoméricamente objetos y relaciones matemáticas. Estos matemáticos sentaron las bases para el estudio de transformaciones lineales en espacios vectoriales. En el siglo XVIII, matemáticos como Euler y Lagrange realizaron estudios de transformaciones lineales. Euler introdujo la idea de funciones lineales y estudió sus propiedades básicas. Durante el siglo XIX, con la formulación de la teoría del álgebra abstracta y la teoría de matrices, el estudio de las transformaciones lineales se formalizó y generalizó. Matemáticos como Cayley y Sylvester jugaron un papel crucial en el desarrollo de la teoría de las transformaciones lineales y sus aplicaciones.

Con el avance computacional y la teoría de grupos, el estudio de las transformaciones lineales se ha ampliado aún más. Las transformaciones lineales tienen su importancia en la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y otras áreas avanzadas de la física.

Las transformaciones lineales encontraron aplicaciones importantes en la geometría y la física. Por ejemplo, en geometría, las transformaciones lineales se utilizan para estudiar simetrías y transformaciones geométricas. En física, las transformaciones lineales se utilizan para modelar fenómenos físicos y describir la relación entre diferentes sistemas de coordenadas.

El estudio de las transformaciones lineales es esencial en matemáticas y en diversas aplicaciones prácticas. Proporciona una base sólida para comprender y analizar sistemas lineales y es una herramienta poderosa en campos que abarcan desde la física y la ingeniería hasta la ciencia de datos y la criptografía.

Las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Estas mantienen las estructuras lineales que caracterizan a esos espacios.

Transformaciones Lineales

El estudio de las transformaciones lineales es esencial en matemáticas y en diversas aplicaciones prácticas. Proporciona una base sólida para comprender y analizar sistemas lineales y es una herramienta poderosa en campos que abarcan desde la física y la ingeniería hasta la ciencia de datos y la criptografía.

Las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Estas mantienen las estructuras lineales que caracterizan a esos espacios.

Definición

Sea V y W espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo R , y f una función, tal que: $f : V \rightarrow W$, f es una transformación lineal (Aplicación Lineal) si cumple los siguientes axiomas:

Sean $u, v \in V$, $\alpha \in R$

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

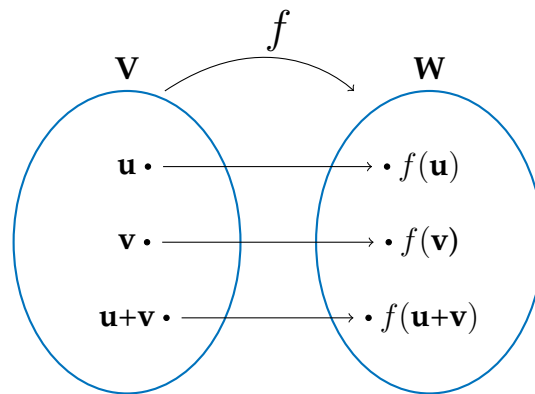


Figura VI.1: Representación de una Aplicación Lineal

Algunos autores también definen como transformación lineal a la función f si se cumple:

$$\forall u, v \in V, \alpha \in R$$

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$$

Al conjunto de Transformaciones Lineales, de V a W , se le denota de la siguiente manera $\mathcal{L}(V, W)$, y se lee “conjunto de aplicaciones lineales de V a W ”

Ejemplo 79 Determinar si la función dada se puede considerar como una transformación lineal.

Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$f(x, y) \rightarrow (x + y, x - 2y)$

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, $\alpha \in R$, tal que : $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$

Por demostrar que: $f(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

- | | | |
|-------|--|------------------------------|
| i. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ | Axio. Reflexivo |
| ii. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)]$ | Def. vectores |
| iii. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ | Def. Suma de vectores |
| iv. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = [x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2)]$ | Aplicación función |
| v. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2)$ | Axiomas Distributivo y Conm. |
| vi. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1 + y_1, x_1 - 2y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - 2y_2)$ | Def. Suma de vectores |
| vii. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ | Apli. función |
| viii. | $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(u) + f(v)$ | |

Por demostrar que: $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$

- | | | |
|-------|---|---------------------------|
| i. | $f(\alpha\mathbf{u}) = f(\alpha\mathbf{u})$ | Axio. Reflexivo |
| ii. | $f(\alpha\mathbf{u}) = f[\alpha(x_1, y_1)]$ | Def. de vectores |
| iii. | $f(\alpha\mathbf{u}) = f(\alpha x_1, \alpha y_1)$ | Def. Producto por escalar |
| iv. | $f(\alpha\mathbf{u}) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - 2\alpha y_1)$ | Aplicación función |
| v. | $f(\alpha\mathbf{u}) = [\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_1 - 2y_1)]$ | Axio. Recolectivo |
| vi. | $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha[(x_1 + y_1), (x_1 - 2y_1)]$ | Def. Producto por escalar |
| vii. | $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(x_1, y_1)$ | Apli. Función |
| viii. | $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$ | |

Por lo tanto $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$, es una transformación lineal.

Ejemplo 80 Aplicando: $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$. Determinar si $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$ es una transformación lineal.

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, $\alpha \in R$

- i. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$
- ii. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f[\alpha(x_1, y_1) + (x_2, y_2)]$
- iii. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f[(\alpha x_1, \alpha y_1) + (x_2, y_2)]$
- iv. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2)$
- v. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2, \alpha x_1 + x_2 - 2(\alpha y_1 + y_2))$
- vi. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\alpha x_1 + \alpha y_1 + x_2 + y_2, \alpha x_1 - 2\alpha y_1 + x_2 - 2y_2)$
- vii. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - 2\alpha y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - 2y_2)$
- viii. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(x_1 + y_1, x_1 - 2y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - 2y_2)$
- ix. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$
- x. $f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

Por lo tanto $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$, es una transformación lineal.

Ejemplo 81 Dado el espacio vectorial $\mathbf{V}$.

Si $\mathbf{V} = \{f/f : R \rightarrow R, f \text{ continua}\}$, si se tiene $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, determinar si la siguiente expresión es una transformación Lineal.

$$T(f(t)) = \int_0^x f(t) dt$$

Sean : $g(x)$ y $h(x) \in \mathbf{V}$; $\alpha \in R$, por demostrar que:

1. $T[g(t) + h(t)] = T[g(t)] + T[h(t)]$
2. $T[(\alpha g)(t)] = \alpha T[g(t)]$
1. $T[g(t) + h(t)] = T[g(t)] + T[h(t)]$
 - i. $T[(g + h)(t)] = T[(g + h)(t)]$
 - ii. $T[(g + h)(t)] = \int_0^x [(g + h)(t)] dt$
 - iii. $T[(g + h)(t)] = \int_0^x [g(t) + h(t)] dt$

$$\text{iv. } T[(g+h)(t)] = \int_0^x g(t)dt + \int_0^x h(t)dt$$

$$\text{v. } T[(g+h)(t)] = T[g(t)] + T[h(t)]$$

$$2. T[(\alpha g)(t)] = \alpha T[g(t)]$$

$$\text{i. } T[(\alpha f)(t)] = \int_0^x [(\alpha f)(t)]dt$$

$$\text{ii. } T[(\alpha f)(t)] = \int_0^x \alpha f(t)dt$$

$$\text{iii. } T[(\alpha f)(t)] = \alpha \int_0^x f(t)dt$$

$$\text{iv. } T[(\alpha f)(t)] = \alpha T[f(t)]$$

Ejemplo 82 Sea la siguiente aplicación lineal:

$$T : \text{Mat}(\mathbf{R})_2 \rightarrow \mathbf{P}_2(x)$$

es una transformación lineal:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d) + (c+b)x - ax^2$$

Desarrollo

Considerando que: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}(R)_2$, $\alpha \in R$, por demostrar que

$$f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$$

$$\text{Sean: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{i. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$$

$$\text{ii. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = f \left[\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{iii. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = f \left[\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{iv. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = f \begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{v. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = [(\alpha a_1 + a_2) - (\alpha d_1 + d_2)] + [(\alpha c_1 + c_2) + (\alpha b_1 + b_2)]x - (\alpha a_1 + a_2)x^2$$

$$\text{vi. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha a_1 - \alpha d_1) + (a_2 - d_2) + (\alpha c_1 + c_2)x + (\alpha b_1 + b_2)x - \alpha a_1 x^2 - a_2 x^2$$

$$\text{vii. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha a_1 - \alpha d_1) + (a_2 - d_2) + (\alpha c_1 + \alpha b_1)x + (c_2 + b_2)x - \alpha a_1 x^2 - a_2 x^2$$

$$\text{viii. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha a_1 - \alpha d_1) + (\alpha c_1 + \alpha b_1)x - \alpha a_1 x^2 + (a_2 - d_2) + (c_2 + b_2)x - a_2 x^2$$

$$\text{ix. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha [(a_1 - d_1) + (c_1 + b_1)x - a_1 x^2] + (a_2 - d_2) + (c_2 + b_2)x - a_2 x^2$$

$$\text{x. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha f \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{xi. } f(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$$

Por lo tanto $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - d) + (c + b)x - ax^2$, es una transformación lineal.

Ejemplo 83 Sea:

$$f : \text{Mat}(\mathbf{R})_n \rightarrow \text{Mat}(\mathbf{R})_n$$

Determinar si $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}^t$ es una Transformación Lineal .

Desarrollo

Sean $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \text{Mat}(\mathbf{R})_n$, por demostrar que :

$$1. f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = f(\mathbf{A}_1) + f(\mathbf{A}_2)$$

$$2. f(\alpha \mathbf{A}_1) = \alpha f(\mathbf{A}_1)$$

$$1. f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = f(\mathbf{A}_1) + f(\mathbf{A}_2)$$

$$\text{i. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \quad \text{Axioma reflexivo}$$

$$\text{ii. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{C} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^t \quad \text{Aplicación lineal}$$

$$\text{iii. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{C} + \mathbf{A}_2\mathbf{C}) + (\mathbf{A}_1^t + \mathbf{A}_2^t) \quad \text{Prop. matricial, prop. transp.}$$

$$\text{iv. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1\mathbf{C} + \mathbf{A}_2\mathbf{C} + \mathbf{A}_1^t + \mathbf{A}_2^t \quad \text{Axioma conmutativo}$$

$$\text{v. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{C} + \mathbf{A}_1^t) + (\mathbf{A}_2\mathbf{C} + \mathbf{A}_2^t) \quad \text{Axioma asociativo}$$

$$\text{vi. } f(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = f(\mathbf{A}_1) + f(\mathbf{A}_2)$$

$$2. f(\alpha \mathbf{A}_1) = \alpha f(\mathbf{A}_1)$$

$$\text{i. } f(\alpha \mathbf{A}_1) = f(\alpha \mathbf{A}_1) \quad \text{Axio. Reflexivo}$$

$$\text{ii. } f(\alpha \mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{AB} + \alpha \mathbf{A}^t) \quad \text{Aplicación lineal}$$

$$\text{iii. } f(\alpha \mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{AB} + \mathbf{A}^t) \quad \text{Axio. Recolectivo}$$

$$\text{iv. } f(\alpha \mathbf{A}) = \alpha f(\mathbf{A})$$

Ejemplo 84 Determinar si la siguiente función :

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z + 1)$$

puede ser considerada una aplicación lineal

Desarrollo

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, tal que : $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$

Por contra ejemplo:

$$f(\mathbf{u}) = f(1, 0, 0) = (1, 1)$$

$$f(\mathbf{v}) = f(0, 0, 1) = (0, 0)$$

$$f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = (1, 1)$$

Por comprobar que: $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f[(1, 0, 0) + (0, 0, 1)] = f(1, 0, 1)$$

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z + 1)$$

$$f(1, 0, 1) = (1, 0)$$

No es transformación lineal, ya que no cumple $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

$$f(1, 0, 1) \neq f(1, 0, 0) + f(0, 0, 1)$$

$$(1, 0) \neq (1, 1)$$

Ejemplo 85 Sea:

$$T : \text{Mat}(\mathbf{R})_n \rightarrow \text{Mat}(\mathbf{R})_n$$

Determinar si:

$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

es una Transformación Lineal

Desarrollo

Sean: $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D} \in \text{Mat}(R)_n$, encontrando sus respectivas imágenes se tiene que: $T(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ y $T(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$

Por demostrar que $T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = T(\mathbf{C}) + T(\mathbf{D})$

- i. $T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = T(\mathbf{C} + \mathbf{D})$
- ii. $T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = (\mathbf{C} + \mathbf{D})^T (\mathbf{C} + \mathbf{D})$
- iii. $T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = (\mathbf{C}^T + \mathbf{D}^T)(\mathbf{C} + \mathbf{D})$
- iv. $T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{D}$

Sumando:

$$T(\mathbf{C}) + T(\mathbf{D}) = \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \mathbf{D}^T \mathbf{D}$$

Como,

$$T(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \neq T(\mathbf{C}) + T(\mathbf{D})$$

Por lo tanto $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, no es una transformación lineal.

Propiedades de las Transformaciones Lineales

- I. Si $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, entonces $f(-\mathbf{u}) = -\mathbf{v}$
- II. Se debe cumplir que $f(\phi_v) = \phi_w$, donde ϕ , es el elemento neutro
- III. Sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, y $\mathbf{S}$ un subconjunto de $\mathbf{V}$, donde $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto Linealmente Independiente y $\mathbf{T}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbf{W}$, $\mathbf{T} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_n\}$; entonces existe una única transformación lineal tal que:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1; f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2; f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3; \dots; f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$$

- IV. Sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, se tiene que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ y $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in R$ entonces se cumple que:

$$f(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 + \dots + a_n \mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + a_3 f(\mathbf{v}_3) + \dots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Ejemplo 86 Sea una aplicación lineal

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{P}_2(x)$$

Tal que:

$$f(1, 1, 1) = 1 - 2x + x^2$$

$$f(2, 0, 0) = 3 + x - x^2$$

$$f(0, 4, 5) = 2 + 3x - 3x^2$$

Determinar: $f(2, -3, 1)$

Desarrollo

- i. Se analiza la dependencia e independencia lineal del conjunto de partida, para este caso: $S = \{(1, 1, 1); (2, 0, 0); (0, 4, 5)\}$

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

Como el determinante es diferente de cero, entonces el conjunto S es linealmente independiente.

Como el conjunto S es linealmente independiente, este puede ser considerado como una base, por lo tanto, el vector solicitado puede escribirse como una combinación lineal del conjunto S :

$$(2, -3, 1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(0, 4, 5)$$

Por lo tanto, y aplicando la cuarta propiedad de las transformaciones lineales, se tiene que:

$$f(2, -3, 1) = f[\alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(0, 4, 5)]$$

$$f(2, -3, 1) = f[(\alpha, \alpha, \alpha) + (2\beta, 0, 0) + \gamma(0, 4\gamma, 5\gamma)]$$

$$f(2, -3, 1) = f(\alpha + 2\beta, \alpha + 4\gamma, \alpha + 5\gamma)$$

Se plantea el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de α , β y γ .

$$2 = \alpha + 2\beta$$

$$-3 = \alpha + 4\gamma$$

$$1 = \alpha + 5\gamma$$

La solución del sistema es:

$$\alpha = -19$$

$$\beta = \frac{21}{2}$$

$$\gamma = 4$$

Aplicando las propiedades de las Transformaciones Lineales

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3) = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2) + a_3f(\mathbf{v}_3)$$

$$f(2, -3, 1) = f[\alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(0, 4, 5)]$$

$$f(2, -3, 1) = f[\alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(0, 4, 5)]$$

$$f(2, -3, 1) = -19f(1, 1, 1) + \frac{21}{2}f(2, 0, 0) + 4f(0, 4, 5)$$

$$f(2, -3, 1) = -19(1 - 2x + x^2) + \frac{21}{2}(3 + x - x^2) + 4(2 + 3x - 3x^2)$$

$$f(2, -3, 1) = \frac{41}{2} + \frac{121}{2}x - \frac{83}{2}x^2$$

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Núcleo

Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un campo R y sea $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. El núcleo (*kernel o espacio nulo*) de f se define como la preimagen completa del vector nulo:

Sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, el núcleo está definido por: $N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{v}) = \phi\}$, donde ϕ , es el vector nulo.

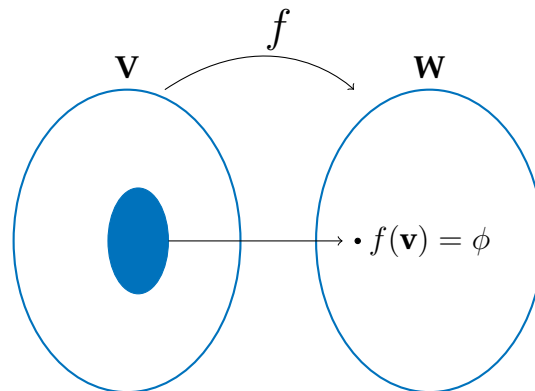


Figura VI.2: Representación del subespacio Núcleo

Teorema 7 El núcleo de una Transformación Lineal es un subespacio del espacio de partida

Sí f , es una transformación lineal, se cumple que: $f(\phi_{\mathbf{V}}) = \phi_{\mathbf{W}}$.

Imagen

Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo R y sea $f \in L(V, W)$. La imagen es el conjunto de vectores $w \in W$; donde cada uno de ellos es igual a la transformación lineal de un vector v que pertenece a otro espacio vectorial V .

$$\text{Im}(f) = \{w \in W; \exists v \in V : f(v) = w\}$$

La imagen de una transformación lineal puede ser todo el espacio de llegada, tal como se representa en la siguiente ilustración

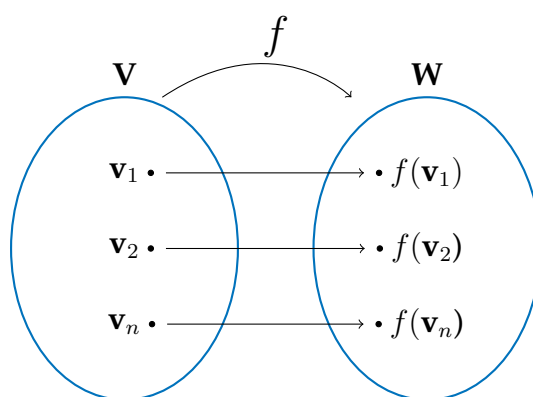


Figura VI.3: Imagen de una Transformación Lineal

La imagen de una transformación lineal puede ser un subespacio del espacio de llegada, tal como se representa en la siguiente ilustración.

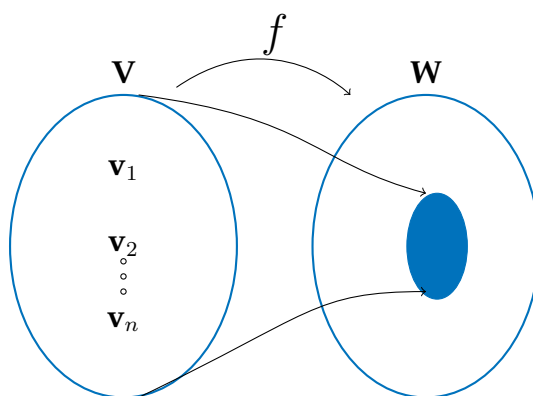


Figura VI.4: Imagen de una Transformación Lineal

Teorema 8 *La imagen de una transformación lineal es un subespacio del espacio de llegada*

Ejemplo 87 Dada la siguiente aplicación lineal, determinar el Núcleo y la Imagen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (x - y + z; x + y + z; x - 3y + z)$$

Núcleo

$$f(\mathbf{v}) = 0$$

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$x - y + z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - 3y + z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema Escalonado:

$$x - y + z = 0$$

$$2y = 0$$

El sistema tiene infinitas soluciones, por lo tanto, resolviendo el sistema se tiene que:

$$y = 0; x = -z$$

La solución general: $(x, y, z) = (-z, 0, z)$, por lo que la base del núcleo es:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{N}(f)} = (-1, 0, 1)$$

Subespacio del núcleo:

$$\mathbf{N}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \wedge y = 0\}$$

Imagen

$$f(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$f(x, y, z) = \left(\underbrace{x - y + z}_a; \underbrace{x + y + z}_b; \underbrace{x - 3y + z}_c \right)$$

$$x - y + z = a$$

$$x + y + z = b$$

$$x - 3y + z = c$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -3 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 & b - a \\ 0 & -2 & 0 & c - a \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & -2a + b + c \end{array} \right)$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución $-2a + b + c = 0$; por lo tanto la imagen es:

$$\text{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : -2a + b + c = 0\}$$

La base de la imagen, partiendo de:

$$(a, b, c) = (a, 2a - c, c)$$

$$(a, b, c) = (a, 2a, 0) + (0, -c, c)$$

$$\mathbf{B}_{\text{Im}(f)} = \{(1, 2, 0); (0, -1, 1)\}$$

NOTA: Si el sistema tiene única solución, esta es la trivial, esto indica que la imagen es todo el espacio de llegada.

Teorema 9 Teorema de la dimensión:

$$\dim(\mathbf{V}) = \dim[\mathbf{N}(f)] + \dim[\text{Im}(f)]$$

Ejemplo 88 Sea $f \in L(\mathbf{P}_2(x), \mathbf{R}^3)$ tal que, $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(1) - p(0) \end{pmatrix}$

a. Hallar $\mathbf{N}(f)$ y una de sus bases, indique su dimensión.

b. Hallar $\text{Im}(f)$ y una de sus bases, indique su dimensión.

Desarrollo

a. Hallar $\mathbf{N}(f)$ y una de sus bases, diga su dimensión.

$$\text{Sea } p(x) = a + bx + cx^2, f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ a + b + c \\ -b - c \end{pmatrix}, \text{ para determinar}$$

el núcleo:

$$a = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$-b - c = 0$$

$$a = 0$$

$$b + c = 0, b = -c$$

Por lo tanto, si $p(x) = a + bx + cx^2$, y $a = 0$; $b + c = 0$; $b = -c$, la base es:

$$p(x) = 0 - cx + cx^2$$

Sí $c = 1$, se tiene:

$$p(x) = -x + x^2$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{N}(f)} = \{-x + x^2\}$$

$$\dim(\mathbf{B}_{\mathbf{N}}) = 1$$

El subespacio que forma el núcleo es:

$$\mathbf{N}(f) = \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbf{P}_2(x) : \begin{array}{l} a = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right\}$$

b. Hallar $\mathbf{Im}(f)$ y una de sus bases, diga su dimensión.

Sea $p(x) = a + bx + cx^2$, $f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ a + b + c \\ -b - c \end{pmatrix}$, para determinar

la imagen, las condiciones del espacio de llegada se iguala al vector más general del espacio de llegada, para este caso (x, y, z) :

$$\begin{array}{rcl} a & = & x \\ a + b + c & = & y \\ -b - c & = & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y - x \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & -x + y + z \end{array} \right)$$

$$\mathbf{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

Para determinar la base, se parte de: $-x + y + z = 0$, donde $x = y + z$.

Si el vector de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la base de la imagen es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ si } y = 1 \text{ y } z = 1, \text{ una base es: } \mathbf{B}_{\text{Im}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Otra forma de representarle la base de la imagen es:

$$\mathbf{B}_{\text{Im}} = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1)\}$$

La dimensión, $\dim(\mathbf{B}_{\text{Im}}) = 2$

Matriz asociada a una Aplicación Lineal

Sea $f \in L(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^m)$ entonces existe una matriz $\mathbf{A} \in \text{Mat}(R)_{m \times n}$,

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, tal que: $f(x) = \mathbf{A}x^t : \forall x \in \mathbf{k}^n$. (Cuevas, 2009)

Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$, son las coordenadas de cada una de las salidas con respecto a la base canónica del espacio de llegada.

Ejemplo 89 Considerando el ejercicio anterior: $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -2y & 3z \\ x & 0 & -z \end{pmatrix}$

Determinar la matriz asociada a la transformación lineal se deben considerar las bases canónicas.

Bases canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{C}_1 = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$

Bases canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{C}_2 = \{(1, 0); (0, 1)\}$$

Calcular imágenes con respecto a $\mathbf{C}_1$, es decir:

$$\left. \begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (-2, 0) \\ f(0, 0, 1) &= (3, -1) \end{aligned} \right\}$$

Con la base canónica del conjunto de llegada se procede a calcular las coordenadas de la imagen, por ser la base canónica las coordenadas, que a su vez vienen a ser las imágenes de la función.

$$(1, 1) = \alpha (1, 0) + \beta (0, 1)$$

$$\alpha = 1 ; \quad \beta = 1$$

$$(-2, 0) = \alpha (1, 0) + \beta (0, 1)$$

$$\alpha = 0 ; \quad \beta = 1$$

$$(1, -2) = \alpha (1, 0) + \beta (0, 1)$$

$$\alpha = 3 ; \quad \beta = -1$$

Por lo tanto la matriz **A** es, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^t$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz Asociada a una Transformación Lineal en función a otra Base

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal cualquiera y sean $\mathbf{S} \wedge \mathbf{T}$ dos bases cualesquiera de V y W respectivamente, a la matriz asociada a f se les representa:

$$[f]_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}$$

Ejemplo 90 Dada la siguiente aplicación lineal

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b - c)x + dx^2$$

encontrar la matriz asociada $[f]_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}$ con respecto a las siguientes bases:

a. Bases canónicas

b. Las siguientes Bases:

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathbf{T} = \{1 - x, x^2, x + x^2\}$$

(Cuevas, Navas y Toro, 2009)

a. *Bases canónicas*

La imagen con respecto a la base T es:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x = \begin{matrix} 0 \\ x \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x = \begin{matrix} 0 \\ -x \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se procede a formar la matriz asociada con los resultados obtenidos

$$[f]_{\mathbf{C}_2}^{\mathbf{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. *En función de las siguientes Bases:*

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{T} = \{1 - x; x^2; x + x^2\}$$

Sacar las imágenes

$$f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2x$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -x + x^2$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + x^2$$

$$a + bx + cx^2 = \alpha(1 - x) + \beta x^2 + \gamma(x + x^2)$$

Se encuentran las coordenadas en forma general de cualquier polinomio, en función de la base del espacio de llegada. Por lo que se plantea la combinación lineal:

$$\begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= -\alpha + \gamma \\ c &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

$$\alpha = a \left| \begin{array}{l} b = -\alpha + \gamma \\ \gamma = a + b \end{array} \right| \begin{array}{l} c = \beta + \gamma \\ c = \beta + a + b \\ \beta = -a - b + c \end{array}$$

Representando la solución en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a - b + c \\ a + b \end{bmatrix}$$

Para: $1 + x$, ($a = 1, b = 1, c = 0$):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para: $-2x$, ($a = 0, b = -2, c = 0$):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para: $-x + x^2$, ($a = 0, b = -1, c = 1$):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para: $1 + x^2$, ($a = 1, b = 0, c = 1$):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz asociada a las bases dadas, es:

$$[f]_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Rotación

La matriz de rotación es un elemento algebraico matricial de una aplicación de rotación o giro, representa la rotación de θ grados del plano en sentido antihorario. En tres dimensiones, las matrices de rotación representan las rotaciones de manera concisa y se usan frecuentemente en geometría, física, informática y robótica.

Rotación de un Vector con respecto al origen

La matriz de rotación que se utiliza para la rotación de un vector en el sistema de referencia de $\mathbf{R}^2$, (espacio vectorial $\mathbf{R}^2$), con respecto al origen, para lo cual se tiene la siguiente consideración :

- Se tiene un vector $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$
- El vector $\mathbf{u} = (x, y)$ rotará un ángulo θ , tal como se muestra en la gráfica VI.6.

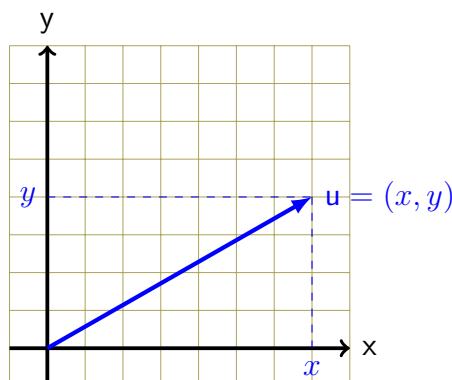


Figura VI.5: Rotación de un vector

De gráfica anterior, Figura VI.5, se puede proponer:

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$
$$f(x, y) = (x_1, y_1)$$

Por determinar: $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$

Se conoce por la gráfica, que:

$$f(x, y) = (x_1, y_1)$$

$$x = \|\mathbf{u}\| \cos \alpha \qquad y = \|\mathbf{u}\| \sin \alpha$$

Por la gráfica se determina que:

$$x_1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha + \theta) \qquad y_1 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha + \theta)$$

$$x_1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha + \theta) \qquad y_1 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha + \theta)$$

$$x_1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha + \theta) \qquad y_1 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha + \theta)$$

$$x_1 = \|\mathbf{u}\| [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta] \qquad y_1 = \|\mathbf{u}\| [\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta]$$

$$x_1 = \|\mathbf{u}\| \cos \alpha \cos \theta - \|\mathbf{u}\| \sin \alpha \sin \theta \qquad y_1 = \|\mathbf{u}\| \sin \alpha \cos \theta + \|\mathbf{u}\| \cos \alpha \sin \theta$$

$$x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \qquad y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Por lo tanto:

$$f(x; y) = (x_1; y_1)$$

$$f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

La matriz, de rotación, asociada a esta transformación lineal es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La transformación lineal asociada a la matriz anterior es:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

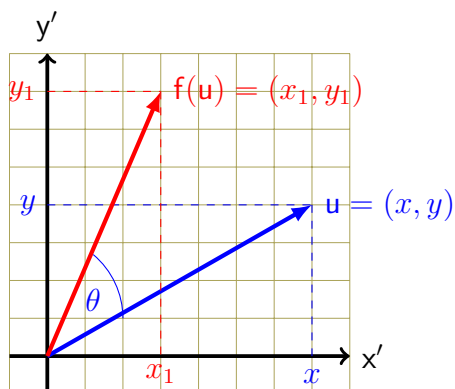


Figura VI.6: Rotación de un vector con respecto al origen

Ejemplo 91 Girar el vector $\mathbf{u} = (7, 2)$, un ángulo de 60° con respecto al origen.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(7, 2) = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(7, 2) = (7 \cos(60^\circ) - 2 \sin(60^\circ), 7 \sin(60^\circ) + 2 \cos(60^\circ))$$

$$f(7, 2) = (1,76, 7,06)$$

Su nueva coordenada es: $\mathbf{u}_1 = (1,76, 7,06)$

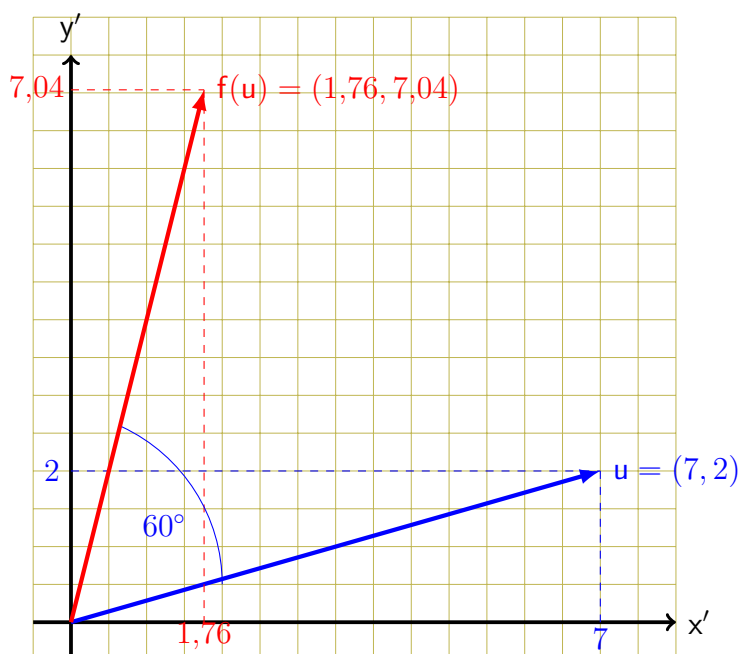


Figura VI.7: Rotación de un vector con respecto al origen

Rotación de un vector con respecto a un punto cualquiera $P(h, k)$

Sea una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que: $f(x, y) = (x_1, y_1)$

Se conoce un vector cuya coordenada es: $\mathbf{v} = (x, y)$ y un punto cualquiera $A(h, k)$, respecto al cual se va a realizar la rotación con respecto a un punto cualquiera $A(h, k)$, tal como se muestra en la Figura VI.8:

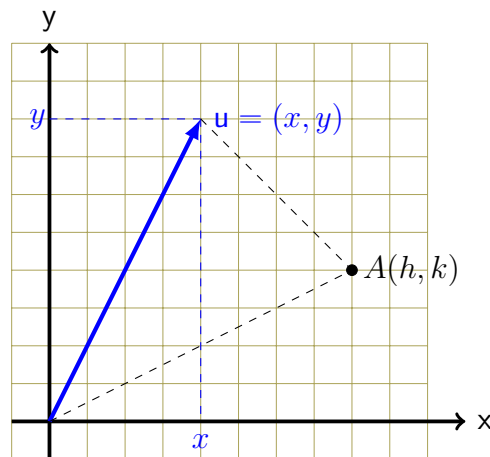


Figura VI.8: Rotación de un vector con respecto a un punto cualquiera $A(h, k)$

Al vector $\mathbf{u} = (x, y)$ se le rotará un ángulo dado θ con respecto al punto A , su resultado es:

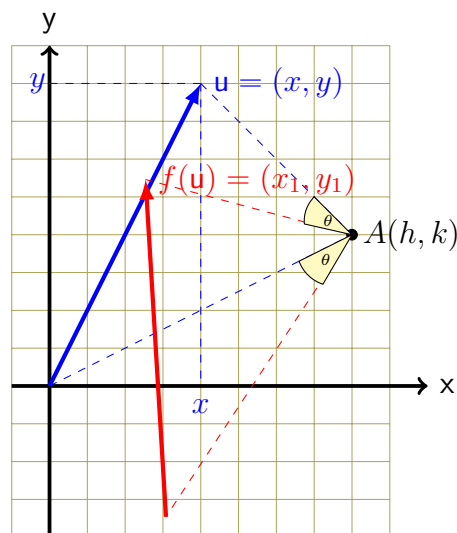


Figura VI.9: Rotación de un vector con respecto a un punto cualquiera $A(h, k)$

El procedimiento para determinar el vector resultante, se detalla a continuación:

1. Determinar los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ con respecto al punto de rotación, se aplica $\mathbf{v} = (x - h, y - k)$, por lo tanto:

$$\mathbf{v}_1 = (x - h, y - k), \text{ *punto final del vector dado}$$

$$\mathbf{v}_2 = (0 - h, 0 - k), \text{ *punto inicial del vector dado}$$

Estos vectores: $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, se representan en el siguiente gráfico:

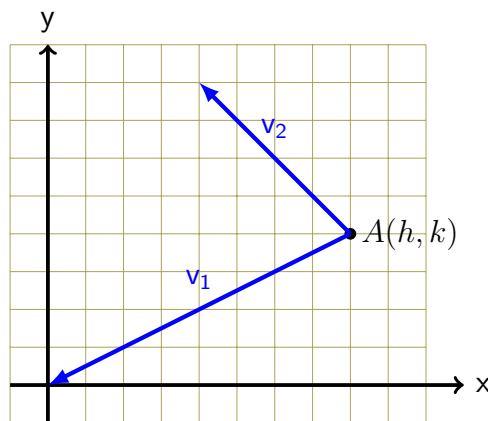


Figura VI.10: Rotación de un vector con respecto a un punto cualquiera $A(h, k)$

2. Esos nuevos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, son los que ingresan a multiplicarse por la matriz de rotación:

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{v}_1^t$$

$$f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{v}_2^t$$

3. Para determinar $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$:

$$\mathbf{v}'_1 = f(\mathbf{v}_1) + (h, k)$$

$$\mathbf{v}'_2 = f(\mathbf{v}_2) + (h, k)$$

Estos $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$, son los puntos final e inicial del vector dado el cual se a rotado con respecto al punto A .

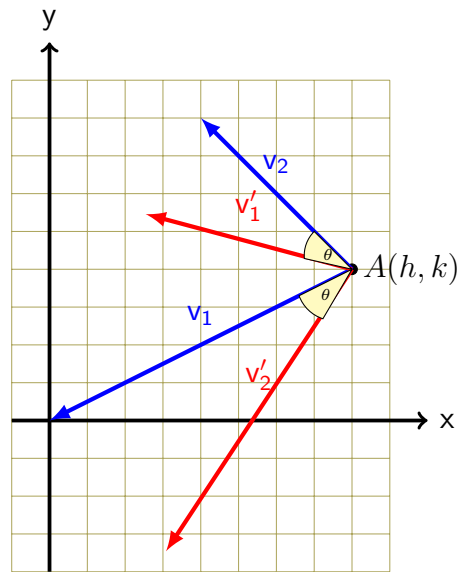


Figura VI.11: Vectores rotados con respecto a un punto cualquiera $A(h, k)$

Ejemplo 92 Girar el vector $\mathbf{u}_1$, cuya coordenada es $\mathbf{u}_1 = (5, 3)$, rotarle $\frac{\pi}{6} \text{rad}$ con respecto al punto $P(3, -2)$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (5, 3) - (h, k) & \mathbf{v}_2 &= (0, 0) - (h, k) \\ \mathbf{v}_1 &= (5, 3) - (3, -2) & \mathbf{v}_2 &= (0, 0) - (3, -2) \\ \mathbf{v}_1 &= (2, 5) & \mathbf{v}_2 &= (-3, 2) \end{aligned}$$

$\mathbf{v}'_1$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f(2, 5) = \left(2 \cos \frac{\pi}{6} - 5 \sin \frac{\pi}{6}, 2 \sin \frac{\pi}{6} + 5 \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f(2, 5) = (-0,76, 5,33)$$

$\mathbf{v}'_2$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(-3, 2) = \left(-3 \cos \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{6}; -3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f(-3; 2) = (-3,59, 0,23)$$

Para regresar al sistema original:

$$\mathbf{v}'_1 = (-0,76, -1,77) + (h, k)$$

$$\mathbf{v}'_1 = (-0,76, -1,77) + (3, -2)$$

$$\mathbf{v}'_1 = (2,23, 3,33)$$

$$\mathbf{v}'_2 = (-3,59, 0,23) + (h, k)$$

$$\mathbf{v}'_2 = (-3,59, 0,23) + (3, -2)$$

$$\mathbf{v}'_2 = (-0,59, -1,77)$$

Para comprobar que el proceso se haya realizado correctamente el modulo del vector original, debe ser igual al módulo del vector rotado.

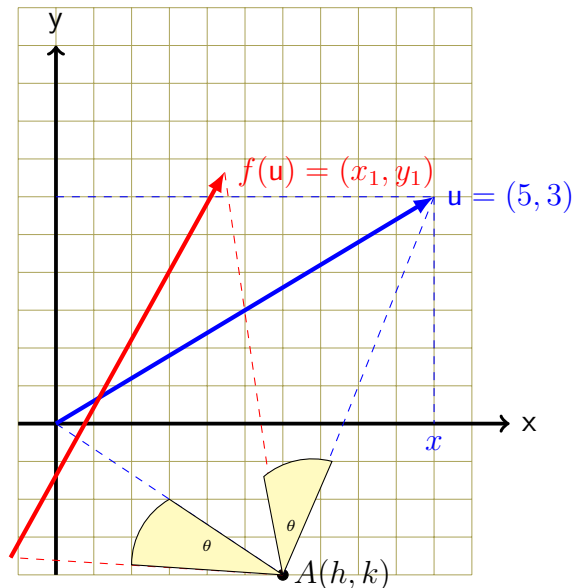


Figura VI.12: Vector rotado con respecto a un punto $A(3, -2)$

El vector de color rojo es el vector resultante al rotarle el vector $\mathbf{u}_1 = (5, 3) \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ con respecto al punto $P(3, -2)$

Implementación de rotación de una imagen en Scilab

```
clear
clc
close
//configuramos los ejes
a=get("current_axes");
a.data_bounds=[0,0;30,30];
a.x_location = "origin";
a.y_location = "origin";
xtitle( 'GIRO DE LETRAS', 'EJE X', 'EJE Y' ) ;
M=[ 0 1.55 1.19 2.59 2.83 0.86 3.41 2.92 1.6 1.39 3.20
5.01 4.53 2.01 4.89 5.55 3.37 1.72 3.37 5.05 5.71 8.35
8.35 04.27 7.99 8 5.80 4.89 3.33 1.72 3.37 5.46 7.13 6.34
04.44 6.72 5.44 3.70 1.15 0.82 0.73 0.28 0;
0 3.56 4.31 3.39 2.99 -5.48 3.08 4.27 4.8 5.17 4.89 3.12
0.12 -5.48 -0.26 3.20 5.30 5.42 6.08 5.13 4.23 7.76 9.93
11.61 9.74 8 4.93 5.71 6.53 6.08 7.35 6.39 8.58 9.46
10.29 8.58 6.97 7.89 6.28 6.94 6.08 6.61 6]
S=size(M);
T=ones(S(1,1),S(1,2))
x=M(1,:)' ; y=M(2,:)' ;
plot(x,y,'K');
N=[0 -1.55 -1.19 -2.59 -2.83 -0.86 -3.41 -2.92 -1.6 -1.39
-3.2 -5.01 -4.53 -2.01 -4.89 -5.55 -3.37 -1.72 -3.37
-5.05 -5.71 -8.35 -8.35 -4.27 -7.99 -8 -5.8 -4.89 -3.33
-1.72 -3.37 -5.46 -7.13 -6.34 -4.44 -6.72 -5.44 -3.7
-1.15 -0.82 -0.73 -0.28 0; 0 3.56 4.31 3.39 2.99 -5.48
3.08 4.27 4.8 5.17 4.89 3.12 0.12 -5.48 -0.26 3.2 5.3
5.42 6.08 5.13 4.23 7.76 9.93 11.61 9.74 8 4.93 5.71 6.53
6.08 7.35 6.39 8.58 9.46 10.29 8.58 6.97 7.89 6.28 6.94
6.08 6.61 6]
S1=size(N);
T1=ones(S1(1,1),S1(1,2))
x=N(1,:)' ; y=N(2,:)' ;
plot(x,y,'K');
O=[0 14 6 -6 -14 0 2.44 16.19 7.35 -4.08 -6;-10 8 14 14 8
```

```

-10 -8.96 8.36 14.89 14.95 14]
x=O(1,:)' ; y=O(2,:)' ;
S2=size(O);
T2=ones(S2(1,1),S2(1,2))
plot(x,y,'K');
angulo=input('Ingrese el angulo del giro en grados:')
W= angulo;
Z=%pi*(W)/180;
//Ingresar los vectores y graficarlos
p = input('Ingrese el punto x: ')
//p=0;
q = input('Ingrese el punto y: ')
//q=0;
x3=M(1,:)-p*T(1,:); y3=M(2,:)-q*T(2,:);
x1=N(1,:)-p*T1(1,:); y1=N(2,:)-q*T1(2,:);
x2=O(1,:)-p*T2(1,:); y2=O(2,:)-q*T2(2,:);
M1=[x3;y3];
N1=[x1;y1];
O1=[x2;y2];
//Matriz cambio de giro
A=[cos(Z) -sin(Z); sin(Z) cos(Z)];
//Creacion de las matrices
B=A*M1;
x=B(1,:)' +p*T(1,:)' ; y=B(2,:)' +q*T(2,:)' ; plot(x,y,'B');
C=A*N1;
x=C(1,:)' +p*T1(1,:)' ; y=C(2,:)' +q*T1(2,:)' ; plot(x,y,'B');
D=A*O1;
x=D(1,:)' +p*T2(1,:)' ; y=D(2,:)' +q*T2(2,:)' ; plot(x,y,'B');
//Creacion de las matrices
B=A*M1;
x=B(1,:)' +p*T(1,:)' ; y=B(2,:)' +q*T(2,:)' ; plot(x,y,'B');
C=A*N1;
x=C(1,:)' +p*T1(1,:)' ; y=C(2,:)' +q*T1(2,:)' ; plot(x,y,'B');
D=A*O1;
x=D(1,:)' +p*T2(1,:)' ; y=D(2,:)' +q*T2(2,:)' ; plot(x,y,'B');

```

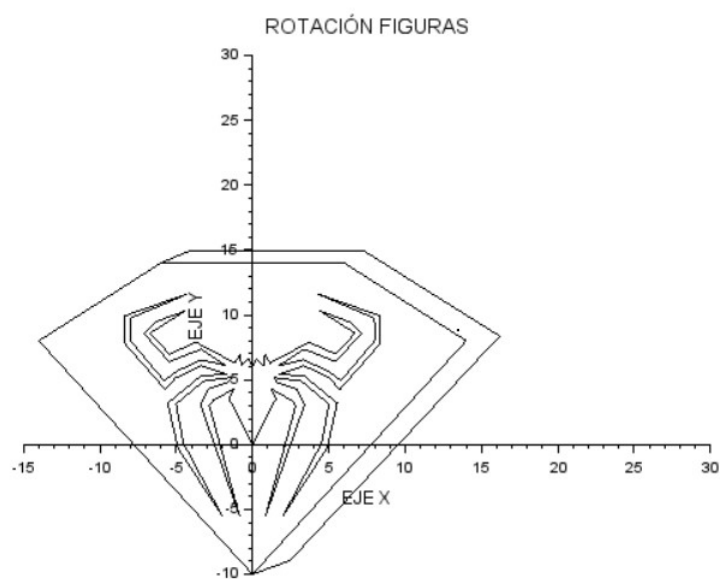


Figura VI.13: Imagen original vectorizada

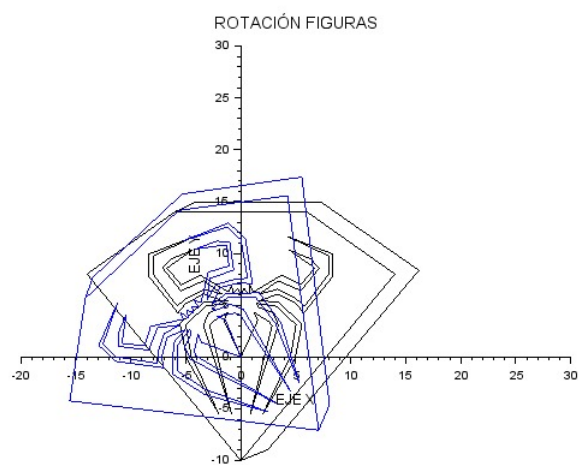
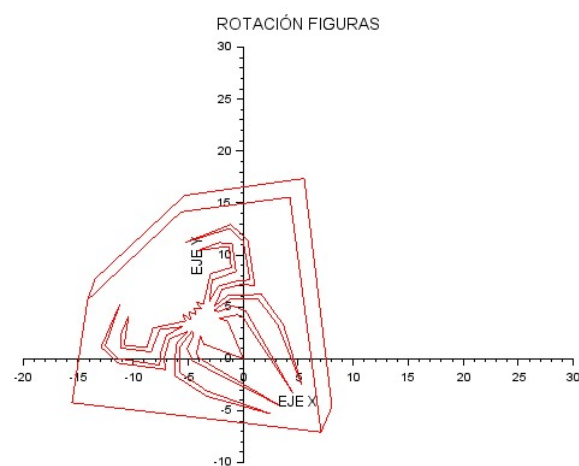


Figura VI.14: Imágenes original y rotada 45° con respecto al origen



Matriz cambio de base

Sea $f : V \rightarrow V$ y sea $S \wedge T$ bases de V , $\langle V, R, +, \bullet \rangle$, la matriz cambio de base es la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base S expresados en función de la base T .

Ejemplo 93 Sean $S = \{(1, 1); (-1, 1)\}$ y $T = \{(2, -1); (1, 2)\}$ bases $\mathbb{R}^2$. Encontrar: $[f]_T^S$; y las coordenadas de del vector $v = (-3, 4)$ con respecto a la base $T = \{(2, -1); (1, 2)\}$, si se sabe que las coordenadas de v con respecto a S son: $v_s = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Desarrollo: Para determinar la matriz de cambio de base, se considera que los vectores deben ser combinaciones lineales de la base T

$$(a, b) = \alpha(2, -1) + \beta(1, 2)$$

$$a = 2\alpha + \beta$$

$$b = -\alpha + 2\beta$$

$$\alpha = \frac{2a - b}{5}; \beta = \frac{a + 2b}{5}$$

Se determinan las coordenadas del conjunto $S = \{(1, 1); (-1, 1)\}$, en función de la base T , para lo cual, se evalúa cada uno de los vectores del conjunto S

$$u_1 = (1, 1); a = 1, b = 1$$

$$\alpha = \frac{2a - b}{5}; \beta = \frac{a + 2b}{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{5}; \beta = \frac{3}{5}$$

$$u_2 = (-1, 1); a = -1, b = 1$$

$$\alpha = \frac{2a - b}{5}; \beta = \frac{a + 2b}{5}$$

$$\alpha = -\frac{3}{5}; \beta = \frac{1}{5}$$

La matriz de cambio de base $[f]_T^S$:

$$[f]_T^S = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Para determinar las coordenadas $v = (-3, 4)$ con respecto a la base

$T = \{(2, -1); (1, 2)\}$, si se sabe que las coordenadas de v con respecto a S es, $v_s = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$, este vector se multiplica por la matriz de cambio de base $[f]_T^S$:

$$v_s = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

$$\mathbf{v}_T = [f]_T^S \mathbf{v}_S$$

$$\mathbf{v}_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_T = (-2, 1)$$

Una forma de comprobar el resultado es encontrando las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (-3, 4)$ con respecto a la base $T = \{(2, -1); (1, 2)\}$:

$$(-3, 4) = a(2, -1) + b(1, 2)$$

$$-3 = 2a + b$$

$$4 = -a + 2b$$

$$a = -2 \quad ; \quad b = 1$$

$$\mathbf{v}_T = (-2, 1)$$

Propiedades de las matrices de cambio de base

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada $\text{Mat}(R)_n$, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.
2. Toda matriz de cambio de base es inversible (es decir, su determinante es diferente de cero). Además, la matriz de cambio de S a T es inversa de la matriz de cambio de T a S , es decir se cumple que:

$$[f]_T^S [f]_S^T = \mathbf{I}$$

Para el caso del ejercicio anterior se puede encontrar la matriz de cambio de base aplicando la segunda propiedad expuesta.

$$[f]_S^T = \left[[f]_T^S \right]^{-1}$$

$$[f]_S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$[f]_S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se cumple que: $[f]_T^S [f]_S^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra de Transformaciones Lineales

Suma de Transformaciones Lineales

Sea f y $g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, la suma $f + g$ es otra transformación lineal, tal que:

$$f + g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$$

por lo tanto:

$$(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha (f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$$

La suma de dos transformaciones lineales, da como resultado otra transformación lineal.

Por demostrar que: $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha (f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$

- | | | |
|------|---|---------------------------|
| i. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$ | <i>Axio. Reflexivo</i> |
| ii. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) + g(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$ | <i>Def. Suma de T.L.</i> |
| iii. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\alpha \mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) + g(\alpha \mathbf{u}) + g(\mathbf{v})$ | <i>Def. Linealidad</i> |
| iv. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) + \alpha g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})$ | <i>Def. Producto p.e.</i> |
| v. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha[f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})] + [f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})]$ | <i>Axio. Asociativo</i> |
| vi. | $(f + g)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$ | <i>Def. Suma de T.L.</i> |

Ejemplo 94 Realizar la suma de las siguientes aplicaciones lineales:

$$f(x, y) = (x - 2y, x, y + x)$$

$$g(x, y, z) = (x + y, y - 2z)$$

En este ejemplo no se puede realizar la suma de las aplicaciones lineales debido a que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, es decir no tienen los mismos espacios de partida y de llegada.

Ejemplo 95 Sea f y $g \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, encontrar $f + g$

$$\text{Sean } f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, c - d, a + 2b) \text{ y } g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b - 2c, a + b + c + d)$$

Desarrollo

$$(f + g) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, c - d, a + 2b) + (a, b - 2c, a + b + c + d)$$

$$(f + g) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + d, b - c - d, 2a + 3b + c + d)$$

Producto de un escalar por una Transformación Lineal

Sea $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \wedge \beta \in R$, entonces $\beta f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$

$$(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \beta f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$$

Demostración:

- i. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$ *Axioma Reflexivo*
- ii. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \beta [f(\alpha \mathbf{u}) + f(\mathbf{v})]$ *Def. Linealidad*
- iii. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \beta [\alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})]$ *Def. Producto p.e*
- iv. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \beta \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$ *Axioma Distributivo*
- v. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \beta f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$ *Axioma Conmutativo de R*
- vi. $(\beta f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha (\beta f)(\mathbf{u}) + (\beta f)(\mathbf{v})$ *Def. Producto de un escalar por T.L*

Composición de Transformaciones Lineales

Sean $f \in L(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \wedge g \in L(\mathbf{W}, \mathbf{T})$; $(g \circ f) \in L(\mathbf{V}, \mathbf{T})$, por lo tanto si:

$\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, entonces, $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(g \circ f)(\mathbf{u}) + (g \circ f)(\mathbf{v})$

Demostración:

- i. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})$
- ii. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = g[f(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v})]$
- iii. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = g[\alpha f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})]$
- iv. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = g[\alpha f(\mathbf{u})] + g[f(\mathbf{v})]$
- v. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha g[f(\mathbf{u})] + g[f(\mathbf{v})]$
- vi. $(g \circ f)(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(g \circ f)(\mathbf{u}) + (g \circ f)(\mathbf{v})$

Ejemplo 96 Dadas las siguientes aplicaciones lineales:

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \text{Mat}(R)_2$$

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ a+c & b+2c \end{pmatrix}$$

$$g : \text{Mat}(R)_2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$g \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+w, y-2z)$$

Determinar $(g \circ f)$.

Desarrollo

$$(g \circ f)(a, b, c) = g[f(a, b, c)]$$

$$g \begin{pmatrix} a & a-b \\ a+c & b+2c \end{pmatrix} = [a+b+2c, b-a-2(a+c)]$$

$$(g \circ f)(a, b, c) = (a+b+2c, -2a+b-2c)$$

La aplicación resultante es:

$$(g \circ f)(a, b, c) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(g \circ f)(a, b, c) = (a+b+2c, -2a+b-2c)$$

Tipos de Transformaciones Lineales

Transformación Lineal Inyectiva

Sea $f : V \rightarrow W, \forall v \in V ; \exists w \in W$ tal que $f(v) = w$, f , es inyectiva si $N(f) = \phi$. Es decir, f es inyectiva si, y sólo si para vectores distintos del espacio de partida V da como resultado vectores distintos en el espacio de llegada W .

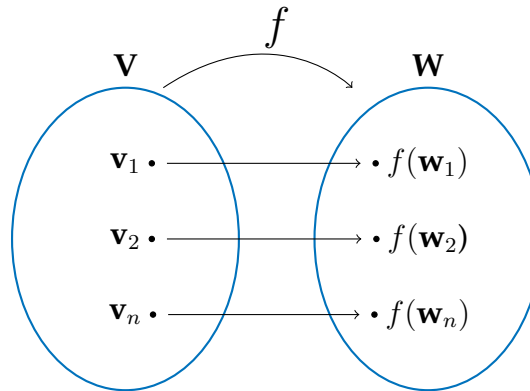


Figura VI.16: Transformación Lineal Inyectiva

Transformación Lineal Sobreyectiva

Sea $f : V \rightarrow W$, es sobreyectiva si la imagen de la aplicación dada, es todo el espacio de llegada W , es decir $\text{Im}(f) = W$.

Teorema 10 Sea f una transformación lineal de V en W . Si V es un espacio vectorial finito, una transformación lineal f es sobreyectiva sí, y sólo si,

$$\text{Im}(f) = W$$

Teorema 11 Sea f una transformación lineal de V en W .
Si

$$\dim(V) = \dim(W)$$

Entonces f es biyectiva sí y sólo si f es sobreyectiva.

Transformación Lineal Biyectiva

Sea $f : V \rightarrow W$, f es biyectiva si: f es inyectiva y sobreyectiva.

Isomorfismo

Las transformaciones lineales que son a la vez inyectivas y sobreyectivas, se llaman isomorfismos, y se dice que son inversibles.

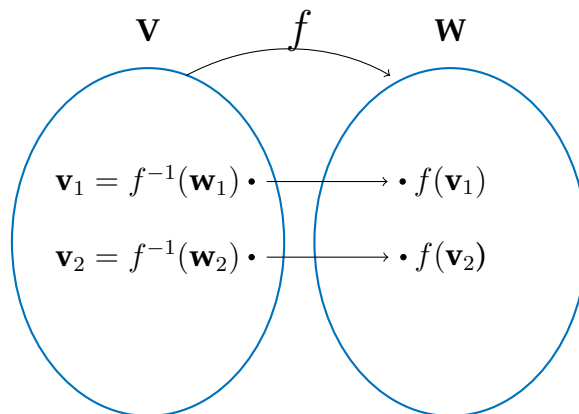


Figura VI.17: Representación de un Isomorfismo

Inversa de una Transformación Lineal

Sea $f : V \rightarrow W$, una aplicación lineal, f tiene inversa si f es biyectiva.

Ejemplo 97 Determinar si la siguiente Transformación Lineal tiene inversa.

$$f(x, y) = (x, x + 2y)$$

Desarrollo

Determinación del núcleo:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\x + 2y &= 0\end{aligned}$$

La solución es única: $x = 0, y = 0$

Por lo tanto, el núcleo de la función es igual al vector nulo, $\mathbf{B}_{\mathbf{N}(f)} = (0, 0)$

Su Imagen es:

$$\begin{aligned}x &= a \\x + 2y &= b \\x = a; y &= \frac{b - a}{2}\end{aligned}$$

Como no existe condición de dependencia entre a y b , la imagen es todo el espacio de llegada.

$$\mathbf{Im} (f) = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \}$$

La imagen es todo el espacio de llegada, por lo que f es **sobreyectiva**, por lo tanto, f sí tiene inversa.

La matriz asociada a la aplicación lineal: $f(x, y) = (x, x + 2y)$, es:

$$\mathbf{A} = [f]_{\mathbf{C}_2}^{\mathbf{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada, se encuentra con respecto a las bases canónicas del espacio de partida y del espacio de llegada.

La inversa de la matriz asociada es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la aplicación lineal dada es:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\mathbf{v}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}^t \\f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\f^{-1}(x, y) &= \left(x, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right)\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $L : V \rightarrow W$ una transformación lineal, $\dim V = \dim W = n$.

$B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, $B_2 = \{L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_n)\} \subset W$. Demostrar que: L es invertible si y solo si B_1 linealmente independiente entonces implica que B_2 es linealmente independiente.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2, $\{u, v\}$ es base de V

a. Mostrar que $u'' = u + 2v$ y $v'' = v - u$ forman una base de V

b. ¿Cuál es la matriz asociada a la transformación lineal T

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (x, y)$$

Siendo $\{u'', v''\}$ la base de salida y $\{u, v\}$ la base de llegada?

3. Sea $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que: $L(u) = v$, $L(v) = w$, $L(w) = u$ $B = \{u, v, w\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, donde: $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (1, 0, 1)$

a. Hallar la matriz asociada a L respecto a B

b. Determinar la matriz asociada a L respecto a la base canónica

4. Sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Qué condiciones deben cumplir a, b, c, d para que:

$$N(L) = (1, 1) \text{ e } \text{Im}(L) = (-1, 1)?$$

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

5. Sea L una transformación lineal

$$(x, y) \rightarrow L(x, y) = \left(kx + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + ky \right)$$

a. Para que valores de k de los reales L es biyectiva?

b. Calcular $[L]_{B_2}^{B_1}$, donde B_1 es base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(-1, 0), (0, -1)\}$

6. Sean las bases

$$\mathbf{B}_1 = \{1, x, x^2\} \text{ base de } \mathbf{P}_2(x), \text{ y}$$

$$\mathbf{B}_2 = \{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\} \text{ base de } \mathbf{P}_3(x)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a. $L : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_3$, tal que, $\mathbf{A} = [L]_{\mathbf{B}_2}^{\mathbf{B}_1}$

b. $\mathbf{N}(L)$, $\mathbf{Im}(L)$, dimensiones y bases

7. Sea $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{P}_2(x)$, una transformación lineal y $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{P}_2(x)$ representativamente. Hallar:

a. f explícitamente

b. $\mathbf{N}(f)$, $\mathbf{Im}(f)$, dimensiones y bases

8. Sea
$$T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

 $(x, y, z, w) \rightarrow T(x+z, y+w)$

a. Demostrar que T es lineal

b. $\mathbf{N}(T)$, $\mathbf{Im}(T)$, dimensiones y bases

9. Sea: $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$
 $(x, y, z) \rightarrow T(x, y, z)$, Una transformación lineal, donde:

$$T(1, 0, -1) = (-3, 1)$$

$$T(2, -1, 1) = (4, 2)$$

$$T(-1, 1, -1) = (-1, 3)$$

Determinar:

a. $T(x, y, z)$

b. $\mathbf{N}(T)$, $\mathbf{Im}(T)$, dimensiones y bases

10. Sea: $L : \mathbf{P}_4(x) \rightarrow \mathbf{P}_4(x)$
 $p(x) \rightarrow L(p(x)) = p''(x) + xp'(x) + 2p(x)$
- Probar que L es un isomorfismo
 - Estructurar la inversa de L
 - Hallar $[L]_{\mathbf{B}_c}^{\mathbf{B}_c}$, siendo $\mathbf{B}_c = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, base de $\mathbf{P}_4(x)$
11. Sea $L : \mathbf{P}(x)_2 \rightarrow \mathbf{P}(x)_2$
 $p(x) \rightarrow L(p(x)) = p(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)p'(x)$
- Mostrar que L es lineal
 - $\mathbf{N}(L)$, $\mathbf{Im}(L)$, dimensiones y bases
12. Sea $L : \mathbf{P}(x)_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$
 $a_2t^2 + a_1t + a_0 \rightarrow L(a_2 + a_1 + a_0, ka_2 - a_1, a_2 - a_1 + a_0)$
Hallar
- El valor de k para que L sea inyectiva
 - El valor de k para que $\dim(L) = 2$
 - Una base para la imagen y el núcleo en cada caso anterior L^{-1} si $k = 2$
 - $[L]_{\mathbf{B}_c}^{\mathbf{B}_c}$, si $\mathbf{B}_c$ son las bases de $\mathbf{P}(x)_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ respectivamente
13. Sea $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$
 $(x, y, z) \rightarrow L(x, y, z) = (x - y + z, 2x - 3y + z, 2x - y - 2z)$
- $\mathbf{B} = \{(2, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 1, -1)\}$, $\mathbf{B}_c$ base canónica de $\mathbf{R}^3$
- Demostrar que L sea biyectiva
 - Comprobar que $[L^{-1}]_{\mathbf{B}_c}^{\mathbf{B}} = \left([L]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}_c}\right)^{-1}$
14. Sea $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ base de $\mathbf{R}^3$, donde: $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ Si $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es una transformación lineal, tal que $\mathbf{B}^1 = \{\mathbf{u}_2\}$ es base de $\mathbf{N}(L)$ y $\mathbf{v}_2 = L(\mathbf{u}_2) = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = L(\mathbf{u}_3) = (1, 1, 1)$
- Hallar $L(x, y, z)$
 - Hallar la matriz asociada a L respecto a $\mathbf{B}$

- c. A partir del conjunto $\{v_2, v_3\}$ completar una base ortogonal para $\mathbf{R}^3$

15. Sea $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$
 $(x, y, z) \rightarrow L(x, y, z) = (x + 2y, -x + 3y - 5z, 2x + 3y + kz)$
- Hallar la matriz asociada a respecto a las bases canónicas
 - Para qué valores de k , L es un isomorfismo ¿?
 - Para qué valores de k la $\dim(L) = 1$?
 - Encontrar una base B para la cual la matriz asociada a L respecto a B tenga una columna de ceros

16. Dadas las funciones f y g de $\mathbf{P}(x)_2$, tales que:

$$f(p(x)) = p(x) - p'(x)$$

$$g(p(x)) = p(x) - p''(x)$$

- Hallar $(g \circ f)(p(x))$
- Demostrar que $(g \circ f)$ es una transformación lineal
- $(g \circ f)$ es biyectiva?
- Si $B = \{1, x, x^2\}$ y $B^1 = \{1 - x, x - x^2, 1 + x^2\}$ son base de $\mathbf{P}(x)_2$, hallar $[(g \circ g)]_{B^1}^B$
- Si $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, hallar $[(g \circ f)(p(x))]_B$

17. Sean las transformaciones lineales

$$f : \mathbf{P}(x)_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_o \rightarrow f(2a_2 - a_1 + a_o, a_2 + a_1, a_2 + 2a_1 - a_o)$$

$$g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{P}(x)_2$$

$$(a_2, a_1, a_o) \rightarrow (a_1 + a_o) t^2 + (2a_2 - a_1 - 2a_o) t + a_o$$

$$B_1 = \{(2, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\} \text{ base de } \mathbf{R}^3$$

- Demostrar que $(g \circ f)$ es invertible
- Hallar $(f \circ g)^{-1}$

- c. Hallar $F = [(f \circ g)^{-1}]_{\mathbf{B}_c}^{\mathbf{B}_1}$ y $G = [(f \circ g)]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_c}$
- d. Determinar si $F = G^{-1}$
18. Sea $L : \mathbf{P}(x)_2 \rightarrow \mathbf{P}(x)_2$
 $p(x) \rightarrow L(p(x)) = p'(x) - 2p(x)$
- a. Demostrar que L es lineal
- b. Probar que L es invertible
- c. Hallar L^{-1}
- d. Hallar la matriz asociada a L respecto a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$, siendo
 $\mathbf{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathbf{B}' = \{1 - x, x - x^2, 1 + x^2\}$ base de $\mathbf{P}(x)_2$
- e. Si $p(x) = 2 - x + x^2$, hallar $L(p(x))$ usando $[L]_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$
19. Sean $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una transformación lineal y $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base de $\mathbf{R}^3$, tal que $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{w} = (0, 2, 1)$, se conoce que $f(\mathbf{u}) = (1, -1, k)$, $f(\mathbf{v}) = (0, 1, 1)$ y $f(\mathbf{w}) = (0, 2, 1)$
- a. Hallar $f(x, y, z)$
- b. Para que valores de k , f es biyectiva?
- c. Hallar la base para el núcleo y una base para la imagen de f , cuando esta es biyectiva
- d. Si $k = 2$, hallar la matriz asociada a f respecto a $\mathbf{B}$



CAPÍTULO VII

Valores y Vectores

Propios

Valores y Vectores Propios

En álgebra lineal, los vectores propios, que también se llaman eigen vectores o auto vectores de una transformación lineal, son los **vectores no nulos** que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio, autovalor o valor característico. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio o subespacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

Definición:

Sea $f : V \rightarrow V$ siendo V un espacio vectorial cualquiera definida sobre R y $\lambda \in R$, sea $v \in V$ se dice que v es un vector propio de f , si se cumple:

$$f(v) = \lambda v$$

Donde:

λ : Valor propio de f (*Auto valor, Valor característico, Eigen Valor*)

v : Vector propio de f asociado a λ .

Ejemplo 98 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y) = (10x - 18y, 6x - 11y)$.

Determinar si los siguientes vectores: $u = (2, 1)$ y $v = (3, 2)$, son vectores propios de la transformación lineal dada.

Son valores propios por cumplir la propiedad.

$$Av = \lambda v$$

$$f(x, y) = (10x - 18y, 6x - 11y)$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = 1; u = (2, 1)$$

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda = -2; \mathbf{v} = (3, 2)$$

Teorema 12 Sea $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ el conjunto de vectores propios, de una matriz, forma un subespacio vectorial.

$$\mathbf{V}_\lambda = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \}$$

Por definición de vectores propios, se conoce que: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, partiendo de esto:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{VII.1}$$

En la expresión VII.1, se tiene una ecuación cuyas incógnitas son: λ y $\mathbf{v}$

Recuerde que el vector propio debe ser diferente de cero, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, por lo tanto lo primero que se determinará es el valor propio λ , para lo cual se aplicará: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

Polinomio característico

Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}(\mathbb{R})_n$, su polinomio característico está definido por:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| \tag{VII.2}$$

El polinomio resultante, si la matriz es de orden n , es de grado n

Ejemplo 99 Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar el polinomio característico

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 10 - \lambda & -18 \\ 6 & -11 - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$p(\lambda) = (10 - \lambda)(-11 - \lambda) - (6)(-18)$$

$$p(\lambda) = -110 + \lambda + \lambda^2 + 108$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Valores Propios

Un escalar λ es un valor propio de una matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(R)_n$, si existe una solución no trivial de $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$; tal que $\mathbf{v}$ es el vector propio correspondiente a λ .

Los valores propios se los determina encontrando las raíces del polinomio característicos, $p(\lambda)$, por lo tanto para determinar los valores propios se parte de $p(\lambda) = 0$.

Considerando el ejercicio anterior:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$p(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 1; \lambda = -2$$

Vectores Propios

Un vector propio de una matriz $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}(R)_n$, es un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, distinto de cero, si se cumple $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ (valor propio).

Para determinar los vectores propios, se resuelve el siguiente sistema homogéneo: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, la incógnita es $\mathbf{v}$ y λ_i son los valores propios.

Ejemplo 100 Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, determinar los vectores propios:

En el ejemplo anterior se obtuvieron los valores propios, con esos valores se obtienen los vectores propios correspondientes.

$(A - \lambda_i I) \mathbf{v} = 0$, considerando: $\lambda_1 = -2$

$$\left[\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -18 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array} \right) f_2 - \frac{1}{2}f_2 \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$12x - 18y = 0$$

$$12x = 18y$$

$$x = \frac{3y}{2}$$

$$\mathbf{v} = (x, y)^t$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{3y}{2}, y \right)^t, \text{ si } y = 2, \mathbf{v}_1 = (3, 2)^t$$

$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0$, considerando $\lambda_2 = 1$

$$\left[\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$9x - 18y = 0$$

$$9x = 18y$$

$$x = 2y$$

$$\mathbf{v} = (x, y)^t$$

$$\mathbf{v}_2 = (2y, y)^t, \text{ si } y = 1, \mathbf{v}_2 = (2, 1)^t$$

Utilización de Scilab para la obtención de los valores y los vectores propios:

```
A=[10 -18; 6 -11]
```

```
A =
```

```
10. -18.
```

```
6. -11.
```

Comando para obtener los valores y vectores propios spec(A)

```
[vec vals]=spec(A)
```

```
vec =
```

```
0.8944272 + 0.i 0.8320503 + 0.i
```

```
0.4472136 + 0.i 0.5547002 + 0.i
```

```
vals =
```

```
1. + 0.i 0. + 0.i
```

```
0. + 0.i -2. + 0.i
```

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $p_n(\lambda)$ el polinomio característico, de grado n , de la matriz A de orden n , el polinomio tiene n raíces y puede escribirse como:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

Donde $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

1. Se llama multiplicidad algebraica de λ_i , a las veces que se repite un λ_i
2. La multiplicidad geométrica del valor propio λ_i es la dimensión del subespacio vectorial, del vector propio v_i asociado al valor propio λ_i .

Si la multiplicidad algebraica de un valor propio es 1, entonces la multiplicidad geométrica también es 1. Pero si la multiplicidad algebraica es $p > 1$, $p \leq n$, entonces la multiplicidad geométrica puede ser 1 o 2, hasta p . Todo valor propio tiene asociado por lo menos un vector propio.

Diagonalización

La diagonalización de matrices es un concepto fundamental en Álgebra Lineal con muchas aplicaciones en diversas áreas, incluyendo la física, la ingeniería, las ciencias de la computación y las matemáticas puras. Dentro las principales aplicaciones de la diagonalización se tiene:

- **Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales:** En diferentes áreas, los modelos matemáticos se expresan como sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, los mismos que pueden ser representados en forma matricial. De esta manera la diagonalización de matrices puede utilizarse para resolver estos sistemas y estudiar el comportamiento de los sistemas dinámicos.
- **Análisis de estructuras:** En la carrera de ingeniería civil y mecánica estructural, se aplica la diagonalización de matrices para analizar la estabilidad y el comportamiento vibracional de estructuras como puentes, edificios y sistemas mecánicos.
- **Análisis de estabilidad en sistemas dinámicos:** Una herramienta eficiente para analizar el comportamiento dinámico, es la diagonalización ya que se puede analizar la estabilidad de puntos de equilibrio y comprender el comportamiento a futuro. Se utiliza para analizar circuitos eléctricos lineales y determinar su comportamiento en el dominio de la frecuencia.
- **Teoría espectral:** La diagonalización de matrices es fundamental en la teoría espectral, que estudia las propiedades de los operadores lineales en espacios vectoriales. Por ejemplo, la diagonalización de matrices hermitianas conduce a la descomposición espectral, que es importante en física cuántica y teoría de sistemas dinámicos.
- **Optimización:** En ciencia de datos y optimización, la diagonalización de matrices se utiliza para encontrar soluciones óptimas en problemas de optimización cuadrática y en la optimización de funciones objetivo en varias variables.
- **Criptografía:** En criptografía, la diagonalización de matrices se utiliza en algoritmos criptográficos como el cifrado de Hill, que se basa en la multiplicación de matrices para cifrar y descifrar mensajes.

En Álgebra Lineal, una matriz cuadrada, $A \in \text{Mat}(R)_2$ se dice que es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si mediante un cambio de base puede reducirse a una forma diagonal.

Matrices similares:

Sean A y $B \in \text{Mat}(R)_n$, A es similar a B si existe una matriz $Q \in \text{Mat}(R)_n$, Q inversible tal que se cumpla:

$$B = Q^{-1}AQ$$

Teorema 13 Si dos matrices son similares entonces se cumple que:

$$|A| = |B|$$

Matrices Diagonalizables

Sea $A \in \text{Mat}(R)_n$, A es diagonalizado si A es similar a una matriz D

$$D = Q^{-1}AQ$$

La matriz Q se forma por los vectores propios de A

Hay algunas condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea diagonalizable:

- I. *Matrices simétricas*: Las matrices simétricas son diagonalizables.
- II. *Matrices con n vectores propios linealmente independientes*: Una matriz cuadrada de tamaño n es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.
- III. *Matrices con multiplicidad algebraica igual a la multiplicidad geométrica para cada autovalor*: Una matriz cuadrada A_n es diagonalizable si y solo si para cada autovalor λ de A_n , la multiplicidad algebraica de λ es igual a su multiplicidad geométrica.

Es importante tener en cuenta que no todas las matrices son diagonalizables. Por ejemplo, una matriz nilpotente no es diagonalizable y algunas matrices tienen autovalores repetidos o carecen de un conjunto completo de autovalores linealmente independientes, lo que las hace no diagonalizables.

Ejemplo 101 Sea $B = Q^{-1}AQ$ demostrar que $|A| = |B|$

Desarrollo

$$\begin{aligned} |B| &= |Q^{-1}AQ| \\ |B| &= |Q^{-1}| |A| |Q| \\ |B| &= \frac{1}{|Q|} |A| |Q| \\ |B| &= |A| \end{aligned}$$

Cuando una matriz es diagonalizable, su diagonalización proporciona una forma conveniente de calcular su potencia elevada a la n -ésima potencia. Suponer que se tiene una matriz A que es diagonalizable, lo que significa que puede escribirse como:

$$D = Q^{-1}AQ$$

Donde D es una matriz diagonal y Q es una matriz invertible cuyas columnas son los autovectores de A . La matriz A se obtiene a partir de $D = Q^{-1}AQ$, de la siguiente manera:

$$1. D = Q^{-1}AQ$$

$$\begin{aligned} QD &= QQ^{-1}AQ \\ QD &= IAQ \\ QDQ^{-1} &= AQQ^{-1} \\ QDQ^{-1} &= AI \\ QDQ^{-1} &= AI \\ QDQ^{-1} &= A \\ A &= QDQ^{-1} \end{aligned} \tag{VII.3}$$

Para calcular A^n , se lo puede realizar aplicando $A^n = QD^nQ^{-1}$, esto se deduce de:

$$\begin{aligned} AA &= QDQ^{-1}QDQ^{-1} \\ A^2 &= QDIDQ^{-1} \\ A^2 &= QD^2Q^{-1} \\ &\vdots \\ A^n &= QD^nQ^{-1} \end{aligned}$$

Se sabe que $\mathbf{D}$, es una matriz diagonal de la forma: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

su potencia e-nésima es

$$\mathbf{D}^r = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^r \end{pmatrix}$$

Ejemplo 102 Encontrar $\mathbf{A}^n$, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

Desarrollo

Polinomio característico: $p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 10 - \lambda & -18 \\ 6 & -11 - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$p(\lambda) = (10 - \lambda)(-11 - \lambda) - (6)(-18)$$

$$p(\lambda) = -110 + \lambda + \lambda^2 + 108$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Valores Propios:

$$p(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 1; \lambda = -2$$

Vectores Propios: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\left[\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \frac{1}{2}f_2 \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right) 3f_2 - f_1 \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$9x - 18y = 0$$

$$x = 2y; \mathbf{v}_1 = (2, 1)^t$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{array} \right) - (-2) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -18 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array} \right) f_2 - \frac{1}{2}f_2 \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$12x - 18y = 0$$

$$x = \frac{3y}{2}; \mathbf{v}_2 = (3, 2)^t$$

La Matriz $\mathbf{Q}$, se forma de los vectores propios : $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

La inversa de $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \text{adj} \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si el procedimiento está bien realizado, debe cumplirse que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

Donde $\mathbf{D}$, es la matriz diagonal, que tiene por elementos los valores propios.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se debe recordar que la potencia de una matriz diagonal se la define como:

$$\text{Sea } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}_n, \text{ su potencia es: } \mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} (\alpha_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_2)^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_n)^k \end{pmatrix}_n$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\mathbf{D}^n\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 4 - 3(-2)^n & -6 + 6(-2)^n \\ 2 - 2(-2)^n & -3 + 4(-2)^n \end{pmatrix}$$

Aplicación para la resolución de Ecuaciones Diferenciales

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

donde $a_{ij} \in R$,

la solución del sistema VII.4 es:

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \quad (\text{VII.5})$$

donde:

λ_i =Valores propios

$\mathbf{v}_i$ =Vectores propios

Ejemplo 103 Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_1(t) = 10x_1(t) - 18x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 11x_2(t)$$

Determinar la solución del sistema dado.

Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

$$\text{Vectores Propios } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Este Teorema indica que, todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo cualquiera anula su propio polinomio característico.

En términos matriciales, eso significa que : si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n y si:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0$$

es su polinomio característico, entonces al sustituir formalmente λ por la matriz $\mathbf{A}$ en el polinomio, el resultado es la matriz nula:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_1 \mathbf{A} + p_0 \mathbf{I}_n = \phi_n$$

Ejemplo 104 Comprobar el teorema de Cayley-Hamilton, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$$

$$p(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\mathbf{A}) = \phi_n$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demostrar que cualquier matriz de $\text{Mat}(R)_2$, cuyo determinante es negativo es semejante a una matriz diagonal
2. Sean A y $B \in \text{Mat}(R)_2$. Probar AB y BA tienen los mismos valores propios
3. Hallar todas las matrices $A \in B \in \text{Mat}(R)_2$, con valores propios 1 y -1 .
4. Sean $L : V \rightarrow V$ una transformación lineal invertible. Si λ es un valor propio de L , cual es el valor propio de L^{-1}
5. Sea V un espacio vectorial y f, g dos transformaciones lineales tales que $f \circ g = g \circ f$. Si λ es un valor propio de g , y
 $V_2 = \{v \in V : g(v) = \lambda v\}$

a. Demostrar que si $u \in V_2$, $f(u) \in V_2$

b. Dar una condición para que: si $f(u) \in V_2 \rightarrow u \in V_2$

6. Sean v_1 y v_2 , vectores propios con valores propios asociados λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Demostrar que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, es un vector propio si $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$

7. ¿Para qué valores $a, b \in R$, la matriz: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; tiene los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

8. Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$ con vectores propios $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Encontrar los valores de a, b, c, p, q, r

9. Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Defina sobre los complejos

a. Diagonalizar A

b. Hallar A^k , para $k = 1, 2, 3, \dots$

10. Para cada uno de los siguientes casos, si es posible, diagnosticar la matriz dada y hallar la matriz Q invertible tal que, $D = Q^{-1}AQ$ (comprobar)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{b)} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} & \text{d)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

11. Para cada uno de los siguientes casos, si es posible, diagnosticar la matriz dada y hallar la matriz $\mathbf{Q}$ invertible tal que, $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & -1 & 0 \\ 1+i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

12. Demostrar que la siguiente matriz no es diagonalizable, pero que sí es semejante a una matriz de la forma $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

13. Probar que si λ es un valor propio de una matriz $\mathbf{A}$ con vector propio asociado $\mathbf{v}$ y k es un entero positivo, entonces λ^k es un valor propio de la matriz $\mathbf{A}^k$ con vector propio asociado $\mathbf{v}$
14. Sea la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar los valores y vectores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$, verificar el ejercicio 13.
15. Sea $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de las funciones continuas con base $\{\sin x, \cos x\}$ y sea

$$L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$f(x) \rightarrow L(f(x)) = f'(x)$$

Es L diagonalizable?

16. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Hallar las condiciones para que $\mathbf{A}$ sea diagonalizable

Referencias

- [1] Cueva, R., Navas, F., & Toro, J. L. (2009). *Álgebra lineal*. EPN.
- [2] Joe, G. (2004). *Ejercicios y problemas de álgebra lineal*. ESPE.
- [3] Lay, D. C. (2010). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3a ed. actualizada). Pearson Educación.
- [4] Nicholson, W. K., Lopes, C. M. C., Figueiredo, L. M. V., & Monteiro, M. S. (2006). *Elementary Linear Algebra*. AMGH. Recuperado de <https://books.google.com.ec/books?id=F2P5zwEACAAJ>

Bibliografía

Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias. (2012). McGraw-Hill/Interamericana.

Bernardo, A. F. (2007). *Álgebra lineal*.

Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/7096>

Ramos, E. E. (2006). *Álgebra lineal*. Servicios Gráficos J.J. <https://books.google.com.ec/books?id=3u>

Fernández, O., & Jiménez, J. H. F. (2002). *Talleres para el curso de álgebra lineal*. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de Ingeniería. Recuperado de <https://books.google.com.ec/books?id=Nb1HjwEACAAJ>

Grossman S., S. I. (2019). *Álgebra lineal*. Biblioteca Hernán Malo González de la Universidad del Azuay; Biblioteca Hernán Malo González. Recuperado de <https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/85855>

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. Pearson Educación. Recuperado de <https://books.google.com.ec/books?id=vO9aWRaSl74C>

Apuntes de Álgebra Lineal

Apuntes de Álgebra Lineal es un texto pensado para estudiantes de los primeros niveles de carreras en ingeniería, ciencias, tecnología y matemáticas. Su propósito es ofrecer una introducción clara, rigurosa y accesible a los principios fundamentales del álgebra lineal.

A lo largo del libro se desarrollan de forma sistemática los conceptos y herramientas esenciales de la disciplina: sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores propios, diagonalización de matrices, entre otros. Estos contenidos proporcionan al lector la base teórica y práctica necesaria para enfrentar problemas cada vez más complejos en su formación académica y futura actividad profesional.

El texto ha sido diseñado para acompañar al estudiante en la comprensión de abstracciones matemáticas clave, favorecer el razonamiento lógico y fortalecer su capacidad de modelación. Para ello, incluye ejemplos resueltos, ejercicios de diversa dificultad y proyectos de aplicación que permiten consolidar el aprendizaje y preparan al lector para los desafíos técnicos y teóricos que encontrará a lo largo de su carrera universitaria y en su ejercicio profesional.

ISBN: 978-9942-652-36-2



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA