



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción

Ingeniería Geoespacial

Trabajo de integración curricular, previo a la obtención del título de Ingeniero Geoespacial.

“Generación de un modelo de ondulación geoidal para la ciudad de Cuenca utilizando técnicas determinísticas y geoestadísticas“

Autores

Borja Abad José Sebastián,
Manobanda Andagana Alejandra Paola y
Vegay Condo Lida Mercedes

Director del Proyecto

Ing. Leiva González, César Alberto Msc.

Docente Evaluador

Ing. Jácome Enriquez, Wilson Oswaldo Ph.D.

Director de Carrera

Ing. Robayo Nieto, Alexander Alfredo Msc.

Docente Evaluador

Ing. Luna Ludeña, Marco Patricio Ph.D

Índice

1. Introducción

2. Objetivos

3. Hipótesis

4. Conceptos Claves

5. Metodología

6. Área de Estudio

7. Análisis y Selección de Modelo

8. Programación R Studio

1. Kriging Ordinario.
 2. Mínimos Cuadrados Colocación.
 3. Mínima Curvatura.
-

9. Comparación y Elección Mejor Modelo.

10. Conclusiones.

11. Recomendaciones.

Introducción

Aunque los sistemas GNSS facilitan la obtención de coordenadas, la transformación de sus alturas elipsoidales a las alturas referidas a la referencia vertical adoptada, requeridas en ingeniería exige obligatoriamente un modelo de ondulación geoidal.

Actualmente, la ciudad de Cuenca cuenta con una Red Geodésica, pero carece de un modelo local propio, obligando a depender de modelos globales imprecisos (EGMo8) o de nivelaciones tradicionales lentas y costosas.

Para solucionar este problema, esta investigación desarrolló un modelo geoidal local, utilizando datos oficiales del GAD Municipal, evaluando y comparando métodos de interpolación determinísticos y geoestadísticos (mediante R Studio y QGIS) para determinar el algoritmo con el mejor ajuste y menor margen de error.

Objetivos

General

- Generar un modelo de ondulación geoidal para la ciudad de Cuenca utilizando técnicas determinísticas y geoestadísticas.

Específicos

- Generar un modelo de ondulación geoidal local para la ciudad de Cuenca utilizando método geoestadístico Kriging – Cokriging.
- Generar un modelo de ondulación geoidal local para la ciudad de Cuenca utilizando método geoestadístico Mínimos Cuadrados Colocación.
- Generar un modelo local de ondulación geoidal para la ciudad de Cuenca utilizando método determinístico Algoritmo de Mínima Curvatura.

Hipótesis

Es factible generar modelos locales de ondulación geoidal de alta resolución y de precisión para la ciudad de Cuenca mediante la aplicación de técnicas geoestadísticas, como Kriging y Mínimos Cuadrados por Colocación, además de métodos determinísticos como el algoritmo de Mínima Curvatura. Y el uso de datos de la red geodésica oficial permitirá ajustar y validar los resultados, logrando una mejor conversión entre alturas elipsoidales y alturas referidas a la referencia vertical, dentro del área urbana.

Conceptos Claves

Ondulación Geoidal

La ondulación geoidal es la separación vertical entre el geoide (superficie del nivel medio del mar) y el elipsoide de referencia matemático en un punto terrestre (Torge, 2001).

Kriging Ordinario

El kriging ordinario es un estimador lineal insesgado que predice valores desconocidos usando la correlación espacial del semivariograma, minimizando la varianza de error y asumiendo media constante desconocida en el área de estudio (Viera & González, 2002).

Mínimos Cuadrados Colocación

El método de mínimos cuadrados colocación combina observaciones, modelo funcional y covarianzas para estimar parámetros y sus varianzas óptimas e insesgadas mediante la resolución del sistema normal con restricciones geométricas (Moritz, H., 1980).

Conceptos Claves

Método de Interpolación Determinísticos

Los métodos de interpolación determinísticos estiman valores desconocidos usando funciones matemáticas basadas en distancia o superficies, sin modelar correlación espacial ni incertidumbre estadística (Isaaks & Srivastava, 1989).

Algoritmo de Mínima Curvatura

Es un algoritmo que busca hacer el ajuste de una función a una limitada cantidad de puntos, generando una línea que pasa exactamente por las muestras originales, asegurando así la continuidad en la unión de las distintas curvas. (Briggs, 1974).

Metodología

El proceso metodológico para el presente estudio se resume en el diagrama de flujo, donde se detallan las fases principales: recopilación de datos, análisis de métodos de modelación, generación de modelos, verificación y comparación de resultados.

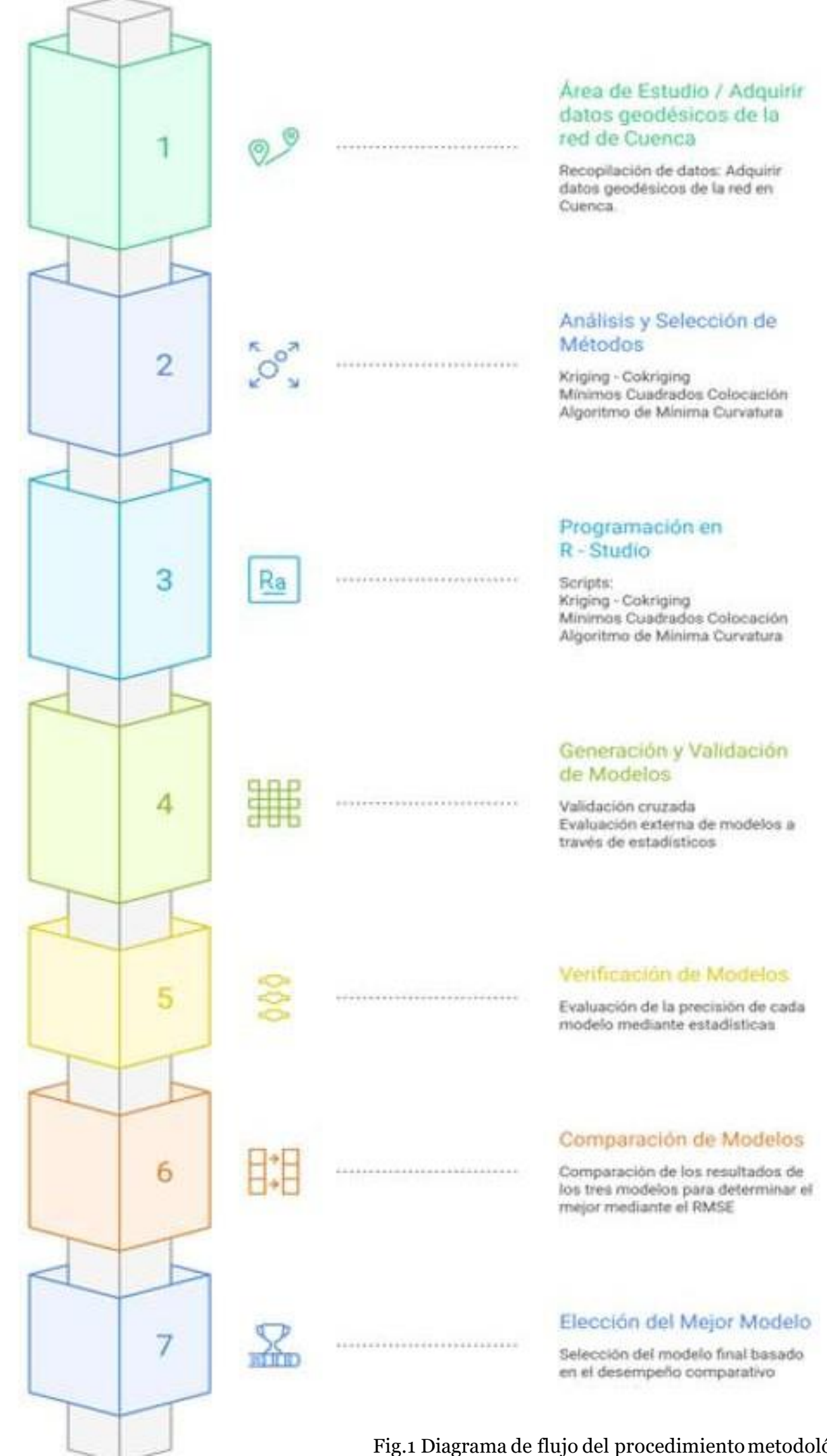


Fig.1 Diagrama de flujo del procedimiento metodológico.

Área de estudio

Adquisición de Datos

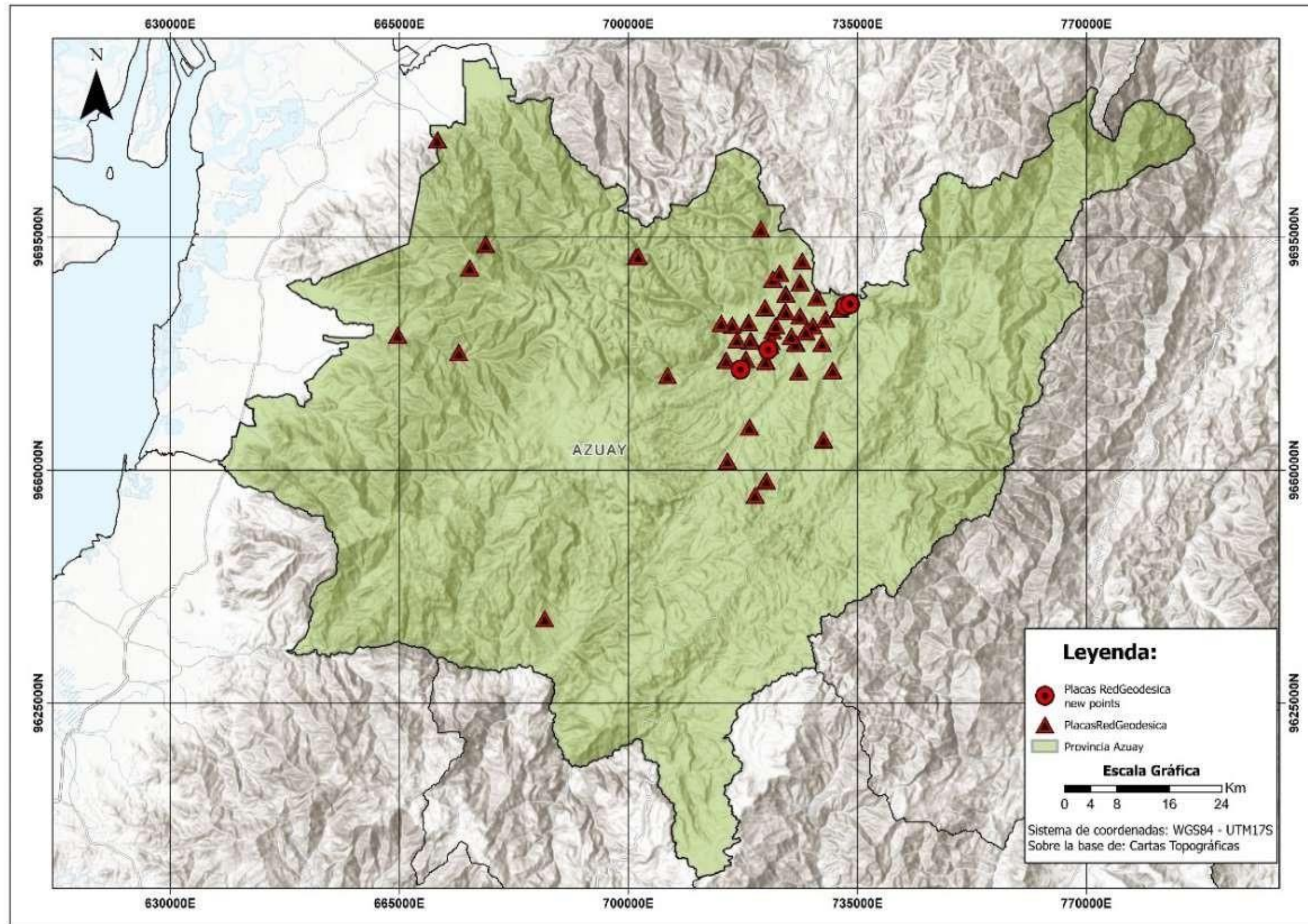


Fig. 2 Distribución espacial general de los puntos de la Red Geodésica de Cuenca

Área de estudio

Delimitación del Área de Estudio

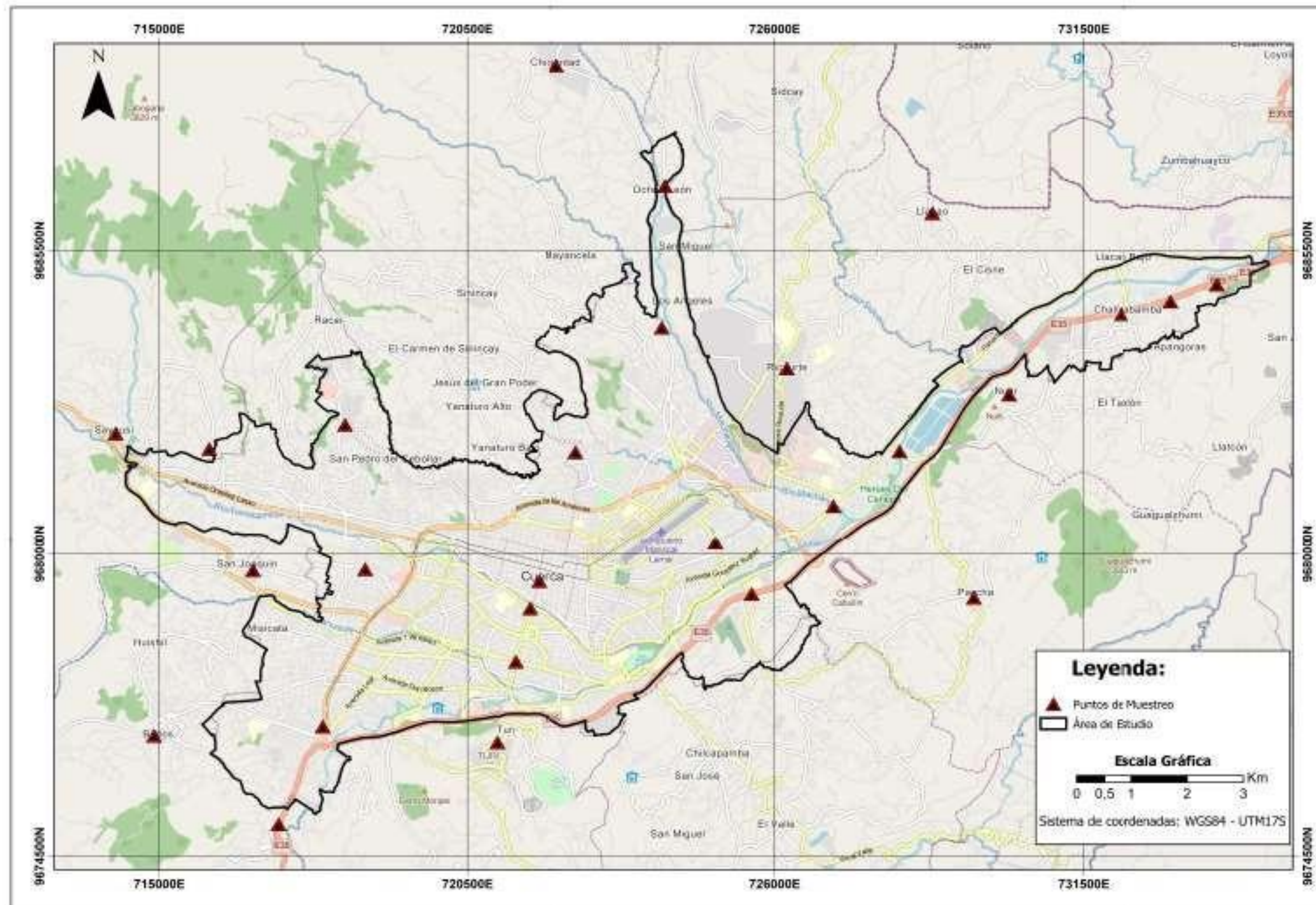


Fig. 3 Mapa de delimitación del área de estudio.

Área de estudio

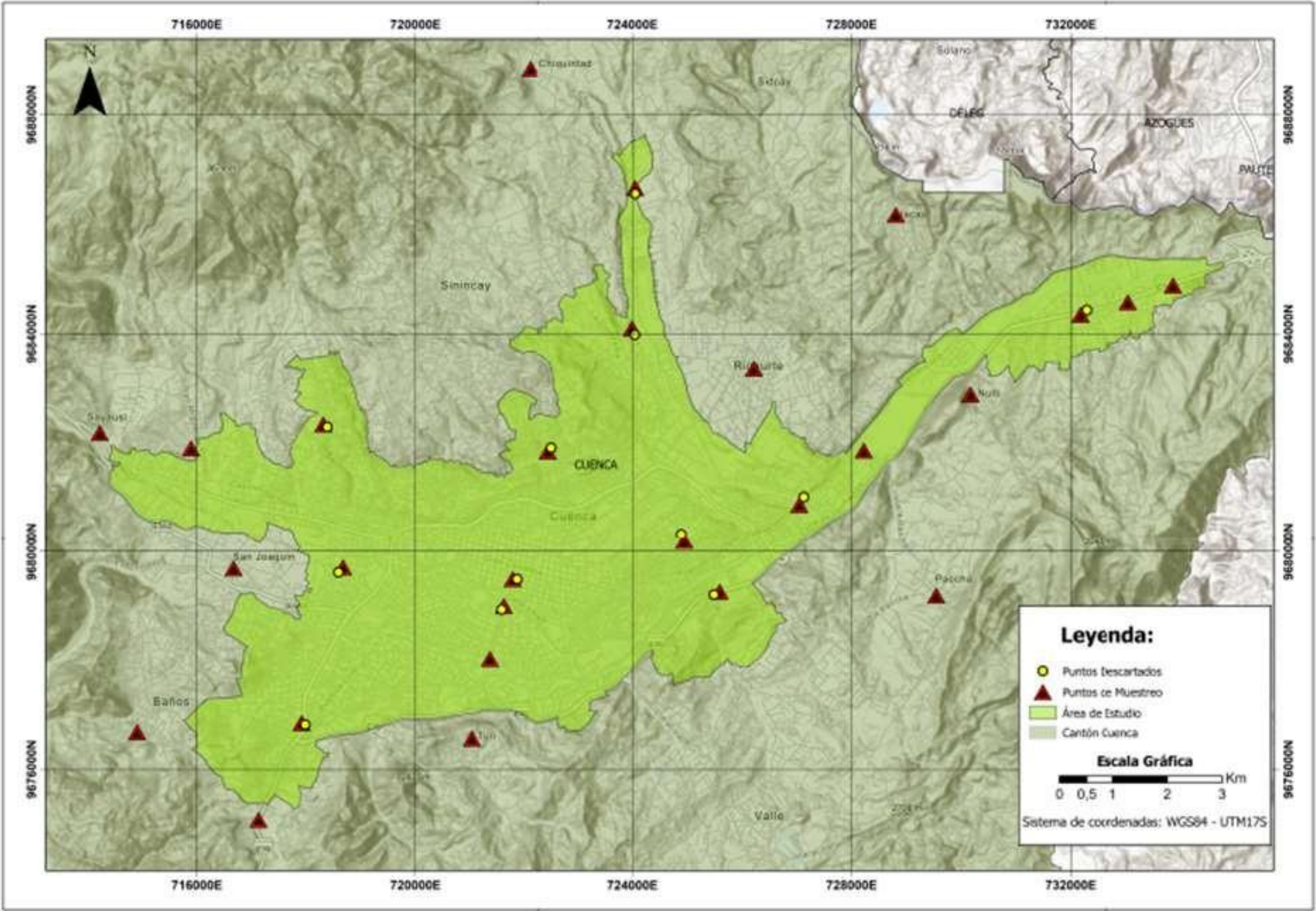


Fig. 4 Mapa de depuración de la Red Geodésica: puntos aptos vs. puntos descartados.

Validación y Depuración de la Base de Datos

Puntos de muestro para la validación del modelo			
No	ESTE UTM	NORTE UTM	ONDULACIÓN GEOIDAL (m)
1	728220.943	9681894.581	21.758
2	725590.135	9679281.485	21.664
3	727045.491	9680901.780	21.730
4	732177.525	9684374.199	21.934
5	726215.439	9683392.313	21.872
6	724048.850	9686690.106	22.151
7	723990.585	9684128.497	21.952
8	724945.098	9680217.797	21.726
9	722455.973	9681876.715	21.862
10	718312.244	9682372.265	22.042
11	715892.274	9681936.450	22.087
12	718671.930	9679729.319	21.813
13	717916.422	9676877.358	21.687
14	721033.130	9676591.772	21.639
15	721616.970	9679019.427	21.707
16	714905.911	9676711.122	21.819
17	716669.971	9679711.717	21.885
18	714220.799	9682216.685	22.162
19	730168.810	9682919.767	21.833
20	728805.160	9686200.841	22.005
21	722107.118	9688867.102	22.387
22	729542.295	9679212.072	21.737
23	721778.466	9679512.857	21.753
24	733072.057	9684601.682	21.966
25	733895.657	9684906.702	21.991

Puntos de verificación del modelo.			
No	ESTE UTM	NORTE UTM	ONDULACIÓN GEOIDAL (m)
1	725490.138	9679204.738	21.664
2	727127.425	9681021.688	21.736
3	732293.268	9684436.786	21.940
4	724049.390	9686562.109	22.135
5	724042.208	9683986.866	21.939
6	724892.114	9680336.110	21.729
7	722515.481	9681921.978	21.860
8	718386.952	9682303.445	22.030
9	718592.164	9679613.774	21.811
10	717981.874	9676825.251	21.687
11	721577.962	9678932.812	21.718
12	721860.326	9679487.784	21.777

Análisis y Selección del Modelo

En esta etapa se realizó la evaluación y la selección de los algoritmos de interpolación espacial considerados más adecuados para construir las superficies geoidales.

Geoestadísticos

Se incluyeron en los métodos estocásticos o geoestadísticos a Kriging Ordinario(KO) y Mínimos Cuadrados Colocación (MCC) , que, a diferencia de los métodos deterministas, analizan la estructura de la variabilidad espacial y permiten calcular el error de la predicción.

Determinísticos

Mínima Curvatura- Splines (MCS), la cual se caracteriza en desarrollar superficies suaves tomando como referencia la geometría de los datos, sin considerar la correlación existente entre ellos, además de que permite el desarrollo de modelos continuos con minoritaria escasez de datos.

Programación en R-Studio

Para la generación del modelo geoidal, se llevó a cabo el procesamiento de datos y la programación de los algoritmos en el software R-Studio.

Se desarrollaron scripts específicos para cada uno de los tres métodos de interpolación:

- Dos de carácter geoestadístico (Kriging Ordinario y Mínimos Cuadrados Colocación).
- Y otro determinístico (Mínima Curvatura).

Kriging Ordinario

Análisis Exploratorio de Datos

El procesamiento se llevó a cabo mediante la implementación de un script en R, diseñado para calcular el análisis estadístico descriptivo, tales como media, mediana, rango, valores extremos (mínimo y máximo), así como el coeficiente de variación y asimetría.

```
# Estadísticos descriptivos de la ondulación geoidal (N)
n_datos <- length(z)
media <- mean(z)
mediana <- median(z)
sd_z <- sd(z)
min_z <- min(z)
max_z <- max(z)
rango <- max_z - min_z
cv <- (sd_z / abs(media)) * 100

# Cálculo de Asimetría
if(n_datos > 2) {
  asimetria <- (n_datos / ((n_datos-1)*(n_datos-2))) * sum(((z - media)/sd_z)^3)
} else {
  asimetria <- NA
}
```

Fig. .5 Fragmento de código en R para el análisis exploratorio de la ondulación geoidal

Posteriormente, se generaron gráficos estadísticos, incluidos histogramas y diagramas de caja, así como diagramas de dispersión, permitieron investigar la presencia de tendencias espaciales y probar la hipótesis de estacionariedad.

```
# Histograma
hist(datos$z, breaks = "Sturges",
      main = "Histograma de la ondulación geoidal (N)",
      xlab = "N (m)", ylab = "Frecuencia")
abline(v = media_z, lwd = 2, lty = 2)

# Diagrama de caja
boxplot(datos$z,
        main = "Diagrama de caja de la ondulación geoidal (N)",
        ylab = "N (m)")

# Distribución espacial
colores <- cut(datos$z, breaks = 10)
plot(datos$x, datos$y, pch = 20, col = colores,
      main = "Distribución espacial de la ondulación geoidal (N)",
      xlab = "Este", ylab = "Norte")
```

Fig. .6 Fragmento de código en R para visualizaciones estadísticas

Tras la ejecución de los algoritmos descrito, a continuación los resultados obtenidos detallando el comportamiento de los datos y los ajustes realizados:

Análisis Exploratorio de Datos

Media (m)	Mediana (m)	Desv. Est. (m)	Rango (m)	Coef. Var. (%)	Coef. Asim.	Min. (m)	Max. (m)
21.869	21.833	0.188	0.789	0.86	0.892	21.598	22.387

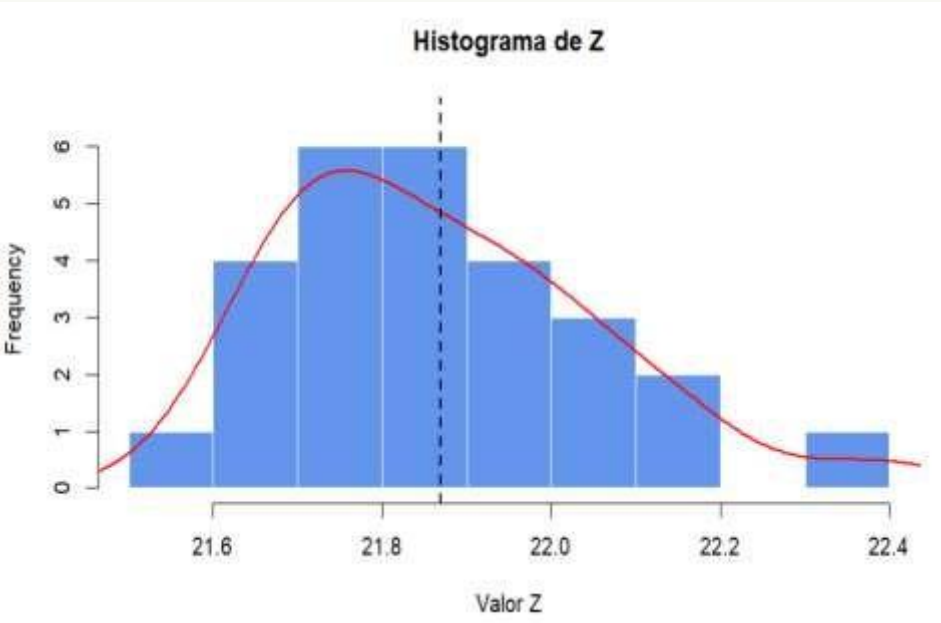


Fig. 7 Histograma de frecuencia de los datos

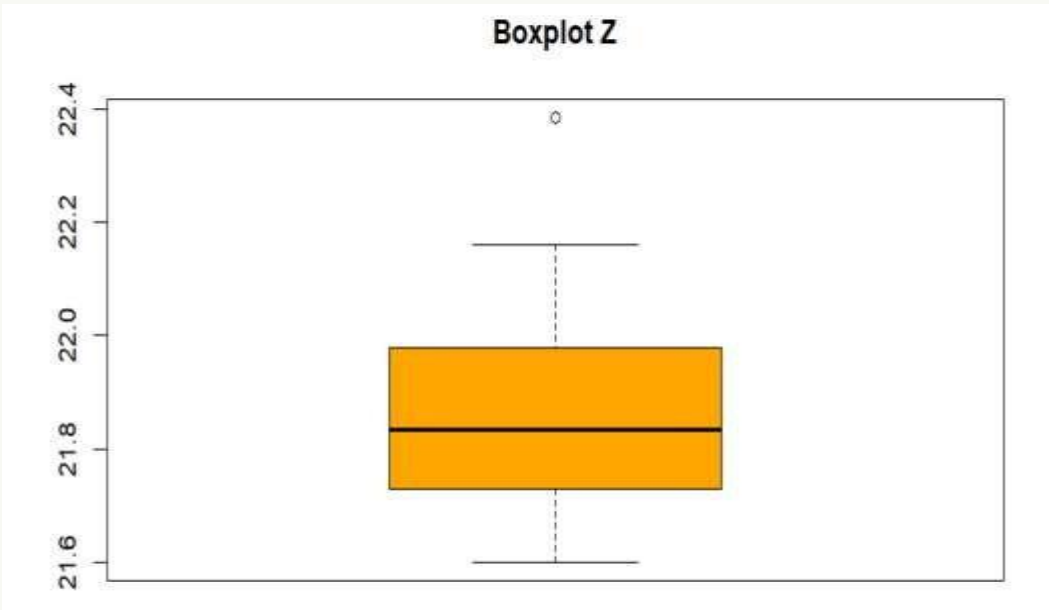


Fig. 8 Diagrama de caja de la Ondulación Geoidal

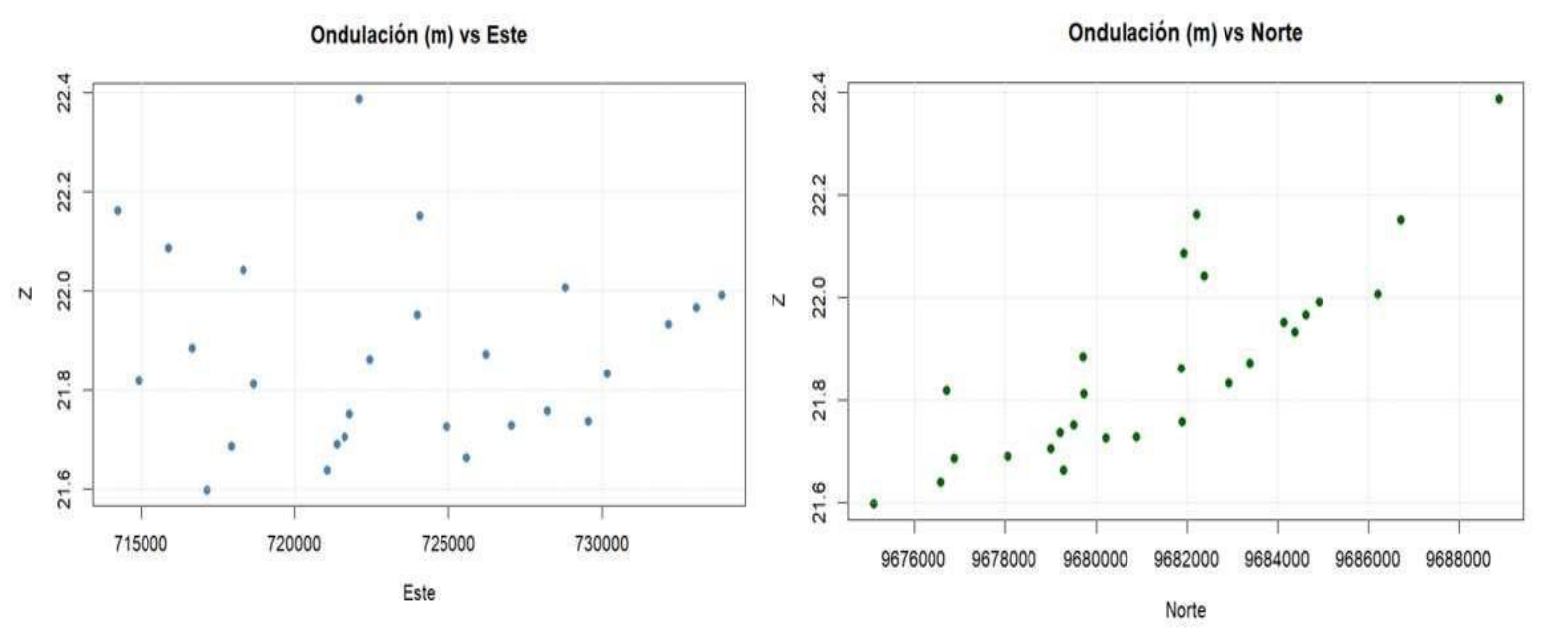


Fig.9 Gráfico de dispersión Este – Ondulación y Norte- Ondulación

Análisis Estructural

Para construir el variograma experimental, se utilizó la función `variogram()` en el entorno R. Esta herramienta analiza la distribución espacial de los datos para definir automáticamente los intervalos de distancia (*lags*) mediante tres componentes claves los cuales son el Cutoff, Width y Dist.

```
library(gstat)

coordinates(datos) <- ~ x + y

# Variograma experimental
vg_exp <- variogram(z ~ 1, datos)

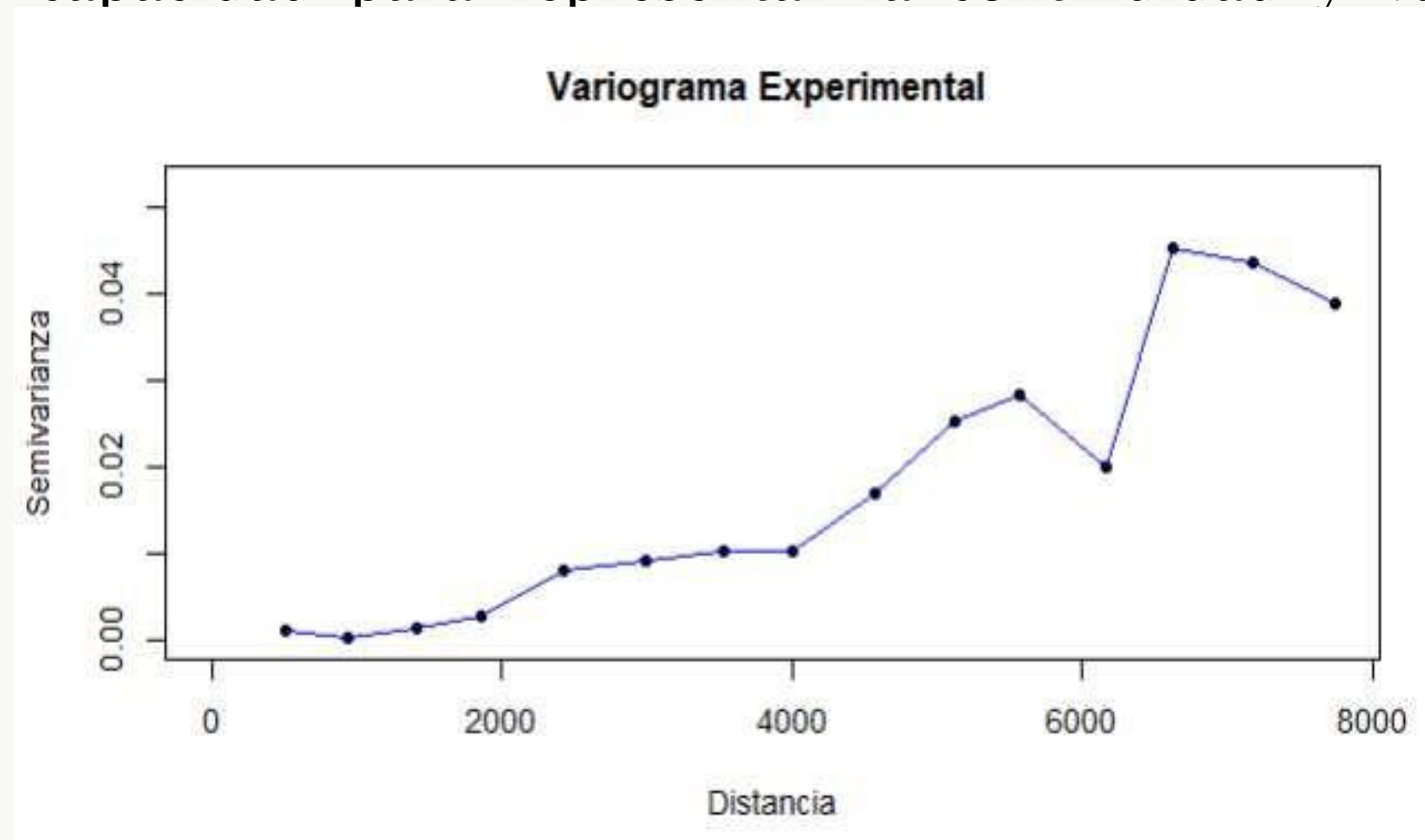
# Parámetros del variograma experimental
max(vg_exp$dist)      # Cutoff
mean(diff(vg_exp$dist)) # Width
nrow(vg_exp)          # Número de lags
```

Fig. 10 Variograma experimental de la ondulación geoidal

Análisis Estructural

El semivariograma experimental obtenido se presenta en la Figura 21, a partir del cual se identifican las siguientes características principales:

- a) No presenta efecto pepita en el variograma experimental.
- b) El valor de la meseta(sill) es aproximadamente 0.04 m.
- c) El rango o alcance es aproximadamente de 7000 m.
- d) Posibles modelos teóricos: Circular, Exponencial, Esférico y Gaussiano. Se seleccionaron estos cuatro modelos por su capacidad para representar la continuidad y variabilidad espacial de la ondulación geoidal.



Fig,11 Variograma experimental para KO

Análisis Estructural

Ajuste del Modelo

El ajuste del modelo teórico se realizó mediante las funciones `vgm` y `fit.variogram` del paquete `gstat`. Se comparó el variograma experimental frente a los cuatro modelos teóricos elegidos: Circular, Esférico, Exponencial y Gaussiano.

```
# Definición de modelos teóricos
vg_circular <- vgm(model = "Cir")
vg_esferico <- vgm(model = "Sph")
vg_exponencial <- vgm(model = "Exp")
vg_gaussiano <- vgm(model = "Gau")

# Ajuste automático de los modelos
fit_circular <- fit.variogram(vg_exp, vg_circular)
fit_esferico <- fit.variogram(vg_exp, vg_esferico)
fit_exponencial <- fit.variogram(vg_exp, vg_exponencial)
fit_gaussiano <- fit.variogram(vg_exp, vg_gaussiano)
```

Fig. 12 Ajuste del modelo teórico de variograma

Validación Cruzada

Para verificar la fiabilidad de la estructura geoestadística, se aplicó el método de VC. Utilizando la función `krige.cv()`, donde se especificó los parámetros de vecindad móvil y el semivariograma ajustado, estableciendo parámetros para asegurar la precisión local: se limitó el radio de influencia a 5300 m y la presencia de un mínimo de 4 y un máximo de 8 vecinos.

```
# 1. Configuración del modelo y restricciones de búsqueda
cv <- krige.cv(
  z ~ 1, # Tendencia constante (Kriging Ordinario)
  datos,
  model = vg_fit, # Modelo teórico ajustado (Esférico/Gaussiano)
  nmin = 4, # Límite inferior de vecinos
  nmax = 8, # Límite superior de vecinos
  maxdist = 5300 # Radio de búsqueda (metros)
)
```

Fig.13 Validación cruzada Kriging

Análisis Estructural

Tras evaluar los cuatro modelos teóricos (Figura 22), se determinó que el modelo Gaussiano proporcionó el mejor ajuste estadístico al presentar el menor RMSE (Figura 23). La modelización resultante arrojó una estructura caracterizada por:

- a) No presenta efecto pepita
- b) La meseta(sill) que se obtuvo es aproximadamente 0.03 m
- c) El rango obtenido es 11947.71 m

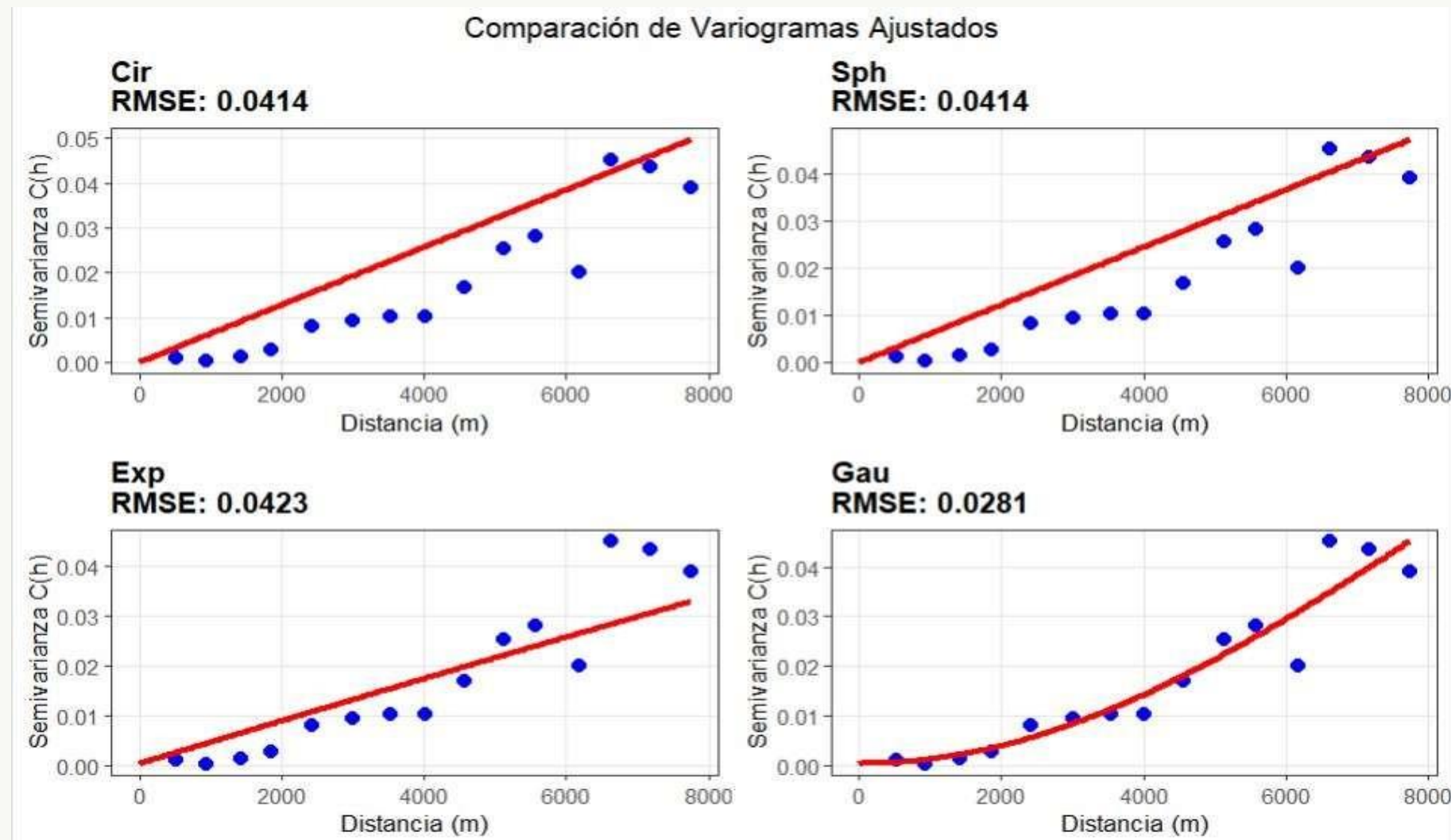


Fig.14 Modelos teóricos analizados

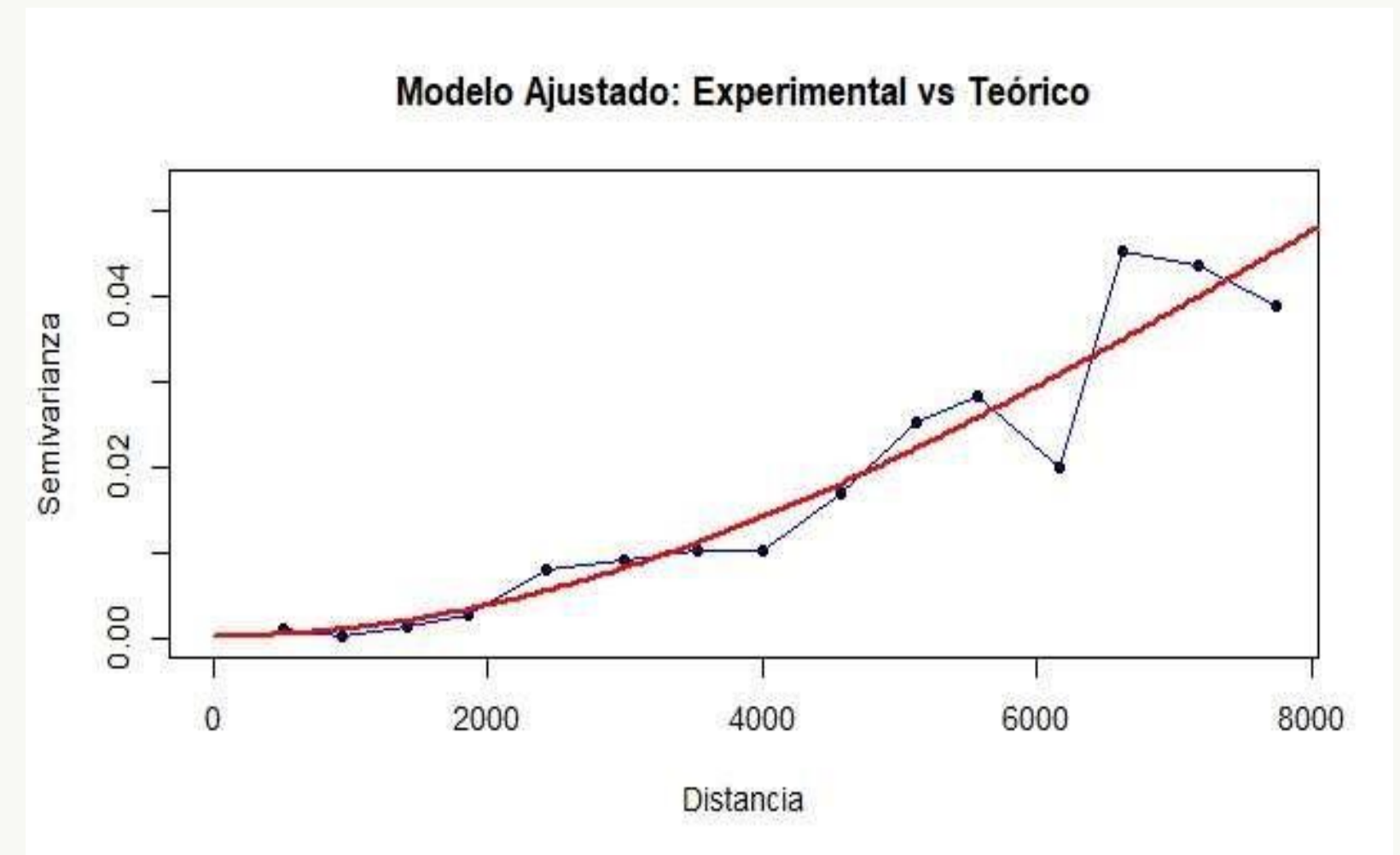


Fig.15 Modelo ajustado Gaussiano

Validación Cruzada

No	ESTE UTM	NORTE UTM	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN ESTIMACIÓN (m)	ERROR MODELO (m)
1	728220.943	9681894.581	21.758	21.781	-0.0225
2	725590.135	9679281.485	21.664	21.688	-0.0239
3	727045.491	9680901.780	21.730	21.733	-0.0030
4	732177.525	9684374.199	21.934	21.942	-0.0081
5	726215.439	9683392.313	21.872	21.857	0.0144
6	724048.850	9686690.106	22.151	22.150	0.0005
7	723990.585	9684128.497	21.952	21.976	-0.0240
8	724945.098	9680217.797	21.726	21.728	-0.0020
9	722455.973	9681876.715	21.862	21.866	-0.0040
10	718312.244	9682372.265	22.042	22.011	0.0304
11	715892.274	9681936.450	22.087	22.088	-0.0008
12	718671.930	9679729.319	21.813	21.833	-0.0198
13	717916.422	9676877.358	21.687	21.690	-0.0029
14	721033.130	9676591.772	21.639	21.627	0.0119
15	721616.970	9679019.427	21.707	21.735	-0.0277
16	714905.911	9676711.122	21.819	21.755	0.0633
17	716669.971	9679711.717	21.885	21.907	-0.0217
18	714220.799	9682216.685	22.162	22.150	0.0117
19	730168.810	9682919.767	21.833	21.833	-0.0002
20	728805.160	9686200.841	22.005	22.053	-0.0481
21	722107.118	9688867.102	22.387	22.387	0.0000
22	729542.295	9679212.072	21.737	21.662	0.0747
23	721778.466	9679512.857	21.753	21.739	0.0145

Los errores de la validación cruzada, del modelo teórico seleccionado (Gaussiano) nos dio el RMSE de **0.028 m.** y un Error Medio de **0.011 m.**, que confirman la precisión del ajuste.

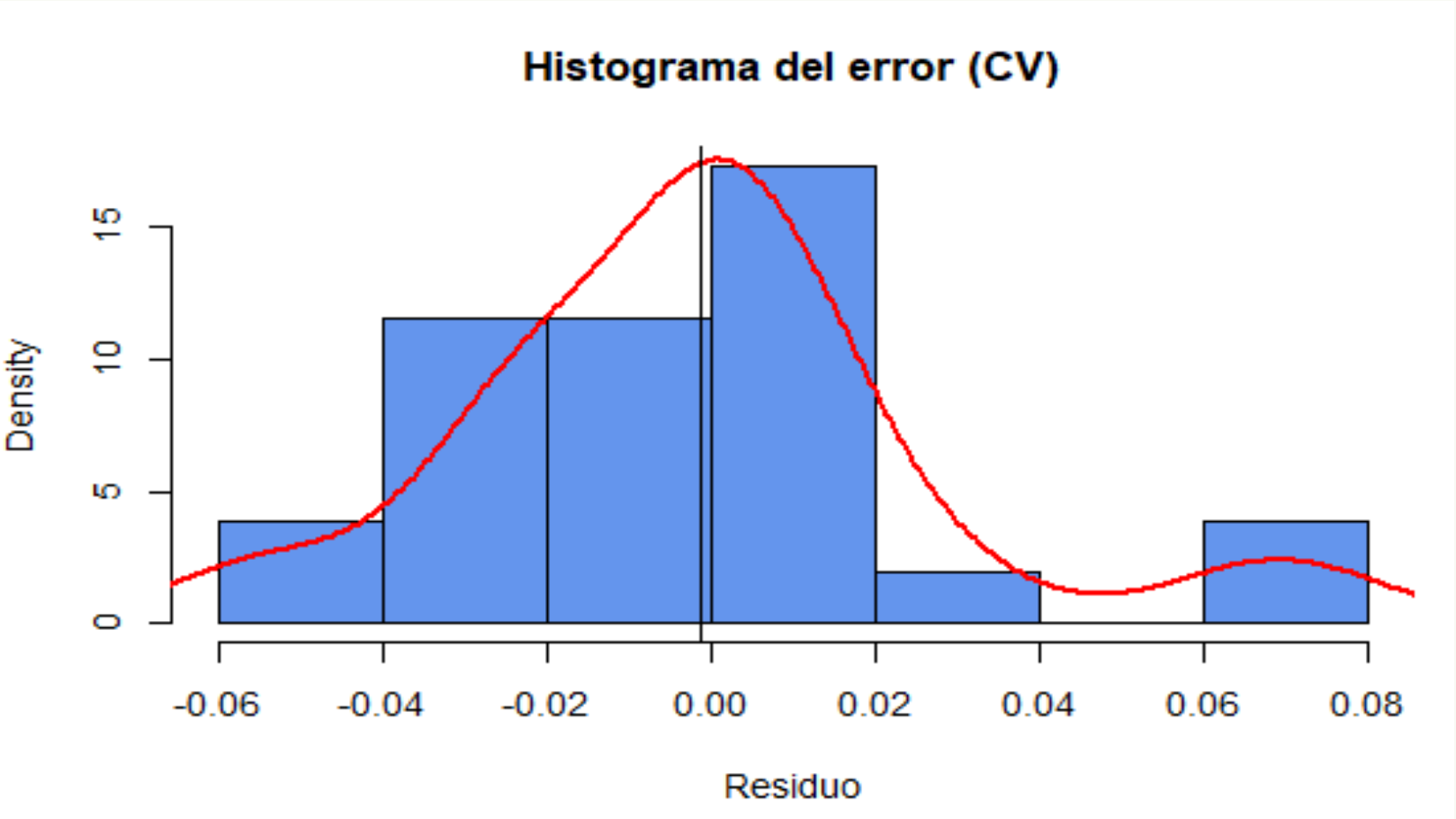
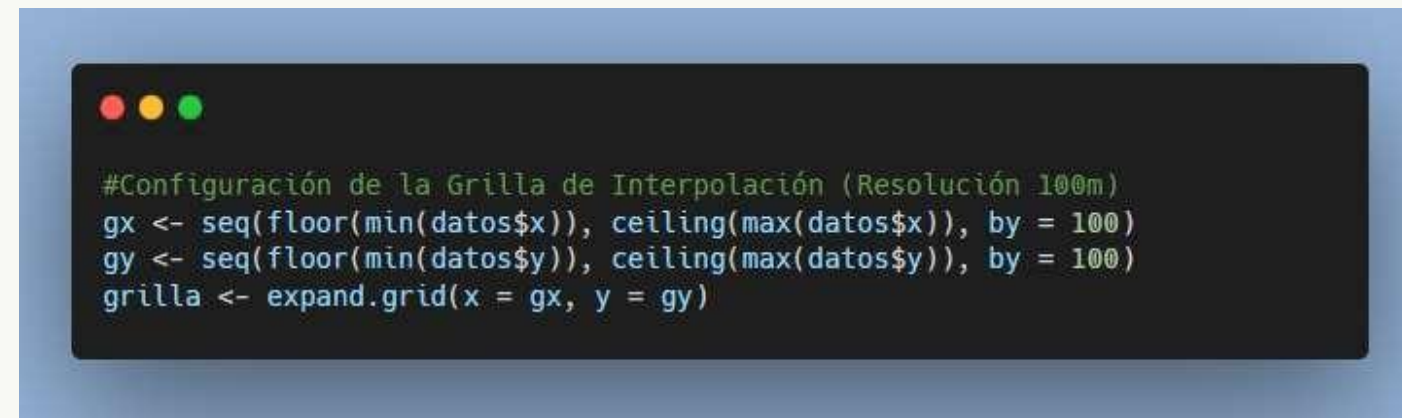


Fig.16 Histograma de frecuencia de los errores de validación cruzada KO

Predicción

Generación Grilla

Se determinó una resolución espacial de píxeles de 100 x 100 metros, basándose el tamaño en la densidad promedio de puntos de control de la red geodésica. Esta grilla fue georreferenciada en el sistema de coordenadas UTM WGS84 Zona 17 Sur, el cual conforma la matriz principal en la que los algoritmos estimaron los valores de ondulación en cada celda.

A screenshot of an R console window with a dark background and light green text. The code defines a 100m resolution grid for interpolation. It uses 'seq()' to generate sequences of x and y coordinates based on the minimum and maximum values of the data, and 'expand.grid()' to create the final grid matrix.

```
#Configuración de la Grilla de Interpolación (Resolución 100m)
gx <- seq(floor(min(datos$x)), ceiling(max(datos$x)), by = 100)
gy <- seq(floor(min(datos$y)), ceiling(max(datos$y)), by = 100)
grilla <- expand.grid(x = gx, y = gy)
```

Fig. 17 Generación de la resolución de la grilla

Predicción

Se ejecutó los algoritmos de estimación final sobre la grilla que previamente fue definida, generando dos productos: la matriz de predicciones y la matriz de incertidumbre, donde se representa la desviación estándar del error de predicción. Para Kriging el proceso de predicción se utilizó la función `expand.grid()(sp)` en R, que crea una tabla con todas las combinaciones de las coordenadas Este y Norte cada 100 metros; y, con la función `gridded(grd)` de la librería (sp) en R, convierte esa tabla en una estructura de pixel o malla con el cual permite visualizar el mapa de la zona de estudio.

Generación del Modelo

Al definir los parámetros estructurales para la predicción - estimación, se llevó a cabo la generación de las superficies para los tres modelos (KO, MMC, MCS), sobre la grilla definida, los resultados de la predicción fueron exportados desde R-Studio en formato de archivo plano (.csv)

En QGIS, se ejecutó la rasterización de los datos puntuales para generar la superficie continua final en formato GeoTIFF (.tif), facilitando así su visualización y análisis.

El modelo de predicción de cada método aplicado se observa en las siguientes figuras , en los cuales se generaron isolíneas con intervalo de 0.05 m., permitiendo identificar claramente la tendencia y la suavidad de la ondulación geoidal a través de la zona de estudio.

Modelo Geoidal Local KO.

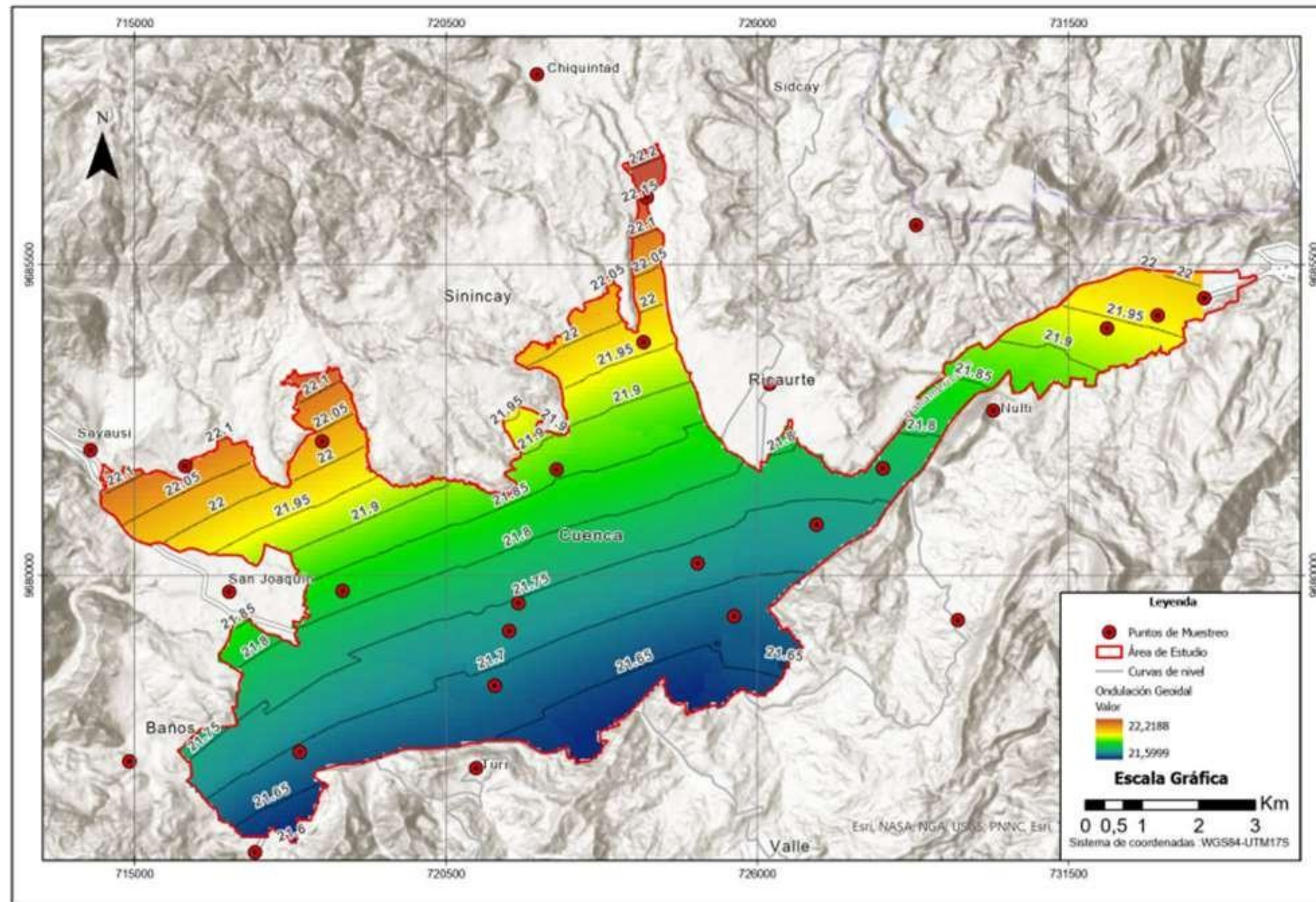


Fig. 18 Modelo Geoidal Local KO.

Nota: Mapa generado en QGIS realizado por los autores.

Mapa de Errores Desviación Estándar KO

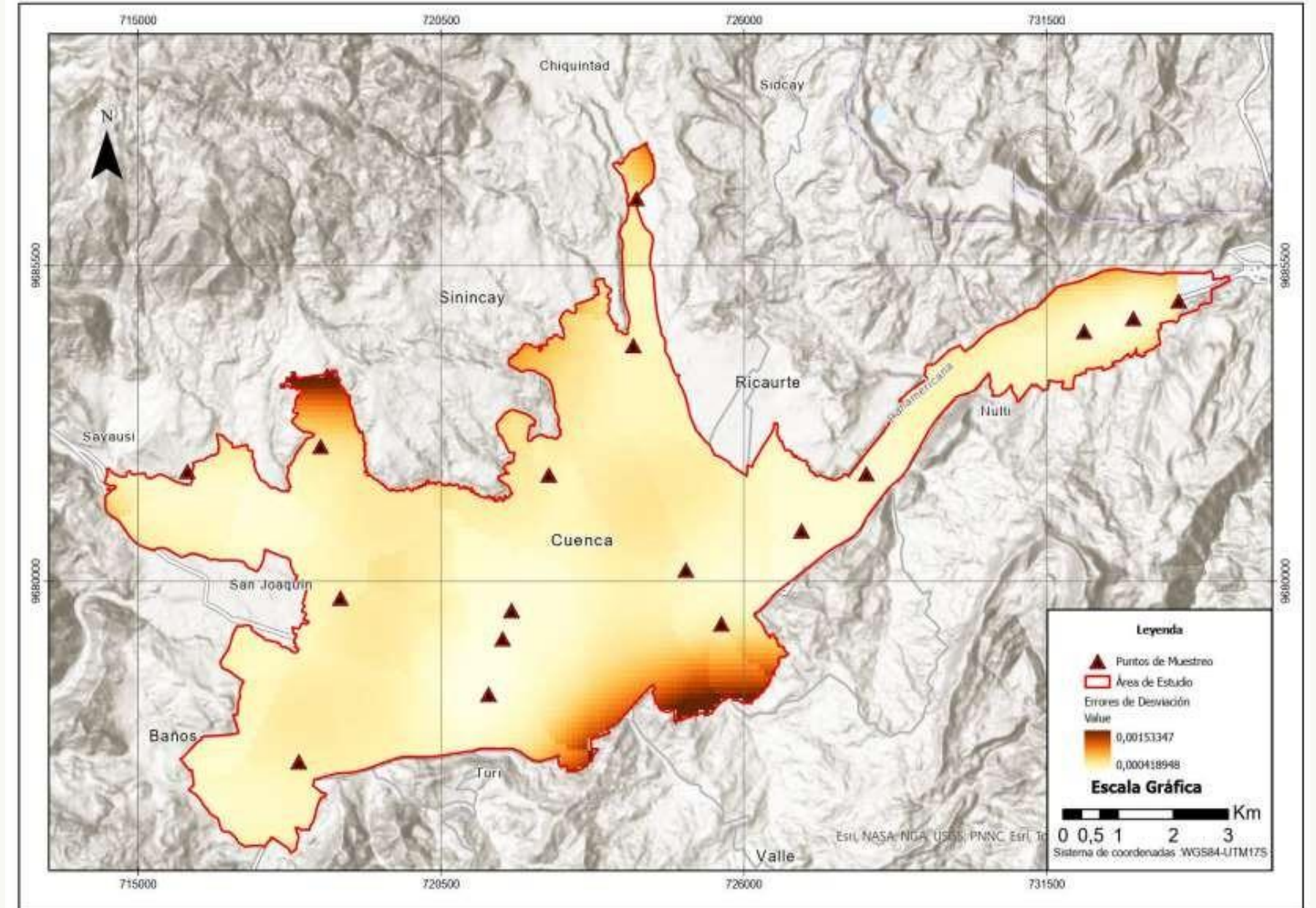


Fig. 19 Mapa de Error Desviación Estándar KO.

Nota: Mapa generado en QGIS realizado por los autores.

Verificación del Modelo

Al generar las superficies en QGIS, se procede a evaluar la precisión de los modelos fuera del entorno de R Studio, donde se utiliza un conjunto de datos que se ha separado anteriormente.

Al procesar con la extracción de los valores para la verificación siguiendo una secuencia operativa:

1. Se ingresaron los modelos en formato ráster (.tif) y una capa vectorial
2. Se utilizó el algoritmo 'Sample Raster Values' en QGIS para exportar los valores predichos.
3. Se exportó la tabla de atributos a una hoja de cálculo para calcular la diferencia entre el valor del modelo y el valor real de las muestras.

Verificación KO

Los valores de la verificación del modelo Kriging se indica en la siguiente tabla. El RMSE que se obtuvo fue de 0.011 m, lo cual corrobora la idoneidad del modelo.

No	ESTE UTM (m)	NORTE UTM (m)	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN VERIFICACIÓN (m)	ERROR (m)
1	725490.138	9679204.738	21.664	21.671	-0.007
2	727127.425	9681021.688	21.736	21.736	0.000
3	732293.268	9684436.786	21.940	21.943	-0.003
4	724049.390	9686562.109	22.135	22.145	-0.010
5	724042.208	9683986.866	21.939	21.956	-0.017
6	724892.114	9680336.110	21.729	21.733	-0.004
7	722515.481	9681921.978	21.860	21.860	0.000
8	718386.952	9682303.445	22.030	22.026	0.004
9	718592.164	9679613.774	21.811	21.815	-0.004
10	717981.874	9676825.251	21.687	21.684	0.003
11	721577.962	9678932.812	21.718	21.719	-0.001
12	721860.326	9679487.784	21.777	21.744	0.033

En la validación del modelo se muestra que la mayor parte de los errores de las predicciones se encuentran entre el intervalo [-0.01 m.; 0.01]

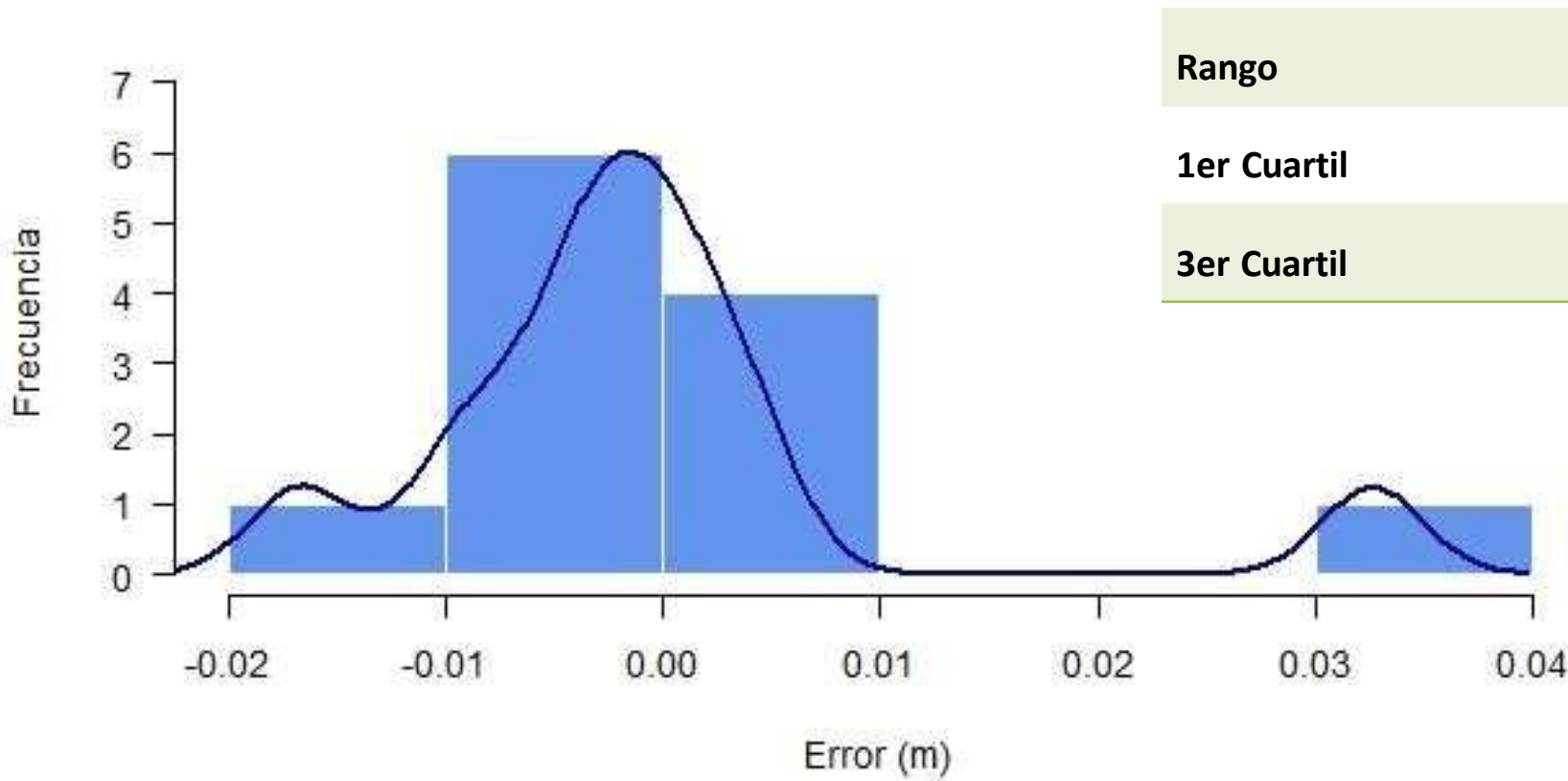


Fig.20 Histograma verificación modelo KO

Estadístico	Resultado (m)
N	12
Media	-0.0004
Mediana	-0.0019
Desviación Estándar	0.0119
Minimo	-0.0166
Máximo	0.0326
Rango	0.0493
1er Cuartil	-0.0049
3er Cuartil	0.0009

Mínimos Cuadrados Colocación

Análisis Exploratorio de Datos

Se utilizó el mismo algoritmo de KO para el EDA de los MCC. Para el método de MCC, se confirmó que los datos en la fase anterior son adecuados para trabajar con matrices de covarianza y señales.

Análisis Estructural

Para construir el covariograma experimental, se utilizó un algoritmo de cálculo manual en el entorno R en donde se analiza la variabilidad de las distancias entre pares de puntos para definir los intervalos (lags) mediante tres componentes los cuales son el Cutoff, Lag y Bins.

```
# CALCULO MANUAL COVARIOGRAMA
# Número de observaciones
n <- nrow(datos)
# Matriz de Distancias
dist_obj <- dist(cbind(datos$x, datos$y))
pares_dist <- as.numeric(dist_obj)
prod_res <- as.numeric(as.dist(tcrossprod(datos$res))) # C = V * V transpuesta
#Definición del cutoff
cutoff <- max(pares_dist) / 2
dists_validas <- pares_dist[pares_dist <= cutoff]
#Regla de Scott para el ancho del lag
lag_size <- 3.5 * sd(dists_validas) * (length(dists_validas)^(-1/3))
#Definición de intervalos (lags)
bins <- seq(0, cutoff, by=lag_size)
```

Fig. 21 Covariograma experimental

MCC

Análisis Exploratorio de Datos

Para el método de MCC se realizó el mismo análisis que KO garantizando la validez de la función covarianza y las distribuciones son completamente adaptables a esta sección

Análisis Estructural

Para el Covariograma experimental calculado, se puede observar en la Figura 22 y los resultados que obtuvieron fueron los siguientes:

- a) Señal: $C_s(0)=0.0029$
- b) Alcance es aproximadamente de 5300 m.

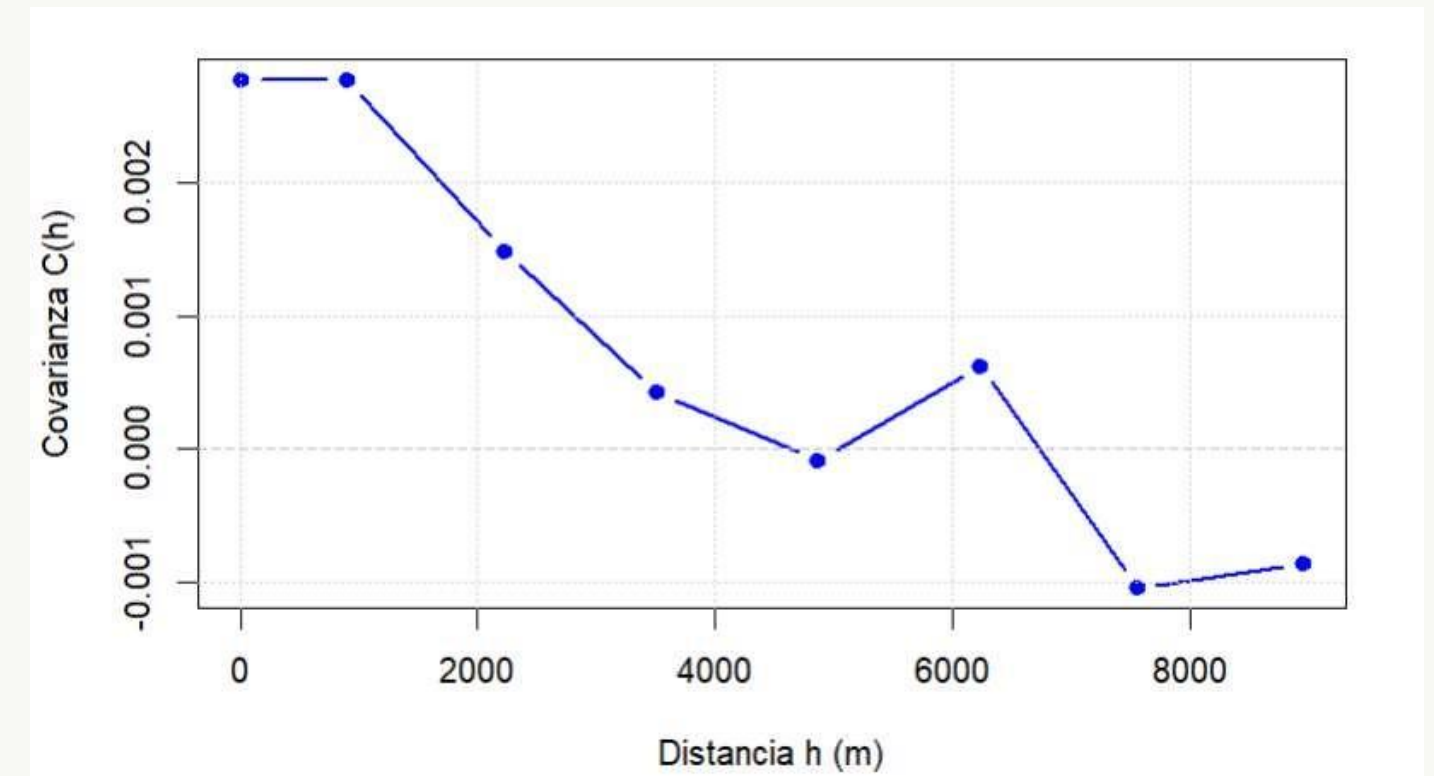


Fig.22 Covariograma Experimental MCC

Análisis Estructural

Ajuste del Modelo

El ajuste del modelo teórico se realizó mediante un algoritmo de optimización no lineal con restricciones que aseguran una covarianza no negativa y de rango finito, utilizando la función optim. Al igual que el procedimiento de KO, la selección de la estructura se estableció en los resultados eligiendo el menor RMSE.

El modelo funcional (Ax) captura la tendencia determinista global de tus datos espaciales. Construye una matriz de diseño (A) utilizando coordenadas centralizadas para evaluar polinomios bidimensionales de grados 1, 2 y 3.

```
crear_matriz_diseño <- function(x, y, grado, cx = 0, cy = 0) {  
  xc <- x - cx; yc <- y - cy  
  if (grado == 1) return(cbind(1, xc, yc))  
  if (grado == 2) return(cbind(1, xc, yc, xc^2, yc^2, xc*yc))  
  if (grado == 3) return(cbind(1, xc, yc, xc^2, yc^2, xc*yc, xc^3, yc^3, (xc^2)*yc, xc*(yc^2)))  
  stop("Grado no soportado.")  
}
```

Fig., 23 Modelo funcional para MCC.

```
# =====  
# AJUSTE DE LOS 4 MODELOS  
# =====  
# 1. Calcula el error (SSE) entre la covarianza empírica calculada de los datos (y)  
sse_func <- function(par, fun_mod, x, y) {  
  sum((y - fun_mod(x, par[1], par[2]))^2)  
}  
  
# 2. Funciones de Covarianza Cs(h)  
modelos_lista <- list("Gaussiano"=mod_gaussiano, "Exponencial"=mod_exponencial, "Esferico"=mod_esferico,  
  "Circular"=mod_circular)  
  
#Pone a competir a los 4 modelos para ver cuál ajusta mejor  
for(nom in names(modelos_lista)){  
  f <- modelos_lista[[nom]]; best_local <- list(SSE=Inf)  
  
  intentos_a <- c(cutoff*0.1, cutoff*0.3, cutoff*0.6)  
  
  for(sa in intentos_a){  
    try({  
      # 3. Optimización del Modelo Estocástico  
      opt <- optim(par=c(C0_emp, sa),  
        fn=sse_func,  
        fun_mod=f,  
        x=d_exp, # Distancias empíricas (h)  
        y=c_exp, # Covarianzas empíricas  
        method="L-BFGS-B",  
  
        # 4. Restricciones Físicas (Condición de Positividad)  
        lower=c(1e-5, 1e-5),  
        upper=c(C0_emp*2, cutoff*3))  
  
      if(opt$value < best_local$SSE) best_local <- list(SSE=opt$value, Params=opt$par)  
    })  
  }  
}
```

Fig., 24 Ajuste de modelo de covarianza teórico mediante MCC.

Análisis Estructural

Tras evaluar los cuatro modelos teóricos, se determinó que el modelo Gaussiano proporcionó el mejor ajuste estadístico al presentar el menor RMSE. La modelización resultante arrojó una estructura caracterizada por:

- a) Polinomio de grado 1
- b) Señal: $C_s(0)=0.0029$
- c) Alcance es aproximadamente de 5300 m.

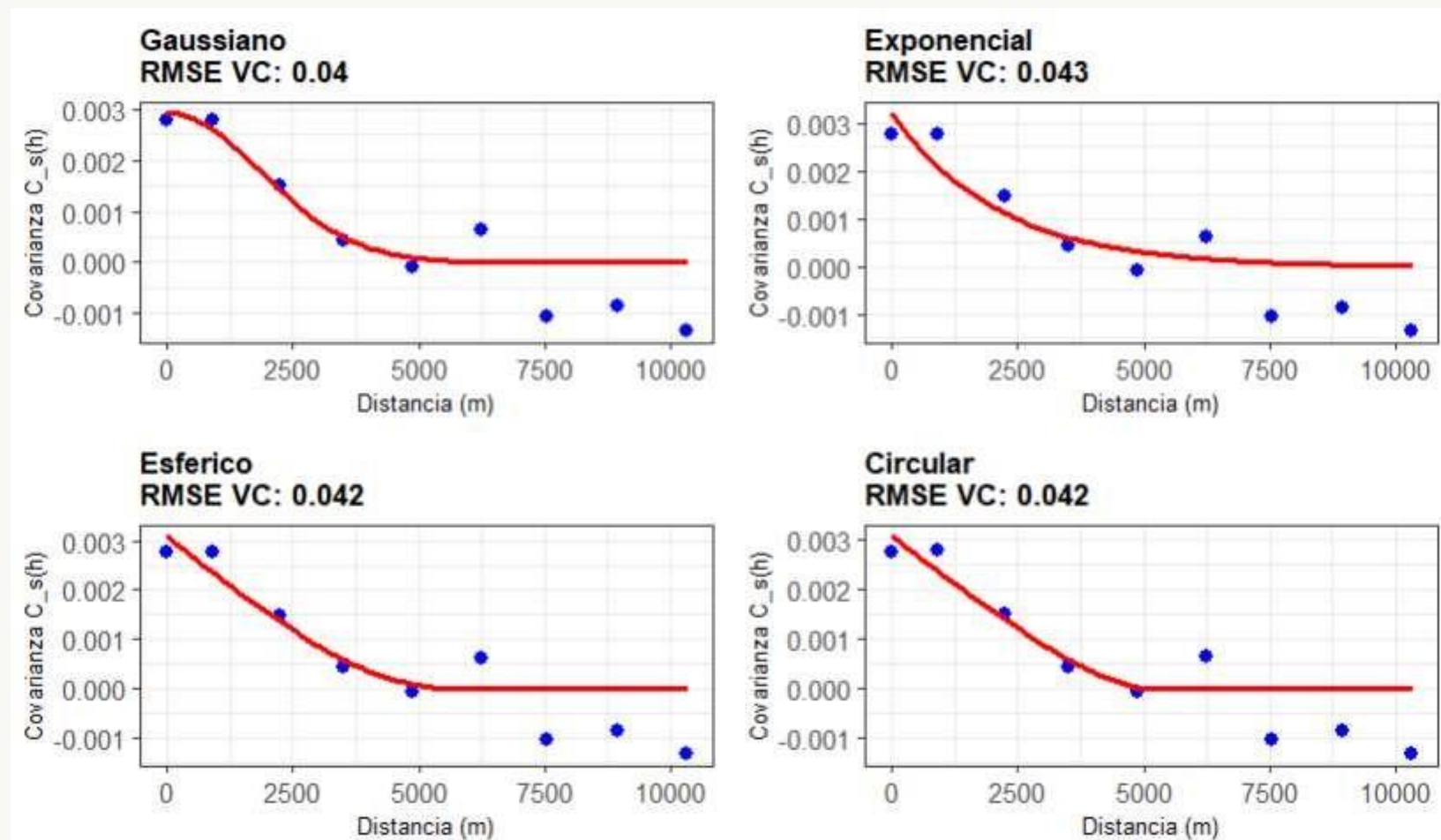


Fig.25 Modelos teóricos analizados en MCC

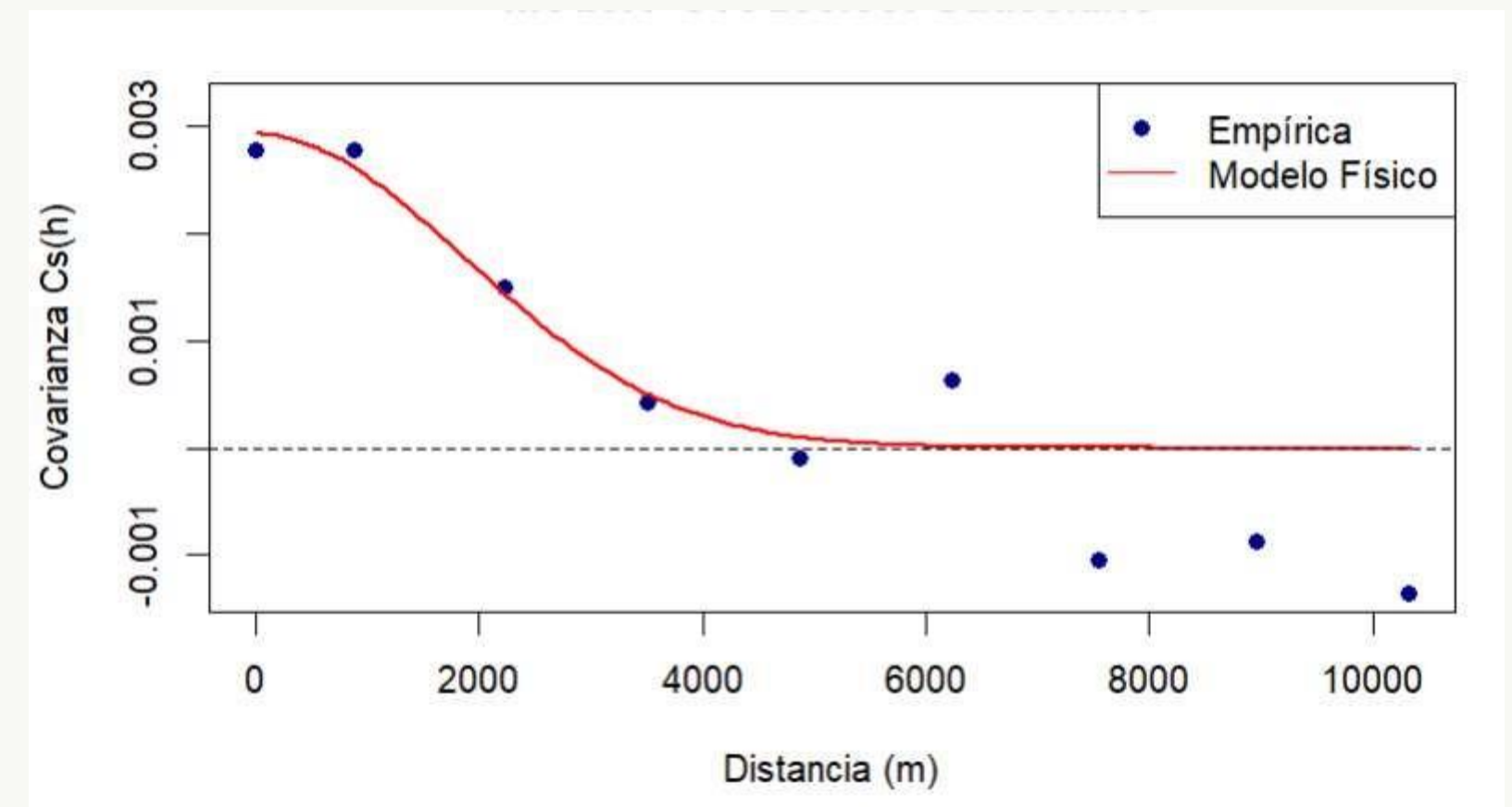
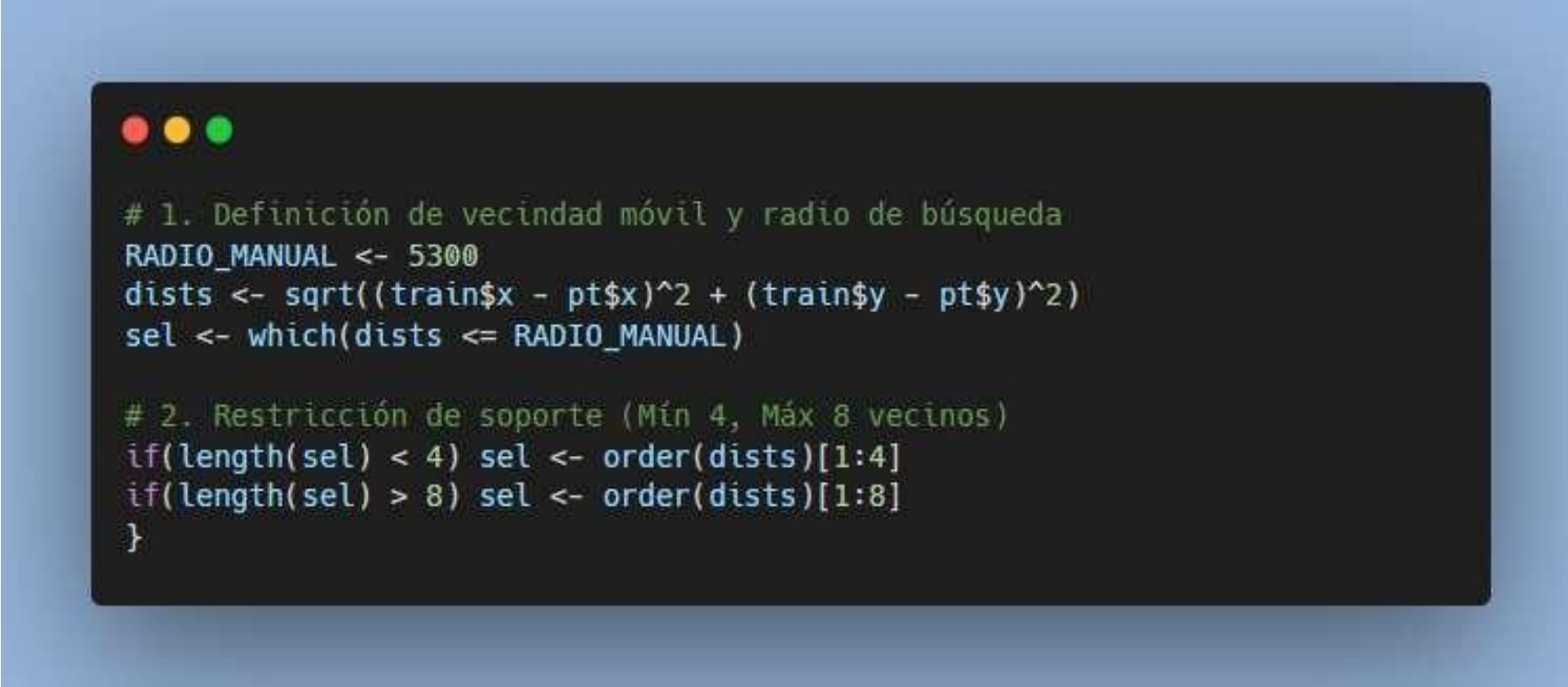


Fig.26 Modelo ajustado Gaussiano en MCC

Análisis Estructural

Validación Cruzada

Se aplicó el método de validación cruzada. Al igual que en el procedimiento de KO, se implementaron los mismos parámetros de vecindad móvil además de la covarianza ajustada.

A screenshot of a code editor window with a dark background and light-colored text. The code is written in R and defines a function for cross-validation using the MCC method. It includes comments in Spanish explaining the steps: defining a mobile neighborhood and search radius, and restricting support to a minimum of 4 and a maximum of 8 neighbors. The code uses variables like 'train\$x', 'train\$y', 'pt\$x', and 'pt\$y' to calculate distances and select neighbors.

```
# 1. Definición de vecindad móvil y radio de búsqueda
RADIO_MANUAL <- 5300
dists <- sqrt((train$x - pt$x)^2 + (train$y - pt$y)^2)
sel <- which(dists <= RADIO_MANUAL)

# 2. Restricción de soporte (Mín 4, Máx 8 vecinos)
if(length(sel) < 4) sel <- order(dists)[1:4]
if(length(sel) > 8) sel <- order(dists)[1:8]
}
```

Fig. 27 Validación cruzada MCC

Predicción

El proceso predictivo, para este método, fue ejecutado en base a la misma lógica geoestadística que se utilizó en el KO, tomando la misma configuración de la grilla de referencia. Los parámetros optimizados en el análisis estructural constituyeron la base de las predicciones por el método de MMC.

Análisis Estructural

Validación Cruzada

No	ESTE UTM	NORTE UTM	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN ESTIMACIÓN (m)	ERROR MODELO (m)
1	728220.943	9681894.581	21.758	21.7805	0.0225
2	725590.135	9679281.485	21.664	21.6915	0.0275
3	727045.491	9680901.780	21.73	21.7265	-0.0035
4	732177.525	9684374.199	21.934	21.9423	0.0083
5	726215.439	9683392.313	21.872	21.8748	0.0028
6	724048.850	9686690.106	22.151	22.157	0.006
7	723990.585	9684128.497	21.952	21.9736	0.0216
8	724945.098	9680217.797	21.726	21.7272	0.0012
9	722455.973	9681876.715	21.862	21.8874	0.0254
10	718312.244	9682372.265	22.042	22.0121	-0.0299
11	715892.274	9681936.450	22.087	22.0869	-1.00E-04
12	718671.930	9679729.319	21.813	21.8368	0.0238
13	717916.422	9676877.358	21.687	21.6939	0.0069
14	721033.130	9676591.772	21.639	21.6408	0.0018
15	721616.970	9679019.427	21.707	21.7312	0.0242
16	714905.911	9676711.122	21.819	21.7703	-0.0487
17	716669.971	9679711.717	21.885	21.9031	0.0181
18	714220.799	9682216.685	22.162	22.1671	0.0051
19	730168.810	9682919.767	21.833	21.8352	0.0022
20	728805.160	9686200.841	22.005	22.0931	0.0881
21	722107.118	9688867.102	22.387	22.3427	-0.0443
22	729542.295	9679212.072	21.737	21.6172	-0.1198
23	721778.466	9679512.857	21.753	21.7245	-0.0285

Los errores de la validación cruzada, del modelo teórico seleccionado (Gaussiano) nos dio el RMSE de **0.036 m.** y un Error Medio de **0.024 m.**, que confirman la precisión del ajuste.

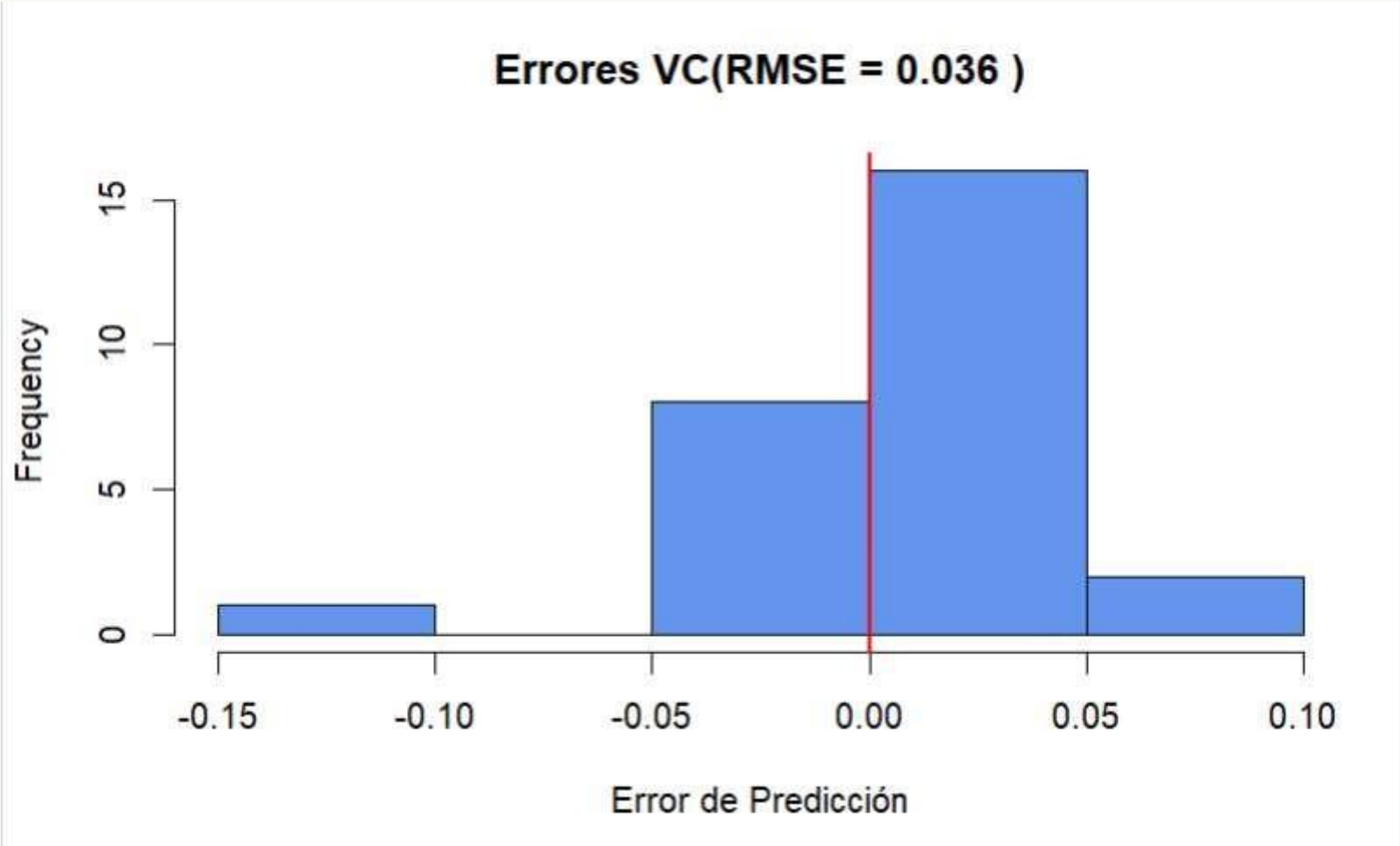


Fig.28 Histograma de frecuencia de los errores de validación cruzada MCC

Modelo Geoidal Local MCC.

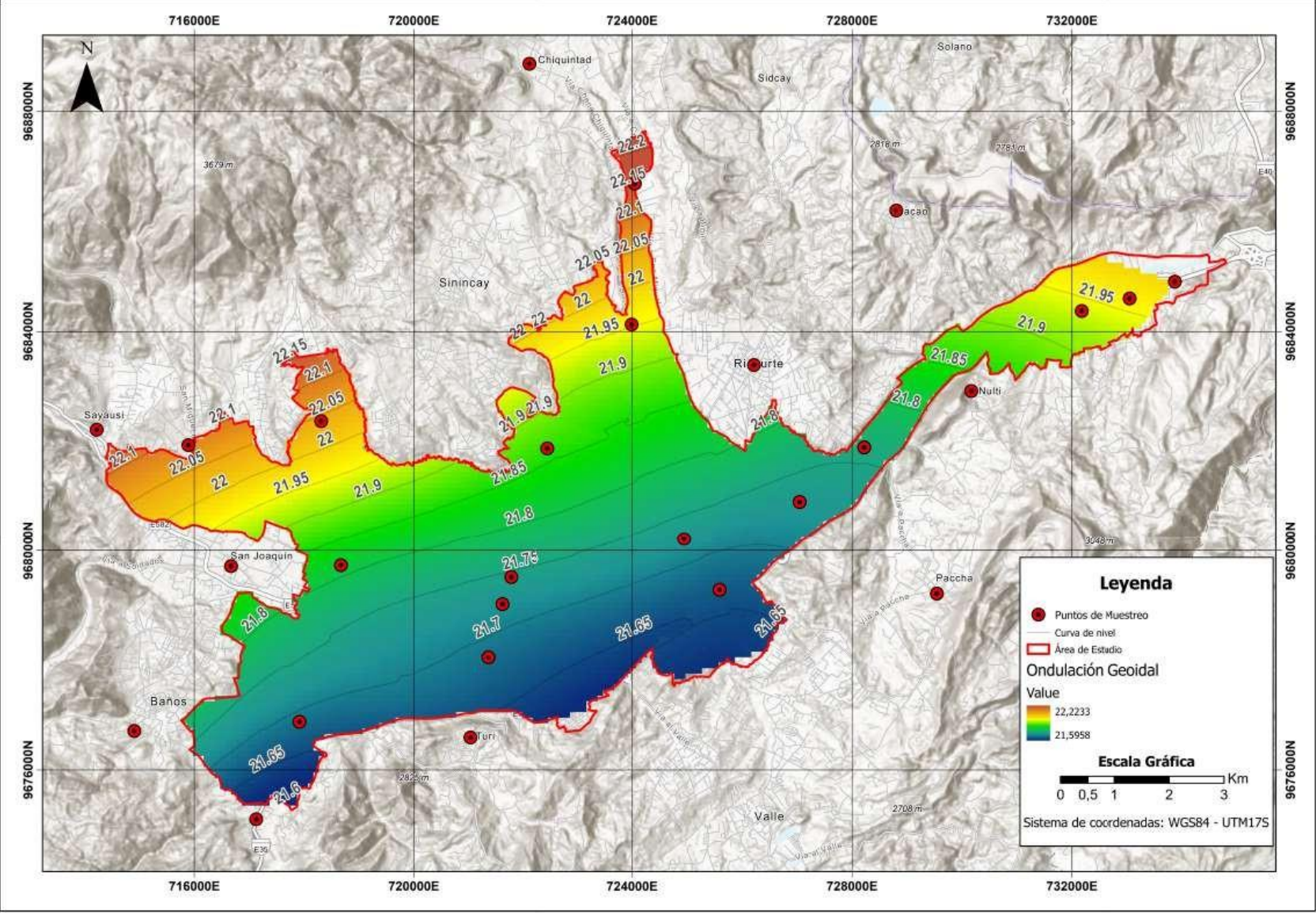


Fig. 29 Modelo Geoidal Local MCC.

Nota: Mapa generado en QGIS realizado por los autores.

Mapa de Errores Desviación Estándar MCC

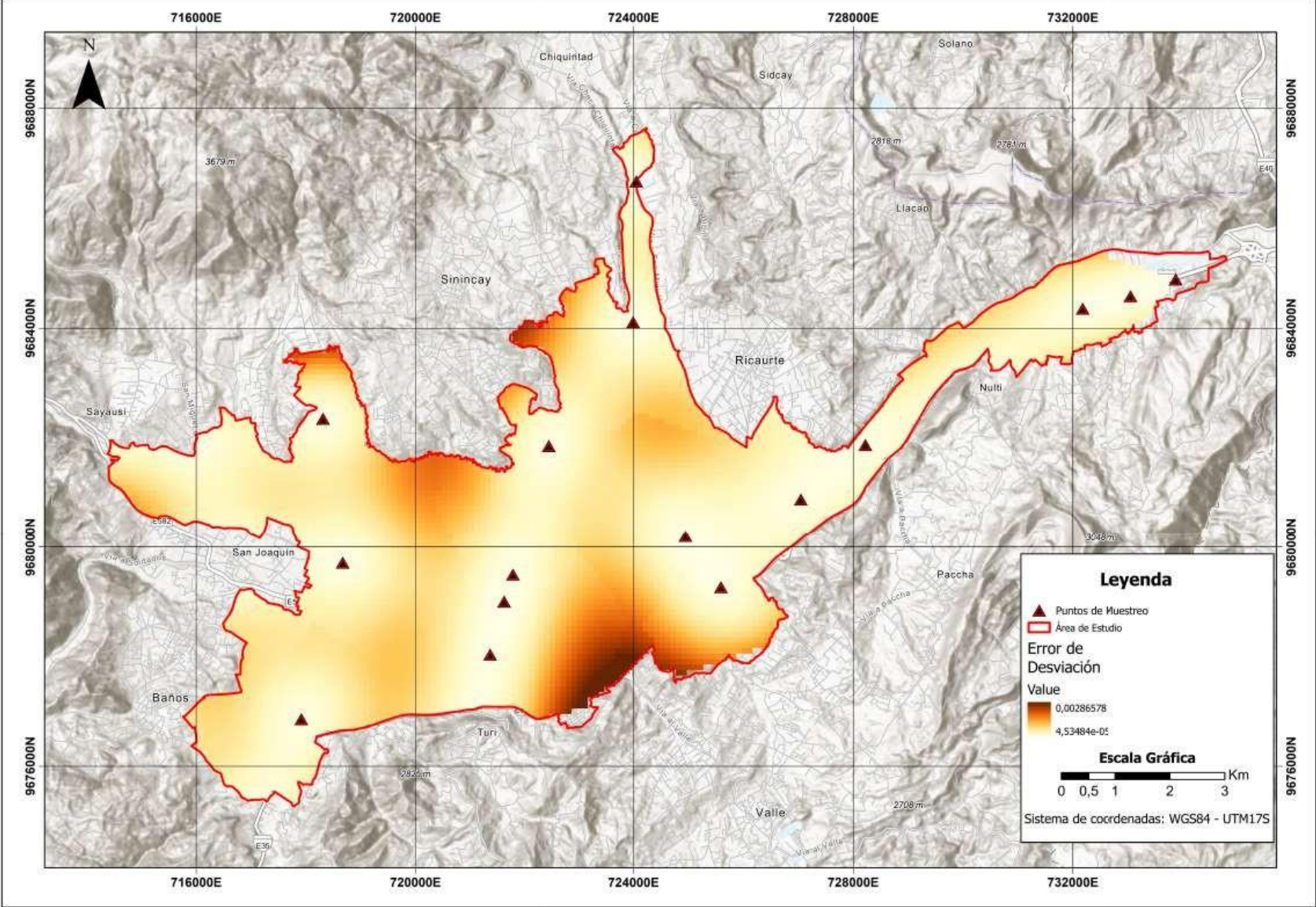


Fig. 30 Mapa de Error Desviación Estándar MCC.

Nota: Mapa generado en QGIS realizado por los autores.

Verificación de los Modelos

Verificación MCC

Los valores de la verificación del modelo MCC se indica en la siguiente tabla. El RMSE que se obtuvo fue de 0.011 m, lo cual corrobora la idoneidad del modelo.

No	ESTE UTM (m)	NORTE UTM (m)	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN VERIFICACIÓN (m)	ERROR (m)
1	725490.138	9679204.738	21.664	21.663	0.002
2	727127.425	9681021.688	21.736	21.733	0.003
3	732293.268	9684436.786	21.940	21.940	0.000
4	724049.390	9686562.109	22.135	22.145	-0.009
5	724042.208	9683986.866	21.939	21.944	-0.005
6	724892.114	9680336.110	21.729	21.731	-0.002
7	722515.481	9681921.978	21.860	21.863	-0.003
8	718386.952	9682303.445	22.030	22.032	-0.003
9	718592.164	9679613.774	21.811	21.807	0.004
10	717981.874	9676825.251	21.687	21.680	0.006

En la validación del modelo se muestra que la mayor parte de los errores de las predicciones se encuentran entre el intervalo [-0.01 m.; 0.01].

Estadístico	Resultado (m)
N	12
Media	0.0025
Mediana	0.001
Desviación Estándar	0.011
Mínimo	-0.09
Máximo	0.035
Rango	0.044
1er Cuartil	-0.003
3er Cuartil	-0.00325

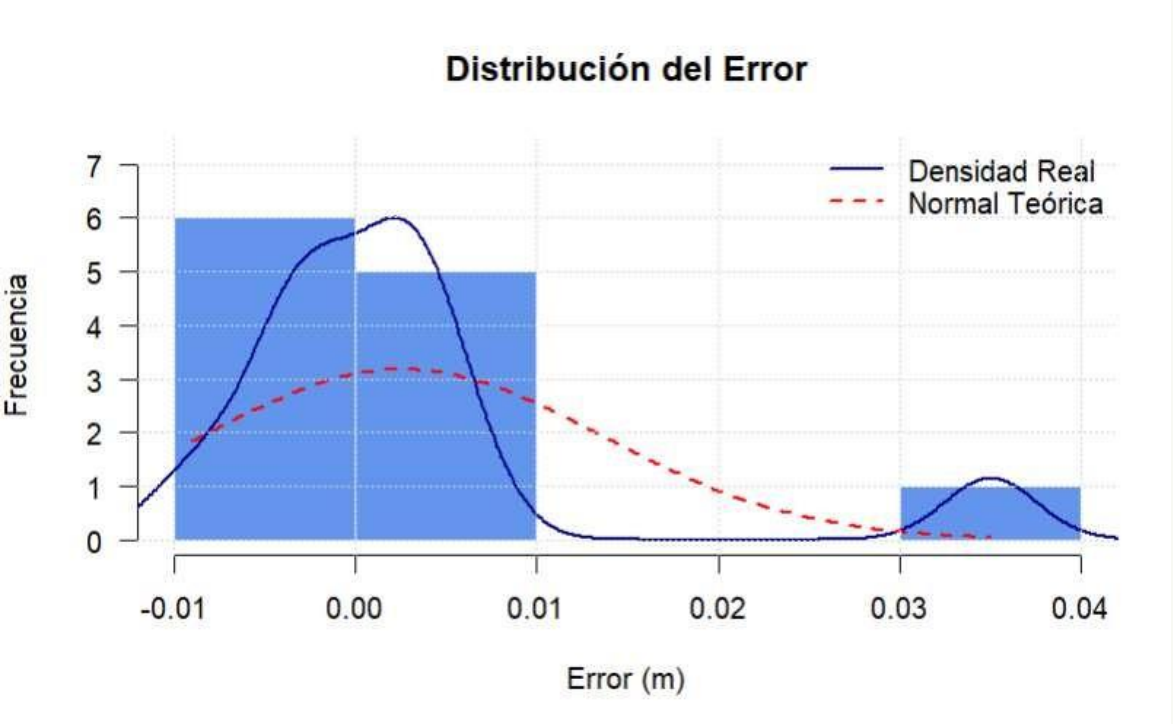


Fig.31 Histograma verificación modelo MCC

Mínima Curvatura

Análisis Exploratorio de Datos

Esta etapa se realizó bajo los mismos criterios aplicados en los métodos de KO y MCC. Los resultados del AED garantizaron la consistencia matemática de los datos de entrada para el método MCS.

Análisis Estructural

1. Primero se modeló la tendencia ajustando un plano mediante una regresión lineal. Esa tendencia representa la componente regional.
2. Se extrajo la componente local (Observado - Tendencia), comprobando que la media tienda a cero para descartar sesgos.
3. Generación de gráficos de dispersión espacial (plot()) con curvas de suavizado (lowess()) para confirmar visualmente que se eliminó la deriva regional.

```
# Modelo de Tendencia Polinómica (Trend Surface Analysis)
modelo_trend <- lm(z ~ x + y)
z_trend      <- predict(modelo_trend)
residuos     <- z - z_trend

# Resumen de Residuos (Componente Local)
tabla_residuos <- data.frame(
  Media_Res = sprintf("%.5f", mean(residuos)),
  Desv_Res  = sprintf("%.5f", sd(residuos)),
  Min_Res   = sprintf("%.5f", min(residuos)),
  Max_Res   = sprintf("%.5f", max(residuos))
)
```

Fig.32 Separación de tendencia y residuo.

Descomposición de Tendencia y Residuos

El proceso computacional en R descompuso en dos partes: la Tendencia y los Residuos. El análisis estadístico de los residuos confirmó la correcta extracción de la tendencia dando un resultado de:

- Media de 0.000 m, lo que confirma que el estimador está centrado en cero
- Desviación Estándar 0.055 m
- Rango que tuvo variaciones entre 0.073 m y 0.110 m.

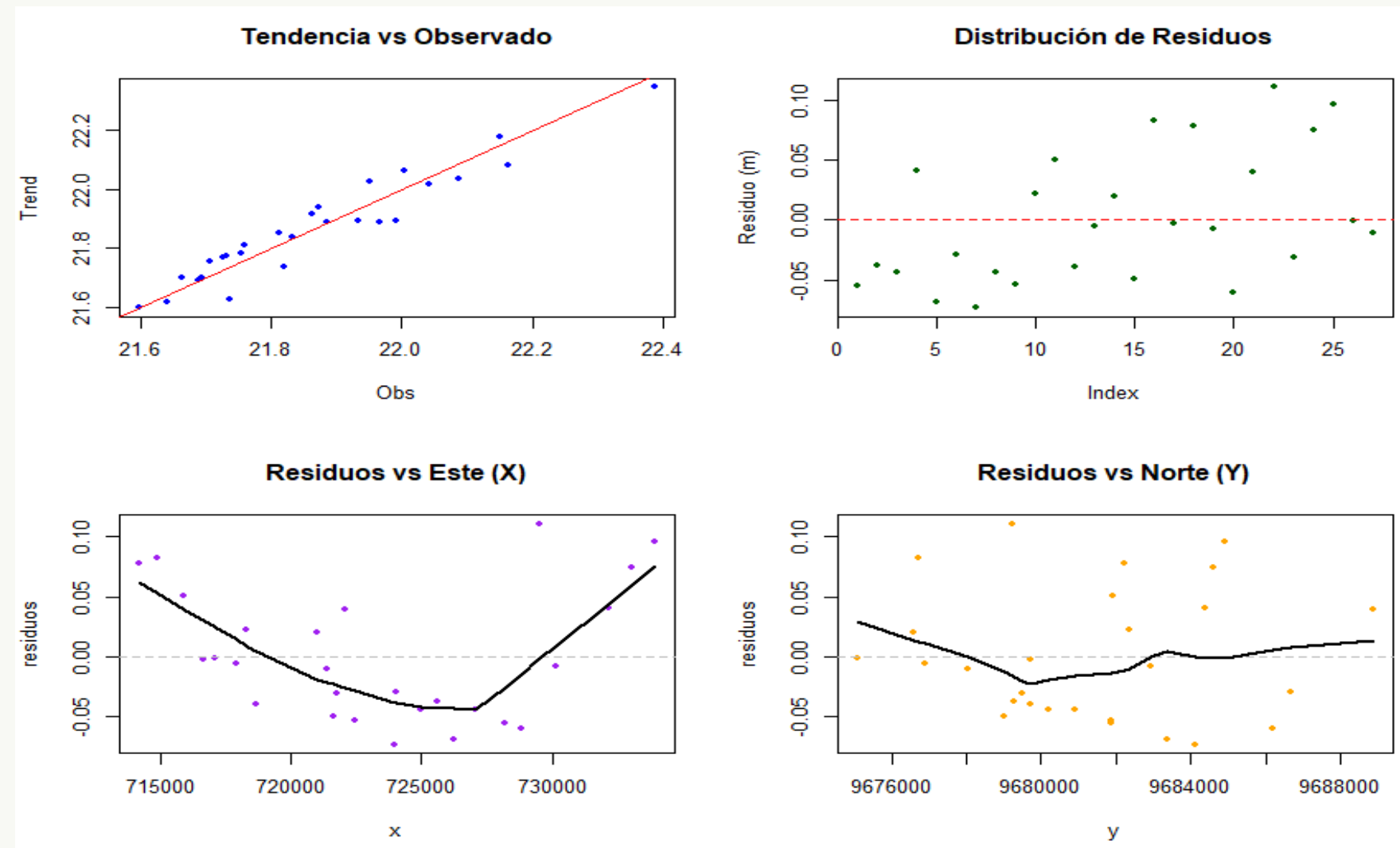


Fig.33 Análisis de la tendencia global y comportamiento espacial de los residuales

Análisis Estructural

Optimización del Modelo

- Se configuró el modelo de interpolación utilizando Thin Plate Spline mediante la función `Tps()`.
- Este método, basado en el principio de curvatura mínima, genera una superficie suave pero ajustada a los datos.
- El aspecto clave es el parámetro de suavizado λ . En lugar de fijarlo manualmente, permití que el modelo lo optimice automáticamente mediante Validación Cruzada Generalizada (GCV)

Validación Cruzada

- Luego evalué su capacidad predictiva mediante validación cruzada. Con ello se obtuvo el RMSE, el error medio, además de analizar la distribución de los errores con un histograma y un QQ-Plot para verificar consistencia y ausencia de sesgo.

```
|  
#Cálculo automático del factor de suavizado (Lambda)  
tps_global <- Tps(cbind(pt_train$x, pt_train$y), pt_train$z)  
  
# 3. Predicción sobre el punto de control  
pred_val <- predict(tps_global, x=cbind(pt_val$x, pt_val$y))  
vc_errores[i] <- pt_val$z - pred_val  
}
```

Fig.34 Validación cruzada MCS

Solución Matricial y Condiciones de Borde

Para controlar el ruido instrumental sin perder la geometría de los puntos de control, se optimizó el parámetro de suavizado mediante Validación Cruzada Generalizada (GCV). Obteniendo un Lambda (λ) de **0.000264**.

Validación Cruzada

No	ESTE UTM	NORTE UTM	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN ESTIMACIÓN (m)	ERROR MODELO (m)
1	728220.943	9681894.581	21.758	21.782	-0.0236
2	725590.135	9679281.485	21.664	21.696	-0.0322
3	727045.491	9680901.780	21.730	21.734	-0.0040
4	732177.525	9684374.199	21.934	21.938	-0.0038
5	726215.439	9683392.313	21.872	21.852	0.0196
6	724048.850	9686690.106	22.151	22.144	0.0069
7	723990.585	9684128.497	21.952	21.969	-0.0174
8	724945.098	9680217.797	21.726	21.713	0.0126
9	722455.973	9681876.715	21.862	21.863	-0.0011
10	718312.244	9682372.265	22.042	22.019	0.0228
11	715892.274	9681936.450	22.087	22.083	0.0036
12	718671.930	9679729.319	21.813	21.831	-0.0182
13	717916.422	9676877.358	21.687	21.702	-0.0149
14	721033.130	9676591.772	21.639	21.611	0.0281
15	721616.970	9679019.427	21.707	21.731	-0.0237
16	714905.911	9676711.122	21.819	21.736	0.0829
17	716669.971	9679711.717	21.885	21.898	-0.0129
18	714220.799	9682216.685	22.162	22.166	-0.0040
19	730168.810	9682919.767	21.833	21.832	0.0009
20	728805.160	9686200.841	22.005	22.048	-0.0433
21	722107.118	9688867.102	22.387	22.354	0.0327
22	729542.295	9679212.072	21.737	21.625	0.1116
23	721778.466	9679512.857	21.753	21.727	0.0257
24	733072.057	9684601.682	21.966	21.960	0.0058

Los errores de la validación cruzada, se detallan en la Tabla y en el histograma. El RMSE obtenido fue de **0.0351m.** y un Error Medio de **0.0038 m.**, que confirman la precisión del ajuste.

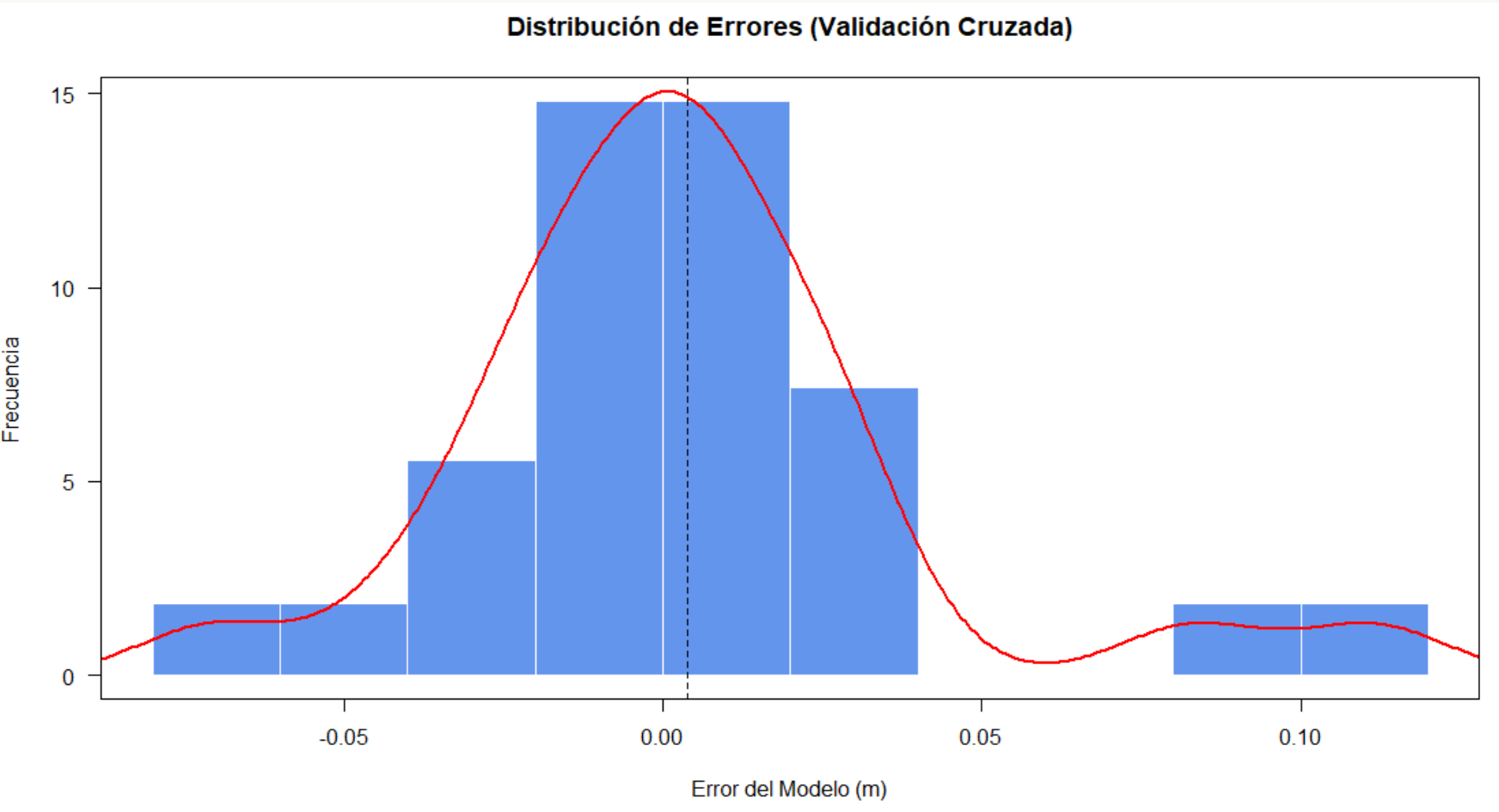


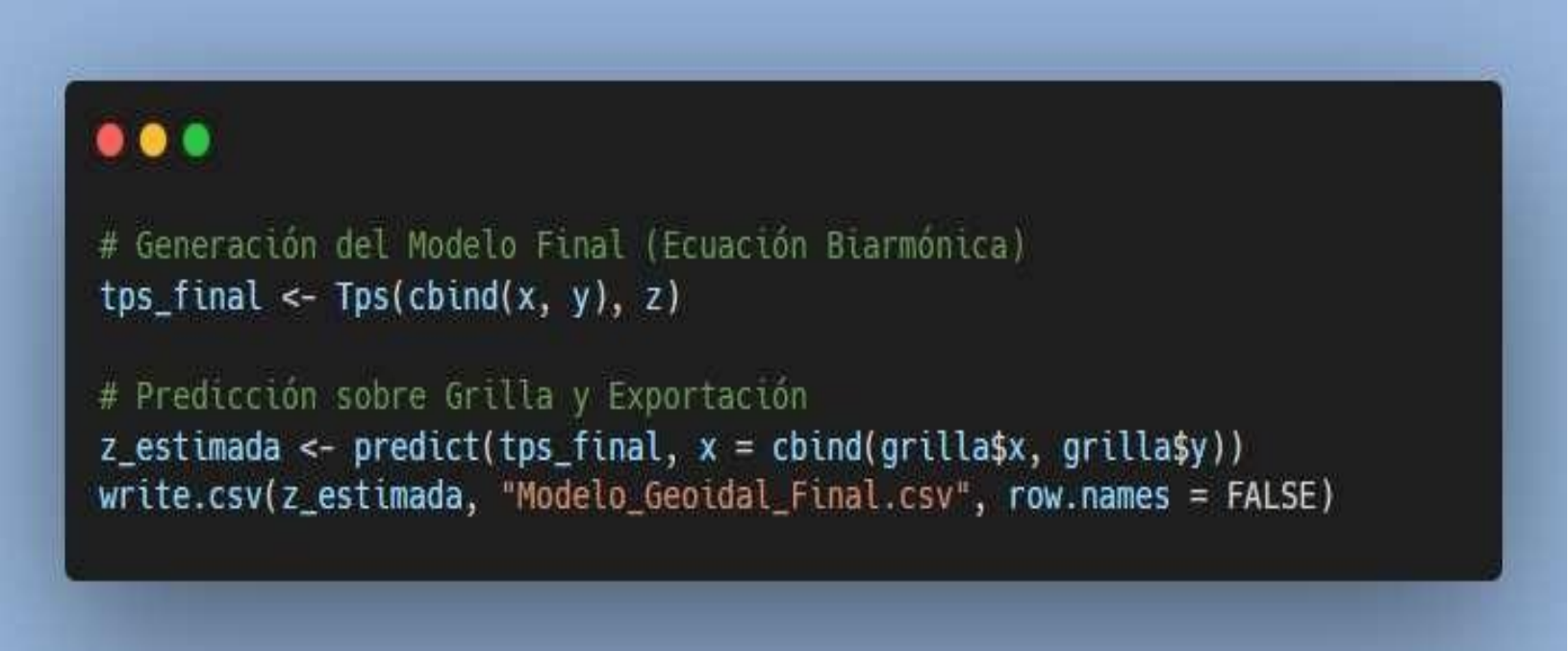
Fig.35 Histograma de frecuencia de los errores de validación cruzada MCS

Estimación

Una vez evaluado el desempeño del método mediante validación cruzada, se procedió a la estimación final de la ondulación geoidal utilizando la totalidad de los puntos de control disponibles.

El modelo definitivo se ajustó mediante TPS global, manteniendo la estimación automática del parámetro de suavizado λ a través del criterio GCV.

La interpolación se realizó sobre una grilla regular definida en el área de estudio, lo que permitió generar una superficie continua de ondulación geoidal para el área urbana de Cuenca.

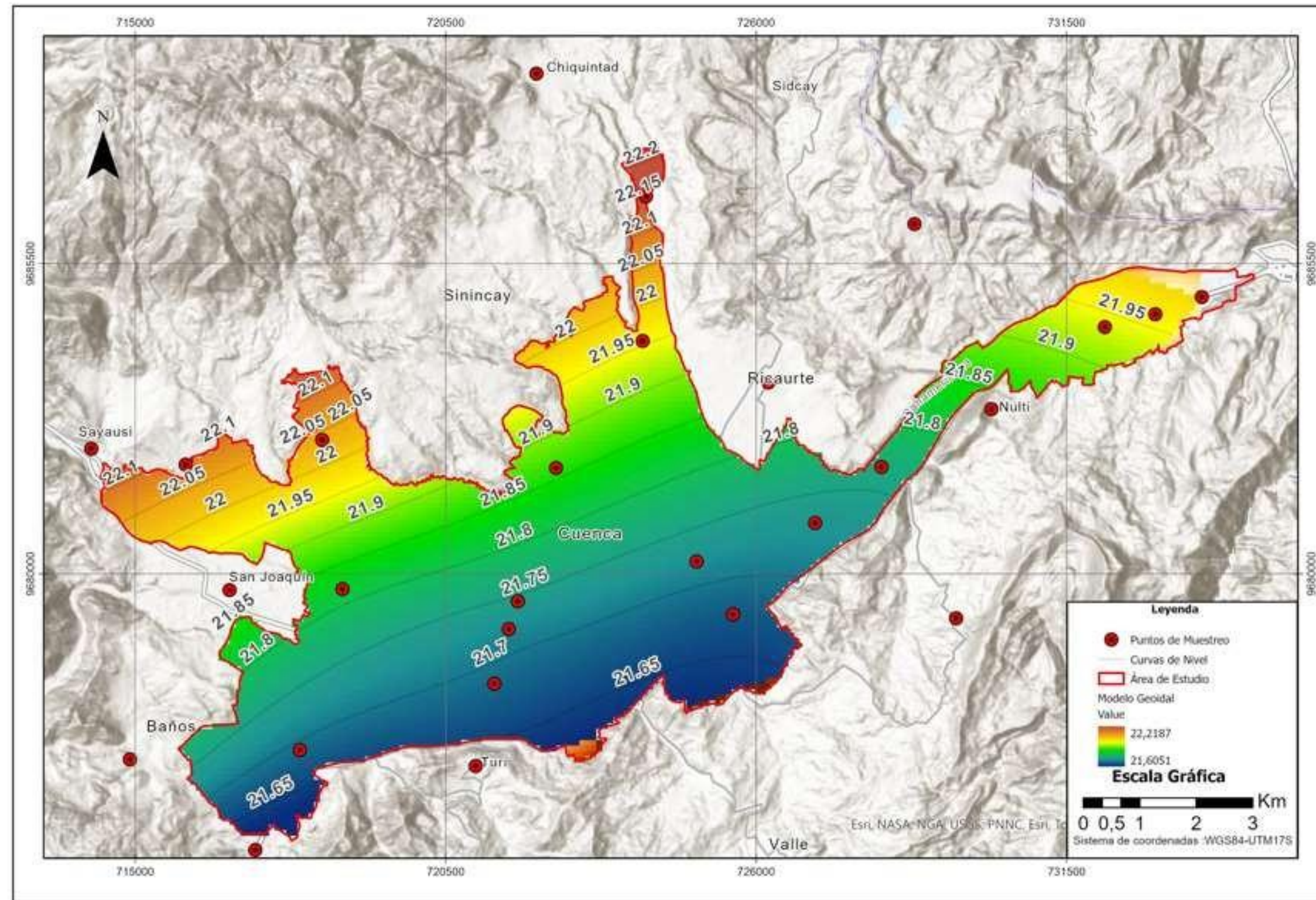
A screenshot of a terminal window with a dark background and light green text. The window has three colored window control buttons (red, yellow, green) in the top-left corner. The code is as follows:

```
# Generación del Modelo Final (Ecuación Biarmónica)
tps_final <- Tps(cbind(x, y), z)

# Predicción sobre Grilla y Exportación
z_estimada <- predict(tps_final, x = cbind(grilla$x, grilla$y))
write.csv(z_estimada, "Modelo_Geoidal_Final.csv", row.names = FALSE)
```

Fig.36 Generación del modelo final

Modelo Geoidal Local MCS.



Nota: Mapa generado en QGIS realizado por los autores.

Verificación de los Modelos

Verificación MCS

Los valores de la verificación del modelo MCS se indica en la siguiente tabla. El RMSE que se obtuvo fue de 0.011 m, lo cual corrobora la idoneidad del modelo.

No	ESTE UTM (m)	NORTE UTM (m)	ONDULACIÓN OBSERVACIÓN (m)	ONDULACIÓN VERIFICACIÓN (m)	ERROR (m)
1	725490.138	9679204.738	21.664	21.669	-0.005
2	727127.425	9681021.688	21.736	21.734	0.002
3	732293.268	9684436.786	21.940	21.939	0.001
4	724049.390	9686562.109	22.135	22.144	-0.009
5	724042.208	9683986.866	21.939	21.947	-0.008
6	724892.114	9680336.110	21.729	21.727	0.002
7	722515.481	9681921.978	21.860	21.862	-0.002
8	718386.952	9682303.445	22.030	22.030	0.000
9	718592.164	9679613.774	21.811	21.812	-0.001
10	717981.874	9676825.251	21.687	21.683	0.004

En la validación del modelo se muestra que la mayor parte de los errores de las predicciones se encuentran entre el intervalo [-0.01 m.; 0.01].

Estadístico	Resultado (m)
N	12
Media	-0.0017
Mediana	-0.0030
Desviación Estándar	0.0133
Mínimo	-0.0218
Máximo	0.0332
Rango	0.0551
1er Cuartil	-0.0065
	-0.0001

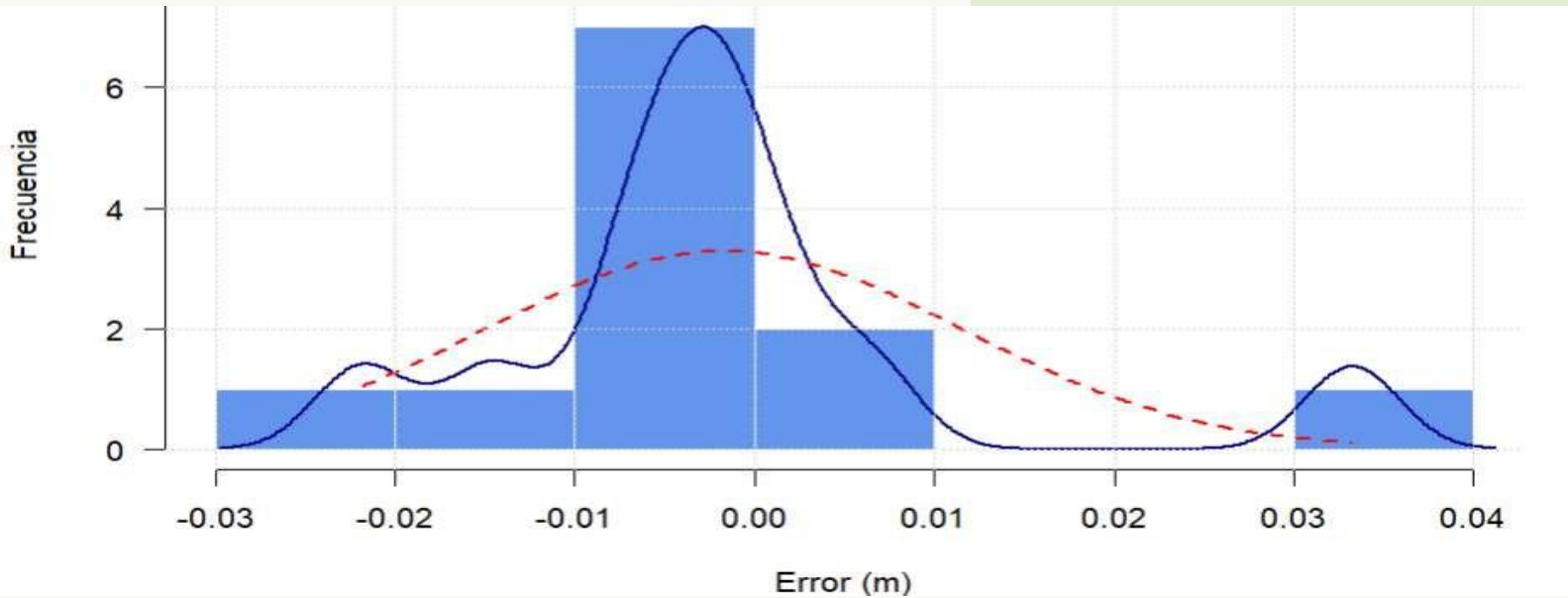


Fig.37 Histograma verificación modelo MCS

Comparación y Elección Mejor Modelo

Para evaluar el desempeño de los modelos de ondulación geoidal, se compararon los RMSE obtenidos de la Validación Cruzada y en la Verificación.

Modelo Generado	Validación Cruzada RMSE (m)	Verificación Modelo RMSE (m)
KO	0.028	0.0114
MCS	0.035	0.0113
MCC	0.036	0.0108

El modelo de KO sobresalió como la técnica de mayor precisión. Logrando los valores de RMSE más bajos tanto en la validación cruzada como en la verificación externa; esta concordancia entre los errores internos y externos confirma la robustez del modelo para representar el modelo geoidal de la zona de estudio.

Conclusiones

- Se desarrolló un modelo de ondulación geoidal local a través de KO, que demostró una mejor capacidad predictiva respecto a los modelos de MMC y MCS. El modelo alcanzó un RMSE de 0.028 m. en la validación cruzada y un RMSE de 0.011 m. en la verificación.
- Se generó un modelo de ondulación geoidal mediante el método de MCC obteniendo resultados similares al obtenido con MCS, alcanzando un RMSE de 0.036 m. en la validación cruzada y un RMSE de 0.010 m. en la verificación.
- Se desarrolló un modelo de ondulación geoidal local a través de MCS, que demostró una buena capacidad predictiva. El modelo alcanzó un RMSE de 0.036 m., en la validación cruzada y un RMSE de 0.011 m. en la verificación.
- A diferencia de los métodos determinísticos, que se limitan a generar una superficie interpolada sin cuantificar el error asociado, los métodos geoestadísticos permiten estimar la incertidumbre de las predicciones. Por esta razón, los mapas de incertidumbre se elaboraron únicamente para KO y MCC.
- Durante la fase de verificación y selección de los modelos, dada la distribución de la muestra y la proximidad entre ciertos vértices, se determinó que el mayor peso para validar los modelos debía recaer en la Validación Cruzada, ya que el RMSE resultante demostró ser el indicador más confiable para medir la capacidad de predicción de los modelos.

Recomendaciones

- Se recomienda, la obtención de una mayor muestra de puntos geodésicos, para la verificación de los modelos, considerando que su distribución espacial no coincida con la ubicación de los puntos utilizados para la generación de los modelos y de esta manera elevar la significancia estadística de los resultados garantizando un mayor rigor en la verificación.
- Se recomienda para futuros estudios la aplicación del método de Cokriging, integrando variables auxiliares que presenten una mayor correlación con los datos locales de ondulación geoidal. Se sugiere explorar otras variables externas, con el fin de optimizar la predicción y compensar la carencia de datos para la técnica de KO.
- Dado la presencia de una tendencia identificada en los datos, se recomienda para futuras investigaciones la aplicación del método de Kriging Universal. Dado que este interpolador estocástico está diseñado para modelar una tendencia estructural y la autocorrelación de los residuales, su uso podría ofrecer una mejor alternativa.

Programa de predicción por coordenadas

Link de acceso : <https://calculadoramodelosgeoidales.netlify.app/>



Predicción Ondulación Geoidal para la Ciudad de Cuenca

Generación de un modelo de ondulación geoidal para la ciudad de Cuenca utilizando técnicas determinísticas y geoestadísticas

Configuración del Análisis

Algoritmo de Interpolación:

Kriging Ordinario

Nota: Programa realizado por los autores.

Selección de Punto de Interpolación

Coordenada Este (X): Ej: 720000

Coordenada Norte (Y): Ej: 9900000

CALCULAR ONDULACIÓN (N)

Procesamiento por Lote (.txt)

Cargue un archivo de texto con columnas de coordenadas **X** e **Y** separadas por espacios.

Seleccionar archivo Sin archivos seleccionados

PROCESAR ARCHIVO Y DESCARGAR

Nota: Programa realizado por los autores.

Índice

1. Introducción

2. Objetivos

3. Hipótesis

4. Conceptos Claves

5. Metodología

6. Área de Estudio

7. Análisis y Selección de Modelo

8. Programación R Studio

1. Kriging Ordinario.
 2. Mínimos Cuadrados Colocación.
 3. Mínima Curvatura.
-

9. Comparación y Elección Mejor Modelo.

10. Conclusiones y Recomendaciones.

Referencias bibliográficas

Artículos de revistas

Libros

Documentos electrónicos

Briggs, I. C. (1974). *Machine contouring using minimum curvature*. Geophysics, 39 (1), 39 – 48.

Heiskanen, W. A., & Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.

Isaaks, E. H., & Srivastavam R. M. (1989). *An Introduction to Applied Geostatistic*. Oxford University Press.

Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Tunbridge Wells: Abacus Press.

Torge, W. (2001). *Geodesy* (3ra ed.). De Gruyter.

Viera, M. A., & González, R. C. (2002). *Geoestadística aplicada*. Ciudad de México: Instituto de Geofísica, UNAM.

MUCHAS
GRACIAS